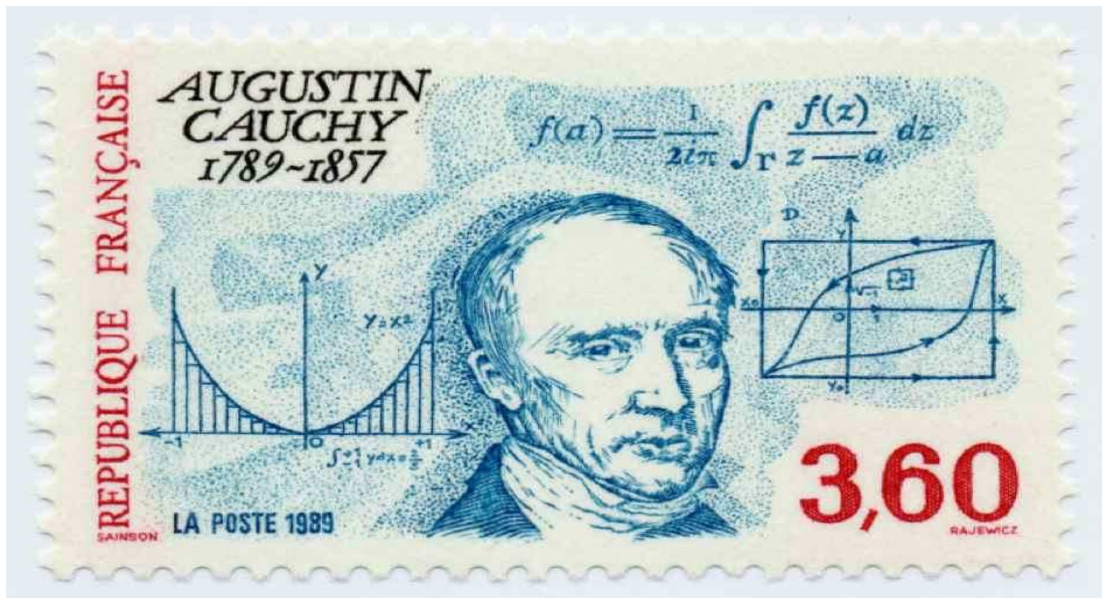




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Το έργο και η ζωή του Cauchy

Σπουδαστές: Δημάκος Χρήστος (ΑΜ 9142)
Βουδούρης Βασίλειος (ΑΜ 9165)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (Μ.Ε.Δ.)
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2023–2024

Ημερομηνία ανάθεσης: **01.12.2022**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **....02.2024**
 Ημερομηνία εξέτασης: **11.03.2024**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Δρ. Αναστασόπουλος Γεώργιος Μηχανολόγος Μηχανικός Επίκουρος Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά	3
Περίληψη	3
1. Τα μαθηματικά την εποχή του Cauchy	12
2. Η καταγωγή του	13
3. Η παιδική του ηλικία	14
4. Cauchy και Laplace	14
5. Cauchy και Lagrange	15
6. Τα μαθητικά του χρόνια.....	15
7. Cauchy και Μέγας Ναπολέον	16
8. Οι εργασίες του	17
9. Μέλος της Ακαδημίας Επιστημών.....	23
10. Η διεθνής αναγνώριση	23
11. Ο γάμος του	24
12. Η μεθοδολογία του.....	24
13. Η παραγωγικότητα του	24
14. Ο Cauchy στην Ελβετία.....	25
15. Ο Cauchy στην Ιταλία.....	25
16. Ο Cauchy στο Παρίσι	26
17. Ορισμός της συνάρτησης σύμφωνα με τον Cauchy	29
18. Ορισμός του ορίου τιμών μίας μεταβλητής.....	30
19. Ορισμός του ορίου συνάρτησης σύμφωνα με τον Cauchy	31
20. Η προέλευση του ορισμού του Cauchy για το όριο.....	31
21. Ορισμός της συνέχειας σύμφωνα με τον Cauchy	33
22. Cauchy και Bolzano	33
23. Η πορεία προς τον νέο ορισμό του ολοκληρώματος από τον Cauchy	35
24. Η καινοτομία του ερευνητικού έργου του Cauchy	38
Βιβλιογραφία	39

Λέξεις κλειδιά

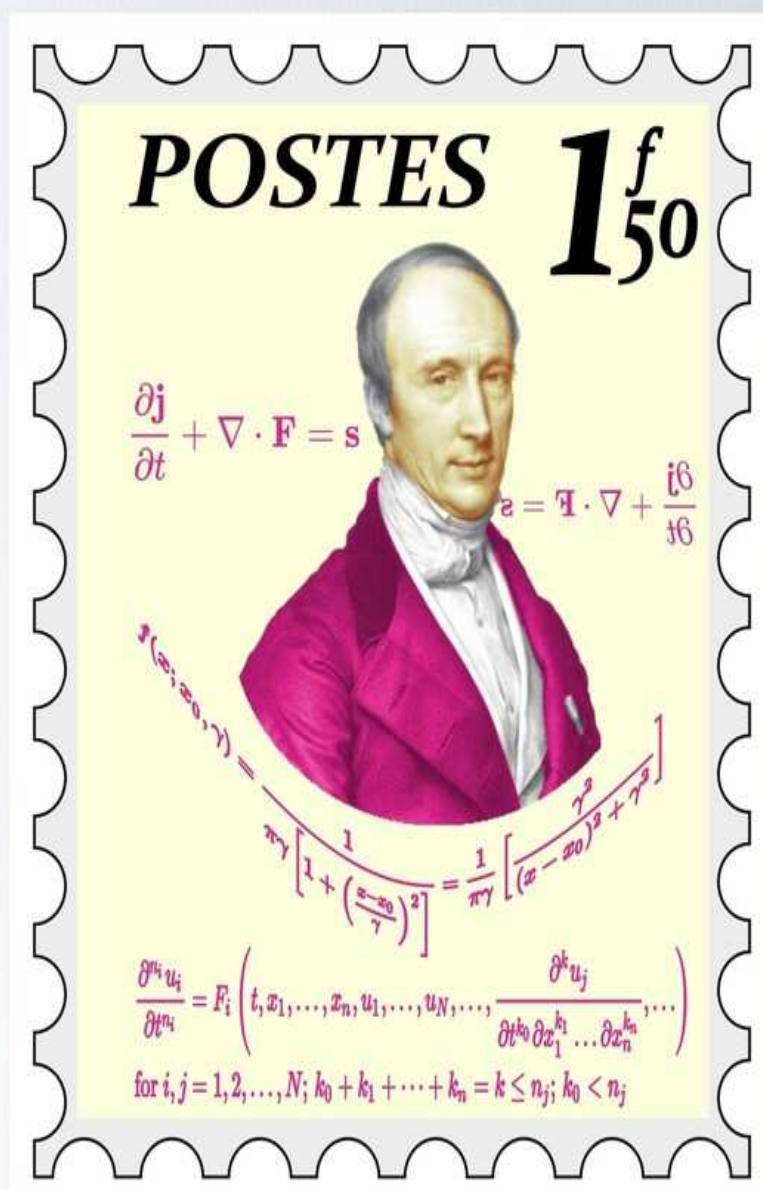
Θεωρία αλγεβρικών εξισώσεων, ολοκληρωματικός λογισμός, λογισμός μεταβολών, μαθηματική αυστηρότητα, θεωρία πεπερασμένων ομάδων, θεωρία των μεταθέσεων, θεωρία κρυστάλλων, συνδυαστική, καθαρά μαθηματικά, άπειρες σειρές, συμμετρικές συναρτήσεις, πολύεδρα, συνέχεια & ομοιόμορφη συνέχεια συναρτήσεων, Lecons sur les applications du calcul infinitesimal a la geometrie, απόδειξη θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, Cauchy principal value, αντιπαράγωγος, εξισώσεις Cauchy– Riemann, μέθοδος Cauchy– Lipschitz

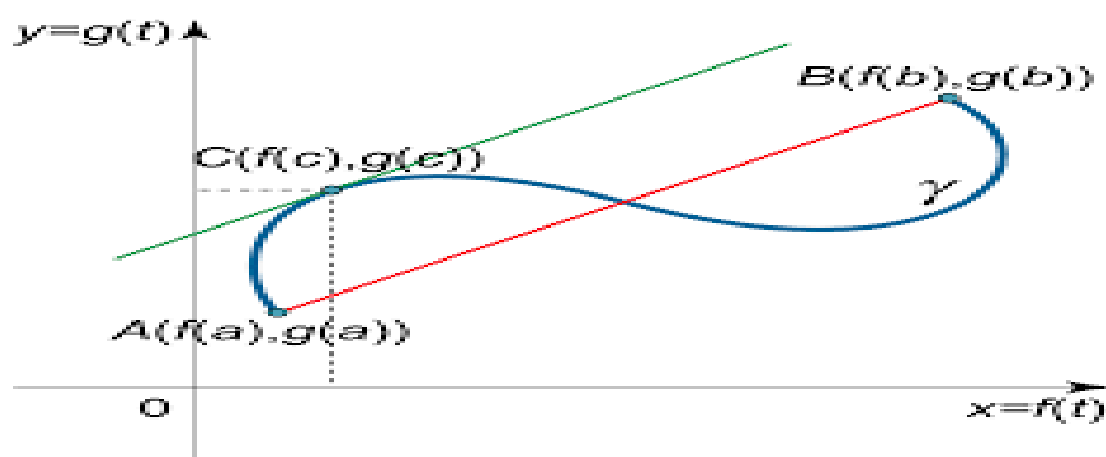
Περίληψη

Ο βαρόνος Augustin Louis Cauchy, (21.08.1789–23.05.1857) ήταν Γάλλος μαθηματικός από τους πρωτοπόρους της ανάλυσης. Ξεκίνησε να διατυπώνει και να αποδεικνύει τα θεωρήματα του απειροστικού λογισμού με αυστηρό τρόπο, απορρίπτοντας κάθε ευρετική αρχή της γενικότητας της άλγεβρας που χρησιμοποιήθηκε από παλιότερους συγγραφείς. Όρισε τη συνέχεια με απειροστικούς όρους, έδωσε αρκετά σημαντικά θεωρήματα στη μιγαδική ανάλυση και ξεκίνησε τη μελέτη των αντιμεταθετικών ομάδων στην αφηρημένη άλγεβρα. Ο Cauchy, όντας βαθυστόχαστος μαθηματικός, επηρέαζε σημαντικά τους σύγχρονους μαθηματικούς, αλλά και τους μεταγενέστερους.

Έγραψε περίπου **800** ερευνητικές δημοσιεύσεις και **5 βιβλία** σε πολλά θέματα των μαθηματικών και της μαθηματικής φυσικής. Ήταν ευσεβής Καθολικός, βασιλόφρονas του Οίκου των Βουρβόνων και στενός συνεργάτης των Ιησουιτών.

Ο Hans Freudenthal είπε: Από όλους τους μαθηματικούς, ο Cauchy είναι αυτός του οποίου το όνομα συναντάται στις περισσότερες **έννοιες και θεωρήματα** (μόνο στην ελαστικότητα υπάρχουν **16 έννοιες και θεωρήματα που φέρουν το όνομα του Cauchy**).





COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

*Ingenieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.*

L^{re} PARTIE. ANALYSE ALGÈBRE.



DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DESGRE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.º 7.

1821

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

SUR

LE CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingenieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique,
Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

TOME PREMIER.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.° 7.

1823.



MÉMOIRE

SUR LA DISPERSION

DE LA LUMIÈRE,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI,

RUE SERPENTE, N° 7.

1830.

MÉMOIRE SUR L'APPLICATION
DU CALCUL DES RÉSIDUS

A LA SOLUTION

DES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

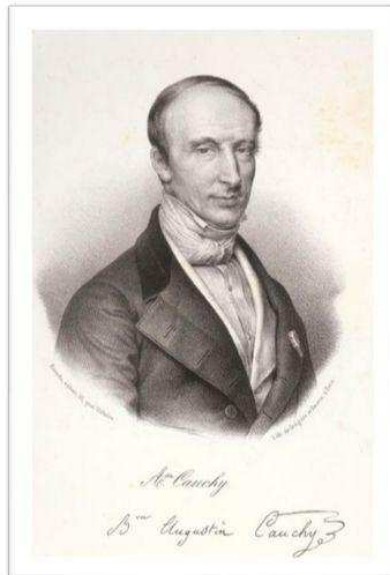


Augustin Louis Cauchy



1789-1857

Augustin Louis Cauchy





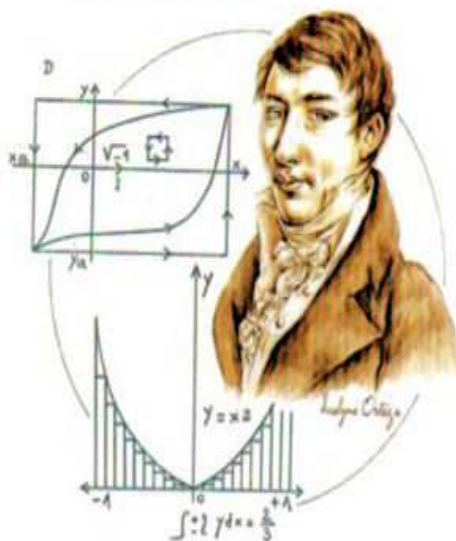
Augustin CAUCHY

CEF



PREMIER JOUR
D'ÉMISSION
FIRST DAY COVER

PREMIER JOUR D'ÉMISSION
N°1659 HISTORIQUE F.D.C.



AUGUSTIN CAUCHY
1789 - 1857



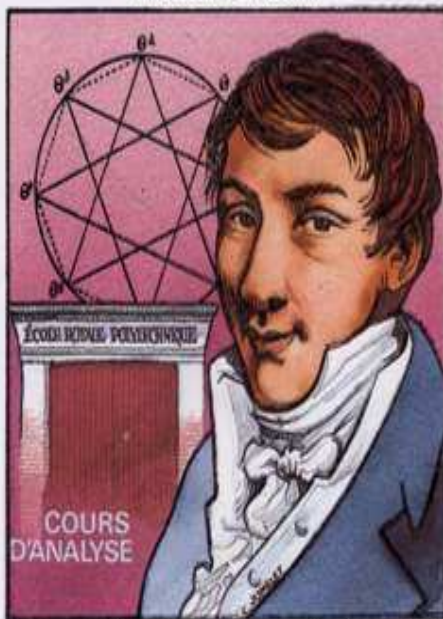
Augustin Louis Cauchy 1789 – 1857



“French mathematician who pioneered in analysis and the theory of substitution groups. He was one of the greatest of modern mathematicians.”



Augustin CAUCHY



Professeur à l'École Polytechnique, membre de l'Académie des Sciences, fut le plus grand mathématicien du 19^e siècle

PREMIER JOUR
D'ÉMISSION
FIRST DAY COVER



1. Τα μαθηματικά την εποχή του Cauchy

Στις πρώτες τρεις δεκαετίες τον 19^ο αιώνα, τα μαθηματικά μετατράπηκαν αρκετά ξαφνικά σε κάτι εμφανώς διαφορετικό από αυτό που ήταν στη διάρκεια της μετανευτώνειας περιόδου του 18^ο αιώνα. Η αλλαγή ήταν προς την κατεύθυνση μιας μεγαλύτερης αυστηρότητας στην απόδειξη, που ακολουθούσε μια χωρίς προηγούμενο τάση για γενικότητα και ελευθερία επινόησης. Κάτι ανάλογο είναι σαφώς ορατό στις μέρες μας και θα ήταν απερίσκεπτη κάθε απόπειρα να προβλέψουμε την εξέλιξη των μαθηματικών σε τρία τέταρτα του αιώνα από σήμερα. Στις αρχές του 19^ο αιώνα, μόνον ο Gauss είχε κάποια ιδέα του τι έμελλε γενέσθαι, όμως η νευτώνεια επιφυλακτικότητά του τον εμπόδιζε να πει στους Lagrange (1736–1813), Laplace και Legendre αυτό που προέβλεπε. Αν και οι μεγάλοι Γάλλοι μαθηματικοί έζησαν όλο το πρώτο τρίτο του 19^ο αιώνα, μεγάλο μέρος του έργου τους φαίνεται σήμερα ότι είχε προπαρασκευαστικό χαρακτήρα.

Ο **Lagrange** με τη θεωρία των εξισώσεων άνοιξε τον δρόμο στους **Abel** και **Galois**. Ο **Laplace** με την εργασία του πάνω στις διαφορικές εξισώσεις της νευτώνειας αστρονομίας (που περιελάμβανε την θεωρία της βαρύτητας) παρείχε υποδείξεις για την εκπληκτική εξέλιξη της μαθηματικής φυσικής στον 19^ο αιώνα, ενώ οι έρευνες του **Legendre** στον ολοκληρωτικό λογισμό υπέδειξαν στους **Abel** και **Jacobi** ένα από τα γονιμότερα πεδία διερεύνησης που απέκτησε ποτέ η Ανάλυση.

Η «Αναλυτική μηχανική» του Lagrange είναι ακόμη σύγχρονη· αλλά και αυτή επρόκειτο να δεχθεί υπέροχες προσθήκες στα χέρια των **Halmiton**, **Jacobi** και αργότερα, του **Poincare**. Η εργασία του Lagrange στον λογισμό των μεταβολών θα παρέμενε επίσης κλασική και χρήσιμη, αλλά και πάλι η εργασία του **Weierstrass** (1815–1897) της έδωσε νέα κατεύθυνση, επηρεασμένη από το αυστηρά επινοητικό πνεύμα του δευτέρου μισού του 19^ο αιώνα, ενώ και αυτή με τη σειρά της έχει διευρυνθεί στις μέρες μας (με Αμερικανούς και Ιταλούς μαθηματικούς να παίζουν έναν πρωτεύοντα ρόλο στην εξέλιξη).

Ο **Augustin Louiss Cauchy**, ο πρώτος από τους μεγάλους Γάλλους μαθηματικούς του οποίου η σκέψη ανήκει απόλυτα στην σύγχρονη εποχή, γεννήθηκε στο Παρίσι στις **21.08.1789**, κάτι λιγότερο από έξι εβδομάδες μετά την πτώση της Βαστίλης. Παιδί της επανάστασης, πλήρωσε τον φόρο του στην ελευθερία και την ισότητα μεγαλώνοντας σε συνθήκες υποσιτισμού. Μόνο στη διπλωματικότητα και στην πρακτική λογική του πατέρα του οφείλει ο Cauchy το ότι επιβίωσε.

Καταφέρνοντας να επιζήσει της τρομοκρατίας, αποφοίτησε από την Ecole Polytechnique για να μπει στην υπηρεσία του Ναπολέοντα. Μετά την πτώση της ναπολεόντειας τάξης πραγμάτων, ο Cauchy πήρε το πλήρες μερίδιό του από τις στερήσεις λόγω επαναστάσεων και αντεπαναστάσεων και έως ένα βαθμό η εργασία του επηρεάστηκε από την κοινωνική αναταραχή της εποχής του. Αν οι επαναστάσεις και όντως επηρεάζουν το έργο ενός επιστήμονα, ο Cauchy θα μπορούσε να είναι η περίπτωση που το αποδεικνύει. Τον διέκρινε μια εξαιρετική γονιμότητα σε μαθηματικές επινοήσεις, που έχει ξεπεραστεί δύο φορές μόνο, από τους Euler και Cayley. Το έργο του, όπως και η εποχή του, ήταν επαναστατικό. Τα σύγχρονα μαθηματικά οφείλουν στον Cauchy δύο από τα κύρια ενδιαφέροντά τους, καθένα από τα οποία συνιστά μια έντονη αλλαγή στάσης σε σχέση με τα μαθηματικά του 18^ο αιώνα. Το πρώτο ήταν η εισαγωγή της αυστηρότητας στην μαθηματική ανάλυση. Πριν από την εισαγωγή της αυστηρότητας, η μαθηματική ανάλυση ήταν ένα ολόκληρο πάνθεον ψεύτικων θεών. Σε αυτή την αλλαγή, ο Cauchy υπήρξε μεγάλος πρωτοπόρος, μαζί με τους Gauss και Abel. Ο Gauss θα μπορούσε να είχε πάρα την πρωτοκαθεδρία πολύ πριν μπει στον χορό ο Cauchy, όμως δεν το έκανε και η συνήθεια του Cauchy να δημοσιεύει γρήγορα, καθώς και το χάρισμά του στη

διδασκαλία, που πέτυχαν να γίνει αποδεκτή η αυστηρότητα στην μαθηματική ανάλυση. Η αυστηρότητα του λογισμού είχε δεχθεί επίθεση και οι μαθηματικοί ήθελαν να την υπερασπιστούν. Εκτός από μερικές επιθέσεις που προήλθαν από μαθηματικούς λόγω των απειροστών, οι σπουδαιότερες επιθέσεις προήλθαν από φιλόσοφους και θεολόγους. Η πιο γνωστή κριτική και που επηρέασε περισσότερο ήταν αυτή του επίσκοπου του Cloyne, George Berkeley το 1734 η οποία ασκήθηκε για να υπερασπιστεί τη θρησκεία ως προς τους επιστήμονες.

Η επίθεση του Berkeley οφείλονταν στην αντίθεση του με τις απόψεις του Διαφωτισμού και επικεντρώθηκε στις αδυναμίες που εμφάνιζαν στα μαθηματικά οι στοχαστές του Διαφωτισμού με αποτέλεσμα οι συζητήσεις για τα θεμέλια του λογισμού να διαρκέσουν και να αναζητηθούν αρχές που έκαναν τα θεμέλια επιτυχή και τον λογισμό αυστηρό. Αναφορές στα επιχειρήματα του Berkeley έκαναν οι Carnot (1887–1894), Lagrange και D' Alembert.

Το δεύτερο πράγμα θεμελιώδους σημασίας που ο Cauchy έδωσε στα μαθηματικά αφορούσε στην άλλη πλευρά, στη συνδυαστική. Κατανοώντας το μεδούλι της μεθόδου του Lagrange στη θεωρία των εξισώσεων, την έκανε αφηρημένη και άρχισε τη συστηματική δημιουργία της θεωρίας των ομάδων. Η φύση αυτής της θεωρίας θα περιγραφεί αργότερα· εδώ αρκούμαστε να σημειώσουμε τον σύγχρονο τρόπο με τον οποίο έβλεπε ο Cauchy τα πράγματα. Χωρίς να ερευνήσει κατά πόσο αυτό που επινόησε είχε εφαρμογές ή όχι, έστω και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών, ο Cauchy το ανέπτυξε ως αφηρημένο σύστημα για την ίδια του την αξία. Οι προγενέστεροί του, με εξαίρεση τον καθολικό Euler που ήταν εξ ίσου πρόθυμος στο να γράψει μια εργασία για ένα αριθμητικό πάζλ όσο και στην υδραυλική ή στο «σύστημα του κόσμου», έβλεπαν την έμπνευσή τους να τροφοδοτείται από τις εφαρμογές των μαθηματικών. Αυτή η διαπίστωση έχει βέβαια πολυάριθμες εξαιρέσεις, ιδιαίτερα στην αριθμητική· όμως πριν από την εποχή του Cauchy ελάχιστα αν υπήρχαν έψαχναν για αξιόλογα νέα πράγματα βασιζόμενα σε απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς.

Ο Cauchy κοίταξε βαθύτατα, είδε τις πράξεις και τους συνδυαστικούς νόμους τους πίσω από τις συμμετρίες των αλγεβρικών τύπων, τα απομόνωσε και οδηγήθηκε στη θεωρία των ομάδων. Σήμερα, αυτή η στοιχειώδης και όμως λεπτεπίλεπτη θεωρία είναι θεμελιώδους σημασίας για πολλά πεδία των καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, από τη θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων μέχρι τη γεωμετρία και τη θεωρία της ατομικής δομής. Σε αυτή στηρίζεται η γεωμετρία των κρυστάλλων για να αναφέρουμε μια μόνο από τις εφαρμογές της. Οι κατοπινότερες εξελίξεις της (από την πλευρά της ανάλυσης) εισχωρούν βαθιά στην ανώτερη μηχανική και στη σύγχρονη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

2. Η καταγωγή του

Η ζωή και ο χαρακτήρας τα Cauchy μας φέρνει στη συναισθηματική κατάσταση ενός αναγνώστη του φτωχού Δον Κιχώτη: δεν ξέρεις μερικές φορές αν πρέπει να κλάψεις ή να γελάσεις, και συμβιβάζεσαι με το να βλαστημήσεις. Ο πατέρας του, ο Louis Francois, ήταν υπόδειγμα αρετής και ευσέβειας, κάτι που μπορεί εύκολα να οδηγήσει στην υπερβολή. Ένας Θεός ξέρει μόνο πώς ο πατέρας Cauchy γλύτωσε από την γκιλοτίνα παρόλο που όταν έπεσε η Βαστίλη ήταν δικηγόρος του κοινοβουλίου, καλλιεργημένος κύριος, φτασμένος μελετητής των κλασικών και βιβλικών κειμένων, φανατικός καθολικός και αξιωματικός της αστυνομίας στο Παρίσι χρόνια πριν από το ξέσπασμα της Επανάστασης είχε παντρευτεί την Marie Madeleine Desestre, μια εξαιρετική, όχι ιδιαίτερα έξυπνη γυναίκα, η οποία ήταν φανατική καθολική όπως και ο ίδιος. Ο Augustin ήταν ο μεγαλύτερος από τα έξι παιδιά (δύο αγόρια, τέσσερα

κορίτσια). Με τέτοιους γονείς, είναι φυσικό που ο Cauchy εξελίχθηκε σε πεισματάρη Δον Κιχώτη του γαλλικού καθολικισμού στα 1830 και 1840, όταν η εκκλησία είχε περάσει στην άμυνα. Υπέφερε για την πίστη του και για αυτό αξίζει τον θαυμασμό μας (ακόμη και αν ενδεχομένως ήταν ένας φαντασμένος υποκριτής όπως τον κατηγορούσαν οι συνάδελφοί του), όμως σε περισσότερες από μία περιπτώσεις του άξιζε να υποφέρει. Το συνεχές κήρυγμα του για την ομορφιά της αγιότητας έκανε τους άλλους να του γυρίζουν την πλάτη, προκαλώντας έτσι στα ευσεβή του σχέδια αντιδράσεις που δεν τις άξιζαν πάντα. Ο **Abel**, γιός παπά ο ίδιος και αξιοπρεπής Χριστιανός, εξέφραζε την γενική δυσαρέσκεια που προξενούσαν ορισμένα καμώματα του Cauchy, όταν σε γράμμα προς τους δικούς του έγραφε «**ο Cauchy είναι ένας μισαλλόδοξος καθολικός, πράγμα παράξενο για έναν επιστήμονα**».

Η έμφαση βέβαια πήγαινε στο «μισαλλόδοξος» και όχι στο «καθολικός». Δύο από τους ωραιότερους χαρακτήρες και μεγαλύτερους μαθηματικούς, ο **Weierstrass** και ο **Hermite**, ήταν καθολικοί. Ήταν πιστοί αλλά όχι μισαλλόδοξοι.

3. Η παιδική του ηλικία

Τα παιδικά χρόνια του Cauchy συνέπεσαν με την αιματηρότερη περίοδο της Επανάστασης. Τα σχολεία ήταν κλειστά. Μην έχοντας προς το παρόν καμία ανάγκη την επιστήμη και την κουλτούρα, η Κομμούνα είτε άφηνε τους επιστήμονες και τους μορφωμένους ανθρώπους να λιμοκτονούν ή τους έστελνε στη γκιλοτίνα. Για να γλυτώσουν από τους προφανείς κινδύνους, ο πατέρας Cauchy πήρε την οικογένειά του και πήγε στο χωριό του στο Arcueil. Εκεί, σε συνθήκες πείνας και διατρέφοντας τη γυναίκα και το γιό του με λίγα φρούτα και λαχανικά που μπορούσε να καλλιεργήσει, περίμενε να περάσει η τρομοκρατία. Αυτό είχε σαν συνέπεια ο Cauchy να μην μπορέσει να αναπτυχθεί φυσιολογικά. **Μόλις στα 20 του άρχισε να ξεπερνά τις συνέπειες της κακής διατροφής των πρώτων χρονών, και σ' όλη του τη ζωή έπρεπε να προσέχει ιδιαίτερα την υγεία του.** Αυτή η απομόνωση, που σιγά σιγά γινόταν λιγότερο αυστηρή, κράτησε σχεδόν έντεκα χρόνια, με τον πατέρα Cauchy να έχει αναλάβει όλο αυτό το διάστημα την εκπαίδευση των παιδιών του. Έγραφε δικά του εγχειρίδια, πολλά σε έμμετρο λόγο όπου είχε ευχέρεια.

Ο έμμετρος λόγος, πίστευε, έχανε τη γραμματική, την ιστορία χονα κυρίως την ηθική λιγότερο απωθητικές στο νεανικό μυαλό. Ο νεαρός Cauchy απέκτησε έτσι την ανεξέλεγκτη ικανότητά του τόσο στον γαλλικό όσο και στον λατινικό έμμετρο λόγο, τον οποίο καλλιεργούσε σε όλη του την ζωή. Η ρίμα του βρίθει ευγενικών συναισθημάτων εκφρασμένων σε υψιπετές ύφος και αντανακλά την ευσέβεια της απεγάδιαστης ζωής του· κατά τα άλλα όμως, είναι κάτι χωρίς ιδιαίτερη ποιητική αξία. Μεγάλο μέρος των μαθημάτων πήγαινε στη στενά εννοούμενη θρησκευτική κατήχηση, στην οποία βοηθούσε και η μητέρα του.

4. Cauchy και Laplace

Το Arcueil γειτόνευε με τα χτήματα των Μαρκησίου Laplace και Κόμη Claude Louis Berthollet (1748–1822), του διακεκριμένου και εκκεντρικού χημικού που γλύτωσε το κεφάλι του την εποχή της Τρομοκρατίας επειδή γνώριζε τα πάντα για την πυρίτιδα. Οι δύο τους ήταν στενοί φίλοι. Οι κήποι τους χωρίζονταν από έναν κοινό τοίχο με μια πύλη, για την οποία ο καθένας τους είχε από ένα κλειδί. Παρά το γεγονός ότι και ο μαθηματικός και ο χημικός ήταν κάθε άλλο παρά ευσεβείς, ο πατέρας Cauchy είχε μια κάποια επαφή με τους διακεκριμένους και καλοταϊσμένους γείτονές του. **Ο Berthollet δεν έβγαине ποτέ έξω.** Ο Laplace ήταν περισσότερο κοινωνικός και άρχισε να συχνάζει στον Cauchy. Εκεί του έκανε εντύπωση το θέαμα του αδύνατου νεαρού Cauchy ο οποίος, μην μπορώντας να τρέχει πάνω– κάτω όπως

κάθε παιδί με σωστή διατροφή και ανάπτυξη, μελετούσε με εμφανή ευχαρίστηση τα βιβλία του. Σύντομα ο Laplace ανακάλυψε πως το αγόρι διέθετε ένα μοναδικό μαθηματικό ταλέντο και το συμβούλεψε να το καλλιεργήσει. Σε λίγα χρόνια, ο Laplace θα άκουγε με προσοχή τις διαλέξεις του Cauchy πάνω στις άπειρες σειρές, φοβούμενος πως οι τολμηρές ανακαλύψεις του νέου άνδρα πάνω στη σύγκλιση μπορούσαν να καταστρέψουν ολόκληρο το τεράστιο οικοδόμημα της δικής του ουράνιας μηχανικής. «Το σύστημα του κόσμου» την γλύτωσε τότε παρά τριχά· μια λίγο μεγαλύτερη ελλειπτικότητα της σχεδόν κυκλικής τροχιάς της Γης και η άπειρη σειρά στην οποία ο Laplace είχε βασίσει τους υπολογισμούς του θα απέκλινε. Ευτυχώς για αυτόν, η αστρονομική του διαίσθηση τον έσωσε, όπως ανακάλυψε με έναν αναστεναγμό άπειρης ανακούφισης μετά από τον χρονοβόρο έλεγχο σύγκλισης όλων των σειρών του με τη μέθοδο του Cauchy.

5. Cauchy και Lagrange

Την **01.01.1800** ο πατέρας Cauchy, ο οποίος είχε διατηρήσει μια διακριτική επαφή με το Παρίσι, εξελέγη Γραμματέας της Γερουσίας. Το γραφείο του βρισκόταν στο Παλάτι του Λουξεμβούργου. Το μοιραζόταν με το νεαρό γιο του που χρησιμοποιούσε μία γωνιά ως χώρο μελέτης. Έτσι, ο τελευταίος είχε την ευκαιρία να βλέπει συχνά τον Lagrange, καθηγητή της Ecole Polytechnique εκείνη την εποχή, που περνούσε από το γραφείο για να συζητήσει διάφορα θέματα με τον Γραμματέα Cauchy. Γρήγορα ο Lagrange έδειξε ενδιαφέρον για το αγόρι, και όπως είχε συμβεί με τον Laplace, εντυπωσιάστηκε από το μαθηματικό του ταλέντο. Κάποια φορά, όταν ο Laplace και άλλοι σημαίνοντες ήταν παρόντες, ο Lagrange είπε δείχνοντας τον νεαρό Cauchy στη γωνιά του: **«Βλέπετε εκείνο το μικρό; Λοιπόν, θα μας ξεπεράσει όλους ως μαθηματικούς».**

Στον πατέρα Cauchy ο Lagrange έδωσε μια καλή συμβουλή πιστεύοντας ότι το εύθραυστο αγόρι μπορούσε να αναλωθεί: **«Μην τον αφήσετε να πιάσει μαθηματικό βιβλίο πριν γίνει 17 χρόνων».** Ο Lagrange είχε στο μυαλό του τα ανώτερα μαθηματικά. Και σε άλλη περίπτωση: **«Αν δεν προλάβετε να δώσετε στον Augustin μία καλή φιλολογική μόρφωση, οι προτιμήσεις του θα τον πάρουν μακριά· θα γίνει μεγάλος μαθηματικός αλλά δεν θα ξέρει να γράψει στη γλώσσα του».**

Ο πατέρας του πήρε στα σοβαρά αυτά τα λόγια του μεγαλύτερου μαθηματικού της εποχής, και πρόσφερε στον γιό του μια σωστή φιλολογική μόρφωση πριν τον αφήσει ελεύθερο να ασχοληθεί με τα προχωρημένα μαθηματικά. Αφού ο πατέρας του έκανε ότι μπορούσε για αυτόν, ο Cauchy μπήκε στο κεντρικό σχολείο του Pantheon περίπου στα 13 του.

6. Τα μαθητικά του χρόνια

Ο Ναπολέων είχε δημιουργήσει τον θεσμό των διαφόρων βραβείων στο σχολείο και ένα είδος μεγάλου βραβείου για την ίδια τάξη όλων των σχολείων της Γαλλίας. Από την αρχή ο Cauchy ήταν το αστέρι του σχολείου, κερδίζοντας το πρώτο βραβείο στα ελληνικά, στην έκθεση στα λατινικά και στην ποίηση στα λατινικά. Αφήνοντας το σχολείο το 1804, κέρδισε το μεγάλο βραβείο και ένα ειδικό βραβείο στις ανθρωπιστικές σπουδές. Τον ίδιο χρόνο έλαβε την πρώτη του κοινωνία, μια σοβαρή και όμορφη στιγμή στη ζωή κάθε καθολικού ιδιαίτερα για αυτόν.

Τους επόμενους δέκα μήνες μελετούσε εντατικά μαθηματικά υπό την επίβλεψη ενός καλού φροντιστή και το **1805 σε ηλικία 16 πέρασε πρώτος στην Polytechnique**. Εκεί οι εμπειρίες του δεν ήταν ιδιαίτερα ευχάριστες, με όλους τους αχρείους νεαρούς σκεπτικιστές να τον κακομεταχειρίζονται ανελέητα επειδή έκανε τώρα σε δημόσιο χώρο όσα του απέβαλε το τυπικό της θρησκείας του. Όμως ο

Cauchy διατηρούσε την ψυχραιμία του· επεχείρησε μάλιστα να προσηλυτίσει μερικούς από τους χλευαστές του. Από την Polytechnique ο Cauchy πέρασε στη σχολή των πολιτικών μηχανικών το **1807**. Αν και μόλις 18 χρόνων, εύκολα συναγωνιζόταν με επιτυχία νεαρούς εικοσάρηδες οι οποίοι είχαν δύο χρόνια στη σχολή και γρήγορα ξεχώρισε για την ιδιαίτερα καλή επίδοσή του.

7. Cauchy και Μέγας Ναπολέων

Με την ολοκλήρωση της εκπαίδευσής του, τον Μάρτιο του 1810, του δόθηκε μια σημαντική κρατική παραγγελία. Η ικανότητά του και η τολμηρή πρωτοτυπία του τον έκαναν να ξεχωρίζει ως άνθρωπος που δεν τον σταματούσε τίποτα. Οτιδήποτε και να πει κανείς για τον Ναπολέοντα, δεν μπορεί να αρνηθεί ότι αξιοποίησε ανθρώπους με ταλέντο και ικανότητες. Τον Μάρτιο του **1810**, όταν ο Cauchy άφηνέ το Παρίσι «με ελάχιστες αποσκευές αλλά γεμάτος ελπίδα» πηγαίνοντας στο Χερβούργο για την πρώτη του δουλειά, η μάχη του Βατερλό (18.06.1815) έπρεπε να περιμένει άλλα πέντε χρόνια, ενώ ο Ναπολέων είχε την πεποίθηση ότι θα άρπαζε την Αγγλία από τον λαιμό. Πριν επιχειρηθεί μια εισβολή, ήταν απαραίτητη η κατασκευή ενός τεράστιου στόλου. Οι κατασκευές λιμανιών και οχυρώσεων για την υπεράσπιση των ναυπηγείων από τους θαλασσοπόρους Βρετανούς ήταν το πρώτο πράγμα που έπρεπε να γίνει για την υλοποίηση του μεγαλεπήβολου στόχου. Το Χερβούργο αποτελούσε για πολλούς λόγους το λογικό σημείο έναρξης όλων αυτών των μεγάλων κατασκευών, που θα επέσπευδαν τη ημέρα της δόξας, για την οποία φώναζαν οι Γάλλοι από τότε που έπεσε η Βαστίλη.

Για αυτό πήγαινε ο προικισμένος νεαρός Cauchy στο Χερβούργο, για να γίνει ένας μεγάλος μηχανικός του στρατού. Ανάμεσα στα λίγα πράγματα που είχε μαζί του, ήταν τέσσερα μόνο βιβλία, η «**Mecanique celeste**» του Laplace, η «**Traite des fonctions analytiques**» του Lagrange, η «**Μίμηση του Χριστού**» του Thomas Kempis και ένα αντίγραφο των έργων του Βιργιλίου, μια περίεργη συλλογή για έναν φιλόδοξο νεαρό μηχανικό του στρατού. Η πραγματεία του Lagrange θα γινόταν η αιτία να βγει αληθινή η προφητεία του συγγραφέα της ότι «αυτός ο νεαρός θα μας ξεπεράσει όλους», μιας και έκανε τον Cauchy να αναζητήσει μια θεωρία των συναρτήσεων απαλλαγμένη από τις εμφανείς αδυναμίες που είχε εκείνη του Lagrange. Το τρίτο κατά σειρά βιβλίο θα δημιουργούσε κάποια προβλήματα στον Cauchy, μιας και συνδυασμένο με την επιθετική ευσέβειά του, έδινε στα νεύρα των πρακτικών συνεργατών του, οι οποίοι επείγονταν να συνεχίσουν την εξουθενωτική δουλειά τους. Ο Cauchy τους έδειξε γρήγορα, γυρνώντας τους το άλλο μάγουλο, πως είχε τουλάχιστον διαβάσει το βιβλίο. «Γρήγορα θα απαλλαγείς απ' όλα αυτά» τον διαβεβαίωναν. Και ο Cauchy, γλυκύτατα, τους ζητούσε να του δείξουν ποιο ήταν το στραβό στη συμπεριφορά του και θα το διόρθωνε με ευχαρίστηση.

Δεν γνωρίζουμε την απάντησή τους. Φήμες πως το αγαπημένο της αγόρι πήγαινε να γίνει ένας άπιστος και κάτι χειρότερο, φτάσανε στα αυτιά της ανήσυχης μητέρας του. Σε ένα γράμμα εκτενές και γεμάτο ευλάβεια, που θα μπορούσε να καθησυχάσει όλες τις μάνες που έστειλαν ποτέ τα παιδιά τους στο μέτωπο ή κάπου εκεί κοντά, ο Cauchy την διαβεβαίωνε για το αντίθετο, κάνοντας την και πάλι ευτυχισμένη. Το κλείσιμο του γράμματος δείχνει πως ο άγιος Cauchy είχε την ικανότητα να αντιστέκεται στους βασανιστές του, που είχαν υπαινιχθεί πως είχε αρχίσει να σπάζει.

«Είναι λοιπόν γελοίο να υποθέσουμε πως η θρησκεία μπορεί να τρελάνει κάποιον και αν όλοι οι παρανοϊκοί κλείνονταν σε φρενοκομεία, θα βρίσκαμε εκεί περισσότερους φιλόσοφους παρά Χριστιανούς». Ήταν άραγε ένα ολίσθημά του ή πραγματικά εννοούσε πως οι Χριστιανοί δεν γίνονται φιλόσοφοι; Το γράμμα τελειώνει με μία

αφύπνιση της άλλης πλευράς του μυαλού του: «**Αρκετά όμως μ' αυτά, είναι ωφελιμότερο για μένα να δουλέψω πάνω σε ορισμένα θέματα των μαθηματικών**». Ο Cauchy έμεινε για μια τριετία περίπου στα Χερβούργο.

Αξιοποίησε σωστά όσο ελεύθερο χρόνο του άφηναν οι πολλές του υποχρεώσεις. Σε ένα γράμμα του της **03.07.1811**, περιγράφει τη γεμάτη ζωή του: «*Σηκώνομαι στις τέσσερις και εργάζομαι από το πρωί ως τη νύχτα. Αυτό το μήνα το πρόγραμμά μου επιβαρύνεται εξ' αιτίας της άφιξης των Ισπανών αιχμαλώτων. Μας είχε δοθεί περιθώριο μόλις οχτώ ημερών, και σε αυτό το διάστημα έπρεπε να χτίσουμε στρατώνες και να ετοιμάσουμε κρεβάτια εκστρατείας για 1.200 άνδρες... Εδώ και δύο μέρες οι αιχμάλωτοί μας έχουν τροφή και στέγη και θεωρούν τούς εαυτούς τους τυχερούς ... Η δουλειά δεν με κουράζει· αντίθετα με δυναμώνει και η υγεία μου είναι σε εξαιρετική κατάσταση*».

Με όλη αυτή τη δουλειά για τη δόξα της Γαλλίας, ο Cauchy εύρισκε χρόνο για έρευνα. Όπως γράφει ήδη τον Δεκέμβριο του 1810 «*έχω αρχίσει να ξαναπερνά απ' όλους τους κλάδους των μαθηματικών, αρχίζοντας με την αριθμητική και τελειώνοντας με την αστρονομία, ξεδιαλύνοντας δυσκολίες, εφαρμόζοντας (τις δικές μου μεθόδους) στην απλοποίηση αποδείξεων και την ανακάλυψη νέων προτάσεων*».

Και πέρα από όλα αυτά, ο εκπληκτικός νεαρός εύρισκε χρόνο να καθοδηγεί άλλους που τον εκλιπαρούσαν να τους κάνει μαθήματα για να εξελιχθούν στο επάγγελμά τους και έφτασε ακόμη σε σημεία να συνδράμει τον δήμαρχο του Χερβούργου στη διεξαγωγή, των σχολικών εξετάσεων. Έτσι έμαθε να διδάσκει. Με όλα αυτά, είχε και χρόνο για κάποιο χόμπι. Το φιάσκο της Μόσχας το 1812, ο πόλεμος εναντίον της Πρωσίας και της Αυστρίας και η δυνατή ροπαλιά που δέχτηκε στη μάχη της Λειψίας τον Οκτώβριο του 1813, όλα μαζί απέσπασαν την προσοχή του Ναπολέοντα από το όνειρο της ασβολής στην Αγγλία και οι εργασίες στο Χερβούργο σταμάτησαν. Ο Cauchy επέστρεψε στο Παρίσι το 1813 εξαντλημένος από την υπερβολική δουλειά. Ήταν τότε μόνο 24 ετών, είχε όμως ήδη τραβήξει την προσοχή των κορυφαίων μαθηματικών της Γαλλίας με τις εξαιρετικές έρευνές του, ιδιαίτερα με την εργασία πάνω στα πολύεδρα και με εκείνη πάνω στις συμμετρικές συναρτήσεις. Επειδή το γενικό αντικείμενο τους γίνεται εύκολα κατανοητό, αλλά και η κάθε μία αφήνει να φανούν πράγματα άκρως σημαντικά για τα σύγχρονα μαθηματικά, θα τις περιγράψουμε σύντομα.

8. Οι εργασίες του

Το αποτέλεσμα της πρώτης αυτό καθ' αυτό δεν παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον. Εκείνο που είναι σημαντικό με τα κριτήρια του σήμερα, είναι η διορατικότητα της κριτικής που άσκησε ο Malus σε αυτήν. Κατά περίεργη ιστορική σύμπτωση, ο Malus ήταν ακριβώς 100 χρόνια μπροστά από την εποχή του όταν εξέφρασε την αντίθεσή του στη συλλογιστική του Cauchy, με τον τρόπο μάλιστα που το έκανε. Η Ακαδημία είχε προτείνει ως πρόβλημα για την απονομή του βραβείου της «*την κατά κάποιον ουσιώδη τρόπο βελτίωση της θεωρίας για τα πολύεδρα*» και ο Lagrange το πρότεινε στον νεαρό Cauchy ως πολλά υποσχόμενο πεδίο έρευνας. Τον Φεβρουάριο του 1811 ο Cauchy υπέβαλε την πρώτη του εργασία πάνω στη θεωρία, που απαντούσε αρνητικά σε ένα ερώτημα που είχε τεθεί από τον Poinsot (1777–1859): υπάρχουν άλλα κανονικά πολύεδρα εκτός εκείνων με 4, 6, 8, 12 ή 20 πλευρές;

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας του ο Cauchy επεξεκτείνε τον τύπο του Euler που δίνεται στα σχολικά εγχειρίδια της στερεομετρίας, συσχετίζοντας τον αριθμό των ακμών (E), εδρών (F) και κορυφών (V) (ή ενός πολυέδρου $E+2=F+V$). Αυτή η εργασία τυπώθηκε. Ο Legendre την εκτίμησε πολύ και ενθάρρυνε τον Cauchy να

συνεχίσει, πράγμα που ο Cauchy έκανε προχωρώντας σε μια δεύτερη εργασία (Ιανουάριος 1812). Ο Legendre με τον Malus (1775–1812) ήταν οι κριτές.

Ο Legendre ήταν ενθουσιώδης και προέβλεπε μεγάλες επιτυχίες για τον νεαρό συγγραφέα. Ο Malus όμως είχε κάποιες επιφυλάξεις. Ο Etienne Louis Malus δεν ήταν επαγγελματίας μαθηματικός, αλλά ένας πρώην αξιωματικός του μηχανικού στις εκστρατείες του Ναπολέοντα στη Γερμανία και την Αίγυπτο, που έγινε διάσημος από την **τυχαία ανακάλυψη της πόλωσης του φωτός με ανάκλαση**. Πιθανότατα, οι αντιρρήσεις του να θωρήθηκαν από τον Cauchy ως φιλόψογος κριτική που θα έπρεπε να αναμένεται από έναν πεισματάρη φυσικό. Στην απόδειξη των πιο σημαντικών θεωρημάτων του, ο Cauchy είχε χρησιμοποιήσει την «έμμεση μέθοδο», δηλαδή τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, με την οποία είναι εξοικειωμένοι όλοι οι πρωτάρηδες στη Γεωμετρία. Ακριβώς σε αυτή τη μέθοδο απόδειξης ήταν στραμμένες οι αντιρρήσεις του Malus. Στην απόδειξη μίας πρότασης με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, συνάγει κανείς μια αντίφαση ξεκινώντας από την υποτιθέμενα σωστή άρνηση της πρότασης· κατά την Αριστοτελική λογική, έπεται ότι η πρόταση είναι αληθής. Ο Cauchy δεν μπορούσε να αντικρούσει τις αντιρρήσεις δίνοντας ευθείες αποδείξεις και ο Malus υποχώρησε, χωρίς να έχει πεισθεί ότι ο Cauchy είχε αποδείξει κάτι. Αν ο Malus δεν κατάφερε να κάνει τον Cauchy να δει τι εννοούσε στα 1812, ο Brouwer πήρε για αυτόν εκδίκηση το 1912 και μετά, όταν πέτυχε να κάνει τους διαδόχους του Cauchy στην μαθηματική ανάλυση να καταλάβουν τουλάχιστον ότι υπάρχει κάτι που πρέπει να εξεταστεί. Η Αριστοτελική λογική, όπως προσπαθούσε να πει ο Malus στον Cauchy, δεν είναι πάντα μια ασφαλής μέθοδος συλλογισμού στα μαθηματικά.

Περνώντας στη θεωρία των μεταθέσεων, που την ξεκίνησε συστηματικά ο Cauchy, την επεξεργάστηκε σε μια μακρά σειρά άρθρων στα μέσα της δεκαετίας του 1840 και εξελίχθηκε στη θεωρία των πεπερασμένων ομάδων, θα καταδείξουμε τις υποκείμενες έννοιές της με ένα απλό παράδειγμα. Πρώτα πρέπει να περιγραφούν με προσιτό τρόπο οι βασικές ιδιότητες μιας ομάδας πράξεων. Οι πράξεις θα δηλώνονται με κεφαλαία γράμματα A, B, C, D... και η εκτέλεση δύο πράξεων διαδοχικά, έστω πρώτα η A και μετά η B, θα δηλώνεται με AB. Το BA σημαίνει πως εκτελείται πρώτα η B και μετά η A· συνεπώς, AB και BA δεν είναι απαραίτητως η ίδια πράξη. Για παράδειγμα, αν

A είναι η πράξη «πρόσθεση του 10 σε δοθέντα αριθμό» και

B είναι η πράξη «διαίρεση δοθέντος αριθμού με το 10»,

η AB δρώντας στο x δίνει $\frac{x+10}{10}$, ενώ

η BA δίνει $\frac{x}{10} + 10 = \frac{x+100}{10}$

και τα προκύπτοντα κλάσματα δεν είναι ίσα. Άρα οι πράξεις AB, BA διαφέρουν. Αν τα αποτελέσματα δύο πράξεων X, Y είναι τα ίδια, οι πράξεις X και Y λέγεται ότι είναι ίσες (ή ισοδύναμες) και αυτό εκφράζεται με $X=Y$. Η επόμενη θεμελιώδης έννοια είναι εκείνη της **προσεταιριστικότητας**. Έστω U, Y, W μια οπουδήποτε τριάδα πράξεων από ένα σύνολο πράξεων. Αν για κάθε τέτοια τριάδα $(UV) W = U(VW)$, το σύνολο λέμε ότι ικανοποιεί τον προσεταιριστικό νόμο. Το $(UV)W$ σημαίνει ότι εκτελείται πρώτα η UV και στη συνέχεια εφαρμόζεται η W στο αποτέλεσμα, ενώ το $U(VW)$ σημαίνει ότι εκτελείται πρώτα η U και στο αποτέλεσμα που προκύπτει εφαρμόζεται στη συνέχεια η VW.

Η τελευταία θεμελιώδης έννοια είναι εκείνη μίας **ταυτοτικής** πράξης ή μιας ταυτότητας: μια πράξη I που αφήνει αμετάβλητο το κάθε τι στο οποίο επενεργεί, καλείται ταυτότητα. Με αυτές τις έννοιες μπορούμε να διατυπώσουμε τα απλά

αξιώματα που ορίζουν μια ομάδα πράξεων. Ένα σύνολο πράξεων $I, A, B, C, \dots X, Y, \dots$ λέγεται ότι συνιστά μια ομάδα αν ικανοποιούνται τα αξιώματα (1) – (4).

(1) Υπάρχει ένας συνδυαστικός κανόνας εφαρμόσιμος σε κάθε ζεύγος X, Y πράξεων του συνόλου, έτσι ώστε το αποτέλεσμα, δηλούμενο με XY , του συνδυασμού των X, Y , κατ' αυτή τη σειρά, να είναι μία και μόνο μία πράξη στο σύνολο.

(2) Για κάθε τρεις πράξεις X, Y, Z στο σύνολο, ο κανόνας στην (1) είναι προσεταιριστικός, δηλαδή $(XY)Z = X(YZ)$.

(3) Υπάρχει μια μοναδική ταυτότητα I στο σύνολο, τέτοια ώστε, για κάθε πράξη X στο σύνολο, $IX = XI = X$.

(4) Αν X είναι μια πράξη στο σύνολο, υπάρχει στο σύνολο μια μοναδική πράξη, έστω X' , τέτοια ώστε $XX' = I$ (μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι τότε επίσης $X'X = I$).

Αυτά τα αξιώματα διατυπώνονται εδώ σε μια μορφή που δεν είναι η πιο οικονομική, όμως στην πιο πάνω μορφή τα αξιώματα είναι κατανοητά. Ένα πολύ απλό παράδειγμα ομάδας μας δίνουν οι μεταθέσεις γραμμάτων. Μπορεί να φαίνονται τετριμμένες, όμως τέτοιες ομάδες μεταθέσεων ή αντικαταστάσεων βρέθηκε ότι ήταν το από μακρού αναζητούμενο κλειδί για την αλγεβρική επιλυσιμότητα των εξισώσεων. Υπάρχουν ακριβώς έξι δυνατότητες γραφής των τριών γραμμάτων a, b, c : συγκεκριμένα $abc, acb, bca, bac, cab, cba$. Πάρτε κάποια από αυτές τις τριάδες, έστω την abc , ως την αρχική διάταξη. Με ποιές μεταθέσεις των γραμμάτων μπορούμε να περάσουμε από αυτήν στις υπόλοιπες πέντε διατάξεις; Για να περάσουμε από την abc στην acb αρκεί να εναλλάξουμε ή να αντιμεταθέσουμε τα b, c . Για να δηλώσουμε την πράξη της αντιμετάθεσης των b, c γράφουμε (bc) , που διαβάζεται ως «το b στο c και το c στο b ». Από το abc περνάμε στο bca , αντικαθιστώντας το a με το b , το b με το c και το c με το a , το οποίο γράφεται ως (abc) . Η διάταξη abc προκύπτει από την abc χωρίς μεταβολή, δηλαδή με το a στο a , το b στο b και το c στο c , που είναι η ταυτοτική αντικατάσταση και δηλώνεται με I . Συνεχίζοντας ανάλογα με όλες τις έξι διατάξεις $abc, acb, bca, bac, cab, cba$, παίρνουμε τις αντίστοιχες μεταθέσεις

$$I, (bc), (abc), (ab), (acb), (ac).$$

Ο «κανόνας συνδυασμού» εν σχέσει με τα αξιώματα είναι ο ακόλουθος. Πάρτε στην τύχη δύο από τις αντικαταστάσεις, έστω τις (bc) και (acb) και θεωρήστε τα αποτελέσματα αυτών αν εφαρμοστούν διαδοχικά με την δοθείσα σειρά, δηλαδή πρώτα η (bc) και στη συνέχεια η (acb) : η (bc) στέλνει το b στο c και κατόπιν η (acb) στέλνει το c στο b . Έτσι το b μένει αμετάβλητο. Πάρτε το επόμενο γράμμα c στην (bc) : με την (bc) το c στέλνεται στο b , το οποίο με την (acb) πηγαίνει τελικά στο a .

Συνεχίζοντας, βλέπουμε πως το a αλλάζει ως εξής: η (bc) το αφήνει αμετάβλητο, όμως στη συνέχεια η (acb) το στέλνει στο c . Τελικά, το συνολικό αποτέλεσμα της (bc) ακολουθούμενης από την (acb) είναι η (ca) , πράγμα που δηλώνουμε γράφοντας $(bc)(acb) = (ca) = ac$. Ομοίως επαληθεύεται εύκολα ότι

$$(acb)(abc) = (abc)(acb) = I \text{ και}$$

$$(abc)(ac) = (ab),$$

$$(bc)(ac) = (acb), \text{ κ.ο.κ. για όλα τα δυνατά ζεύγη.}$$

Έτσι το αξίωμα (1) ικανοποιείται για αυτές τις έξι αντικαταστάσεις, και μπορεί να ελεγχθεί ότι τα (2), (3), (4) επίσης ικανοποιούνται. Όλα αυτά συνοψίζονται στον «πολλαπλασιαστικό πίνακα» της ομάδας, τον οποία θα δώσουμε, δηλώνοντας (για εξοικονόμηση χώρου) τις αντικαταστάσεις με τα κεφαλαία γράμματα που είναι κάτω απ αυτές,

I	(bc)	(abc)	(ab)	(acb)	(ac)
I	A	B	C	D	E

Για την ανάγνωση του πίνακα, κάποιο γράμμα, έστω το C, λαμβάνεται από την αριστερή στήλη και κάποιο γράμμα, έστω το D, από την πάνω γραμμή, ενώ το γράμμα A όπου συναντώνται η αντίστοιχη γραμμή και η αντίστοιχη στήλη είναι το αποτέλεσμά τους CD. Έτσι $CD=A$, $DC=E$, $EA=B$ κλπ. Ως παράδειγμα, μπορούμε να επαληθεύσουμε τον προσεταιριστικό νόμο για την $(AB)C$ και την $A(BC)$ που πρέπει να είναι ίσες. Πρώτον, $AB=C$, άρα $(AB)C=CC=I$. Από την άλλη, $BC=A$. άρα $A(BC)=AA=I$. Ομοίως, $A(DB)=AI=A$ και $(AD)B=EB=A$ έτσι, $(AD)B=A(DB)$.

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	I	C	B	E	D
B	B	E	D	A	I	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	C	I	E	B	A
E	E	B	A	D	C	I

Ο συνολικός αριθμός διαφορετικών πράξεων σε μία ομάδα (πράξεων) καλείται **τάξη της ομάδας**. Εδώ η τάξη της ομάδας είναι έξι. Με έλεγχο του πίνακα μπορούμε να επισημάνουμε διάφορες **υποομάδες**. Επί παραδείγματι, οι παρακάτω.

	I
I	I

	I	A
I	I	A
A	A	I

	I	B	D
I	I	B	D
B	B	D	I
D	D	I	B

Έχουν τάξη ένα, δυο, τρία αντίστοιχα. Εδώ έχουμε επαλήθευση ενός από τα θεμελιώδη θεωρήματα που απέδειξε ο Cauchy: **η τάξη κάθε υποομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας**. Για κάθε δοθείσα τάξη, ο αριθμός των διακεκριμένων ομάδων (αυτών που έχουν διαφορετικούς πολλαπλασιαστικούς πίνακες) είναι πεπερασμένος, αλλά το ποιός είναι αυτός ο αριθμός για κάποια δοθείσα τάξη (τη γενική τάξη n) δεν είναι γνωστό, ούτε φαίνεται πιθανό να γίνει γνωστό κατά τη διάρκεια της ζωής μας. Έτσι, ήδη στο ξεκίνημα μίας θεωρίας που σε πρώτη ματιά φαίνεται τόσο απλή όσο το ντόμινο, σκοντάφτουμε πάνω σε άλυτα προβλήματα.

Έχοντας κατασκευάσει τον «πολλαπλασιαστικό πίνακα» μιας ομάδας, ξεχνούμε την παραγωγή του από μεταθέσεις (αν ο πίνακας προέκυψε κατ' αυτόν τον τρόπο) και θεωρούμε ότι ο πίνακας ορίζει μία αφηρημένη ομάδα: δηλαδή, τα σύμβολα $I, A, B, \dots$ δεν έχουν άλλο νόημα πέραν εκείνου που συνεπάγεται ο συνδυαστικός κανόνας, όπως στο $CD=A$, $DC=E$, κλπ. Αυτή η αφηρημένη άποψη είναι σήμερα η τρέχουσα. Δεν οφείλεται στον Cauchy αλλά στον Cayley, που την εισήγαγε το 1854. Ούτε είχε διατυπωθεί με τελείως ικανοποιητικό τρόπο το σύστημα αξιωμάτων για ομάδες ως την πρώτη δεκαετία του 20^{ου} αιώνα.

Όταν οι πράξεις μιας ομάδας ερμηνεύονται ως μεταθέσεις ή ως περιστροφές ενός στερεού σώματος, ή ως πράξεις με συγκεκριμένο νόημα σε οποιονδήποτε άλλο κλάδο των μαθηματικών όπου έχουν εφαρμογή οι ομάδες, μιλάμε για μία πραγματοποίηση της αφηρημένης ομάδας, της ορισμένης από τον πίνακα πολλαπλασιασμού. Μία δοθείσα αφηρημένη ομάδα μπορεί να έχει πληθώρα πραγματοποιήσεων. Αυτός είναι ένας από τους λόγους που οι ομάδες έχουν θεμελιώδη σημασία στα σύγχρονα μαθηματικά: μια αφηρημένη, υποκείμενη δομή

(έτσι όπως συνοψίζεται στο πολλαπλασιαστικό πίνακα) μιάς και της αυτής ομάδας αποτελεί ουσιαστικό χαρακτηριστικό διαφορών φαινομενικά ασυσχέτιστων μεταξύ τους θεωριών. Έτσι, ύστερα από μία εντατική μελέτη των ιδιοτήτων της αφηρημένης ομάδας, επιτυγχάνεται μια γνώση των εν λόγω θεωριών και των αμοιβαίων σχέσεων τους από μία και μόνο διερεύνηση. Για να σταθούμε σε ένα μόνο παράδειγμα, το σύνολο όλων των στροφών οι οποίες στρέφουν ένα κανονικό εικοσάεδρο (εικοσάπλευρο κανονικό στερεό) γύρω από τους άξονες συμμετρίας τους, έτσι ώστε μετά από κάθε στροφή του συνόλου, ο όγκος του στερεού να καταλαμβάνει τη ίδια θέση όπως πριν, σχηματίζει μια ομάδα και αυτή η ομάδα των στροφών, εκφρασμένη με αφηρημένο τρόπο, συμπίπτει με εκείνη στην οποία οδηγούν οι μεταθέσεις των ριζών, όταν επιχειρήσουμε να επιλύσουμε την γενική εξίσωση 5^{ου} βαθμού.

Ακόμα αυτή η ίδια ομάδα εμφανίζεται στη θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων. Αυτό υποβάλλει την ιδέα πως, αν και είναι αδύνατη η επίλυση της γενικής πεμπτοβάθμιας εξίσωσης με αλγεβρικό τρόπο, ίσως η εξίσωση να λυθεί και στην πραγματικότητα μπορεί, με τη βοήθεια των ελλειπτικών συναρτήσεων. Τέλος, όλα αυτά μπορεί να αποδοθούν γεωμετρικά, περιγράφοντας τις στροφές ενός εικοσάεδρου. Αυτή η όμορφη ενοποίηση υπήρξε έργο του Felix Klein(1849–1925) στο βιβλίο του πάνω στο εικοσάεδρο (1884).

Ο Cauchy ήταν ένας από τους μεγάλους στη θεωρία των ομάδων μετάθεσης. Από τις ημέρες του ως σήμερα έχει γίνει τεράστια δουλειά στο αντικείμενο αυτό και η ίδια η θεωρία έχει επεκταθεί κατά πολύ με την ένταξη των απείρων ομάδων που έχουν άπειρα στοιχεία τα οποία μπορεί να αριθμηθούν με 1, 2, 3, ... και επιπλέον με την ένταξη των ομάδων των συνεχών κινήσεων. Στην τελευταία κατηγορία, μια πράξη των ομάδων μετακινεί ένα σώμα σε άλλη θέση με απειροστές (όσο θέλουμε μικρές) μετατοπίσεις, όχι όπως στην περίπτωση της εικοσαεδρικής ομάδας που περιγράψαμε πιο πάνω, όπου οι στροφές στρέφουν όλο το σώμα κατά πεπερασμένη γωνία. Έχουμε και τώρα ομάδες με απειρία στοιχείων (η ορολογία εδώ δεν είναι τόσο ακριβής, είναι όμως κατάλληλη για να δείξει το βασικό σημείο, την διάκριση μεταξύ διακριτών και συνεχών ομάδων). Ακριβώς όπως η θεωρία των πεπερασμένων διακριτών ομάδων είναι η υποκείμενη δομή για τη θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων, έτσι είναι και η θεωρία των απείρων, συνεχών ομάδων για τη θεωρία των διαφορετικών εξισώσεων, εκείνων με την μεγαλύτερη σημασία στη μαθηματική φυσική. Παίζοντας λοιπόν με τις ομάδες, ο Cauchy δεν έχανε τον χρόνο του.

Κλείνοντας αυτήν την περιγραφή των ομάδων, μπορούμε να δείξουμε πως οι ομάδες μεταθέσεων που μελέτησε ο Cauchy έχουν χρησιμεύσει στη σύγχρονη θεωρία της ατομικής δομής. Μια μετάθεση, έστω η (xy) , που το σύμβολο της περιέχει ακριβώς δύο γράμματα, ονομάζεται **αντιμετάθεση**. Αποδεικνύει εύκολα ότι κάθε μετάθεση είναι συνδυασμός αντιμεταθέσεων. Για παράδειγμα,

$$(abcdef) = (ab)(ac)(ad)(ae)(af),$$

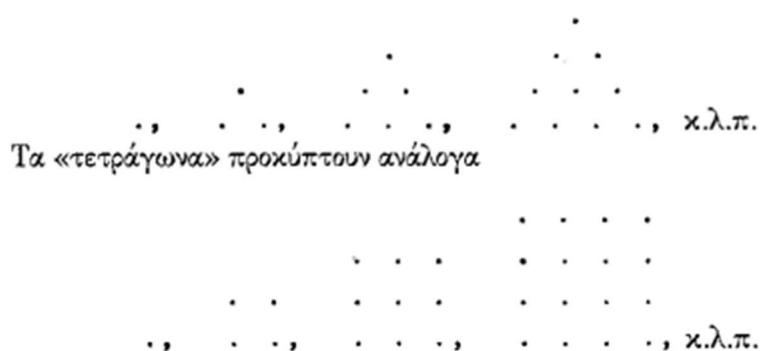
από όπου γίνεται φανερός ο κανόνας με τον οποίο γράφεται κάθε μετάθεση ως συνδυασμός αντιμεταθέσεων. Τώρα, είναι τελείως λογικό να υποθέσουμε ότι τα ηλεκτρόνια σε ένα άτομο δεν διακρίνονται μεταξύ τους, δηλαδή ότι, αν σε ένα άτομο δυο ηλεκτρόνια αλλάξουν θέση μεταξύ τους, το άτομο θα παραμείνει αμετάβλητο. Έστω χάριν απλότητας, ότι το άτομο περιέχει ακριβώς τρία ηλεκτρόνια, ας πούμε τα a, b, c . Οι πράξεις που συναποτελούν την ομάδα των μεταθέσεων των a, b, c (εκείνη της οποίας δώσαμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού) θα αντιστοιχούν σε όλες τις εναλλαγές ηλεκτρονίων που αφήνουν το άτομο αναλλοίωτο.

Από το σημείο αυτό ως την κατανόηση των φασματικών γραμμών του φωτός που εκπέμπεται από διεγερμένο αέριο αποτελούμενο από άτομα, μπορεί το βήμα να φαίνεται μεγάλο, όμως έχει γίνει και οι ειδικοί στην κβαντομηχανική βρίσκουν

ικανοποιητική στήριξη για τη διασάφηση των φασμάτων (και άλλων φαινομένων που σχετίζονται με την ατομική δομή) στη θεωρία των ομάδων μεταθέσεων. Φυσικά, ο Cauchy δεν είχε διαβλέψει τέτοιες εφαρμογές της θεωρίας που ανέπτυξε για δική του χρήση, ούτε την εφαρμογή της στο ξεχωριστής σημασίας αίνιγμα των αλγεβρικών εξισώσεων. Μέχρι τα 27 του χρόνια (1816) ο Cauchy είχε ανέλθει στην πρώτη γραμμή των ζώντων μαθηματικών. Ο μόνος σοβαρός του αντίπαλος ήταν ο αθόρυβος Gauss, 12 μεγαλύτερος του. Η εργασία του Cauchy το **1814** πάνω στα ορισμένα ολοκληρώματα με όρια ολοκλήρωσης μιγαδικούς αριθμούς, στάθηκε το ξεκίνημα της μεγάλης του σταδιοδρομίας ως ανεξαρτήτου δημιουργού και άφθαστου οικοδόμου της θεωρίας των συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής. Η λεπτομερέστατη εργασία του Cauchy πάνω στο αντικείμενο δημοσιεύθηκε μόλις το **1827**.

Η καθυστέρηση οφειλόταν πιθανότατα στο μέγεθος της εργασίας, περίπου 180 σελίδες. Ο Cauchy δεν είχε κανένα απολύτως πρόβλημα να στέλνει ογκώδεις εργασίες 80 έως 300 σελίδες στην Ακαδημία ή στην Polytechnique για να τις τυπώνουν με τις περιορισμένες οικονομικές τους δυνατότητες.

Τον επόμενο χρόνο (**1815**) ο Cauchy προξένησε μεγάλη αίσθηση με την απόδειξη ενός από τα μεγάλα θεωρήματα που ο Fermat είχε εγκαταλείψει στους αμήχανους μεταγενέστερους, κάθε θετικός ακέραιος είναι άθροισμα τριών «τριγώνων», τεσσάρων «τετραγώνων», πέντε «πενταγώνων», έξι «εξαγώνων» κλπ. με το μηδέν σε κάθε περίπτωση λογαριάζεται ως ένας αριθμός του είδους που μας ενδιαφέρει. Ένα « τρίγωνο » είναι ένας από τους αριθμούς 0, 1, 3, 6, 15, 21... ο οποίος προκύπτει από το χτίσιμο κανονικών «ισοπλεύρων» τριγώνων με τελείες.



όπου ο τρόπος με τον οποίο ένα τετράγωνο προκύπτει από προηγούμενο του είναι φανερός. Ανάλογα, τα «πεντάγωνα» είναι κανονικά πεντάγωνα οικοδομημένα με τελείες, το ίδιο συμβαίνουν με τα «εξαγώνων» κλπ. Η απόδειξη δεν ήταν απλή υπόθεση. Οι δυσκολίες της είχαν φανεί ανυπέρβλητες στους Euler, Lagrange και Legendre. Ο Gauss είχε αποδείξει νωρίς την περίπτωση των «τριγώνων».

Σαν να ήθελε να δείξει πως δεν περιοριζόταν μόνο σε πρώτης τάξης εργασία στα καθαρά μαθηματικά, ο Cauchy πήρε στη συνέχεια το μεγάλο βραβείο της Ακαδημίας το **1816** για μια «θεωρία διάδοσης κυμάτων στην επιφάνεια βαρέως ρευστού απεριόριστου βάθους», τα κύματα των ωκεανών προσομοιάζουν σε αυτόν τον τύπο κυμάτων. Αυτή η εργασία τελικά (όταν τυπώθηκε) ξεπέρασε τις 300 σελίδες. Στα 27 του ο Cauchy είχε βάλει πλώρη για να γίνει μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών, κάτι το εξαιρετικά ασυνήθιστο για έναν τόσο νέο άνθρωπο. Η πρώτη θέση που θα έμενε κενή στο μαθηματικό τμήμα θα δινόταν σε αυτόν, τον διαβεβαίωσαν ανεπίσημα. Η δημοτικότητα του έφτασε στο υψηλότερο σημείο της.

Το **1816**, ο Cauchy ήταν έτοιμος να εκλεγεί μέλος της Ακαδημίας. Δεν

υπήρχαν όμως κενές θέσεις. Δύο από αυτές πάντως, αναμενόταν να μείνουν σύντομα κενές λόγω της ηλικίας των κατόχων τους, ο Monge ήταν 70 χρονών και ο Carnot 63. Ο Carnot υπήρξε πρόδρομος του Poncelet. Όφειλε τη θέση του στην Ακαδημία στις έρευνες του που αναστήλωσαν και επεξέτειναν τη συνθετική γεωμετρία του Pascal και του Desargues και στην ηρωική του προσπάθεια να θεμελιώσει τον λογισμό σε στέρεες λογικές βάσεις. Πέρα από τα μαθηματικά, ο Carnot κέρδισε ζηλευτό όνομα στη γαλλική ιστορία, όντας **η μεγαλοφυΐα που το 1793 οργάνωσε 14 στρατιές για να νικήσει τους 500.000 στρατιώτες που ξαπέστειλαν εναντίον της Γαλλίας οι ενωμένοι αντιδραστικοί της Ευρώπης**. Όταν ο Ναπολέων κατέλαβε την εξουσία το 1796, ο Carnot εκτοπίστηκε διότι αντιτάχθηκε στον τύραννο *«Είμαι αδιάλλακτος αντίπαλος όλων των βασιλιάδων»*, είχε πει. Μετά την εκστρατεία στη Ρωσία το 1812, προσέφερε τις υπηρεσίες του ως στρατιώτης, με έναν όρο όμως, θα πολεμούσε για τη Γαλλία, όχι για την Γαλλική Αυτοκρατορία του Ναπολέοντα.

9. Μέλος της Ακαδημίας Επιστημών

Κατά την επανοργάνωση της Ακαδημίας Επιστημών μέσα στην πολιτική αναταραχή μετά τις ένδοξες «100 ημέρες» του Ναπολέοντα που ακολούθησαν την δραπετεύση του από την Έλβα, οι Carnot και Monge εκδιώχθηκαν. Στην περίπτωση του διαδόχου του Carnot δεν ακούστηκαν σχόλια, όταν όμως ο νεαρός Cauchy κάθισε ήσυχα στη θέση του Monge ξέσπασε θύελλα. Η αποπομπή του Monge συνιστούσε πολιτικά αναξιοπρεπή στάση και όποιος επωφελούταν έδειχνε τουλάχιστον έλλειψη ευαισθησίας. Ο Cauchy βέβαια δεν είχε προβλήματα με τη συνείδηση του.

Λέγεται πως ο υποπόταμος έχει τρυφερή καρδιά, το βεβαιώνουν όσοι έχουν δοκιμάσει αυτή τη λιχουδιά ψητή στο φούρνο, συνεπώς το χοντρό πετσί δεν αποτελεί απαραίτητα βάσιμη ένδειξη του τι κρύβεται στο εσωτερικό ενός ανθρώπου. Λατρεύοντας του Βουρβόνους και πιστεύοντας πως η δυναστεία τους αποτελούσε απ' ευθείας εκπρόσωπο του Θεού για τη διακυβέρνηση της Γαλλίας, έστω και αν οι ουρανοί έστειλαν έναν ανίκανο παλιάτσο όπως ο Κάρολος ο XVIII, ο Cauchy έκανε απλώς το καθήκον του προς τον Θεό και τη Γαλλία όταν γλιστρούσε στη θέση του Monge. Το ότι ήταν ειλικρινής και όχι κάποιος που αναζητούσε την προβολή, θα φανεί από την αφοσίωση που έδειξε στον αγιοποιημένο Κάρολο.

Τιμητικές και σημαντικές θέσεις προσφέρθηκαν τώρα αφειδώς στον μεγαλύτερο μαθηματικό της Γαλλίας, μερικά χρόνια πριν κλείσει τα 30. Από το **1815** (όταν ήταν 26 χρονών) ο Cauchy παρέδιδε μαθήματα ανάλυσης στην Polytechnique. Τώρα έγινε καθηγητής και πριν περάσει καιρός διορίστηκε επίσης στο College de France και στη Σορβόνη.

10. Η διεθνής αναγνώριση

Όλα τα καλά βρίσκονταν στον δρόμο του. Η μαθηματική του δραστηριότητα ήταν απίστευτη, μερικές φορές παραδιδόταν στην Ακαδημία δύο μεγάλα άρθρα σε μία εβδομάδα. Εκτός από τη δική του έρευνα, έκανε αναρίθμητες κριτικές αναφορές στις εργασίες άλλων που υποβάλλονταν στην Ακαδημία και έβρισκε χρόνο για μία συνεχή σχεδόν παραγωγή σύντομων άρθρων πάνω σε όλους περίπου τους κλάδους των μαθηματικών, καθαρών και εφαρμοσμένων.

Έγινε γνωστότερος από τον Gauss στους Ευρωπαίους μαθηματικούς. Ειδήμονες πλάι στους σπουδαστές έρχονταν να ακούσουν τις όμορφες, σαφείς διαλέξεις του πάνω στις νέες θεωρίες που ανέπτυξε, ιδιαίτερα στην ανάλυση και στη μαθηματική φυσική. **Το ακροατήριο που περιελάμβανε γνωστούς μαθηματικούς από Βερολίνο, Μαδρίτη, και Πετρούπολη.**

11. Ο γάμος του

Εν μέσω όλης αυτής της δραστηριότητας, ο Cauchy βρήκε χρόνο και για φλερτάρισμα. Η καλή του, η Aloise de Bure, που την παντρεύτηκε το **1818** και έζησε μαζί της κοντά 40 χρόνια, ήταν κόρη μιας καλλιεργημένης παλιάς οικογένειας και, όπως ίδιος, φανατική Καθολική. Απέκτησαν δυο κόρες που ανατράφηκαν με τον τρόπο που είχε ανατραφεί ο Cauchy.

12. Η μεθοδολογία του

Μία μεγάλη εργασία αυτής της περιόδου πρέπει να αναφερθεί. Με την ενθάρρυνση του Laplace και άλλων, ο Cauchy το **1821** παρουσίασε για δημοσίευση τη σειρά των διαλέξεων στην ανάλυση που έδινε στην Polytechnique. Αυτό το έργο αποτελούσε επί μακρόν το πρότυπο της αυστηρότητας και της ακρίβειας. Ακόμη και σήμερα, οι ορισμοί του Cauchy για το όριο και τη συνέχεια, όπως και μεγάλο μέρος όσων έγραψε για την σύγκλιση των απειροσειρών σε αυτή τη σειρά διαλέξεων, θα βρεθούν σε κάθε προσεκτικά γραμμένο βιβλίο λογισμού. Το παρακάτω απόσπασμα από τον πρόλογο δείχνει τι είχε στο νου του και τι κατάφερε. «Επιδίωξα να δώσω στις μεθόδους (της ανάλυσης) όλη την αυστηρότητα που απαιτείται στη γεωμετρία, αποφεύγοντας τελείως τα λογικά συμπεράσματα που βασίζονται στη γενικότητα της άλγεβρας. (Σε σύγχρονη ορολογία, στον φορμαλισμό της άλγεβρας).

Συμπεράσματα αυτού του είδους, αν και γίνονται συνήθως αποδεκτά, κυρίως κατά το πέρασμα από τις συγκλίνουσες στις αποκλίνουσες σειρές και από τις πραγματικές ποσότητες στις φανταστικές, δεν μπορεί να θεωρηθούν, νομίζω, τίποτα περισσότερο από επαγωγές που σε ορισμένες περιπτώσεις υποδεικνύουν την αλήθεια, δε συμφωνούν όμως και πολύ με την ακρίβεια των μαθηματικών για την οποία διατεινόμαστε. Πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι τείνουν να αποκτήσουν μια αόριστη ισχύ, οφειλόμενη σε αλγεβρικούς τύπους, ενώ στην πραγματικότητα, στην πλειονότητά τους αυτοί οι τύποι ισχύουν μόνο υπό ορισμένες συνθήκες και για ορισμένες τιμές των ποσοτήτων που περιλαμβάνουν. Με τον προσδιορισμό αυτών των συνθηκών και των τιμών και με την απόδοση ακριβούς και σταθερού νοηματικού περιεχομένου στον συμβολισμό που χρησιμοποιώ, θα εξοβελίσω κάθε αβεβαιότητα».

13. Η παραγωγικότητα του

Η παραγωγικότητα του Cauchy ήταν τόσο εκπληκτική ώστε χρειάστηκε να καταφύγει στη δημιουργία ενός περιοδικού, του **Exercices de Mathematiques** (1826–1830), που συνεχίστηκε σε μια δεύτερη σειρά, **Exercices d'Analyse Mathematique et de Physique**, για τη δημοσίευση αποκλειστικά δικών του επεξηγηματικών ή πρωτότυπων εργασιών, στα καθαρά και εφαρμοσμένα μαθηματικά. Αυτές οι εργασίες αγοράζονταν και μελετιόνταν με ζήλο και έπαιξαν αποφασιστικό ρόλο στην αναμόρφωση μαθηματικού αισθητήριου ως το 1860.

Μία επίπτωση καταπληκτικής δραστηριότητας του Cauchy θα μπορούσε να χαρακτηριστεί διασκεδαστική. Το **1835** η Ακαδημία Επιστημών άρχισε τη δημοσίευση του εβδομαδιαίου δελτίου της (**Comptes rendus**). Εδώ υπήρχε ελεύθερο πεδίο για τον Cauchy, που άρχισε να κατακλύζει τη νέα έκδοση με σημειώσεις και μακροσκελείς εργασίες, μερικές φορές περισσότερες από μια εβδομάδα. Φοβισμένη από την γρήγορη αύξηση των εξόδων εκτύπωσης, η Ακαδημία έβαλε έναν περιορισμό, ο οποίος ισχύει και σήμερα, σύμφωνα με τον οποίο **απαγορευόταν η δημοσίευση άρθρων που ξεπερνούσαν τις 4 σελίδες**. Έτσι, το πληθωρικό στυλ του ανάγκασε τον Cauchy να στραφεί σε άλλες κατευθύνσεις για την δημοσίευση των μεγαλύτερων εργασιών του, ανάμεσα τους και μια μεγάλη 300 σελίδων, στη θεωρία αριθμών. Ευτυχισμένος με τον γάμο του και εξαιρετικά παραγωγικός στην έρευνα

του, ήταν ώρα του να χαρεί την τύχη του, όταν η επανάσταση του 1830 εκθρόνισε τον αγαπημένο του Κάρολο.

14. Ο Cauchy στην Ελβετία

Ποτέ η μοίρα δεν γέλασε περισσότερο παρά όταν έκανε νεύμα στον Cauchy να αφήσει την θέση του Monge στην Ακαδημία και να ακολουθήσει τον Βασιλιά του στην εξορία. Ο Cauchy δεν μπορούσε να αρνηθεί, είχε ορκιστεί ιερό όρκο πίστης στον Κάρολο και για τον Cauchy ένας όρκος ήταν όρκος. Προ τιμής του, ο Cauchy στα 40 του εγκατέλειψε όλα του τα πόστα και πήγε στην ακούσια εξορία.

Δεν αισθάνθηκε λύπη για αυτό. Οι ματωμένοι δρόμοι του Παρισιού έκαναν το ευαίσθητο στομάχι του να ανακατεύεται. Πίστευε ακράδαντα πως ο καλός Βασιλιάς Κάρολος δεν είχε καμία ευθύνη για την αιματοχυσία. Αφήνοντας την οικογένεια του στο Παρίσι αλλά χωρίς να παραιτηθεί από την θέση του στην Ακαδημία, ο Cauchy πήγε πρώτα στην Ελβετία, όπου προσπαθούσε να ξεχάσει τα προσωπικά του προβλήματα στις επιστημονικές συναντήσεις και στην έρευνα.

Δεν ζήτησε ποτέ του την παραμικρή χάρη από τον Κάρολο και δεν ήξερε καν αν ο εξόριστος βασιλιάς ήταν ενήμερος για την εθελοντική του θυσία για λόγους αρχής. Δεν πέρασε πολύς καιρός και ένας πιο φωτισμένος Κάρολος, ο Κάρολος Αλβέρτος, Βασιλιάς της Σαρδηνίας, άκουσε πως ο διάσημος Cauchy δεν είχε δουλειά και του προσέφερε μια θέση καθηγητή της μαθηματικής φυσικής στο Τορίνο.

15. Ο Cauchy στην Ιταλία

Ο Cauchy ήταν πέρα για πέρα ευτυχισμένος. Γρήγορα έμαθε Ιταλικά και παρέδιδε τα μαθήματα του σε αυτή την γλώσσα. Η πολλή δουλειά και η υπερδιέγερση κάποτε τον αρρώστησαν και προς μεγάλη του λύπη (όπως έγραψε στην γυναίκα του) αναγκάστηκε για ένα διάστημα να δουλεύει τα βράδια. Κάποιες διακοπές στην Ιταλία, στη διάρκεια των οποίων επισκέφθηκε τον Πάπα, τον βοήθησαν να ξαναβρεί την υγεία του και επέστρεψε στο Τορίνο προσβλέποντας μία μακρά ζωή αφοσιωμένος στην διδασκαλία και στην έρευνα. Ήταν τότε που ο αμβλύς Κάρολος ο 10^{ος} εισέβαλε στη ήσυχη ζωή του μαθηματικού και θέλοντας να επιβραβεύσει τον πιστό οπαδό του, του έκανε αντίθετα, μοναδική ζημιά.

Το 1833 ο Cauchy επιφορτίστηκε με το καθήκον της εκπαίδευσης του κληρονόμου του Καρόλου, του δεκατριάχρονου Δούκα του Bordeaux. Η δουλειά της αρσενικής γκουβερνάντας και του φροντιστή της στοιχειώδους εκπαίδευσης ήταν το τελευταίο πράγμα στη Γη που επιθυμούσε ο Cauchy. Παρ' όλα αυτά, πιστός στο καθήκον του, έστειλε θετική απάντηση στον Κάρολο που βρισκόταν τότε στην Πράγα και σήκωσε τον σταυρό της αφοσίωσης του. Τον επόμενο χρόνο ήρθε κοντά του και η οικογένεια του. Η εκπαίδευση του κληρονόμου των Βουρβόνων αποδείχτηκε μεγάλος μπελάς. Από νωρίς το πρωί έως αργά το βράδυ, με ελάχιστα διαλείμματα για φαγητό, ο Cauchy τραβούσε τα μαρτύρια του με το βασιλικό παλιόπαιδο.

Όχι μόνο έπρεπε να απλοποιεί τα στοιχειώδους επιπέδου μαθήματα για να μπορεί να τα αφομοιώσει παραχαϊδεμένο αγόρι, αλλά έπρεπε να προσέχει επίσης να μην πέσει στο πάρκο και χτυπήσει τα γόνατά του. Δεν χρειάζεται να πούμε πως το μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας του Cauchy αναλωνόταν σε συζητήσεις πάνω στην ιδιαιτέρου τύπου ηθική φιλοσοφία με την οποία ήταν διαποτισμένος για αυτό ίσως είναι καλό που η Γαλλία αποφάσισε τελικά να μη δεχθεί την επιστροφή των Βουρβόνων, αλλά άφησε αυτούς και τους πολλούς απογόνους τους ως έπαθλο για τις θυγατέρες εκατομμυριούχων στο διεθνές νυφοπάζαρο.

Παρά τη συνεχή παρακολούθηση του μαθητή του, ο Cauchy κατάφερε κάπως να διατηρήσει την επαφή του με τα μαθηματικά, καταφεύγοντας κάπου –κάπου στους

ιδιωτικούς του χώρους για να πετάξει έναν τύπο ή να γράψει στα γρήγορα καμιά παράγραφο. Η πιο εντυπωσιακή εργασία αυτής της περιόδου ήταν η εκτενής μελέτη του πάνω στην ανάλυση του φωτός, όπου ο Cauchy προσπάθησε να εξηγήσει το φαινόμενο της ανάλυσης (του διαχωρισμού του λευκού φωτός σε έγχρωμες δέσμες, λόγω της διαφορετικής διάθλασης των έγχρωμων ακτίνων από τις οποίες συντίθεται το λευκό φως), με βάση την υπόθεση ότι το φως οφείλεται στις ταλαντώσεις ενός ελαστικού μέσου. Αυτή η εργασία παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για την ιστορία της φυσικής, ως ένα παράδειγμα της τάσης, χαρακτηριστικής του 19^{ου} αιώνα, να επιχειρηθούν εξηγήσεις για φυσικά φαινόμενα με τη βοήθεια μηχανικών προτύπων, αντί να κατασκευαστεί μια αφηρημένη μαθηματική θεωρία για τη συσχέτιση παρατηρήσεων. Αυτό ήταν μία απομάκρυνση από την κυρίαρχη πρακτική του Νεύτωνα και των επιγόνων του, αν και είχαν υπάρξει προσπάθειες να «εξηγηθεί» η βαρύτητα, μηχανικά. Σήμερα, η τάση είναι προς την αντίθετη κατεύθυνση, εκείνη μίας καθαρά μαθηματικής συσχέτισης και μίας πλήρους εγκατάλειψης της θεωρίας του αιθέρα, των ελαστικών στερεών ή άλλων μηχανικών εξηγήσεων, που εμφανίζουν περισσότερες δυσκολίες στην κατανόηση από εκείνο που υποτίθεται ότι εξηγούν.

Οι φυσικοί στις ημέρες μας φαίνεται να έχουν πάρει στα σοβαρά την ερώτηση του Byron «Ποιός λοιπόν θα εξηγήσει την εξήγησή;». Η θεωρία του ελαστικού μέσου είχε μια μακρά και λαμπρή επιτυχία και ακόμη και σήμερα κάποιοι από τους τύπους στους οποίους κατέληξε ο Cauchy από τη λανθασμένη του υπόθεση είναι σε χρήση. Όμως, η ίδια η θεωρία εγκαταλείφθηκε όταν, όπως συμβαίνει συχνά, η βελτιωμένη πειραματική τεχνική και τα απρόβλεπτα φαινόμενα (ανώμαλη ανάλυση φωτός σε αυτή την περίπτωση) οδήγησαν σε διαφωνίες με τις προβλέψεις της θεωρίας.

16. Ο Cauchy στο Παρίσι

Ο Cauchy δραπέτευσε από τον μαθητή του το **1838** (ήταν τότε σχεδόν 50 χρονών). Φίλοι του στο Παρίσι από καιρό τον προέτρεπαν να επιστρέψει, ο Cauchy άρπαξε την ευκαιρία, χρησιμοποιώντας ως πρόσχημα την χρυσή επέτειο του γάμου των γονιών του για να πει αντίο στον Κάρολο και όλη του την ακολουθία. Κατ' εξαίρεση, τα μέλη του Ινστιτούτου (του οποίου η Ακαδημία Επιστημόνων ήταν και είναι μέλος) δεν χρειαζόταν να πάρουν όρκο αφοσίωσης στην κυβέρνηση και έτσι ο Cauchy ανέλαβε ξανά το πόστο του. Η μαθηματική του δραστηριότητα έγινε τώρα μεγαλύτερη από ποτέ. Στη διάρκεια των τελευταίων 19 χρόνων της ζωής του παρήγαγε περισσότερα από **500 άρθρα** σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών, περιλαμβανομένης της μηχανικής, της φυσικής και της αστρονομίας. Πολλές απ' αυτές τις εργασίες ήταν εκτενείς πραγματείες.

Οι μπελάδες του όμως δεν είχαν τελειώσει. Όταν χήρεψε μια θέση στο College de France, ο Cauchy εξελέγη ομόφωνα. Εδώ όμως δεν ίσχυε η εξαίρεση και θα έπρεπε να δώσει τον όρκο αφοσίωσης πριν αναλάβει τη θέση. Ο Cauchy επιστράτευσε όλο του το πείσμα και αρνήθηκε να ορκιστεί. Για μια φορά ακόμη ήταν χωρίς δουλειά. Το Bureau des Longitudes μπορούσε όμως να χρησιμοποιήσει έναν μαθηματικό του αναστήματος του. Εξελέγη και εκεί ομόφωνα. Τότε άρχισε μια διασκεδαστική διεγκυστίνδα ανάμεσα στον Βαρόνο Cauchy και το Bureau από τη μια μεριά του σχοινιού και την κυβέρνηση από την άλλη. Έχοντας συνείδηση ότι γινόταν περίγελος του κόσμου, η κυβέρνηση παράτησε την προσπάθεια και ο Cauchy έμεινε στο Bureau χωρίς να ορκισθεί. Το να αψηφήσεις την κυβέρνηση συνιστούσε σοβαρότατη παρανομία, για να μην πούμε προδοσία, όμως ο Cauchy έμεινε στην δουλειά του. Οι συνάδελφοι του στο Bureau στενοχώρησαν την κυβέρνηση αγνοώντας με τρόπο το αίτημα της να εκλέξουν κάποιον, τηρώντας όλους τους τύπους. Επί μια τετραετία ο Cauchy έστρεφε πεισματικά την πλάτη του στην

κυβέρνηση, συνεχίζοντας την δουλειά του. Σε αυτή την περίοδο ανήκουν μερικές από τις σημαντικότερες συνεισφορές του στην μαθηματική αστρονομία. Την αφορμή έδωσε άθελά του ο Leverrier, με την εργασία του πάνω στην Παλλάδα, το **1840**.

Επρόκειτο για μακροσκελή εργασία γεμάτη αριθμητικούς υπολογισμούς, που για να τους ελέγξει κάποιος θα χρειαζόταν όσο χρόνο χρειάστηκε ο συγγραφέας για να τους εκτελέσει. Όταν η εργασία παρουσιάστηκε στην Ακαδημία, οι αξιωματούχοι της άρχισαν να αναζητούν κάποιον που θα είχε την διάθεση να αναλάβει τον απάνθρωπο έλεγχο της ορθότητας των συμπερασμάτων. Ο Cauchy προσφέρθηκε εθελοντικά. Αντί να ακολουθήσει τα ίχνη του Leverrier, γρήγορα βρήκε σύντομα μονοπάτια και επινόησε νέες μεθόδους που τον βοήθησαν να επαληθεύσει και να επεκτείνει την εργασία μέσα σε εντυπωσιακά σύντομο διάστημα. Η αντιπαράθεση με την κυβέρνηση οδήγησε σε κρίση το **1843**, όταν ο Cauchy ήταν 54 χρονών.

Ο Υπουργός δε θέλησε να συνεχίσει να γίνεται ρεζίλι δημοσίως και απαίτησε από το Bureau να προκηρύξει εκλογές για την πλήρωση της θέσης που ο Cauchy αρνιόταν να αφήσει. Ακολουθώντας την συμβουλή των φίλων του, ο Cauchy έκανε γνωστή την υπόθεση στον λαό με ανοικτή επιστολή. Αυτό το γράμμα είναι από τα ωραιότερα πράγματα που έκανε ποτέ του. Όποια και αν είναι η άποψη μας για την δονκιχωτική του υπεράσπιση μιας υπόθεσης που όλοι, εκτός από λίγους ελαφρόμυαλους αντιδραστικούς, ήξεραν πως είχε για πάντα χαθεί, δε μπορούμε παρά να εκτιμήσουμε την άφοβη στάση του Cauchy, ο οποίος με αξιοπρέπεια και χωρίς πάθος έδωσε τη μάχη για την ελευθερία της συνείδησης του. Ήταν η παλιά πάλη υπέρ της ελευθερίας της σκέψης, που εκδηλώθηκε σε μορφή οικεία για μας τώρα, αλλά όχι τότε. Στα χρόνια του Γαλιλαίου, ο Cauchy θα είχε φτάσει στην πύρα αρνούμενος να προδώσει τις πεποιθήσεις του, υπό τον Louis Philippe αρνήθηκε το δικαίωμα σε οποιαδήποτε κυβέρνηση να του αποσπάσει έναν όρκο αφοσίωσης που δεν συμβιβαζόταν με την συνείδηση του και υπέφερε γι' αυτό.

Με τη στάση του κέρδισε τον σεβασμό ακόμη και των εχθρών του και έκανε την κυβέρνηση αντικείμενο περιφρόνησης και για τους ίδιους τους οπαδούς. Δεν άργησαν να εκδηλωθούν οι συνέπειες της ηλίθιας καταπίεσης που ασκούσε η κυβέρνηση, με τρόπο που να τις αισθανθεί η ίδια: οδομαχίες, διαδηλώσεις, απεργίες, εμφύλιος πόλεμος και μια αναπότρεπτη απαίτηση να πάει στον αγύριστο. Ο Louis Philippe και η συμμορία του εκδιώχθηκαν το **1848**. Μία από τις πρώτες ενέργειες της προσωρινής κυβέρνησης ήταν η κατάργηση του όρκου αφοσίωσης. Με μία σπανίζουσα εκδήλωση κοινής λογικής, οι πολιτικοί έδειξαν να αντιλαμβάνονται πως όλοι αυτοί οι όρκοι ήταν είτε περιττοί είτε άνευ αξίας.

Το **1852**, όταν ανέλαβε ο Ναπολέοντας III, ο όρκος ξαναγύρισε. Όμως ο Cauchy είχε ήδη κερδίσει τη μάχη του. Του μηνύθηκε κρυφά ότι μπορούσε να ξαναρχίσει τις διαλέξεις του χωρίς να δώσει όρκο. Και οι δυο πλευρές συμφώνησαν να μην δημιουργήσουν κανένα θέμα επ' αυτού. Η κυβέρνηση δε ζήτησε να την ευχαριστήσουν για τον φιλελευθερισμό της, ούτε ο Cauchy προέβη σε κάτι σχετικό, αλλά συνέχισε τις διαλέξεις του σαν να μην είχε συμβεί τίποτα. Από τότε και έως τέλος της ζωής του, ήταν η δόξα της Σορβόννης. Στο χρονικό διάστημα μεταξύ της επίσημης αστάθειας και της ανεπίσημης σταθερότητας, ο Cauchy βρήκε τον καιρό να σύρει το ξίφος του για να υπεραμυνθεί των Ιησουϊτών. Το ζήτημα ήταν παλιό, οι κρατικοί υπεύθυνοι για την εκπαίδευση επέμεναν ότι η Ιησουϊτική εκπαίδευση επέφερε μια διχαστική δήλωση υποταγής, ενώ οι Ιησουίτες υπεράσπιζαν τη θρησκευτική κατήχηση ως τη μόνη ορθή βάση για την όποια εκπαίδευση. Ήταν μια αντιπαράθεση πάνω σε έδαφος γνώριμο στον Cauchy και ρίχτηκε σε αυτήν με εύγλωττη όρεξη.

Υπερασπίστηκε τους φίλους του με τρόπο συγκινητικό και ειλικρινή, όχι όμως πειστικό. Όποτε ο Cauchy άφηνε τα μαθηματικά, το συναίσθημα υποκαθιστούσε τη λογική. Ο Κριμαϊκός πόλεμος προσέφερε στον Cauchy την τελευταία ευκαιρία για να κερδίσει την αντιπάθεια των πιο πρακτικών συναδέλφων του. Έγινε ενθουσιώδης προπαγανδιστής μίας χωρίς προηγούμενου επιχείρησης, γνωστή ως έργο των σχολών της Ανατολής. «Το Έργο», εννοείται εν προκειμένω, ως ένα ιδιαίτερα καλό έργο.

Ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους πατρώνες του Έργου το 1885, να διορθώσουμε τις ανωμαλίες του παρελθόντος και να θέσουμε ταυτόχρονα υπό έλεγχο τόσο τη Μοσχοβίτικη φιλοδοξία όσο και τον Μωαμεθανό φανατισμό: κυρίως να προετοιμάσουμε την αναγέννηση των ανθρώπων που έχουν αποκτηνωθεί από το Κοράνι. Βαθύτατα επηρεασμένος από την προφανή αναγκαιότητα της αντικατάστασης του Κορανίου, που οδηγούσε στην αποκτήνωση, από κάτι πιο ανθρωπιστικό, ο Cauchy ρίχτηκε στην προσπάθεια υλοποίησης του σχεδίου, «συμπληρώνοντας και στερεώνοντας το έργο του εξανθρωπισμού που τόσο θαυμαστά είχε ξεκινήσει ο γαλλικός στρατός».

Το συμβούλιο των Ιησουϊτών, ευγνώμον για την εξαιρετική βοήθεια του Cauchy, του απένειμε έπαινο για πολλές από τις δραστηριότητες (περιλαμβανόμενης της συλλογής συνδρομών) που στόχευαν στην επίτευξη «της ηθικής αναγέννησης των λαών που βρίσκονταν υπό τα δεσμά του νόμου του Κορανίου, με τον θρίαμβό του Ευαγγελίου να αποτελεί τη μόνη παραδεκτή ανταμοιβή για το τόσο αίμα που χύθηκε» από τους χριστιανούς Γάλλους, Άγγλους, Ρώσους και τους Μωαμεθανούς Τούρκους στον πόλεμο της Κριμαίας. Ήταν τέτοιου είδους αγαθοεργίες που έκαναν μερικούς από τους ανεξίτητους φίλους του Cauchy να τον αποκαλέσουν φαντασμένο υποκριτή. Ο χαρακτηρισμός ήταν τελείως άδικος. Ο Cauchy ήταν ένας από τους ειλικρινέστερους φανατικούς που έζησαν ποτέ. Το τελεσίδικο αποτέλεσμα του «Έργου» ήταν η ιδιαίτερα απεχθής σφαγή τον Μάιο του 1860. Ο Cauchy δεν έζησε για να δει την κορωνίδα των προσπαθειών του.

Η εκτίμηση προς τους μεγάλους μαθηματικούς επηρεάζεται από εναλλαγές των περιστάσεων, όπως συμβαίνει άλλωστε και με άλλους ξεχωριστούς ανθρώπους. Για μεγάλο διάστημα μετά τον θάνατο του, ακόμη και σήμερα, ο Cauchy δέχτηκε αυστηρή κριτική για την υπερπαραγωγή έργου και την βιασύνη στην συνήθεια. Η συνολική παραγωγή του είναι **789 άρθρα** (πολλά από αυτά πολύ εκτεταμένα) που καταλαμβάνουν **24** μεγάλους τόμους. Η κριτική αυτού του είδους φαίνεται ότι δεν ευσταθεί για έναν άνθρωπο ο οποίος, παρά το κάποιο όχι υψηλής ποιότητας έργο του, έχει παραγάγει και τεράστιο πρώτης τάξης έργο και ασκείται συνήθως από όσους έχουν κάνει λίγα και μάλιστα όχι υψηλού βαθμού πρωτοτυπίας.

Ο ρόλος του Cauchy στα σύγχρονα μαθηματικά είναι από τους κεντρικούς. Αυτό σήμερα ομολογείται σχεδόν απ' όλους, αν και με ορισμένα μουντρινά. Από τον θάνατο του και μετά, ιδιαίτερα τις τελευταίες δεκαετίες, η φήμη του ως μαθηματικού χαρακτηρίζεται από σταθερή άνοδο. Οι μέθοδοι που εισήγαγε, το συνολικό πρόγραμμα του που εγκαινίασε την πρώτη περίοδο της σύγχρονης αυστηρότητας στα μαθηματικά και η σχεδόν απαράμιλλη επινοητικότητα του, άφησαν την σφραγίδα τους στη μαθηματική επιστήμη, μία σφραγίδα που, όσο μπορούμε τώρα να δούμε, θα είναι ορατή για πολλά χρόνια ακόμα.

Μία φαινομενικά ασήμαντη λεπτομέρεια στην επιβλητική μάζα των νέων πραγμάτων που έδωσε ο Cauchy, είναι ένα ακόμη δείγμα προφητικής πρωτοτυπίας. Αντί να χρησιμοποιήσει τον «φανταστικό» $i (= \sqrt{-1})$, πρότεινε να επιτευχθούν όλα αυτά που οι μιγαδικοί αριθμοί κάνουν στα μαθηματικά, δουλεύοντας με ισοδυναμίες modulo $(i^2 + 1)$. Αυτό έγινε το 1847. Το άρθρο, ένα από τα σύντομα, δεν κίνησε την

προσοχή. Και όμως είναι το σπέρμα του λεγόμενου «**προγράμματος του Kronecker**», που έφερε επανάσταση σε μερικές από τις θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών. Στις κοινωνικές του επαφές ο Cauchy ήταν εξαιρετικά ευγενικός, για να μην πούμε και γλοιώδης μερικές φορές, όπως όταν πχ. έψαχνε να βρει συνδρομητές για κάποια από τις κονταρομαχίες του. Οι συνθήκες του ήταν μετρημένες και σε όλα τα πράγματα, με εξαίρεση τα μαθηματικά και τη θρησκεία, ήταν μετριοπαθής. Ως προς την τελευταία στερούταν κοινής λογικής. Οποιοσδήποτε τον πλησίαζε, ήταν υποψήφιος προσήλυτος. Όταν ο **William Thomson** (Λόρδος **Kelvin**) ως νέος 21 ετών επισκέφθηκε τον Cauchy για να συζητήσουν μαθηματικά, ο τελευταίος σπατάλησε την ώρα προσπαθώντας να προσηλυτίσει τον επισκέπτη του, πιστό τότε της ελευθερίας Σκωτικής εκκλησίας στον καθολικισμό.

Και ο Cauchy είχε το μερίδιο του σε αντιπαράθεσεις για ζητήματα προτεραιότητας και οι αντίπαλοι του τον κατηγορούσαν για πλεονεξία και ατιμία. Ο τελευταίος χρόνος της ζωής του αμαυρώθηκε από μια τέτοια σύγκρουση, όπου φαινόταν να έχει αυτός άδικο. Όμως με το σύνηθες πείσμα του σε θέματα αρχών, αγνόησε την κατακραυγή και επέμεινε με γλυκύτητα και επιμονή.

Μια άλλη παραξενιά συνέβαλε στο να μην είναι δημοφιλής ανάμεσα στους συναδέλφους του. Στις επιστημονικές ακαδημίες και εταιρείες αναμένεται πως η ψήφος κάποιου για έναν υποψήφιο βασίζεται αποκλειστικά στην επιστημονική αξία του τελευταίου, οποιαδήποτε άλλη στάση θεωρείται αήθης. Χωρίς να γνωρίζουμε αν έτσι είχαν τα πράγματα, ο **Cauchy κατηγορήθηκε πως ψήφισε με βάση τις θρησκευτικές και πολιτικές του απόψεις**. Τα τελευταία του χρόνια πικράθηκε από ότι θεωρούσε ως έλλειψη κατανόησης εκ μέρους των συναδέλφων του για αυτήν και παρόμοιες αδυναμίες. Καμία πλευρά δεν ήθελε να δει την άποψη ης άλλης.

Ο Cauchy πέθανε μάλλον απροσδόκητα στο 68^ο έτος της ηλικίας του, στις **23.05.1857**. Επιδιώκοντας να θεραπευτεί από μία βρογχίτιδα, είχε αποσυρθεί στην εξοχή, όπου όμως προσβλήθηκε από πυρετό που αποδείχθηκε μοιραίος. Λίγες ώρες πριν από τον θάνατο του μιλούσε ζωηρά με τον Αρχιεπίσκοπο Παρισίων σχετικά με κάποια φιλανθρωπικά έργα που είχε κατά νου, η φιλανθρωπία ήταν ένα από τα διαρκή ενδιαφέροντα του. Οι τελευταίες του λέξεις απευθύνονταν στον Αρχιεπίσκοπο «**Οι άνθρωποι φεύγουν, τα έργα τους όμως μένουν**».

17. Ορισμός της συνάρτησης σύμφωνα με τον Cauchy

Προκειμένου να ορίσει ο Cauchy την συνάρτηση και ακολούθως το όριο της, ξεκινά ορίζοντας τις έννοιες «αριθμός» (nombres) και «ποσότητα» (quantite) που κατά κάποιο τρόπο αντιστοιχούν στις δικές μας έννοιες θετικός πραγματικός και πραγματικός αριθμός. Γράφει ότι αριθμός είναι το «απόλυτο» μέτρο ενός μεγέθους και η ποσότητα είναι ένας αριθμός που έχει στο αριστερά του το σύμβολο + ή -.

Περιγράφει το πώς γίνονται πράξεις με τα +, -. Μεταξύ άλλων περιγράφει και τον κανόνα «πλην επί πλην κάνει συν». Από το βιβλίο των Bradley Sandifer:

«Αρχικά θα υποδείξουμε ποιά έννοια θα είναι κατάλληλη να επισυνάψουμε για τις λέξεις αριθμός και ποσότητα. Πάντα θα θεωρούμε τους αριθμούς με την έννοια που χρησιμοποιούνται στην αριθμητική, όπου οι αριθμοί προκύπτουν από το απόλυτο μέτρο των μεγεθών και θα χρησιμοποιούμε τον όρο ποσότητες μόνο για πραγματικές θετικές ή αρνητικές ποσότητες, δηλαδή που ακολουθούν τα πρόσημα + ή - . Επιπλέον θεωρούμε αυτές τις ποσότητες για να εκφράσουμε την αύξηση και την μείωση, έτσι ώστε ένα δοσμένο μέγεθος θα αντιπροσωπευθεί από έναν αριθμό μόνο αν θέλουμε να το συγκρίνουμε με ένα άλλο μέγεθος ίδιου τύπου που λαμβάνεται σαν μονάδα και στον ίδιο αριθμό προηγείται το πρόσημο + ή -, αν το σκεφτούμε, σαν να είναι δυνατόν να αυξηθεί ή να μειωθεί ένα δοσμένο μέγεθος ίδιου τύπου».

Στη συνέχεια περιγράφει την έννοια της «μεταβλητής» (variable) η οποία προετοιμάζει την έννοια της συνάρτησης. Ουσιαστικά θα ορίσει την συνάρτηση μέσω δύο μεταβλητών που αλληλοσυνδέονται. Σήμερα στην θεμελίωση του απειροστικού λογισμού, δεν δίνεται ορισμός της μεταβλητής αλλά η έννοια χρησιμοποιείται σε όλες σχεδόν τις μαθηματικές συζητήσεις. «Ονομάζουμε μεταβλητή μια ποσότητα αν μπορεί να θεωρηθεί ότι μπορεί να πάρει διαδοχικά πολλές διαφορετικές τιμές. Συνήθως συμβολίζουμε μια τέτοια ποσότητα με ένα γράμμα από το τέλος της αλφαβήτου».

Ορίζει μία «μεταβλητή ποσότητα» σαν κάτι που δύναται να λάβει διαδοχικά διάφορες πραγματικές τιμές. Ασφαλώς με τα σημερινά κριτήρια ο ορισμός είναι κάπως ασαφής. Το «successivement» παραπέμπει κυρίως σε ακολουθίες, ενώ ο Cauchy κάνει χρήση και για συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής. Συνήθως τις μεταβλητές τις συμβολίζει με ένα από τα τελευταία γράμματα της αλφαβήτου.

Ο Cauchy διαχωρίζει την σταθερή τιμή από την μεταβλητή τιμή και συμβολίζει τις σταθερές τιμές με τα πρώτα γράμματα της αλφαβήτου. Θεωρεί ότι σταθερή τιμή είναι το γράμμα που έχει μια συγκεκριμένη σταθερή τιμή. Στη συνέχεια ο Cauchy συνεχίζει στον ορισμό αυτού που λέμε σήμερα **πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής**. «Όταν μεταβλητές ποσότητες είναι συσχετισμένες μεταξύ τους έτσι ώστε αν δοθεί η τιμή της μίας εξ' αυτών κάποιος να μπορεί να βρει τις τιμές όλων των άλλων μεταβλητών, τότε θεωρούμε ότι αυτές οι διάφορες μεταβλητές εκφράζονται μέσω της μίας, η οποία παίρνει το όνομα ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι άλλες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής ονομάζονται συναρτήσεις της μεταβλητής».

Ο Cauchy συνεχίζει με τον ορισμό της **πραγματικής συνάρτησης πολλών πραγματικών μεταβλητών** και την ορίζει ως συνδεδεμένες μεταβλητές έτσι ώστε όταν δίνονται οι τιμές κάποιων από αυτές, να μπορούν να βρεθούν και οι τιμές των υπολοίπων. Αυτές από τις οποίες βρίσκουμε τις υπόλοιπες, ονομάζονται ανεξάρτητες.

Οι μη ανεξάρτητες αποτελούν (συνιστούν) τις συναρτήσεις. «Όταν μεταβλητές ποσότητες είναι συσχετισμένες μεταξύ τους έτσι ώστε αν δοθούν οι τιμές κάποιων από αυτές κάποιος να μπορεί να βρει όλες τις υπόλοιπες, θεωρούμε ότι αυτές οι διάφορες ποσότητες εκφράζονται μέσω των διάφορων άλλων, οι οποίες παίρνουν το όνομα ανεξάρτητες μεταβλητές. Οι άλλες ποσότητες ονομάζονται συνάρτηση αυτών των μεταβλητών».

18. Ορισμός του ορίου τιμών μίας μεταβλητής

Ο κύριος στόχος του Cauchy σε πρώτη φάση, είναι να ορίσει το όριο συνάρτησης και το όριο ακολουθίας. Προς τούτο χρησιμοποιεί ως ενδιάμεση κρίσιμη έννοια, την έννοια του ορίου μίας μεταβλητής. Ο 1^{ος} ορισμός ορίου που δίνει ο Cauchy, ως προετοιμασία της έννοιας του ορίου ακολουθίας και του ορίου συνάρτησης, είναι αυτό που ονομάζει «όριο μίας μεταβλητής». Κάπως αυτή η έννοια του, αντιστοιχεί στο σημερινό όριο ακολουθίας. Βέβαια ο Cauchy στη συνέχεια χρησιμοποιεί γενικά πραγματικές μεταβλητές και όχι μόνον ακολουθίες.

Εδώ υπάρχει μία κάποια ασάφεια (με τα δικά μας κριτήρια). Ορίζει την έννοια του ορίου μεταβλητής λέγοντας πως όταν οι διαδοχικές τιμές που παίρνει μια μεταβλητή προσεγγίζουν επ' αόριστον μία σταθερή τιμή, έτσι ώστε να καταλήγουν να διαφέρουν από αυτή όσο λιγότερο είναι επιθυμητό, τότε η σταθερή αυτή τιμή ονομάζεται **όριο της μεταβλητής**. Εφόσον ορίζει την έννοια του ορίου μεταβλητής, δίνει ένα αλγεβρικό και ένα γεωμετρικό παράδειγμα για να γίνει κατανοητή η έννοια.

Στην άλγεβρα ένας άρρητος αριθμός είναι το όριο διαφόρων κλασμάτων που τον προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο και στη γεωμετρία, ο κύκλος είναι το όριο

εγγεγραμμένου πολυγώνου όταν αυξάνει ο αριθμός των πλευρών του ολοένα και περισσότερο.

«Όταν οι τιμές που αποδίδονται διαδοχικά σε μια συγκεκριμένη μεταβλητή προσεγγίζουν επ' αόριστον μία σταθερή τιμή με τέτοιο τρόπο ώστε να καταλήγουν να διαφέρουν από αυτή όσο λιγότερο είναι επιθυμητό, τότε αυτή η σταθερή τιμή ονομάζεται όριο όλων των άλλων τιμών. Έτσι για παράδειγμα ένας άρρητος αριθμός είναι το όριο διαφόρων κλασμάτων που τον προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο. Στην γεωμετρία, ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένα πολύγωνα που συνεχώς αυξάνονται οι πλευρές τους είναι το όριο αυτών».

19. Ορισμός του ορίου συνάρτησης σύμφωνα με τον Cauchy

Ο Cauchy δεν δίνει κάπου με έμφαση τον **ορισμό του ορίου συνάρτησης**. Βέβαια αφού όρισε το όριο της μεταβλητής, η ιδέα του ορίου της συνάρτησης είναι διάχυτη, υπονοείται από την έννοια του ορίου της μεταβλητής. Συγκεκριμένα, ξεκινά πως όταν μια μεταβλητή συγκλίνει σε ένα συγκεκριμένο αριθμό, θα πρέπει να το γράφουμε με συγκεκριμένο τρόπο. Έτσι βάζει μπροστά από τη μεταβλητή, τη λέξη «**lim**» που χρησιμοποιούμε και εμείς σήμερα. Έπειτα συνεχίζει λέγοντας πως μερικές φορές όταν μία ή περισσότερες μεταβλητές συγκλίνουν σε σταθερά όρια, μία συνάρτηση που περιέχει αυτές τις μεταβλητές, συγκλίνει αντίστοιχα σε διάφορες τιμές.

«Έστω y μία συνάρτηση που εξαρτάται από την ανεξάρτητη μεταβλητή x και a , b σταθερές. Αν όταν η x προσεγγίζει την a , τότε η y προσεγγίζει την b , τότε λέμε ότι η y έχει όριο b όταν η x τείνει προς την a ».

Για πρώτη φορά, μετά από αρκετή προετοιμασία, «αγγίζει» το όριο συνάρτησης.

«Όταν μια μεταβλητή συγκλίνει σε έναν συγκεκριμένο αριθμό, είναι χρήσιμο να το γράφουμε με συγκεκριμένο τρόπο. Έτσι, βάζουμε μπροστά από την μεταβλητή την λέξη **lim**. Μερικές φορές, όταν μια ή περισσότερες μεταβλητές συγκλίνουν σε σταθερά όρια, μία συνάρτηση που περιέχει αυτές τις μεταβλητές συγκλίνει αντίστοιχα, σε διάφορες τιμές. Ως εκ τούτου, ορίζουμε αυθαίρετα ένα τέτοιο όριο χρησιμοποιώντας την διπλή παρένθεση μετά το **lim**, έτσι ώστε να περικλείεται η συνάρτηση.

Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι μία θετική ή αρνητική μεταβλητή που συμβολίζεται με x συγκλίνει στο 0 και συμβολίζουμε με A έναν σταθερό αριθμό. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτές οι εκφράσεις (συναρτήσεις) $\lim A^x$ και $\lim(\sin x)$ έχουν μία μοναδική τιμή που προσδιορίζεται από την εξίσωση $\lim A^x = 1$ και $\lim(\sin x) = 0$ ή η

έκφραση $\lim\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ παίρνει τις δυο τιμές $-\infty$, $+\infty$ και $\lim((\sin x))$ παίρνει άπειρες τιμές από το -1 έως το $+1$ ».

Ο Cauchy δεν τονίζει τους διαφόρους ορισμούς που χρησιμοποιεί, π.χ. με αλλαγή παραγράφου ή με αναγγελία «ορισμός» ή κάτι τέτοιο, όπως κάνουμε σήμερα. Οι ορισμοί εμφανίζονται εντός κειμένου τύπου «πεζογραφίας». Στους ορισμούς του ορίου δεν εμφανίζονται « δ & ϵ », οι διατυπώσεις είναι κάπως αόριστες και είναι ασαφές (τουλάχιστον με τα δικά μας κριτήρια αυστηρότητας) το τι ακριβώς εννοεί.

20. Η προέλευση του ορισμού του Cauchy για το όριο

Ο Cauchy όρισε το όριο με την πρόταση «Όταν οι τιμές που αποδίδονται σε μία μεταβλητή προσεγγίζουν επ' αόριστον μία σταθερή τιμή, έτσι ώστε τελικά να απέχουν τόσο λίγο όσο είναι επιθυμητό, τότε η σταθερή τιμή λέγεται όριο όλων των άλλων». Αυτή η έννοια, μεταφρασμένη στην άλγεβρα των ανισοτήτων, ήταν ακριβώς

αυτό που χρειαζόταν ο Cauchy για τον λογισμό του. Η ίδια η γλώσσα αυτού του λεκτικού ορισμού, μερικές φορές λαμβάνεται για να δείξει την ανωτερότητα του ορισμού του ορίου του Cauchy, σε σχέση με όλους τους προηγούμενους ορισμούς.

Ο ορισμός του Cauchy δεν σχετίζεται με την έννοια της κίνησης, δεν εξαρτάται από την γεωμετρία, δεν περιλαμβάνει τον περιττό περιορισμό, που συχνά περιλαμβάνεται στους προηγούμενους ορισμούς, ότι μια μεταβλητή δεν θα μπορούσε ποτέ να ξεπεράσει το όριο. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά ανήκαν στο όριο που έδωσε ο Lacroix το 1810. Παρόλο που ο Lacroix δεν όρισε το όριο γενικά, οι συζητήσεις του σε συγκεκριμένα παραδείγματα κάνουν ξεκάθαρο ότι είχε κατανοήσει το όριο γενικά. Για παράδειγμα όρισε a να είναι το όριο της συνάρτησης $\frac{ax}{x+a}$ καθώς το x

αυξάνει απεριόριστα, από τη στιγμή που η διαφορά του a με την τιμή της συνάρτησης γίνεται μικρότερη καθώς το x μεγαλώνει και μπορεί να γίνει μικρότερο από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα, έτσι ώστε το προτεινόμενο κλάσμα να μπορεί να πλησιάσει το a όσο θέλουμε. Και εξετάζοντας τα αθροίσματα των εναλλασσόμενων σειρών επεσήμανε ρητά, ακολουθώντας τον Simon l'Huilier, ότι αυτή η ποσότητα μπορεί να ξεπεράσει το όριο της. Έπειτα από την μελέτη που κάναμε δεν θα έπρεπε να μας εκπλήσσει το γεγονός ότι ένας ορισμός του ορίου που ακούγεται λογικός, προηγήθηκε της εργασίας του Cauchy.

Έχοντας την έννοια του ορίου όχι ακόμα αρκετά σαφώς ορισμένη και απελευθερωμένη από περιττούς περιορισμούς, ο Cauchy θα μπορούσε να είχε απορρίψει την έννοια αυτή όπως είχε κάνει και ο Lagrange το 1917. Ο Lagrange βλέπει το όριο περισσότερο σαν τμήμα της γεωμετρίας παρά της άλγεβρας. Η έννοια του ορίου δεν είναι αρκετά ευρεία για να θεμελιώσει τον λογισμό. Ο Lagrange παρατήρησε ότι αν μια ποσότητα ποτέ δεν μπορεί να ξεπεράσει το όριο της, τότε η εφαιτομένη δεν μπορεί πάντα να ορίζεται σαν το όριο μιας τέμνουσας. Εντέλει η ιδέα του ορίου είναι βασισμένη στο παράδειγμα μιας καμπύλης το οποίο είναι όριο μιας ακολουθίας πολυγώνων. Κάτι που το καθιστά μέρος της γεωμετρίας.

Το *Fonctions analytiques* του Lagrange ξεχώριζε από τα ήδη υπάρχοντα βιβλία σε ένα πολύ σημαντικό σημείο. Πρωτίστως σκόπευε να καθιερώσει την αυστηρότητα στον λογισμό και όχι να παράξει νέα αποτελέσματα. Φυσικά δεν ήταν αδιάφορο σε νέα αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα για το υπόλοιπο Lagrange για τις σειρές Taylor. Ο Lagrange ανήγαγε γνωστά αποτελέσματα μεγάλης πολυπλοκότητας μέσω των νέων θεμελίων τόσο στον λογισμό όσο και στην άλγεβρα και στη μηχανική. Οι Bolzano και Cauchy επηρεάστηκαν από την οπτική του Lagrange. Ο Bolzano αναφερόμενος στη δουλειά του Lagrange επανέλαβε την έκκληση για εγκατάλειψη της προσφυγής στη γεωμετρία και κίνηση υπέρ της άλγεβρας όπως φαίνεται και στον τίτλο της απόδειξης του *purely analytical proof* του θεωρήματος που λέει ότι μεταξύ δύο τιμών συνάρτησης $f(x)$ που δίνουν αποτελέσματα με διαφορετικό πρόσημο υπάρχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Όταν ο Cauchy έκανε στην 1^η του σπουδαία δουλειά μηχανικής το **1818**, αναφέρει στο βιογραφικό του ότι το *Fonctions analytiques* ήταν ένα από τα τέσσερα βιβλία που χρησιμοποίησε. Ίσως ο Cauchy θα μπορούσε να αναγνωρίσει την καταλληλότητα της άλγεβρας των ανισοτήτων ως θεμέλιο για τον λογισμό ακόμη και χωρίς την υπόδειξη που παρέχεται από την έννοια του ορίου.

Αλλά είναι φυσικά αδύνατο να το γνωρίζουμε. Αλλά η έννοια του ορίου όπως είναι αντιληπτή το 1810 μαζί με έναν αιώνα δηλώσεων ότι οι έννοιες του λογισμού θα μπορούσαν να γίνουν κατανοητές σαν όρια βοήθησε στο να στραφεί η προσοχή του Cauchy στη σωστή κατεύθυνση.

21. Ορισμός της συνέχειας σύμφωνα με τον Cauchy

Ο Cauchy αφού έχει μιλήσει για όρια συνεχίζει με τον ορισμό της συνεχούς πραγματικής συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής.

«Έστω ότι η $f(x)$ είναι συνάρτηση της μεταβλητής x και για κάθε τιμή του x μεταξύ δύο ορίων, η $f(x)$ παίρνει πάντα μία μοναδική τιμή. Αν σε αυτές τις τιμές του x προσθέτουμε έναν πολύ μικρό αριθμό a , η συνάρτηση θα προσανζηθεί κατά την διαφορά $f(x+a) - f(x)$, η οποία εξαρτάται από το a και από το x . Δεδομένου αυτού η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση του x , αν μεταξύ αυτών των ορίων για κάθε τιμή αυτών των x η τιμή της διαφοράς $f(x+a) - f(x)$ φθίνει απεριορίστα μαζί με την τιμή του a . Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής ως προς x σε ένα διάστημα, αν στο διάστημα αυτό μία απειροελάχιστη αύξηση του x δημιουργεί πάντα απειροελάχιστη αύξηση της συνάρτησης. Επίσης, λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής x σε μια περιοχή συγκεκριμένης τιμής του x όταν είναι συνεχής μεταξύ δύο ορίων του x που περικλείουν αυτή την τιμή ακόμα και όταν τα όρια είναι πολύ κοντά μεταξύ τους».

Παρατηρούμε ότι δεν ορίζει αυτό που σήμερα ονομάζουμε «συνάρτηση συνεχής στο σημείο a_0 ». Ορίζει δύο έννοιες που αντιστοιχούν στις δικές μας «συνάρτηση συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα» και «συνάρτηση συνεχής σε μία περιοχή του a_0 ». Ο Cauchy χρησιμοποιεί τον όρο «voisinage» (περιοχή), όμως είναι απλώς μία λέξη της καθομιλουμένης γαλλικής και όχι σαφώς ορισμένος μαθηματικός όρος. Ασφαλώς, υπάρχει κάποια ασάφεια στον ορισμό. Δεν είναι σαφές αν αυτό που ορίζει είναι αυτό που εμείς εννοούμε «συνεχής» ή αυτό που εμείς λέμε «ομοιόμορφα συνεχής». Είναι λογικό εκ πρώτης όψεως κάποιος να σχολιάσει ότι στον ορισμό της συνέχειας δεν υπάρχουν «δ & ε» και ότι εν πάση περιπτώσει ο ορισμός είναι ασαφής. Όμως, η βαθύτερη μελέτη του έργου του δείχνει ότι μάλλον έχει στο μυαλό του κάποια έννοια του «δ & ε».

22. Cauchy και Bolzano

Τα επιτεύγματα του Cauchy (1789–1857) αν και εξαιρετικά, δεν ήταν τα μοναδικά. Ο σύγχρονος του Bernhard Bolzano (1781–1848), έκανε παρόμοιες ανακαλύψεις. Αν και δεν είχε μεγάλη επιρροή στα μαθηματικά της εποχής του, το έργο του ήταν εξάισιο. Δεδομένου ότι θέλουμε να καταλάβουμε πως επηρεάστηκε ο Cauchy από τους προκατόχους του, θα δούμε αν επηρέασαν τον Bolzano κατά τον ίδιο τρόπο. Η ταυτόχρονη ανακάλυψη τους, μας παρέχει ένα ελεγχόμενο πείραμα. Για το σκοπό αυτό θα συγκρίνουμε τα επιτεύγματα του Bolzano με του Cauchy. Ο Bolzano όπως και ο Cauchy ήθελε να θέσει σε αυστηρές βάσεις την ανάλυση. Το τι θεωρούσε ότι είναι αυτό που κάνει μια απόδειξη αυστηρή φαίνεται από τους τίτλους που έχουν οι εργασίες του. Π.χ. "purely analytic proof" του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών για συνεχείς συναρτήσεις.

Θεωρεί ότι τα πάντα πρέπει να προκύπτουν από την άλγεβρα, χωρίς να εμφανίζονται απειροστά, η γεωμετρία, η έννοια του χώρου και του χρόνου, οποιαδήποτε άλλη διαισθητική έννοια. Για τον Bolzano όπως και για τον Cauchy η άλγεβρα των ανισοτήτων έπαιξε σπουδαίο ρόλο στις αποδείξεις. Αλλά ήταν πιο έντονος ο διαχωρισμός του Bolzano με το παρελθόν. Για παράδειγμα, σε αντίθεση με τη συντηρητική ορολογία του Cauchy, αποφεύγει σκόπιμα τη γλώσσα της κίνησης και τον όρο απειροελάχιστο "infinitesimal". Ο Bolzano έπειτα αποδεικνύει το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών της συνεχούς συνάρτησης.

Η απόδειξη η οποία ήταν διαφορετική από αυτή του Cauchy χρησιμοποιεί αυτό που σήμερα ονομάζουμε ιδιότητα **Bolzano – Weierstrass** για πραγματικούς

αριθμούς. (Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει). Επιπλέον σε εργασία του το **1817** χρησιμοποιεί αυτό που σήμερα λέμε **κριτήριο Cauchy για σύγκλιση ακολουθίας**, το οποίο ο Cauchy δήλωσε ως κριτήριο σύγκλισης σειράς το **1821**. Τα επιτεύγματα του Bolzano δεν σταματούν εδώ. Σε επόμενες εργασίες χωρίς να έχει διαβάσει τα βιβλία του Cauchy, ο Bolzano έκανε επιπρόσθετη εργασία. Επεξεργάστηκε σε μια βάση ανισοτήτων πολλές ιδιότητες παραγώγων, μεγίστων και σειρές Taylor. Μια σπουδαία ανακάλυψη του ήταν το παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης, η οποία δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη. Θεωρείται ότι η σύμπτωση μεταξύ των εργασιών των Cauchy (1821–1823) και Bolzano (1817) είναι πολύ μεγάλη για να είναι τυχαία. Ο Ivor Grattan-Guinness θεωρεί ότι όλο το πρόγραμμα του Cauchy που ανάγει τον λογισμό στο *analyse algebrique*, χρησιμοποιώντας ανισότητες για τις βασικές έννοιες για να είναι αυστηρός, δεν μπορεί να εξηγηθεί από προηγούμενες εργασίες του Cauchy.

Εξηγεί την σύμπτωση θεωρώντας ότι ο Cauchy έχει δει τις εργασίες του Bolzano και τις χρησιμοποιεί χωρίς να τον αναφέρει. Δηλώνει επίσης ότι ο Cauchy έχει δανειστεί τον ορισμό συνεχούς συνάρτησης (κριτήριο Cauchy) και την απόδειξη για το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών συνεχούς συνάρτησης από τον Bolzano. Η Grabiner δεν μπορεί να πει με σιγουριά αν ισχύει κάτι τέτοιο, αλλά θεωρεί ότι οι ομοιότητες υπήρχαν λόγω του ότι επηρεάζονταν από κοινούς παράγοντες της εποχής. Οι H. Freudenthal και H. Sinaceur έχουν δείξει ότι υπάρχουν εννοιολογικές διαφορές ανάμεσα σε Cauchy και Bolzano.

Ούτε ο Cauchy ούτε ο Bolzano είχαν λύσει όλα τα προβλήματα στην ανάλυση μέχρι το **1825**. Υπάρχουν δύο μεγάλα κενά στις εργασίες του Cauchy. **Πρώτον** δεν ξεχώρισε την σύγκλιση από την ομοιόμορφη σύγκλιση (όπως ούτε ο Bolzano) και την συνέχεια από την ομοιόμορφη συνέχεια και **δεύτερον**, ενώ χρησιμοποίησε πολλά αξιώματα των πραγματικών αριθμών, δεν είχε κατανοήσει πλήρως την φύση της πληρότητας ή τις τοπολογικές ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Έτσι, έδωσε μια λανθασμένη απόδειξη για την σύγκλιση εναλλασσόμενων σειρών, η οποία μπορεί εύκολα να διορθωθεί με την βοήθεια του κριτηρίου του Cauchy. Το μπέρδεμα μεταξύ συνεχούς και κατά σημείο ιδιοτήτων, οδήγησε τον Cauchy στη πασίγνωστη απόδειξη «*proof*» του λάθος θεωρήματος, ότι άπειρη σειρά συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής. Το **1816** ο Bolzano επίσης θεωρούσε ότι ισχύει αυτό.

Το **1826** ο Abel (1802–1829) στη μελέτη του για τη συνέχεια αθροίσματος δυναμοσειρών δημοσίευσε αντιπαράδειγμα στο λάθος θεώρημα του Cauchy, αλλά δεν αναγνώρισε το λάθος του στην απόδειξη. Επίσης, ο λεκτικός ορισμός των ορίων και της συνέχειας που χρησιμοποιείτο από τους Cauchy και Bolzano κρύβει την **διάκριση μεταξύ «για κάθε ε , υπάρχει δ για κάθε χ » και «για κάθε ε και για κάθε χ , υπάρχει ένα δ »**. Ανάμεσα στους τύπους για τις ιδιότητες της πληρότητας, υπέθεσε ότι μια φραγμένη, μονότονη ακολουθία συγκλίνει σε ένα όριο και ότι το κριτήριο Cauchy είναι επαρκής συνθήκη για την σύγκλιση σειράς. Ενώ κατανοούσε ότι ένας πραγματικός αριθμός μπορούσε να οριστεί ως όριο ρητών, δεν ανέπτυξε αυτή του την ενόραση στον ορισμό ή στις ιδιότητες των πραγματικών.

Για τον Cauchy ήταν κάτι μη αναγκαίο οι πραγματικοί αριθμοί και συνέπειες της μονοτονίας. Με αυτά ασχολήθηκαν άλλοι μαθηματικοί όπως οι Weierstrass (1815–1897), Heine (1821–1881), Meray (1835–1911), Cantor (1845–1918) και Dedekind (1831–1916). Από τον Cauchy επηρεάστηκαν οι Abel, Bolzano, Dirichlet (1805–1859), Riemann (1826–1866) και μέσω του Abel και ο Weierstrass. Ο Cauchy ήταν αυτός που δίδαξε αυστηρή ανάλυση όλη την Ευρώπη, ενώ οι εργασίες του Bolzano ήταν ακόμα σχεδόν αδιάβαστες μέχρι το **1860**. Ο λόγος είναι εν μέρη κοινωνικός και διδακτικός.

Η Ecole Polytechnique στο Παρίσι όπου παρέδιδε ο Cauchy τα μαθήματα του ήταν η 1^η επιστημονική σχολή στην Ευρώπη και το Παρίσι ήταν το κέντρο του μαθηματικού κόσμου. Ενώ αντίθετα, ο Bolzano εργαζόταν στην Πράγα και ήταν περισσότερο γνωστός ως φιλόσοφος και θεολόγος, παρά ως μαθηματικός.

23. Η πορεία προς τον νέο ορισμό του ολοκληρώματος από τον Cauchy

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος αποτελεί την τελευταία χρονολογικά βασική έννοια την οποία όρισε ο Cauchy. Όρισε το ολοκλήρωμα ως το όριο αθροισμάτων και κομβικό σημείο της θεωρίας του αποτέλεσε η απόδειξη της ύπαρξης του ορισμένου ολοκληρώματος μίας συνεχούς συνάρτησης. Κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα ελάχιστοι μαθηματικοί διερωτήθηκαν για την ύπαρξη της αντιπαραγωγού μίας συγκεκριμένης συνάρτησης. Η φύση των προβλημάτων της γεωμετρίας και της φυσικής στα οποία εφαρμόζονταν τα ολοκληρώματα, διασφάλιζε την ύπαρξή τους και η αδυναμία εύρεσης της αντιπαραγωγού ή του αναπτύγματος σε σειρά της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης, ωθούσε σε χειρισμούς υπολογισμού ή προσέγγισης μέσω της τεχνικής, η οποία είναι σήμερα γνωστή ως αθροίσματα Cauchy– Riemann.

Πριν από τον Cauchy κανείς δεν είχε διανοηθεί να χρησιμοποιήσει αυτά τα αθροίσματα προκειμένου να ορίσει το ολοκλήρωμα, πλην όμως, η χρήση τους στην κατεύθυνση υπολογισμού των ολοκληρωμάτων, σε συνδυασμό με την εξέλιξη των τεχνικών, αναφορικά με τα αθροίσματα σειρών κατέστησαν εφικτή την συνεισφορά του μεγάλου αυτού ερευνητή¹. Η απόδειξη της ύπαρξης του ολοκληρώματος από τον Cauchy, προϋπέθετε την ομοιόμορφη συνέχεια της συνάρτησης, αν και ο ίδιος δε διέκρινε μεταξύ συνέχειας και ομοιόμορφης συνέχειας, όπως ακριβώς δεν είχε διακρίνει μεταξύ σύγκλισης και ομοιόμορφης σύγκλισης².

Ο Cauchy έδωσε την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, δηλαδή ότι το ολοκλήρωμα είναι το αντίστροφο της παραγωγού. Οι τεχνικές ολοκλήρωσης τις οποίες ανέπτυξε, προήλθαν από τις προσεγγίσεις των τιμών ορισμένων ολοκληρωμάτων και όχι από κάποια ήδη υπάρχουσα θεωρία ολοκλήρωσης. Στην πραγματικότητα, ο Cauchy είχε ελάχιστα πράγματα στη διάθεσή του, αφού οι προγενέστεροι αυτού ερευνητές είχαν παραγάγει σημαντικό έργο στο πεδίο του διαφορικού λογισμού και δη στη θεμελίωσή του, παραμελώντας το ολοκλήρωμα, η θεώρηση του οποίου (ως αντιστρόφου της παραγωγού) περιχαράκωνε το πεδίο της εννοιολογικής θεμελίωσής του.

Τον 18^ο αιώνα δεν υπήρχε ορισμός του ολοκληρώματος και η ολοκλήρωση ορίζονταν ως η αντίστροφη πράξη της παραγωγίσιμης. Ως εκ τούτου, το αόριστο ολοκλήρωμα εθεωρείτο ως περισσότερο θεμελιώδες από το ορισμένο. Αυτό που

ίσχυε για το ορισμένο ολοκλήρωμα ήταν η σχέση: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ όπου

$\frac{dF}{dx} = f(x)$. Ο κατά Leibniz ορισμός του ολοκληρώματος (άπειρο άθροισμα

απειροστών) απερρίφθη από τους περισσότερους μαθηματικούς, διότι περιείχε τις προβληματικές έννοιες του απείρου και των απειροστών, ενώ στον αντίποδα αυτού οι Euler, Bernoulli, Lagrange και Laplace έβλεπαν την ολοκλήρωση ως την αντίστροφη πράξη από αυτήν της παραγωγίσιμης, δηλαδή την εύρεσης της αντιπαραγωγού. Ο ορισμός αυτός, επέτρεπε τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων πολλών συναρτήσεων, οι οποίες μπορούσαν να εκφραστούν αλγεβρικά.

Παρόλα αυτά, ήταν γενικά αποδεκτό ότι ένα ολοκλήρωμα μπορούσε να υπολογιστεί (έστω και προσεγγιστικά) μέσω αθροισμάτων και υπήρχε μεγάλος όγκος έργου στην κατεύθυνση της προσέγγισης των τιμών των ορισμένων ολοκληρωμάτων

¹ Phillips, E.R. (1984). “An introduction to analysis & integration theory”, New York, Dover Publications, p. viii

² Grabiner, J.V. (1981). “The origins of Cauchy’s rigorous calculus”, New York, Dover Publications, p. 140

(καθώς και ανάλογα των τιμών των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων), διαμέσου αθροισμάτων και αναζητούνταν πολλές φορές τα φράγματα των σφαλμάτων για αυτές τις προσεγγίσεις. Αυτό το έργο, παρείχε στον Cauchy κάποιες από τις ανισοτικές ιδιότητες τις οποίες ο ίδιος χρησιμοποίησε. Η μελέτη των προσεγγίσεων από τον Cauchy οδήγησε στην εξέταση της σύγκλισης, αφού η προσέγγιση των τιμών των απείρων σειρών οδήγησε σε χειρισμούς της ταχύτητας σύγκλισης, των φραγμάτων, των σφαλμάτων και τελικά της σύγχρονης θεωρίας σύγκλισης.

Η προσέγγιση των ριζών πολυωνύμων οδήγησε στην απόδειξη της ύπαρξης και στον συμπερασματικό ορισμό της διαμέσου τιμής μίας συνεχούς συνάρτησης. Αναφορικά με την έννοια του ολοκληρώματος, οι Euler, Legendre, Lacroix και Poisson προσπάθησαν να βρουν, μέσω αθροισμάτων, φράγματα των σφαλμάτων των προσεγγίσεων των τιμών των ορισμένων ολοκληρωμάτων και να δείξουν ότι σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις το σφάλμα μπορούσε να γίνει μικρότερο οποιασδήποτε δεδομένης ποσότητας. Ο Cauchy άντλησε από το έργο αυτών και το μετέτρεψε σε μια αυστηρή θεωρία. Ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος ως ορίου αθροισμάτων έναντι της θεώρησής του ως αντιπαραγώγου, αποτελεί μία επιλογή η οποία φαντάζει για έναν σύγχρονο μαθηματικό κάτι το τετριμμένο. Ο ορισμός που επέλεξε ο Cauchy, αποτελεί πανάκεια για έναν αυστηρό λογισμό, αφού δεν υπάρχει πάντα η αντιπαραγώγος μίας συνάρτησης, ενώ παράλληλα θα στήριζε μία απόδειξη της ύπαρξης του ορισμένου ολοκληρώματος μίας συνεχούς συνάρτησης. Παρόλα αυτά, η αδυναμία απόδειξης της ύπαρξης του ορίου των προσεγγιστικών αθροισμάτων, αποτελεί πηγή αποριών αναφορικά με τα κριτήρια επιλογής του συγκεκριμένου ορισμού από τον Cauchy.

Σύμφωνα με τον Lebesgue, αυτά σχετίζονταν άμεσα με το πεδίο της παιδαγωγικής, ένεκα της πολύ στενής σχέσης μεταξύ του ορισμού του Cauchy και του παιδαγωγικού τρόπου προσέγγισης μίας καμπυλόγραμμης επιφάνειας με ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Η δήλωση του Cauchy, με βάση την οποία οδηγούμαστε στη θεώρηση του ολοκληρώματος ως αθροίσματος απλά και μόνο δια της θεωρίας των τετραγωνισμών, στηρίζει την άποψη του Lebesgue, πλην όμως, οι Euler και Lagrange είχαν βρει τον χειρισμό αυτού ως αντιπαραγώγου, αρκούντως βολικό για διδακτικά εγχειρίδια και διαλέξεις, αφού ήταν πολύ πιο εύληπτος και ευκολονόητος.

Η θεωρία του ορισμένου ολοκληρώματος παρουσιάστηκε από τον Cauchy σε μια σειρά διαλέξεων, ωθώντας πολλούς μαθηματικούς στην προσεκτική εξέταση των θεμελίων. Τα μαθήματα που παρέδωσε στην Ecole Polytechnique απετέλεσαν την κατάλληλη ευκαιρία για τη θεωρία του ολοκληρώματος, αλλά ο ορισμός αυτού, σύμφωνα με την άποψη του A.P. Iushkevich, επελέγη με μοναδικό κριτήριο τις ερευνητικές ανάγκες του Cauchy³. Αυτό είναι απόλυτα λογικό αφού υπήρχαν αρκετές περιπτώσεις όπου το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδόν υπό μία καμπύλη είχε νόημα παρά το ότι το ζητούμενο εμβαδόν (άρα και η τιμή του ολοκληρώματος) δεν αποτελούσε απλά και μόνο τη διαφορά των τιμών της αντιπαραγώγου στα άκρα.

Το 1807 ο J. Fourier σε μία εργασία του επί της διάχυσης της θερμότητας, διατύπωσε την θέση ότι μία συνάρτηση η οποία είναι ορισμένη σε πεπερασμένο κλειστό διάστημα, μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων, ενώ παρέθεσε ορισμένες κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις, τα γραφήματα των οποίων εσώκλειαν επιφάνειες. Η εν λόγω εργασία διασαφήνισε τη δυνατότητα ύπαρξης του ορισμένου ολοκληρώματος μίας συνάρτησης αναπαραστάσιμης μέσω

³ Iushkevich, A.P., (1974). "On the origins of Cauchy's concept of the definite integral", *Trudy Instituta Istorii Estestvoznaniya, Akademia Nauk SSSR*, volume 1, p. 406 (από το Grabiner, J.V., "The origins of Cauchy's rigorous calculus", New York, Dover Publications, 1981, p. 142

τριγωνομετρικών σειρών, αν και η συνάρτηση που παριστά το ολοκλήρωμα δεν είναι παντού παραγωγίσιμη. Ο Fourier υπολόγισε (δίχως να ορίσει) μέσω τυποποιημένης πρακτικής κάποια εμβαδά δύσκολων προς υπολογισμό ολοκληρωμάτων, ως αθροίσματα. Ο Legendre επίσης, είχε πραγματευθεί ορισμένα ολοκληρώματα συναρτήσεων, οι οποίες ήταν ασυνεχείς ή απειρίζονταν σε κάποια σημεία. Αντίθετα με τον έως τότε αποδεκτό ορισμό του ολοκληρώματος ως αντιπαραγώγου, αυτός του Cauchy ήταν εύκολα εφαρμόσιμος σε όλες αυτές τις περιπτώσεις.

Πάντως, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα ολοκληρώματα των κατά τμήματα συνεχών συναρτήσεων μπορούσαν να υπολογισθούν ως αθροίσματα των ολοκληρωμάτων αυτών των επιμέρους συνεχών κλάδων, σύμφωνα με τον ορισμό της αντιπαραγώγου, ενώ τα σημεία ασυνέχειας μπορούσε ο ίδιος να τα χειρισθεί με βάση την **Cauchy principal value**, τα προηγούμενα δεν προσφέρουν επαρκή αιτιολόγηση της αναζήτησης του νέου ορισμού. Οι δυσκολίες του ορισμού του ολοκληρώματος ως αντιπαραγώγου, δεν περιορίζονταν στα μεμονωμένα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν ήταν παραγωγίσιμη, αλλά ανεδείχθησαν νέα προβλήματα με τη μιγαδική ολοκλήρωση. Ο Cauchy είχε επιδείξει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το όλο θέμα και περί το 1814 έδωσε μια παραλλαγή των εξισώσεων Cauchy– Riemann, καταδεικνύοντας ταυτόχρονα το εσφαλμένο της (κατά αναλογία προς τους πραγματικούς αριθμούς) αποδείξεως θεωρημάτων στους μιγαδικούς. Στο πεδίο των μιγαδικών, απέρριπτε τη χρήση αναλογικών επιχειρημάτων και αναγωγής στους πραγματικούς αριθμούς, αποκαλώντας την εν λόγω τακτική ως «ένα είδος επαγωγής» και απαίτησε την αυστηρότητα στην ανάλυση. Δήλωσε κατηγορηματικά ότι το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μεταξύ δυο σημείων, είναι η διαφορά των τιμών της αντιπαραγώγου στα σημεία αυτά «...μόνο στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση αυξάνεται ή μειώνεται συνεχώς μεταξύ των εν προκειμένω ορίων».

Ο ίδιος είχε υπολογίσει μιγαδικά ολοκληρώματα με όρους πραγματικών ολοκληρωμάτων, οπότε στο συγκεκριμένο χρονικό σημείο κατέστη επιτακτική η ανάγκη εύρεσης μίας αυστηρής θεωρίας για τους πραγματικούς αριθμούς, η οποία θα προσέδιδε την απαιτούμενη αυστηρότητα στην οποιαδήποτε διαπραγμάτευση στο πεδίο των μιγαδικών αριθμών. Πάντως πέρασε ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα έως ότου ορίσει το ολοκλήρωμα ως το όριο αθροισμάτων. Ο Gauss είχε παρατηρήσει, ότι αν το τόξο ολοκλήρωσης μεταξύ δύο σημείων περιλαμβάνει μιγαδικούς αριθμούς, τότε η τιμή του ολοκληρώματος μπορεί να εξαρτάται από το τόξο αυτό, ενώ ο Poisson είχε αναφέρει ότι η τιμή ενός ολοκληρώματος, όπως για παράδειγμα αυτή

του $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$, μπορεί να διαφέρει για διαφορετικές διαδρομές ολοκλήρωσης, αν μία

διαδρομή περιλαμβάνει σημεία στα οποία η συνάρτηση απειρίζεται.

Αν και η παρατήρηση του Gauss μπορεί να είχε διαφύγει της προσοχής του Cauchy, εντούτοις ο τελευταίος γνώριζε την εργασία του Poisson. Ο υπολογισμός της τιμής του ολοκληρώματος μίας συνάρτησης σε ένα διάστημα, ως διαφοράς των τιμών της αντιπαραγώγου στα άκρα του διαστήματος, ήταν πλέον προβληματικός και ο Poisson χειρίστηκε τέτοια ολοκληρώματα ως αθροίσματα, διερευνώντας παράλληλα τη σχέση μεταξύ των τιμών των μιγαδικών ολοκληρωμάτων και των τόξων ολοκλήρωσης. Η γενική έννοια του επικαμπύλιου ολοκληρώματος αποσαφηνίζει προφανώς τη σχέση ανάμεσα στην τιμή του μιγαδικού ολοκληρώματος και του τόξου της ολοκλήρωσης. Μόλις δυο χρόνια μετά τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος ως αθροίσματος, ο Cauchy εφάρμοσε την ιδέα του στην μιγαδική ολοκλήρωση και την ίδια χρονική περίοδο ο Poisson απέδειξε, ότι αν και το ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης δεν ισούται εν γένει με τη διαφορά των τιμών της αντιπαραγώγου αυτής

στα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης, εντούτοις το ολοκλήρωμα ως άθροισμα είναι ίσο με τη διαφορά αυτή, αν η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι πεπερασμένη στο συνολικό διάστημα. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, το οποίο ο ίδιος ο Poisson ονόμασε «**Θεμελιώδη πρόταση της θεωρίας των ορισμένων ολοκληρωμάτων**», πρέπει να επηρέασε καταλυτικά τον Cauchy στην κατεύθυνση της σύλληψης του ολοκληρώματος ως ορίου αθροισμάτων. Η επιβεβαίωση της ύπαρξης του ολοκληρώματος, αποτελούσε τον κύριο λόγο για τον οποίο ο Cauchy όρισε το ολοκλήρωμα κατ' αυτόν τον τρόπο. Όπως ο ίδιος εξήγησε:

«... θεωρούμε κάθε ορισμένο ολοκλήρωμα, μεταξύ δυο δεδομένων ορίων, να μην είναι τίποτε άλλο εκτός του αθροίσματος των απείρως μικρών τιμών της διαφορικής παράστασης εντός του συμβόλου του ολοκληρώματος, η οποία αντιστοιχεί στις διάφορες τιμές της μεταβλητής που περιέχονται μεταξύ των εν λόγω ορίων. Όταν υιοθετείται αυτός ο τρόπος θεώρησης του ορισμένου ολοκληρώματος, αποδεικνύεται εύκολα ότι ένα τέτοιο ολοκλήρωμα έχει μια μοναδική και πεπερασμένη τιμή. Όταν τα δύο άκρα της μεταβλητής είναι πεπερασμένα, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση παραμένει πεπερασμένη και συνεχής σε όλο το μεταξύ των δυο ορίων διάστημα».

Ο Cauchy αναφέρει την καταλληλότητα του εν λόγω ορισμού ακόμα και σε περιπτώσεις στις οποίες δεν είναι δυνατή η μετάβαση από την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση στην αρχική αυτής. Ο χειρισμός του ορισμένου ολοκληρώματος ως ορίου αθροισμάτων, έδωσε τη δυνατότητα στον Cauchy προκειμένου να αποδείξει την ύπαρξη του ολοκληρώματος μίας συνεχούς συνάρτησης, να μελετήσει ολοκληρώματα συναρτήσεων οι αρχικές συναρτήσεις των οποίων δεν ήταν γνωστές συναρτήσεις και να εξηγήσει τη συμπεριφορά ολοκληρωμάτων κατά μήκος ενός τόξου, απαντώντας κατ' αυτό τον τρόπο στα περίπλοκα ζητήματα, που είχαν θέσει οι Fourier, Gauss, Legendre, Poisson όσο και ο ίδιος (έως και το 1814).

24. Η καινοτομία του ερευνητικού έργου του Cauchy

Τα έργα των Euler, Lagrange, Lacroix και Poisson περιέχουν πολύτιμο υλικό, το οποίο επηρέασε τον Cauchy στην κατεύθυνση της διατύπωσης των βασικών ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος. Ο ίδιος είχε παραδεχθεί ότι είχε μελετήσει τα εγχειρίδια του Euler και η απόδειξη την οποία έδωσε για την ύπαρξη λύσης σε μια διαφορική εξίσωση (μέθοδος Cauchy –Lipschitz) βασίζεται σε μία μέθοδο κατασκευής προσεγγιστικής λύσης η οποία εξηγείται για πρώτη φορά στο έργο του Euler με τίτλο *Institutiones calculi integralis*.

Εκτός όμως των τεχνικών ομοιοτήτων στους χειρισμούς του ορισμένου ολοκληρώματος, υφίστανται αρκετές διαφορές μεταξύ των απόψεων του Cauchy και αυτών των προηγούμενων του. Για παράδειγμα, ενώ για τους Euler και Lacroix, η δια των αθροισμάτων προσέγγιση αποτελεί απλά και μόνο μία ιδιότητα του ολοκληρώματος, η οποία έχει ελάχιστη σχέση με τη θεωρία του ολοκληρωτικού λογισμού, για τον Cauchy κατέστη θεμελιώδης και πρωταρχική ιδιότητα.

Επίσης, για τους Euler και Lacroix το ολοκλήρωμα αποτελούσε την αντιπαράγωγο, η τιμή της οποίας προσεγγιζόταν μέσω των αθροισμάτων, ενώ για τον Cauchy αποτελούσε το όριο των αθροισμάτων ενός συγκεκριμένου τύπου, η ύπαρξη

του οποίου έπρεπε να αποδειχθεί. Δηλαδή, αν το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ υπάρχει και

ισούται με $F(\beta) - F(a)$, όπου $F'(x) = f(x)$, τότε αυτά πρέπει να αποδεικνύονται και όχι απλά να διατυπώνονται. Αν και ο Poisson διέθετε το ίδιο υλικό με τον Cauchy, εντούτοις ο δεύτερος ήταν εκείνος που τόνισε την αναγκαιότητα περί ύπαρξης μίας αυστηρής θεωρίας για το ολοκλήρωμα. Οι προγενέστεροι ερευνητές δεν

μπήκαν σε αυτήν την διαδικασία και ότι παρήγαγαν στο πεδίο της εννοίας του ολοκληρώματος ήταν μεν απαραίτητο, αλλά διόλου επαρκές. Ο Cauchy, είχε την ευφυΐα να επιλέξει τις κατάλληλες τεχνικές και να τις ενσωματώσει στην αποδεικτική διαδικασία, φροντίζοντας παράλληλα να διατυπώσει και να αποδείξει τα απαιτούμενα πρόσθετα αποτελέσματα. Με βάση τον δικό του ορισμό του ολοκληρώματος, η ύπαρξη του ολοκληρώματος εξαρτιόταν από τη συνέχεια της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης, δηλαδή μία ιδιότητά της και όχι από την αναλυτική της αναπαράσταση. Αυτό επέτρεψε τον υπολογισμό εμβαδού υπό καμπύλη συνάρτησης, ακόμα και στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση δε μπορούσε να παρασταθεί αναλυτικά, οπότε και θα ήταν τετριμμένος ο υπολογισμός της αντιπαραγώγου αυτής.

Κατά αυτό τον τρόπο οριζόταν και το $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ δηλαδή το α_0 της εξίσωσης

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)) \text{ του Fourier, οπότε φαινόταν ως απόλυτα}$$

αληθής η θέση του αναφορικά με τη δυνατότητα έκφρασης κάθε συνάρτησης μέσω τριγωνομετρικών σειρών. Στο 2^ο μέρος του έργου του με τίτλο *Leçons sur les applications du calcul infinitesimal a la geometrie*, ο Cauchy παραθέτει εφαρμογές της θεωρίας του για το ολοκλήρωμα στη γεωμετρία. Κάποιες από αυτές τις εφαρμογές ήταν ήδη γνωστές, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός μήκους τόξου και ο προσδιορισμός κάποιων εμβαδών και όγκων. Για να αποδείξει ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα αντιπροσωπεύει το εμβαδόν κάτω από μια καμπύλη, ο Cauchy χρησιμοποίησε το θεώρημα της μέσης τιμής για εμβαδά, παράγωγο και ολοκλήρωμα.

Ασχολείται επίσης, με τη χρήση των ολοκληρωμάτων για τον προσδιορισμό των εμβαδών μεταξύ δυο επιπέδων καμπυλών, για την εύρεση του εμβαδού καμπυλωτής επιφανείας και για τους όγκους στερεών. Ο Cauchy ήταν εκείνος ο οποίος προσέδωσε την απαραίτητη αυστηρότητα στην ανάλυση, έχοντας όμως, στηριχθεί στο έργο των Euler, Poisson, Lagrange, Legendre και πολλών άλλων. Σε αυτόν χρεώνονται πολλά μεγάλα αποτελέσματα της ανάλυσης τα οποία μπόρεσε να αποδείξει, χρησιμοποιώντας έννοιες και τεχνικές τόσο αναλυτικές όσο και αλγεβρικές, ενώ ενέταξε την αυστηρότητα και τη δομή της γεωμετρίας των αρχαίων Ελλήνων, στο οικοδόμημα των μαθηματικών της εποχής του.

Από τον Cauchy και μετά, τα μαθηματικά άρχισαν να μορφοποιούνται ως η επιστήμη των αφηρημένων λογικών συστημάτων και η συμβολή του έγκειται στην χρήση των ήδη υπάρχουσών γνώσεων της εποχής του για την δόμηση ενός νέου και ριζοσπαστικού (για τα δεδομένα της εποχής του), απειροστικού λογισμού.

Βιβλιογραφία

- Αναπολιτάνος, Δ. (1985). «Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών», Δ΄ έκδοση, Αθήνα, εκδόσεις Νεφέλη.
- Αντωνόπουλος, Π. (2007). «Η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ολοκληρώματος», μεταπτυχιακή εργασία, τμήμα μαθηματικών, ΕΚΠΑ.
- Apostol, T. (1974). “Mathematical analysis”, 2nd edition. Addison–Wesley publishing Co.
- Baron, M.E. (1969). “The origins of the infinitesimal calculus”, Oxford, Pergamon press.
- Bell, E. (2000). «Οι μαθηματικοί», 1^{ος} τόμος, 3^η έκδοση, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Bolzano, B. (2004). “The mathematical works”, Translation Steve Russ, Oxford University Press.

- Boyer, C.B. & Merzbach, U.C. (1968). «Η ιστορία των μαθηματικών», 2^η έκδοση, Αθήνα, εκδόσεις Πνευματικός.
- Boyer, C.B. (1959). “The history of the calculus & its conceptual development”, New York, Dover publications.
- Bradley, R.E. & Sandifer, C.E. (2009). “Cauchy’s cours d’ analyse”, Springer Verlag.
- Brand, L. (1984). “Advanced calculus”, Αθήνα, εκδόσεις ελληνικής μαθηματικής εταιρείας.
- Burn, R.P. (2011). “Another theorem of Cauchy which admits exceptions”.
- Davis, D. (2001). «Η φύση & η δύναμη των μαθηματικών», Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Evans, H. (1990). «Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών μετά το 1650», τόμος 2, Αθήνα, εκδόσεις τροχαλία.
- Grabiner, J.V. (1981). “The origins of Cauchy’s rigorous calculus”, New York, Dover publications
- Loria, G. «Ιστορία των μαθηματικών», τόμος 3^A, Αθήνα, εκδόσεις ελληνικής μαθηματικής εταιρείας.
- Mankiewicz, R. (2002). «Η ιστορία των μαθηματικών», Αθήνα, εκδόσεις Αλεξάνδρεια.
- Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε., (1987). «Απειροστικός λογισμός Ι», Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία.
- Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε., (1993). «Απειροστικός λογισμός ΙΙ», Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία.
- Παντελίδης, Γ. & Κραββαρίτης, Δ. (1997). «Λεξικό μαθηματικών», Αθήνα, εκδόσεις Πατάκης.
- Phillips, E.R. (1984). “An introduction to analysis & integration theory”, New York, Dover publications.
- Polya, G. (2001). «Η μαθηματική ανακάλυψη», τόμος 1, Αθήνα, εκδόσεις Κάτοπτρο.
- Russell. B.A.W. (1956). “The principles of mathematics”, 7th edition, London, Allen G. & Unwin Ltd.
- Σίσκου, Μ. (2014). «Ο ρόλος του Cauchy στη θεμελίωση του απειροστικού λογισμού», Διπλωματική εργασία, Μαθηματικό τμήμα ΕΚΠΑ.
- Stillwell, J. (1989). “Mathematics & its history”, New York, Springer– Verlag.
- Smith, D. (1951). «History of mathematics», Volume 1, New York: Dover Publications, INC.
- Struik, D. (1980). «Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών», β’ έκδοση, Αθήνα, εκδόσεις Δαίδαλος– Ι. Ζαχαρόπουλος.
- Τσίτσας, Α.Ν. (2002). «Εφαρμοσμένος Απειροστικός λογισμός», Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία.
- Τσίτσας, Α.Ν. (2002). «Εφαρμοσμένος διανυσματικός απειροστικός λογισμός», Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία.
- Toeplitz, O. (1963). “The calculus. A genetic approach”, Chicago & London, The University of Chicago press.