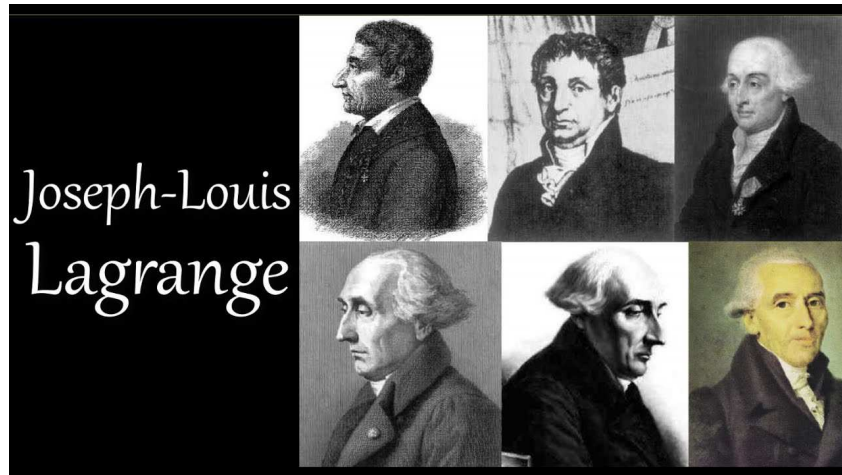




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Το έργο & η ζωή του Lagrange

Σπουδαστές: **Αρίστου Χαράλαμπος** (AM 8855)
Βασιλακόπουλος Νικόλαος (AM 8857)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς**, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: **2023–2024**

Ημερομηνία ανάθεσης: **01.12.2022**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **....12.2023**
 Ημερομηνία εξέτασης: **....12.2023**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά	3
Περίληψη	3
1. Η καταγωγή του	11
2. Τα μαθητικά του χρόνια.....	11
3. Η καριέρα του	11
4. Η αναγνώριση	12
5. Η μέθοδος του Lagrange.....	12
6. Το έργο του	12
7. Η διεθνής καριέρα.....	13
8. Lagrange και D' Alembert.....	13
9. Το πρόβλημα της λίκνισης της Σελήνης.....	14
10. Οι δορυφόροι του Δία	14
11. Τα ταξίδια του σε Παρίσι και Βερολίνο	14
12. Lagrange και Euler.....	15
13. Ο 1ος γάμος του	16
14. Lagrange και Fermat.....	16
15. Lagrange και Laplace.....	17
16. Το έργο του Lagrange στο Βερολίνο	18
17. Το έργο του Lagrange στο Παρίσι.....	19
18. Ο Lagrange και η γαλλική επανάσταση.....	20
19. Ο 2ος γάμος του	22
20. Lagrange και Μέγας Ναπολέον	22
21. Το τέλος του.....	23
22. Miscellanea Taurinensia	24
23. Το έργο του Lagrange στην άλγεβρα.....	24
24. Το έργο του Lagrange στην αστρονομία	25
25. Διαφορικός λογισμός και λογισμός των μεταβολών	25
26. Απειροελάχιστες ποσότητες.....	26
27. Πλανητική μηχανική.....	26
Βιβλιογραφία	26

Λέξεις κλειδιά

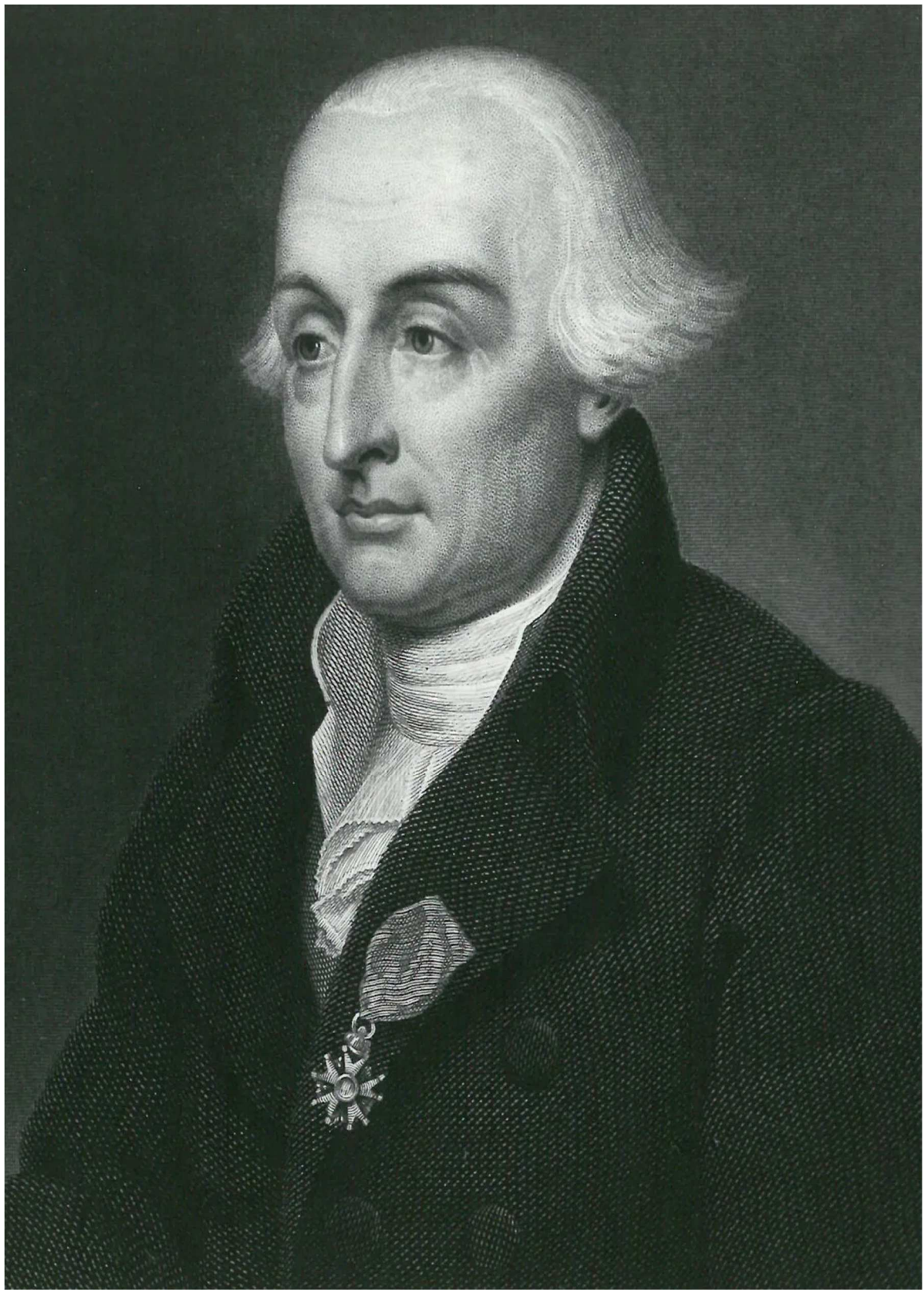
Αναλυτική μηχανική (Mécanique analytique), λογισμός των μεταβολών, προβλήματα της παλλόμενης χορδής, ισοπεριμετρικά προβλήματα, πρόβλημα της μετάπτωσης των ισημερινών, πρόβλημα της λίκνισης της Σελήνης, κίνηση της Σελήνης, τετραγωνικές μορφές, θεωρία των πεπερασμένων ομάδων, θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων.

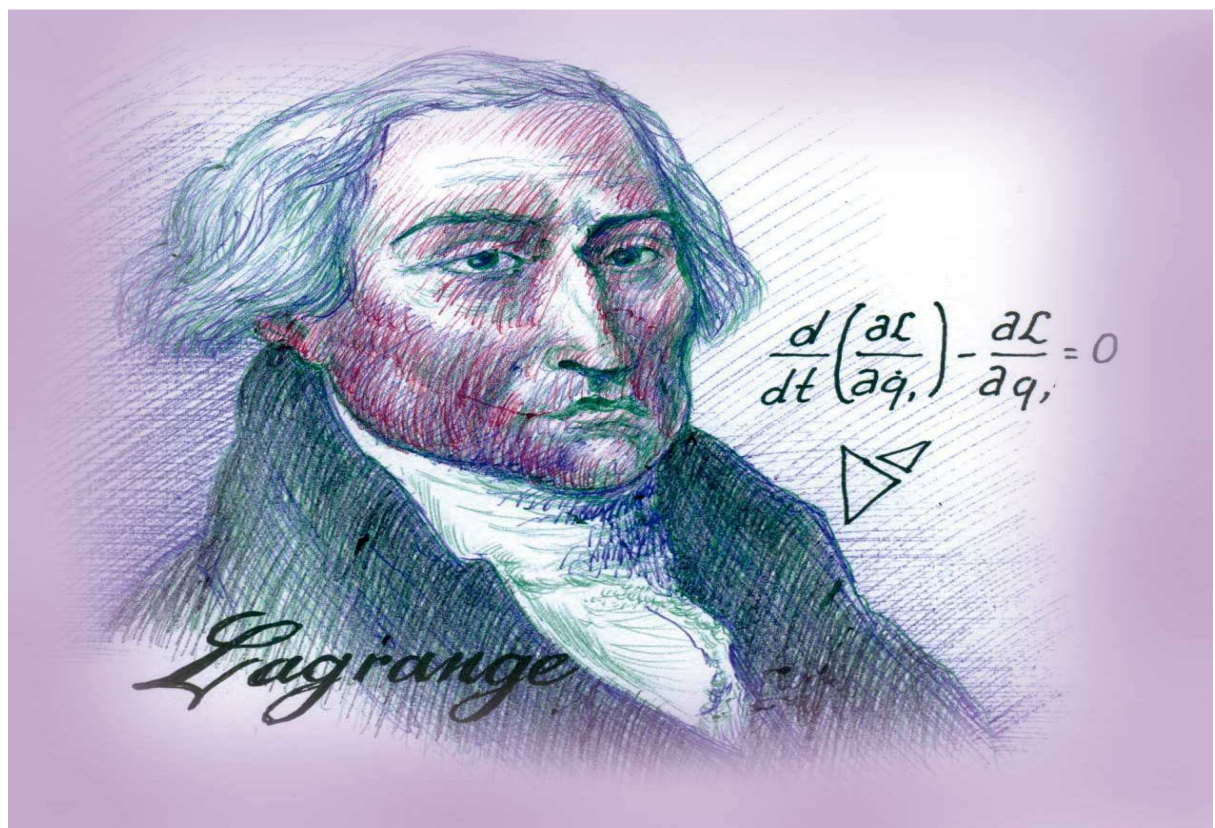
Περίληψη

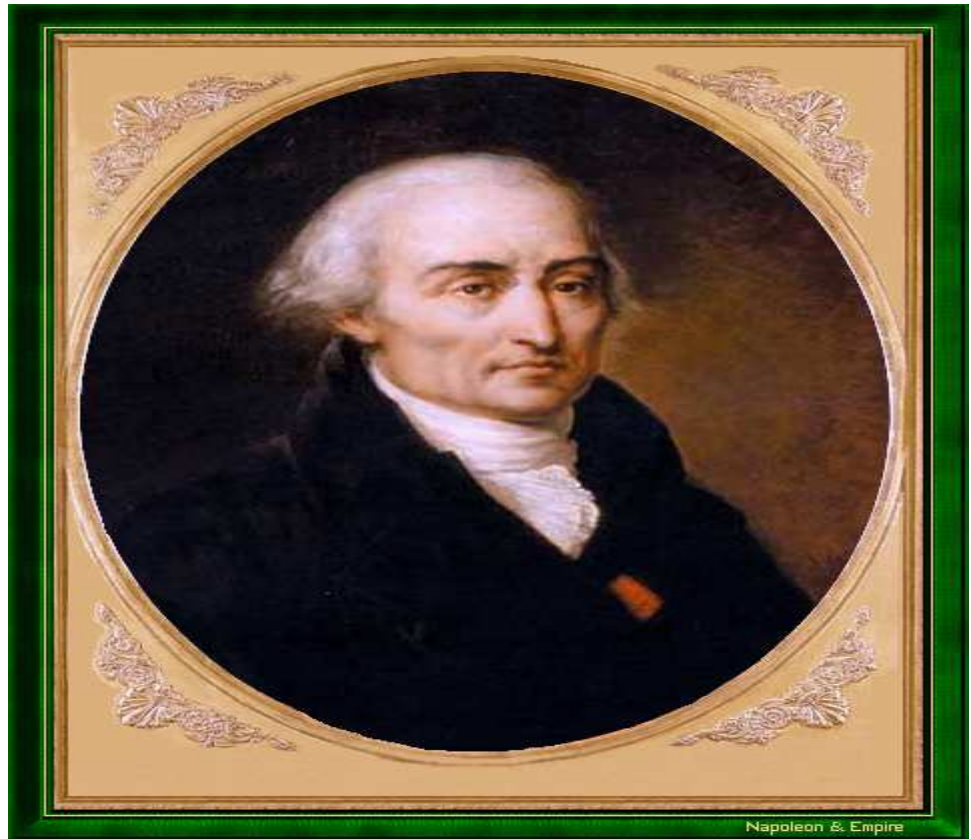
«Ο Lagrange είναι η αγέρωχη πυραμίδα των μαθηματικών επιστημών». Αυτή ήταν η μελετημένη εκτίμηση του Ναπολέοντα Βοναπάρτη για τον μεγαλύτερο και σεμνότερο μαθηματικό του 18^{ου} αιώνα, τον Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), τον οποίο ο ίδιος είχε κάνει Γερουσιαστή, Κόμη της Αυτοκρατορίας και Μέγα Αξιωματούχο της Λεγεώνας της Τιμής. Ο Βασιλιάς της Σαρδηνίας και ο Φρειδερίκος ο Μέγας είχαν επίσης τιμήσει τον Lagrange, αλλά όχι τόσο όσο ο αυτοκρατορικός Ναπολέοντας.

Έκανε πολύ σημαντικές μελέτες συνεισφέροντας σε όλα τα πεδία της μαθηματικής ανάλυσης, στη θεωρία αριθμών, αλλά και στην κλασσική μηχανική και ουράνια μηχανική. Το 1766, κατόπιν υποδείξεως των Euler και του D' Alembert διαδέχτηκε τον πρώτο στη θέση του διευθυντή μαθηματικών στην Πρωσική Ακαδημία Επιστημών, στο Βερολίνο, θέση όπου παρέμεινε για 20 χρόνια, παράγοντας μεγάλο έργο και κερδίζοντας πολλά βραβεία.

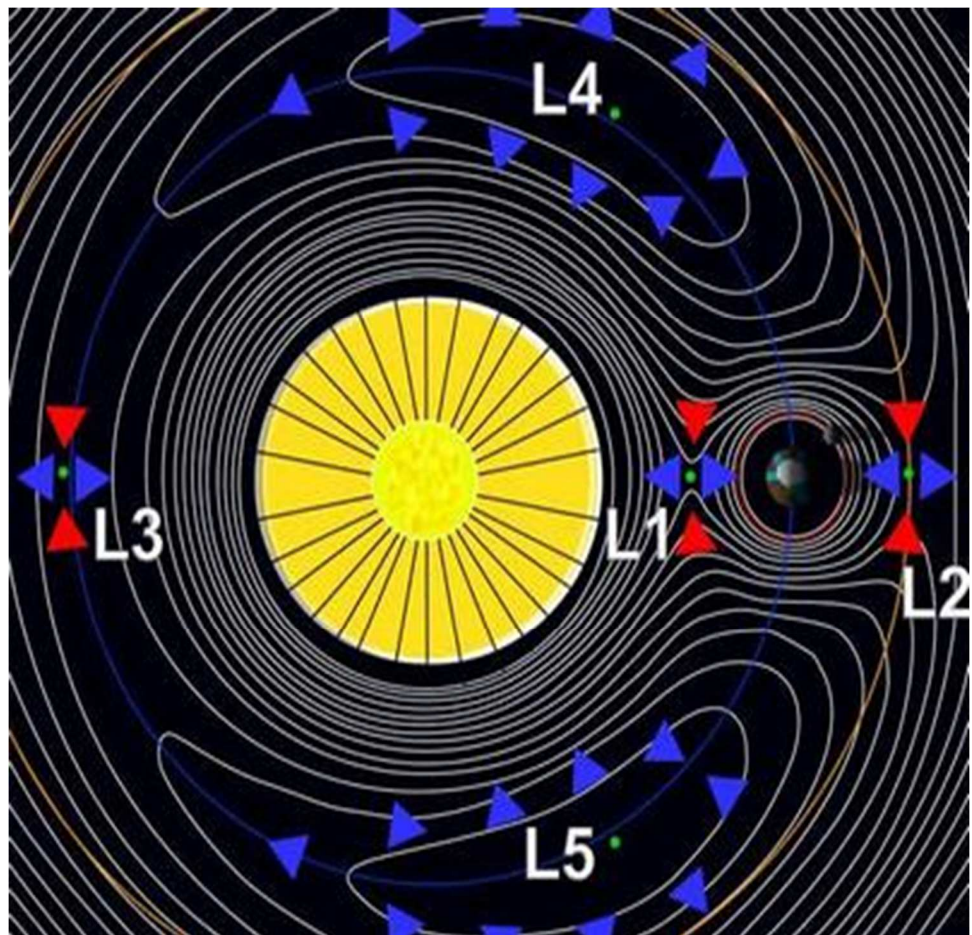


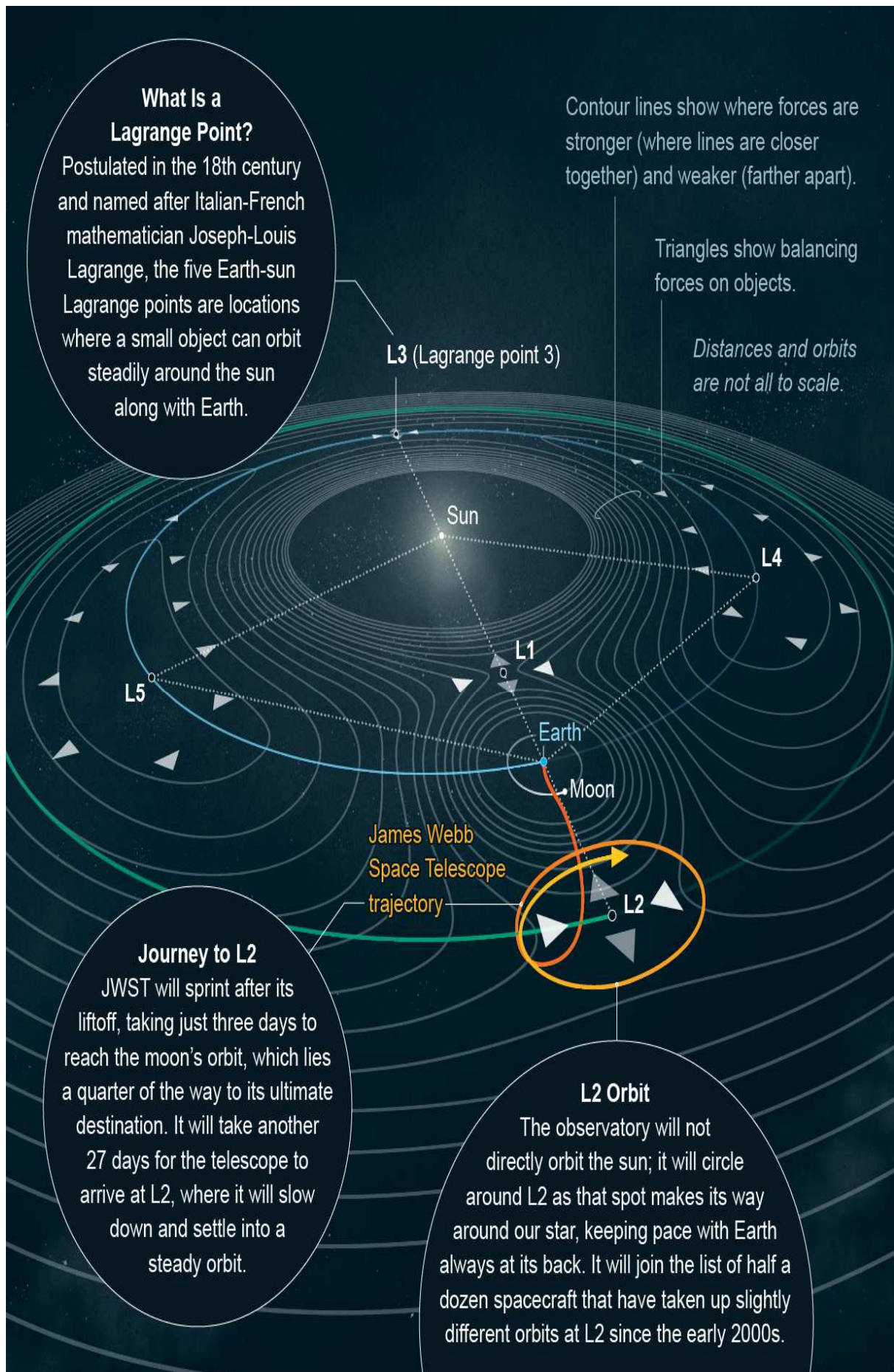


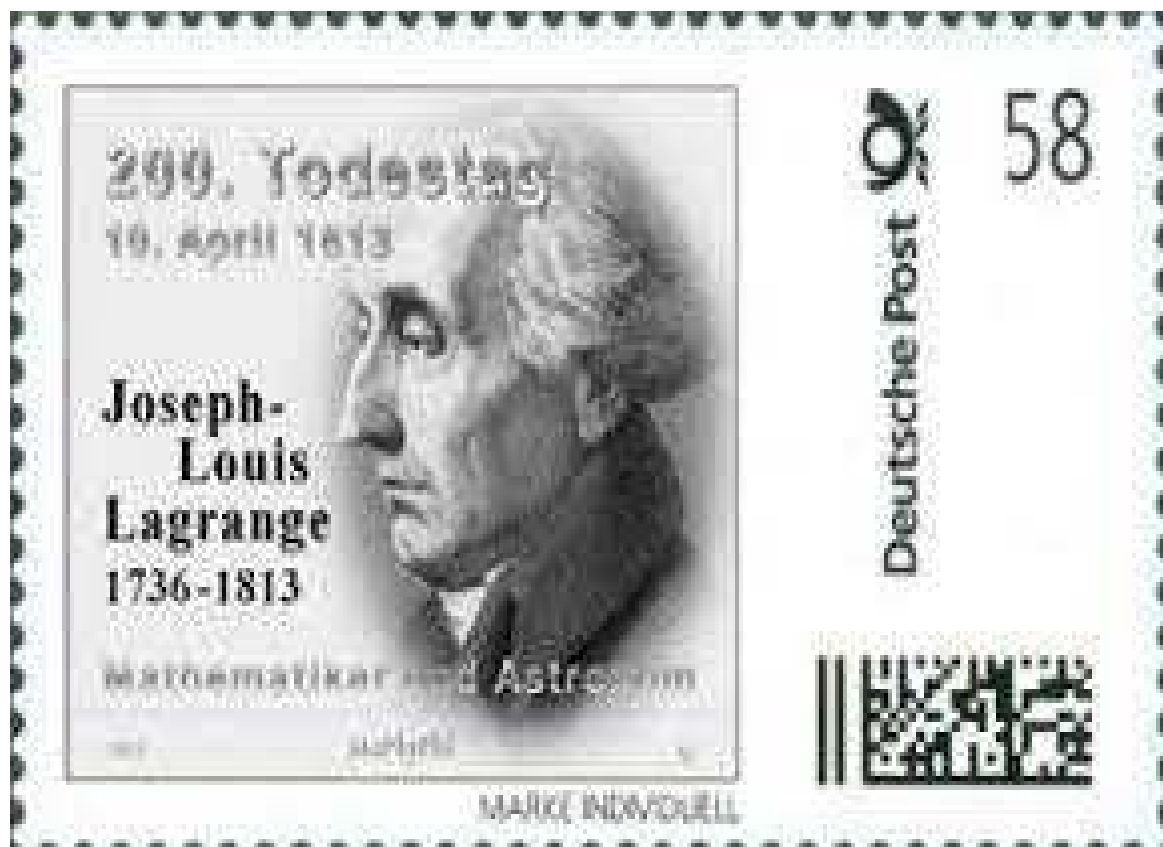
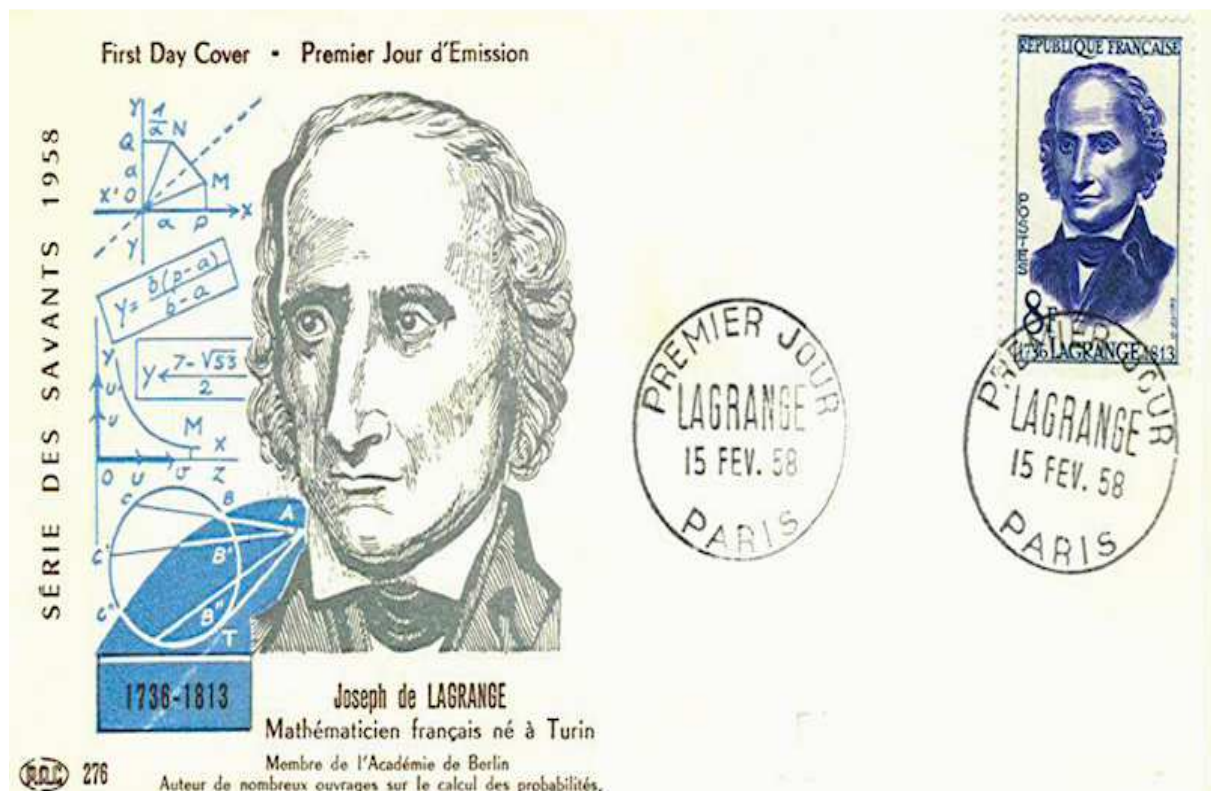


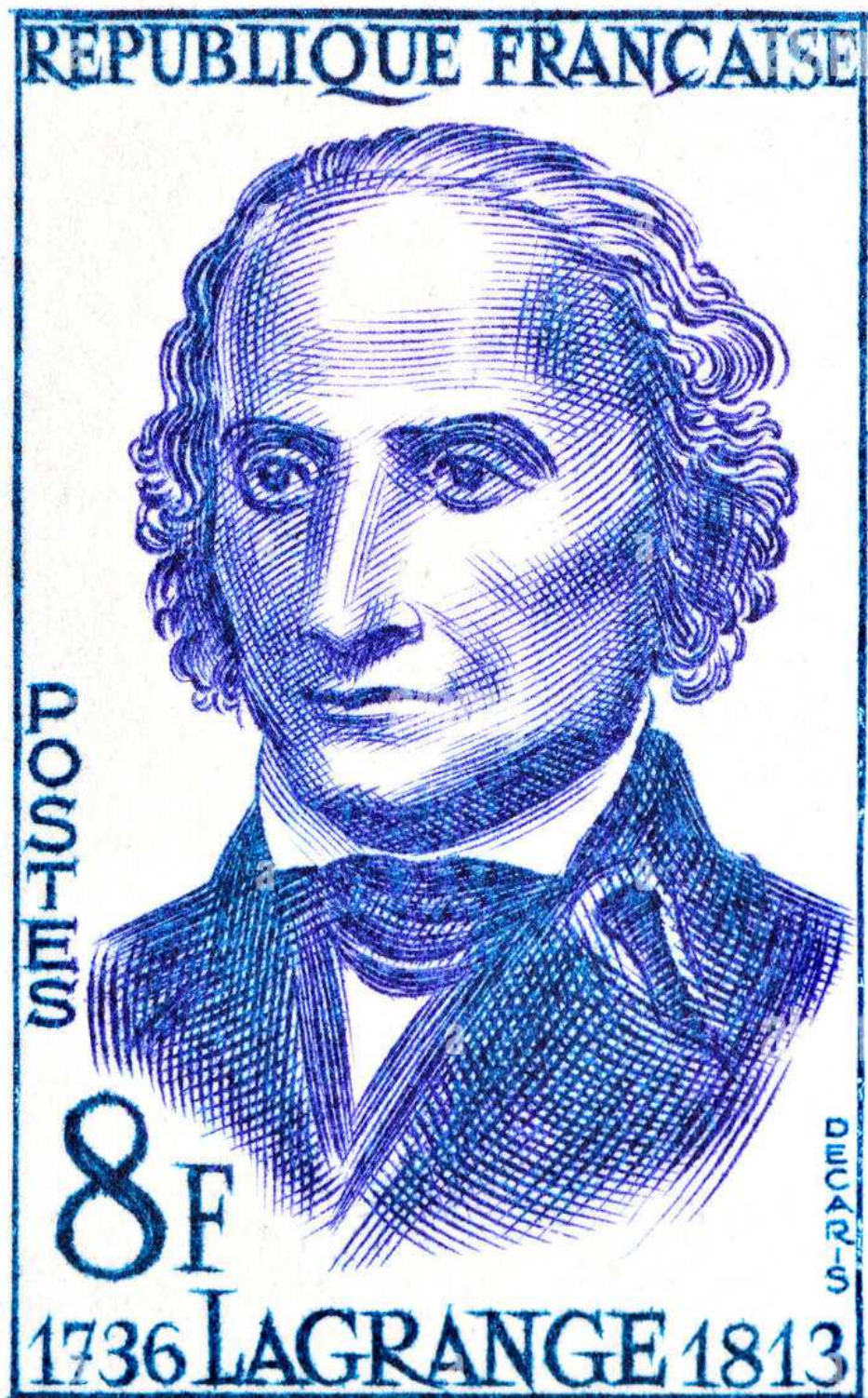


Σημεία
Lagrange









1. Η καταγωγή του

Στις φλέβες του Lagrange έτρεχε γαλλικό και ιταλικό αίμα, με το γαλλικό στοιχείο να υπερτερεί. Ο παππούς του, ένας Γάλλος λοχαγός του ιππικού, είχε μπει στην υπηρεσία του Καρόλου Εμμανουήλ του 2^{ου}, Βασιλιά της Σαρδηνίας, και αφού εγκαταστάθηκε στο Τορίνο παντρεύτηκε μια γυναίκα από την ένδοξη οικογένεια των Conti. Ο πατέρας του Lagrange, κάποτε υπεύθυνος του Πολεμικού Θησαυροφυλακίου στη Σαρδηνία, παντρεύτηκε τη Marie-Thérèse Giros, τη μοναδική θυγατέρα ενός πλούσιου γιατρού από το Cambiano, με την οποία έκανε έντεκα παιδιά. Από όλα αυτά, μόνο το μικρότερο, ο Joseph-Louis, γεννημένος στις **25.01.1736**, επέζησε πέραν της βρεφικής ηλικίας.

Ο πατέρας ήταν πλούσιος τόσο από δικού του όσο και από τη γυναίκα του. Ήταν όμως και αδιόρθωτος κερδοσκόπος, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει τίποτε να κληρονομήσει ο γιος του όταν ήρθε το πλήρωμα του χρόνου. Πολύ αργότερα, ο Lagrange στοχαζόμενος πάνω σ' αυτή την καταστροφή, τη θεωρούσε το πιο τυχερό πράγμα που του συνέβη: **«Αν είχα κληρονομήσει μια περιουσία, ίσως να μην είχα δοκιμάσει την τύχη μου στα Μαθηματικά».**

2. Τα μαθητικά του χρόνια

Στο σχολείο ο Lagrange έδειχνε μεγαλύτερο ενδιαφέρον στα κλασικά μαθήματα και ήταν θέμα τύχης μάλλον που ανέπτυξε το πάθος του για τα μαθηματικά. Στα πλαίσια των κλασικών μελετών του, ήλθε νωρίς σε γνωριμία με τις γεωμετρικές εργασίες των Ευκλείδη και Αρχιμήδη. Αυτές δεν πρέπει να τον εντυπωσίασαν ιδιαίτερα. Τότε έπεσε στα χέρια του ένα δοκίμιο του Halley (φίλου του Νεύτωνα) που εκθείαζε την ανωτερότητα του λογισμού σε σχέση με τις συνθετικές γεωμετρικές μεθόδους των Ελλήνων. Γοητεύτηκε και προσηλυτίστηκε. Μέσα σε ένα απίστευτα μικρό διάστημα είχε γίνει, χωρίς τη βοήθεια κανενός, κάτοχος αυτού που στις μέρες του ήταν η μοντέρνα ανάλυση.

Στα 16 του, (σύμφωνα με τον Delambre, ίσως να υπάρχει εδώ κάποια μικρή ανακρίβεια) ο Lagrange έγινε καθηγητής των μαθηματικών στη Βασιλική σχολή πυροβολικού στο Τορίνο. Τότε άρχισε μια από τις πιο εντυπωσιακές καριέρες στην ιστορία των μαθηματικών.

3. Η καριέρα του

Από την αρχή ο Lagrange ήταν ένας αναλύστας, ποτέ του γεωμέτρης. Σε αυτόν βλέπουμε το πρώτο καθαρό παράδειγμα εκείνης της εξειδίκευσης που επρόκειτο να καταστεί σχεδόν αναγκαιότητα στη μαθηματική έρευνα. Η προτίμησή του στην ανάλυση φάνηκε έντονα στο αριστούργημά του, την **Αναλυτική Μηχανική** (Mécanique analytique), το οποίο είχε προγραμματίσει στο Τορίνο ως νέος 19 ετών, αλλά δημοσιεύθηκε στο Παρίσι το 1788 όταν ο Lagrange ήταν πια 52 ετών. **«Δε θα βρείτε διαγράμματα σ' αυτή την εργασία»**, λέει στον πρόλογο. Όμως, κάνοντας μια κάπως χιουμοριστική σπονδή στους θεούς της γεωμετρίας, παρατηρεί πως η επιστήμη της μηχανικής μπορεί να θεωρηθεί ως η γεωμετρία ενός τετραδιάστατου χώρου, τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες και μια χρονική συντεταγμένη που αρκούν για τον εντοπισμό ενός κινούμενου σωματιδίου τόσο στον χώρο όσο και στον χρόνο: αυτός ο τρόπος θεώρησης της μηχανικής έγινε δημοφιλής από το 1915 και μετά, όταν τον εκμεταλλεύτηκε ο Αϊνστάιν στη γενική θεωρία της σχετικότητας.

Η αντιμετώπιση της μηχανικής με τη βοήθεια της ανάλυσης σηματοδοτεί την πρώτη απομάκρυνση του Lagrange από την ελληνική παράδοση. Ο Νεύτων, οι σύγχρονοι και οι άμεσοι διάδοχοί του, εύρισκαν τα διαγράμματα βολικά στη μελέτη μηχανικών προβλημάτων.

Ο Lagrange έδειξε ότι κερδίζει κανείς ασύγκριτα σε ευελιξία και δύναμη όταν χρησιμοποιηθούν από την αρχή γενικές αναλυτικές μέθοδοι. Στο Τορίνο ο νεαρός καθηγητής δίδασκε σε φοιτητές μεγαλύτερους στην ηλικία από αυτόν. Σύντομα οργάνωσε τους πιο ικανούς σε μια ερευνητική ομάδα, από την οποία προήλθε η Ακαδημία επιστημών του

Τορίνου. Ο 1^{ος} τόμος των πεπραγμένων της Ακαδημίας δημοσιεύθηκε στα 1759, όταν ο Lagrange ήταν 23 ετών. Πιστεύεται ότι είχε την ευθύνη για πολλές όμορφες μαθηματικές εργασίες δημοσιευμένες από άλλους σ' αυτήν τη περίοδο, μια και η σεμνότητα και η διακριτικότητα του δεν τον άφηναν να βάλει το όνομά του σ' αυτές.

4. Η αναγνώριση

Ένα άρθρο του Foncenex ήταν τόσο καλό, που ο Βασιλιάς της Σαρδηνίας τοποθέτησε τον υποτιθέμενο συγγραφέα υπεύθυνο του Υπουργείου Ναυτικού. Ιστορικοί των μαθηματικών έχουν μερικές φορές αναρωτηθεί γιατί ο Foncenex δε στάθηκε και τα επόμενα χρόνια στο ύψος της πρώτης μαθηματικής επιτυχίας του. Ο ίδιος ο Lagrange έγραψε μια εργασία πάνω στα μέγιστα και ελάχιστα στην οποία υποσχόταν να αντιμετωπίσει ολοκληρωμένα το θέμα σε μια άλλη εργασία, όπου θα συνήγαγε όλη τη μηχανική, τόσο των στερεών όσο και των ρευστών. Έτσι, στα 23 του, στην πραγματικότητα νωρίτερα, είχε ήδη στο μυαλό του το αριστούργημά του, την αναλυτική μηχανική, η οποία έπαιξε για τη γενική μηχανική τον ρόλο που ο νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα έπαιξε για την ουράνια μηχανική. Σε μια επιστολή του δέκα χρόνια αργότερα στον Γάλλο μαθηματικό D' Alembert (1717–1783), ο Lagrange αναφέρει πως ο ίδιος θεωρεί ως την κορυφαία προσφορά του το έργο του στον **Λογισμό των μεταβολών**, που συνέλαβε σε ηλικία 19 ετών. Με τη χρήση αυτού του Λογισμού, ο Lagrange ενοποίησε τη μηχανική και όπως είπε ο Hamilton, την έκανε «κάτι σαν επιστημονικό ποίημα».

5. Η μέθοδος του Lagrange

Όταν έχει γίνει ήδη κατανοητή η μέθοδος του Lagrange, μας φαίνεται σχεδόν κοινοτοπία. Σύμφωνα με ορισμένους, οι εξισώσεις του Lagrange που κυριαρχούν στη μηχανική αποτελούν το ωραιότερο παράδειγμα της τέχνης του να βγάζεις κάτι από το τίποτα. Λίγη σκέψη μας κάνει να δούμε ότι κάθε επιστημονική αρχή, που είναι τόσο γενική ώστε να ενώνει έναν ολόκληρο κόσμο από φαινόμενα, πρέπει να είναι απλή. Μόνο μια αρχή μέγιστης απλότητας μπορεί να διέπει μια πλειάδα διαφορετικών προβλημάτων που, ακόμη και αν τα εξετάσεις προσεκτικά, φαίνονται εξατομικευμένα και διακεκριμένα.

Σε αυτό τον ίδιο τόμο των πεπραγμένων του Τορίνου, ο Lagrange έκανε ένα ακόμη μεγάλο βήμα μπροστά: εφάρμοσε τον διαφορικό λογισμό στη θεωρία πιθανοτήτων. Και σαν να μην ήταν αυτό αρκετό για τον νεαρό γίγαντα των 23 χρόνων, προχώρησε πέρα από τον Νεύτωνα με μια ριζική αναθεώρηση της μαθηματικής θεωρίας των ήχων, έφερε αυτή τη θεωρία στην επικράτεια της μηχανικής των συστημάτων ελαστικών σωματιδίων (αντί της μηχανικής των ρευστών), εξετάζοντας τη συμπεριφορά όλων των σωματιδίων του αέρα σε μια ευθεία γραμμή υπό την επίδραση μιας διαταραχής που μεταδίδεται κατά μήκος της ευθείας από σωματίδιο σε σωματίδιο. Στην ίδια γενική κατεύθυνση κατάφερε να ξεπεράσει μια έντονη αντιγνωμία που κρατούσε για χρόνια ανάμεσα στους κορυφαίους μαθηματικούς, και αφορούσε στη σωστή μαθηματική διατύπωση του **προβλήματος της παλλόμενης χορδής**, πρόβλημα θεμελιώδους σπουδαιότητας για ολόκληρη τη θεωρία των ταλαντώσεων. Στα 23 του ο Lagrange αναγνωριζόταν ως ισάξιος των μεγαλύτερων μαθηματικών της εποχής, του Euler και των Bernoullis.

6. Το έργο του

Ο Euler πάντα εκτιμούσε γενναιόδωρα το έργο των άλλων. Ο τρόπος που αντιμετώπισε τον νεαρό ανταγωνιστή του Lagrange είναι ένα από τα ωραιότερα παραδείγματα έλλειψης εγωισμού στην ιστορία της επιστήμης. Όταν σε ηλικία 19 ετών ο Lagrange έστειλε στον Euler μέρος της δουλειάς του, ο διάσημος μαθηματικός αμέσως αναγνώρισε την αξία της και ενθάρρυνε τον ιδιοφυή νέο να συνεχίσει. Τέσσερα χρόνια αργότερα, όταν ο Lagrange εμπιστεύτηκε στον Euler τη σωστή μέθοδο για την αντιμετώπιση

των ισοπεριμετρικών προβλημάτων (λογισμός των μεταβολών, έχει περιγραφεί σε σύνδεση με τους Bernoullis), που ταλαιπώρησαν τον Euler με τις μισογεωμετρικές του μεθόδους για πολλά χρόνια, ο τελευταίος έγραψε στον νεαρό ότι η νέα μέθοδος τον βοήθησε να ξεπεράσει τις δυσκολίες του. Και αντί να βιαστεί να τρέξει στον τυπογράφο με την από καιρό αναζητούμενη λύση, ο Euler περίμενε μέχρι να μπορέσει ο Lagrange να δημοσιεύσει τη δική του μέθοδο πρώτα, «για να μην σου στερήσω το μέρος της δόξας που σου ανήκει».

Οι ιδιωτικές επιστολές, οσοδήποτε κολακευτικές, δε θα μπορούσαν να βοηθήσουν τον Lagrange. Καταλαβαίνοντάς το αυτό ο Euler, όταν δημοσίευσε την εργασία του (ύστερα από εκείνη του Lagrange), παρεξέκλινε από τις συνήθειες του για να πει ότι είχε καθυστερήσει λόγω δυσκολιών οι οποίες, μέχρι να του δείξει ο Lagrange το σωστό δρόμο, στάθηκαν αξεπέραστες. Τέλος, για να τακτοποιήσει οριστικά το θέμα, ο Euler κατάφερε να εκλεγεί ο Lagrange αλλοδαπό μέλος της Βερολινέζικης Ακαδημίας (2.10.1759) στην ασυνήθιστα μικρή ηλικία των 23 χρόνων.

7. Η διεθνής καριέρα

Αυτή η επίσημη αναγνώριση στο εξωτερικό στάθηκε μεγάλη βοήθεια για τον Lagrange στη χώρα του. Ο Euler και ο D' Alembert σχεδίαζαν να τον πάρουν στο Βερολίνο. Για προσωπικούς λόγους ως έναν βαθμό, επιθυμούσαν να δουν τον νεαρό ιδιοφυή φίλο τους ως μαθηματικό της αυλής στο Βερολίνο. Το πέτυχαν ύστερα από μακρές διαπραγματεύσεις, και ο Φρειδερίκος ο Μέγας, τον οποίο ξεγέλασαν λίγο στην όλη διαδικασία, χάρηκε σαν παιδί (αλλά δικαιολογημένα). Κάτι πρέπει να πούμε εν συντομία για τον D' Alembert, τον αφοσιωμένο φίλο του Lagrange και θαυμαστή του, έστω και μόνο για τη χαριτωμένη αντίθεση που προσφέρουν κάποιες πλευρές του χαρακτήρα του με τον σνομπ Laplace.

8. Lagrange και D' Alembert

Ο Jean le Rond D' Alembert πήρε το όνομά του από το μικρό εκκλησάκι του St. Jean-le-Rond κοντά στη Notre Dame στο Παρίσι. Νόθος γιός του Chevalier Destouches, ο D' Alembert είχε εγκαταλειφθεί από τη μητέρα του στα σκαλιά του St. Jean-le-Rond. Οι υπεύθυνοι της ενορίας έδωσαν το έκθετο στη γυναίκα ενός φτωχού υαουργού, η οποία το ανάθρεψε σα να ήταν δικό της παιδί. Ο Chevalier (Ιπότης στα γαλλικά) αναγκάστηκε από το νόμο να πληρώσει για τη μόρφωση του μπάσταρδου. Η πραγματική μητέρα όμως του D' Alembert ήξερε πού βρισκόταν ο γιός της και όταν το παιδί έδειξε από νωρίς σημάδια μεγαλοφυίας, προσπάθησε να το πάρει μαζί της. «Είσαι μόνο η μητριά μου», της είπε το αγόρι, «η γυναίκα του υαουργού είναι η αληθινή μου μητέρα». Και με αυτή τη φράση παράτησε τη δική του σάρκα και αίμα, ακριβώς όπως εκείνη τον είχε παρατήσει παλαιότερα.

Όταν έγινε διάσημος και από τις σημαντικότερες μορφές της Γαλλικής Επιστήμης, ο D' Alembert αντάμειψε τον υαουργό και τη γυναίκα του ώστε να μην ξεπέσουν στη ζητιανιά (αυτοί ωστόσο, προτίμησαν να μείνουν στη ταπεινή τους γειτονιά) και με περηφάνεια τους αποκαλούσε γονείς. Πρέπει να αναφέρουμε πως ο D' Alembert υπήρξε ο πρώτος που έδωσε πλήρη λύση στο περίφημο **πρόβλημα της μετάπτωσης των ισημεριών**. Η σημαντικότερη εργασία του στα καθαρά μαθηματικά αφορούσε στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, ιδιαίτερα σε σχέση με τις παλλόμενες χορδές.

Ο D' Alembert ενθάρρυνε τον σεμνό νεαρό, με τον οποίο διατηρούσε αλληλογραφία, να καταπιαστεί με δύσκολα και σπουδαία προβλήματα. Ανέλαβε μάλιστα να πείσει τον Lagrange να φροντίζει την υγεία του μια που ούτε η δική του δεν ήταν καλή. Ο Lagrange είχε προξενήσει σοβαρή ζημιά στο πεπτικό του σύστημα, παραμελώντας το αστόχαστα ανάμεσα στα 16 και στα 26 του χρόνια. Σε όλη την κατοπινή ζωή του ήταν υποχρεωμένος να εφαρμόζει αυστηρή αυτοπειθαρχία, ιδιαίτερα στο ζήτημα της υπερβολικής δουλειάς. Σε ένα από τα γράμματά του ο D' Alembert επιπλήττει τον νεαρό για την υπερκατανάλωση τσαγιού και καφέ για να μένει ξυπνητός, ενώ σε ένα άλλο του υποδεικνύει ένα πρόσφατο βιβλίο

ιατρικής πάνω στις αρρώστιες των ερευνητών. Η απάντηση του Lagrange σε όλα αυτά ήταν πως αισθανόταν όμορφα και εργαζόταν σαν τρελός. Στο τέλος όμως πλήρωσε το αντίτιμο.

Από μια άποψη, η καριέρα του Lagrange εμφανίζεται περίεργα παράλληλη με εκείνη του Νεύτωνα. Ως συνέπεια της παρατεταμένης εντατικής συγκέντρωσής του σε προβλήματα πρώτου μεγέθους, όταν έγινε μεσήλικας ο ενθουσιασμός του είχε κοπάσει· και παρά το γεγονός ότι το μυαλό του δεν είχε χάσει σε δύναμη, έφτασε στο σημείο να βλέπει με αδιάφορο μάτι τα μαθηματικά. Στην ηλικία των 45 χρόνων έγραψε στον D' Alembert: **«αρχίζω να αισθάνομαι τη δύναμη της αδράνειάς μου να μεγαλώνει σιγά-σιγά, και δε μπορώ να πω αν σε 10 χρόνια από τώρα θα εξακολουθώ να ασχολούμαι με τα μαθηματικά. Μου φαίνεται επίσης πως το ορυχείο έχει σκαφτεί ήδη σε μεγάλο βάθος, και αν δε βρεθούν νέες φλέβες θα πρέπει να εγκαταλειφθεί».**

Όταν τα έγραφε αυτά ο Lagrange ήταν άρρωστος και μελαγχολικός. Όμως εξέφραζαν την αλήθεια όσον αφορά στον ίδιο. Στο τελευταίο γράμμα του D' Alembert (Σεπτέμβριος 1783), γραμμένο ένα μήνα πριν από τον θάνατό του, αντιστρέφεται η αρχική του συμβουλή και προτείνεται η δουλειά σαν το μόνο φάρμακο για την ψυχική αρρώστια του Lagrange: **«Προς Θεού, μην αποκηρύττεις τη δουλειά, την αποτελεσματικότερη για σένα απομάκρυνση απ' τις σκοτούρες. Αντίο, ίσως για τελευταία φορά. Να θυμάσαι πού και πού τον άνθρωπο που σε αγαπά και σε τιμά περισσότερο από κάθε άλλον στον κόσμο».**

Ευτυχώς για τα μαθηματικά, η βαθιά μελαγχολία του Lagrange με το αναπόφευκτο πόρισμά της πως καμιά ανθρώπινη γνώση δεν αξίζει τον κόπο, άργησε είκοσι ένδοξα χρόνια αφ' ότου ο D' Alembert και ο Euler σχεδίαζαν να τον πάρουν στο Βερολίνο.

9. Το πρόβλημα της λίκνισης της Σελήνης

Ανάμεσα στα μεγάλα προβλήματα που έλυσε ο Lagrange πριν πάει στο Βερολίνο, ήταν εκείνο της λίκνισης της Σελήνης. Γιατί η Σελήνη δείχνει πάντα το ίδιο πρόσωπο στη Γη, με ορισμένες μικρές αποκλίσεις που εξηγούνται; Αυτό το γεγονός έπρεπε να συναχθεί από τον νευτώνειο νόμο της βαρύτητας. Το πρόβλημα είναι μια περίπτωση του περίφημου «προβλήματος των τριών σωμάτων» εδώ, της Γης, του Ήλιου και της Σελήνης, που αλληλοέλκονται σύμφωνα με το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου των αποστάσεων μεταξύ των κέντρων βάρους τους. Για τη λύση που έδωσε στο πρόβλημα της λίκνισης, ο Lagrange πήρε το μεγάλο βραβείο της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών το 1764, ήταν τότε μόνο 28 ετών.

10. Οι δορυφόροι του Δία

Ύστερα από αυτή τη μεγάλη επιτυχία, η Ακαδημία πρότεινε ένα ακόμη πιο δύσκολο πρόβλημα, για το οποίο ο Lagrange ξανακέρδισε το βραβείο το 1766. Στην εποχή του, μόνο τέσσερις δορυφόροι του Δία είχαν ανακαλυφθεί. Όμως το σύστημα του Δία (ο ίδιος, οι δορυφόροι του και ο Ήλιος) έδινε ένα πρόβλημα έξι σωμάτων. Μια πλήρης μαθηματική λύση σε μορφή που να προσφέρεται για πρακτικούς υπολογισμούς, ήταν ανέφικτη ακόμη και το 1939. Χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές μεθόδους, ο Lagrange έκανε ένα σημαντικό βήμα στην εξήγηση των παρατηρούμενων ανισώσεων. Τέτοιες εφαρμογές της νευτώνειας θεωρίας υπήρξαν από τα κύρια ενδιαφέροντα του σε όλη τη διάρκεια της ενεργού δράσης του.

Το 1772 ξαναπήρε το βραβείο της Παρισινής Ακαδημίας για την εργασία του πάνω στο πρόβλημα των τριών σωμάτων και στα 1774 και 1778 είχε ανάλογες επιτυχίες με την κίνηση της Σελήνης και τις διαταραχές λόγω κομητών.

11. Τα ταξίδια του σε Παρίσι και Βερολίνο

Η πρώτη από αυτές τις εντυπωσιακές επιτυχίες έκανε τον Βασιλιά της Σαρδηνίας να πληρώσει τα έξοδα του Lagrange για ένα ταξίδι στο Παρίσι και στο Λονδίνο το 1766. Ο Lagrange ήταν τότε 30 χρόνων. Το σχέδιο ήταν να συνοδεύσει τον Σαρδηνό υπουργό

Caraccioli στην Αγγλία, φθάνοντας όμως στο Παρίσι ο Lagrange έπεσε βαριά άρρωστος, συνεπεία γαστριμαργικής υπερβολής κατά τη διάρκεια ιταλικού γεύματος που δόθηκε προς τιμήν του και αναγκάστηκε να παραμείνει στο Παρίσι. Εκεί, συναντήθηκε με όλους τους γνωστούς διανοούμενους, περιλαμβανομένου του αβιά Marie που αργότερα θα αποδεικνυόταν πολύτιμος φίλος. Το γεύμα τον γιάτρεψε από την επιθυμία να ζήσει στο Παρίσι και επέστρεψε στο Τορίνο αμέσως μόλις έγινε καλά. Επιτέλους, στις **6.11.1766** ο Lagrange καλωσορίστηκε στο Βερολίνο από τον Φρειδερίκο, **«τον μεγαλύτερο βασιλιά στην Ευρώπη»**, όπως αποκαλούσε με μετριοφροσύνη τον εαυτό του, που θα ήταν τιμή του να έχει στην αυλή του **«τον μεγαλύτερο μαθηματικό»**. Τουλάχιστον το δεύτερο ήταν σωστό. Ο Lagrange έγινε διευθυντής του Φυσικομαθηματικού τμήματος της Βερολινέζικης Ακαδημίας και επί μια **εικοσαετία** γέμιζε τα πεπραγμένα της Ακαδημίας με τη μία μεγάλη εργασία μετά την άλλη. Δεν του ζητούσαν να παραδίδει μαθήματα. Στην αρχή ο νέος διευθυντής βρέθηκε σε μια κάπως λεπτή θέση.

Ήταν αρκετά φυσικό οι Γερμανοί να στραβοκοιτάζουν τους ξένους που ο Φρειδερίκος έβαζε πάνω από τα κεφάλια τους και η συμπεριφορά τους έτεινε να είναι λίγο χειρότερη από την κρύα ευπρέπεια, φτάνοντας συχνά να γίνεται προσβλητική. Εκτός όμως του ότι ήταν μαθηματικός πρώτης γραμμής, ο Lagrange είχε μια ευγένεια ψυχής και το σπάνιο προσόν να ξέρει πότε να κρατά το στόμα του κλειστό. Σε γράμματα προς πιστούς φίλους του εκφραζόταν μερικές φορές έξω από τα δόντια, ακόμη και για τους Ιησουίτες που αυτός και ο D' Alembert φαίνεται ότι αντιπαθούσαν. Και μπορούσε κάποτε να είναι αρκετά απότομος στις επίσημες αναφορές του προς διάφορες Ακαδημίες για το επιστημονικό έργο των άλλων. Στις κοινωνικές του όμως επαφές δεν ανακατευόταν στις υποθέσεις των άλλων και απέφευγε να εκδηλώσει ακόμη και δικαιολογημένη επιθετικότητα. Μέχρι να τον συνηθίσουν οι συνεργάτες του, προτιμούσε να μην μπλέκεται στα πόδια τους.

Η έμφυτη αντιπάθεια του Lagrange προς τις λογομαχίες τον βοήθησε να σταθεί στα πόδια του όσο βρισκόταν στο Βερολίνο. Ο Euler έμπλεκε σε όλες τις θρησκευτικές και φιλοσοφικές διενέξεις. Ο Lagrange, όταν στριμωχνόταν στη γωνία και πιεζόταν, προλόγιζε τις αποκρίσεις του με ένα ειλικρινές «δεν ξέρω». Όμως όταν έβλεπε τους άλλους να επιτίθενται κατά των πεποιθήσεών του, γνώριζε να οργανώνει μια θαρραλέα άμυνα με επαρκώς αιτιολογημένες θέσεις. Σε γενικές γραμμές ο Lagrange δικαιολογούσε τον Φρειδερίκο, τον οποίο είχαν ενοχλήσει οι εμπλοκές του Euler σε φιλοσοφικά προβλήματα στα οποία ήταν τελείως αμαθής. **«Ο φίλος μας ο Euler»**, έγραψε στον D' Alembert, **«είναι ένας μεγάλος μαθηματικός αλλά ένας αρκετά κακός φιλόσοφος»**. Και σε μια άλλη περίπτωση, αναφερόμενος στις ηθικολογίες που γράφει ο Euler στα διάσημα Γράμματα σε μια Γερμανίδα Πριγκίπισσα, είπε την κλασική φράση **«αυτά είναι τα σχόλια του Euler πάνω στην Αποκάλυψη»**, που ήταν ταυτόχρονα και ένας ειρωνικός υπαινιγμός στην ακριτομυθία του Νεύτωνα όταν είχε χάσει την όρεξή του για τη φυσική φιλοσοφία.

«Είναι απίστευτο» έλεγε ο Lagrange για τον Euler, «ότι μπορεί να είναι τόσο ρηχός και παιδαριώδης στη μεταφυσική». Και για τον εαυτό του: «αισθάνομαι μεγάλη αποστροφή για τις λογομαχίες». Όταν φιλοσοφούσε στα γράμματά του, το έκανε με μια αναπάντεχη δόση κυνισμού που είναι παντελώς απύσχα από τις εργασίες που δημοσίευσε, όπως όταν γράφει: «έχω παρατηρήσει πως οι αξιώσεις όλων των ανθρώπων είναι αντιστρόφως ανάλογες προς την αξία τους, αυτό είναι ένα ηθικό αξίωμα». Σε θρησκευτικά ζητήματα ο Lagrange ήταν, αν τελικά ήταν κάτι, αγνωστικιστής. Ο Φρειδερίκος ήταν πολύ ευχαριστημένος μαζί του και συχνά κουβέντιαζαν με φιλικό τρόπο για ώρες. Η αντίθεση που εμφάνιζε ο Lagrange σε σχέση με τον Euler ήταν ιδιαίτερα ευχάριστη στον Φρειδερίκο.

12. Lagrange και Euler

Ο Βασιλιάς είχε εκνευριστεί από την τόσο εμφανή ευσέβεια του Euler και την έλλειψη αυλικής λάμψης. Μάλιστα είχε φθάσει να αποκαλεί τον φτωχό Euler **«βραδυκίνητο**

μαθηματικό κύκλωπα», διότι εκείνη την εποχή ο Euler ήταν τυφλός στο ένα του μάτι. Προς τον D' Alembert ο ευγνώμων Φρειδερίκος έγραψε γεμάτος λογοτεχνικό οίστρο: «Στους κόπους σου και στις συστάσεις σου οφείλω την αντικατάσταση στην Ακαδημία μου ενός μαθηματικού τυφλού στο ένα του μάτι, από έναν μαθηματικό με δύο μάτια, πράγμα ιδιαίτερα ευχάριστο για το τμήμα της ανατομίας». Κατά βάθος όμως, παρά τα ευφυολογήματα τέτοιου είδους, ο Φρειδερίκος δεν ήταν κακός.

13. Ο 1ος γάμος του

Λίγο μετά την εγκατάστασή του στο Βερολίνο, ο Lagrange παντρεύτηκε μια νεαρή κυρία με την οποία είχε συγγένεια (την κάλεσε από το Τορίνο). Υπάρχουν δύο εκδοχές σχετικά με αυτό. Κατά την πρώτη, ο Lagrange είχε ζήσει στο ίδιο σπίτι με το κορίτσι και τους γονείς της και έδειξε κάποιο ενδιαφέρον για τα ψώνια της κοπέλας. Από φυσικού του οικονόμος, ο Lagrange σκανδαλίστηκε από τις κατ' αυτόν υπερβολές του κοριτσιού, και της αγόρασε κορδέλες ο ίδιος. Από τότε συνδέθηκε μαζί της με κατάληξη τον γάμο.

Η δεύτερη εκδοχή προκύπτει από ένα γράμμα του σίγουρα η πιο παράξενη ομολογία αδιαφορίας που έχει ποτέ γραφεί από έναν, υποτίθεται ξετρελαμένο από αγάπη, νιόπαντρο. Είχε προηγηθεί ένα αστείο του D' Alembert ο οποίος έγραψε στον φίλο του: «Καταλαβαίνω πως έκανες αυτό που εμείς οι φιλόσοφοι αποκαλούμε μοιραία βουτιά. Ένας μεγάλος μαθηματικός θα έπρεπε πριν από όλα να μπορεί να υπολογίσει την ευτυχία του.

Αναμφίβολα ύστερα από αυτόν τον υπολογισμό βρήκες τη λύση στον γάμο». Ο Lagrange είτε πήρε στα σοβαρά το γράμμα ή αποφάσισε να χτυπήσει τον D'Alembert με τα μέσα του τελευταίου και το πέτυχε. Ο D' Alembert είχε εκφράσει έκπληξη για το ότι ο φίλος του δεν είχε αναφερθεί στη μεταξύ τους αλληλογραφία στον γάμο του. «Δεν ξέρω αν οι υπολογισμοί μου ήταν σωστοί ή λάθος», έγραψε στην απάντησή του ο Lagrange, «ή καλύτερα, δε νομίζω πως έκανα κανέναν υπολογισμό. Διότι θα μπορούσε να μου συμβεί ότι και στον Leibniz, που όταν ήταν αναγκασμένος να σκεφτεί, δεν κατέληγε σε μια απόφαση. Σου ομολογώ πως δε με ενδιέφερε ποτέ ο γάμος. Όμως οι περιστάσεις με έκαναν να αρραβωνιαστώ με μια συγγενή που ανέλαβε τη φροντίδα μου και όλες μου τις υποθέσεις.

Αν αμέλησα να σε πληροφορήσω για αυτό, ήταν διότι όλο το ζήτημα μού φάνηκε τόσο χωρίς συνέπειες που δεν άξιζε τον κόπο να σου το κάνω γνωστό.» Ο γάμος του εξελισσόταν ευτυχισμένος και για τους δύο τους, μέχρι που η γυναίκα του αρρώστησε βαριά. Ο Lagrange δεν κοιμόταν για να μπορεί να την φροντίζει και ο θάνατός της του ράγισε την καρδιά. Βρήκε παρηγοριά στη δουλειά του. «Οι ασχολίες μου έχουν περιορισθεί στην καλλιέργεια των μαθηματικών, ήσυχα και ειρηνικά».

Στη συνέχεια, μιλάει στον D' Alembert για το μυστικό της τελειότητας που χαρακτηρίζει όλο του το έργο, μιας τελειότητας που έριχνε σε απελπισία τους βιαστικούς διαδόχους του. **«Καθώς δεν πιέζομαι και εργάζομαι περισσότερο από ευχαρίστηση παρά από καθήκον, μοιάζω με τους θεούς που κτίζουν: κατασκευάζω, χαλώ και ξανακατασκευάζω, μέχρι που να μείνω σχετικά ικανοποιημένος με το αποτέλεσμα, πράγμα που συμβαίνει σπάνια».** Και σε μια άλλη περίπτωση, αφού είχε εκφράσει τα παράπονά του για τις συνέπειες μιας υπερκόπωσης, λέει πως του είναι αδύνατον να αναπαύεται: «Η κακή μου συνήθεια να γράφω και να ξαναγράφω τις εργασίες μου πολλές φορές μέχρι να μείνω σχετικά ικανοποιημένος, δεν είναι δυνατό να αλλάξει». Στα είκοσι χρόνια της παραμονής του στο Βερολίνο, δεν απορροφήθηκαν όλες του οι προσπάθειες μόνο από την ουράνια μηχανική και το λουστράρισμα του αριστουργήματός του.

14. Lagrange και Fermat

Μια παρέκκλιση στην επικράτεια του Fermat, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, μια και μπορεί να δείξει την εγγενή δυσκολία που παρουσιάζουν τα πράγματα που φαίνονται απλά στην αριθμητική. Βλέπουμε ακόμη και τον μεγάλο Lagrange να σαστίζει μπροστά στην

απροσδόκητα μεγάλη προσπάθεια που χρειάστηκε να καταβάλει για τις έρευνες του στην αριθμητική. «Τις τελευταίες μέρες τις πέρασα», έγραφε στον D' Alembert στις **15.08.1768**, «ποικίλλοντας τις μελέτες μου με ορισμένα προβλήματα της αριθμητικής, και σε βεβαιώνω πως συνάντησα πολύ περισσότερες δυσκολίες από όσες περίμενα.

Εδώ έχω μια περίπτωση, για παράδειγμα, που η λύση της με κούρασε πολύ. Δοθέντος ενός θετικού ακεραίου n , ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο, να βρεθεί ένας ακεραίος που να είναι τέλειο τετράγωνο, κι ας πούμε, έτσι ώστε ο $nx^2 + 1$ να είναι τέλειο τετράγωνο. Αυτό το πρόβλημα είναι πολύ σημαντικό στη θεωρία των τετραγώνων (τετραγωνικών μορφών σήμερα) τα οποία [τετράγωνα] είναι το κύριο αντικείμενο της διοφαντικής ανάλυσης. Επί πλέον, με την ευκαιρία αυτή βρήκα μερικά πολύ όμορφα θεωρήματα της Αριθμητικής, τα οποία θα σου γνωστοποιήσω αν θέλεις μια άλλη φορά». Το πρόβλημα που περιγράφει ο Lagrange έχει μεγάλη ιστορία, με αφετηρία τον Αρχιμήδη και τους αρχαίους Ινδούς. Η κλασική εργασία του Lagrange στο να κάνει τον $nx^2 + 1$ τέλειο τετράγωνο, αποτελεί ορόσημο στη θεωρία των αριθμών. Ήταν επίσης ο πρώτος που απέδειξε μερικά από τα θεωρήματα του Fermat και εκείνο του John Wilson (1741–1793), που λέει πως,

αν ο p είναι πρώτος αριθμός, τότε το γινόμενο των αριθμών $1, 2, \dots, p-1$ αυξημένο κατά 1, δίνει αριθμό που διαιρείται από τον p .

Η πρόταση δεν ισχύει αν ο p δεν είναι πρώτος. Για παράδειγμα, αν $p = 5$, τότε $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) + 1 = 25$. Η απόδειξη μπορεί να γίνει με στοιχειώδη τρόπο και είναι ένα από τα αριθμητικά τέστ υπερνοημοσύνης. Στην απάντησή του ο D' Alembert διατυπώνει την άποψη πως η διοφαντική ανάλυση μπορεί να είναι χρήσιμη στον ολοκληρωτικό λογισμό, όμως δεν προχωρεί σε λεπτομέρειες. Κατά περίεργο τρόπο, η προφητεία βγήκε αληθινή στα 1870 από τον Ρώσο μαθηματικό G. Zolotarev. Ο Laplace επίσης έδειξε για λίγο ενδιαφέρον για την αριθμητική, και είπε στον Lagrange πως τα αναπόδεδεικτα θεωρήματα του Fermat, ενώ αποτελούν ένα από τα πιο δοξασμένα κεφάλαια της ιστορίας των μαθηματικών στη Γαλλία, ταυτόχρονα είναι και η πιο ορατή της κηλίδα· ήταν καθήκον των Γάλλων μαθηματικών να την εξαλείψουν. Προέβλεπε όμως σε αυτό τρομερές δυσκολίες. Η ρίζα του προβλήματος, κατά την άποψή του, είναι ότι τα προβλήματα του διακριτού (που καταπιάνονται τελικά με τους 1, 2, 3, ...) δε μπορεί να αντιμετωπιστούν με τη βοήθεια ενός γενικού εργαλείου σαν αυτό που ο λογισμός προσέφερε για τα προβλήματα του συνεχούς.

Ο D' Alembert επίσης παρατηρεί για την αριθμητική πως τη βρήκε «πιο δύσκολη απ' όσο φαίνεται σε πρώτη ματιά». Αυτές οι εμπειρίες μαθηματικών σαν τον Lagrange και τους φίλους του, υποβάλλουν την εκτίμηση πως η αριθμητική είναι πραγματικά δύσκολη. Σε ένα άλλο γράμμα του Lagrange (**28.02.1769**) καταγράφεται το κλείσιμο του θέματος. «Το πρόβλημα στο οποίο αναφέρθηκα με έχει απασχολήσει πολύ περισσότερο από όσο είχα προβλέψει στην αρχή. Όμως τελικά είχε ευτυχή κατάληξη και πιστεύω πως δεν έχω αφήσει πρακτικά τίποτε ανοικτό στο αντικείμενο των γενικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού με δύο αγνώστους». Εδώ ήταν υπερβολικά αισιόδοξος. Δεν είχε ακόμη φανεί ο Gauss, ο πατέρας και η μητέρα του είχαν ακόμη μπροστά τους επτά χρόνια πριν συναντηθούν. Δύο χρόνια πριν από τη γέννηση του Gauss (1777), ο Lagrange κοίταζε τα αποτελέσματα της δουλειάς του με απαισιόδοξη διάθεση: «Οι αριθμητικές έρευνες είναι εκείνες που μου κοστίζουν τις μεγαλύτερες σκοτούρες και είναι ίσως οι λιγότερο αξιόλογες».

15. Lagrange και Laplace

Όταν αισθανόταν καλά, ο Lagrange σπάνια διέπραττε το σφάλμα να εκτιμήσει τη «σπουδαιότητα» της δουλειάς του. «Ανέκαθεν έβλεπα τα μαθηματικά», έγραφε στον Laplace το 1777, «σαν αντικείμενο διασκέδασης και όχι για την ικανοποίηση της φιλοδοξίας μου και σε διαβεβαιώ ότι απολαμβάνω τις εργασίες των άλλων πολύ περισσότερο από τις δικές μου με τις οποίες αισθάνομαι πάντοτε ανικανοποίητος. Βλέπεις λοιπόν ότι, αν εσύ έχεις

απαλλαγεί από το συναίσθημα της ζήλειας λόγω των επιτυχιών σου, το ίδιο συμβαίνει σε μένα λόγω της προδιάθεσής μου». Αυτό απαντούσε σε μια κάπως πομπώδη διακήρυξη του Laplace ότι έκανε μαθηματικά μόνο για να ικανοποιήσει τη δική του ανώτερη περιέργεια, αδιαφορώντας εντελώς για την επιδοκιμασία του «πλήθους» -που στην περίπτωσή του δεν ήταν και τόσο αληθοφανής. Ένα γράμμα της **15.09.1782** στον Laplace έχει μεγάλο ιστορικό ενδιαφέρον, καθώς μιλά για την ολοκλήρωση της *Mécanique analytique*: «Έχω σχεδόν τελειώσει μια πραγματεία στην αναλυτική μηχανική, θεμελιωμένη αποκλειστικά σε μια βασική αρχή ή τύπο που διατυπώνεται στο πρώτο μέρος της καθώς όμως δεν ξέρω πότε ή πού μπορώ να την τυπώσω, δεν βιάζομαι με τις τελευταίες λεπτομέρειες».

Ο Legendre ανέλαβε την επιμέλεια της έκδοσης και ο παλιός φίλος του Lagrange, ο αβάς Marie, έπεισε τελικά έναν εκδότη στο Παρίσι να ρισκάρει την υπόληψή του. Αυτός ο πονηρός δέχτηκε να προχωρήσει στην εκτύπωση μόνο όταν συμφωνήθηκε με τον αβά Marie να αγοράσει ο τελευταίος όλα τα απούλητα αντίτυπα ύστερα από μια ορισμένη ημερομηνία.

Το βιβλίο δεν εμφανίστηκε παρά το 1788, αφού ο Lagrange είχε φύγει από το Βερολίνο. Ένα αντίτυπο έφτασε στα χέρια του σε μια εποχή που είχε χάσει τόσο πολύ κάθε ενδιαφέρον για την επιστήμη και τα μαθηματικά, ώστε δε μπόρεσε καν στον κόπο να το ανοίξει. Και στα κινέζικα να είχε βγει το βιβλίο του, δεν θα τον ένοιαζε.

16. Το έργο του Lagrange στο Βερολίνο

Μια έρευνά του της περιόδου που ο Lagrange έζησε στο Βερολίνο, είναι εξαιρετικά μεγάλης σημασίας για την εξέλιξη της σύγχρονης άλγεβρας, η εργασία του το 1767 «**Σχετικά με την επίλυση αριθμητικών εξισώσεων**» και οι συνακόλουθες προσθήκες σχετικά με το γενικό πρόβλημα της αλγεβρικής επιλυσιμότητας των εξισώσεων. Ίσως η μεγαλύτερη σπουδαιότητα των ερευνών του Lagrange πάνω στη θεωρία και επίλυση των εξισώσεων να έγκειται στο ότι ενέπνευσαν τους κορυφαίους αλγεβριστές των αρχών του 19^{ου} αιώνα. Θα δούμε ξανά και ξανά μαθηματικούς οι οποίοι τελικά έλυσαν ένα πρόβλημα που είχε ταλαιπωρήσει τους αλγεβριστές για τουλάχιστον τρεις αιώνες, να στρέφονται στον Lagrange για να αντλήσουν ιδέες και έμπνευση. Ο Lagrange δεν ξεπέρασε την κεντρική δυσκολία (τη διατύπωση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την αλγεβρική επιλυσιμότητα δοθείσης εξίσωσης) το σπέρμα όμως για το ξεπέρασμά της βρισκόταν στο έργο του.

Ας ρίξουμε μια ματιά σε αυτό το πρόβλημα, καθώς είναι ένα από τα σημαντικότερα πράγματα σε όλη την άλγεβρα που μπορεί να περιγραφεί με απλό τρόπο. Θα εμφανιστεί πολλές φορές σαν το βασικό μοτίβο στο έργο μερικών μεγάλων μαθηματικών του 19^{ου} αιώνα (Cauchy, Abel, Galois, Hermite, Kronecker). Δεν υπάρχει καμία δυσκολία στην επίλυση μιας αλγεβρικής εξίσωσης με αριθμητικούς συντελεστές. Μπορεί να απαιτηθεί πολλή δουλειά αν η εξίσωση είναι μεγάλου βαθμού, πχ.

$$1821x^{101} - 3,6x^{68} + 1968x - 2023 = 0,$$

υπάρχουν όμως πολλές γνωστές και απλές μέθοδοι για να βρούμε μια ρίζα τέτοιας αριθμητικής εξίσωσης με τον επιθυμητό βαθμό ακρίβειας. Κάποιες από αυτές τις μεθόδους αποτελούν μέρος του μαθήματος της άλγεβρας σε ένα μέσο σχολείο. Στα χρόνια όμως του Lagrange, τέτοιες μέθοδοι δεν ήταν κοινός τόπος αν τις ήξερε κανείς. Ο Lagrange έδωσε μια τέτοια μέθοδο. Θεωρητικά έκανε (η μέθοδος) ό,τι έπρεπε, δεν ήταν όμως πρακτική. Κανένας μηχανικός σήμερα δε θα διανοείτο να λύσει μια αριθμητική εξίσωση με τη μέθοδο του Lagrange. Το πραγματικά σημαντικό πρόβλημα εμφανίζεται όταν αναζητήσουμε αλγεβρική λύση μιας εξίσωσης με γενικούς συντελεστές,

$$\text{πχ. } ax^2 + bx + c = 0, \text{ ή } ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

και ανάλογα για βαθμούς μεγαλύτερους του τρίτου. Αυτό που απαιτείται είναι ένα σύνολο τύπων που να εκφράζουν τον άγνωστο x συναρτήσει των δοθέντων $a, b, c, \dots$ έτσι ώστε αν εκφράσουμε κατά αυτόν τον τρόπο το x , στο αριστερό μέλος της εξίσωσης να προκύψει ως αποτέλεσμα το μηδέν. Για μια εξίσωση βαθμού n ο άγνωστος x έχει n ακριβώς τιμές.

Έτσι, για την πιο πάνω δευτεροβάθμια εξίσωση, οι δύο τιμές του x που μηδενίζουν το αριστερό μέλος είναι $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Οι ζητούμενες τιμές του x πρέπει να εκφραστούν

συναρτήσει των $a, b, c, \dots$ μέσω **πεπερασμένου** αριθμού προσθέσεων, αφαιρέσεων, πολλαπλασιασμών, διαιρέσεων και ριζικών. Αυτό είναι το πρόβλημα. Λύνεται; Η απάντηση δε δόθηκε παρά μια εικοσαετία μετά από το θάνατο του Lagrange, αλλά η ιδέα-κλειδί ανιχνεύεται εύκολα στο έργο του. Ως πρώτο βήμα στην κατεύθυνση μιας περιεκτικής θεωρίας, ο Lagrange μελέτησε εξαντλητικά όλες τις λύσεις που είχαν δοθεί παλαιότερα για τις γενικές εξισώσεις των πρώτων τεσσάρων βαθμών και κατάφερε να αποδείξει ότι όλα τα τεχνάσματα με τα οποία προέκυψαν οι λύσεις, μπορούσαν να αντικατασταθούν από μια ομοιόμορφη διαδικασία. Μια λεπτομέρεια σε αυτή τη γενική μέθοδο περιέχει το κλειδί που αναφέραμε πιο πάνω. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται μια αλγεβρική έκφραση που περιλαμβάνει γράμματα $a, b, c, \dots$ πόσες διαφορετικές εκφράσεις μπορούν να προκύψουν από τη δοθείσα έκφραση αν μετατεθούν τα γράμματα καθ' όλους τους δυνατούς τρόπους; Για παράδειγμα, από την $ab + cd$ παίρνουμε την $ad + cb$ με αντιμετάθεση των b, d . Αυτό το πρόβλημα υπαινίσσεται ένα άλλο, στενά συνδεδεμένο με αυτό, που αποτελεί επίσης μέρος του κλειδιού που έψαχνε ο Lagrange.

Ποιές μεταθέσεις των γραμμάτων θα άφηναν τη δοθείσα έκφραση αναλλοίωτη; Έτσι, η $ab + cd$ γίνεται $ba + cd$ με αντιμετάθεση των a και b , πράγμα που δεν μεταβάλλει την έκφραση, αφού $ab = ba$. Από αυτές τις ερωτήσεις ξεπήδησε η **θεωρία των πεπερασμένων ομάδων**. Εδώ βρισκόταν το κλειδί στο ερώτημα της αλγεβρικής επιλυσιμότητας. Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο προέκυψε από την έρευνα του Lagrange, για τους βαθμούς 2, 3 και 4, η γενική αλγεβρική εξίσωση επιλύεται με το να κάνουμε τη λύση να εξαρτάται από μια εξίσωση μικρότερου βαθμού από εκείνη που μας ενδιαφέρει. Αυτό ισχύει μια χαρά για τις εξισώσεις βαθμού 2, 3 και 4, όταν όμως επιχειρηθεί η ανάλογη διαδικασία για τη γενική εξίσωση πέμπτου βαθμού

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0,$$

η επιλύουσα εξίσωση, αντί να είναι βαθμού μικρότερου του 5, προκύπτει έκτου βαθμού. Δηλαδή αντικαθίσταται η αρχική εξίσωση από μια δυσκολότερη. Η μέθοδος που δουλεύει για 2, 3 και 4 αποτυγχάνει για το 5 και αν δεν υπάρχει κάποιο τέχνασμα για τη λύση της εξίσωσης έκτου βαθμού, δε μπορούμε να κάνουμε τίποτε. Είναι σαν να προσπαθείς να τετραγωνίσεις τον κύκλο ή να τριχοτομήσεις μια γωνία με ευκλείδειες μεθόδους.

17. Το έργο του Lagrange στο Παρίσι

Μετά το θάνατο του Φρειδερίκου του Μεγάλου (17.08.1786), η μνησικακία κατά των ξένων και η αδιαφορία για την επιστήμη έκαναν το Βερολίνο ένα μέρος άβολο για τον Lagrange και τους ξένους συνεργάτες του στην Ακαδημία. Ζήτησε την αποδέσμευσή του, η οποία του παραχωρήθηκε υπό τον όρο να εξακολουθήσει για μερικά χρόνια να στέλνει εργασίες για τα πεπραγμένα της Ακαδημίας πράγμα που τον βρήκε σύμφωνο.

Με ικανοποίηση δέχθηκε την πρόσκληση του Λουδοβίκου XVI να συνεχίσει την εργασία του στα μαθηματικά στο Παρίσι, ως μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας. Κατά την άφιξή του στο Παρίσι το 1787 έγινε δεκτός με τον μεγαλύτερο σεβασμό από τη βασιλική οικογένεια και την Ακαδημία. Του παραχωρήθηκαν άνετοι χώροι για τη διαμονή του στο Λούβρο, όπου έζησε μέχρι την Επανάσταση και έγινε ευνοούμενος της Μαρίας Αντουανέτας την οποία χώριζαν τότε μόνο έξι χρόνια από τη γκυλοτίνα. Η Μαρία ήταν 19 χρόνια περίπου νεότερή του, φαινόταν όμως να τον καταλαβαίνει και έκανε ότι περνούσε από το χέρι της για να τον βγάλει από τη μελαγχολία που τον είχε κυριεύσει. Στα 51 του ο Lagrange αισθανόταν τελειωμένος. Επρόκειτο για καθαρή περίπτωση νευρικής εξάντλησης, συνέπεια της παρατεταμένης και υπερβολικής εργασίας. Οι Παριζιάνοι τον εύρισκαν ευγενικό και

ευχάριστο στη συζήτηση, όμως δεν έπαιρνε ποτέ ο ίδιος την πρωτοβουλία. Δεν μιλούσε παρά ελάχιστα και φαινόταν σα χαμένος και σε βαθιά μελαγχολία. Στις συναντήσεις ανθρώπων της επιστήμης στο σπίτι του Lavoisier, ο Lagrange έστεκε στο παράθυρο κοιτάζοντας αφηρημένα έξω, με την πλάτη γυρισμένη στους επισκέπτες που έρχονταν για να τον τιμήσουν μια εικόνα θλιμμένης αδιαφορίας. Ο ίδιος έλεγε πως είχε σβήσει ο ενθουσιασμός του και πως είχε χάσει την όρεξη για τα μαθηματικά. Αν του έλεγαν πως κάποιος μαθηματικός ανακατευόταν σε κάποια σπουδαία έρευνα, αποκρινόταν ως εξής: **«Τόσο το καλύτερο. Εγώ την άρχισα. Δεν θα είμαι υποχρεωμένος να την τελειώσω»**. Η Mécanique analytique έμενε κλεισμένη στο γραφείο του για δύο χρόνια. Μπουχτισμένος από όσα μύριζαν μαθηματικά, στράφηκε τώρα σε ό,τι θεωρούσε ως τα πραγματικά του ενδιαφέροντα (όπως είχε κάνει ο Νεύτωνας μετά το Principia):

- στη μεταφυσική,
- στην εξέλιξη της ανθρώπινης σκέψης,
- στην ιστορία των θρησκειών,
- στη γενική θεωρία των γλωσσών,
- στην ιατρική και
- στη βοτανική.

Σε αυτή την παράξενη επιλογή γνωστικών αντικειμένων, εντυπωσίαζε τους φίλους του με τις εκτεταμένες γνώσεις και την οξύνοιά του πάνω σε ζητήματα που δεν είχαν σχέση με μαθηματικά. Η Χημεία εκείνη την εποχή διαμορφωνόταν με ταχείς ρυθμούς σε επιστήμη σε αντίθεση προς την αλχημεία που είχε προηγηθεί, κυρίως χάρις στις προσπάθειες του στενού φίλου του Lagrange, του Lavoisier (1743–1794). Η διακηρυγμένη γνώμη του Lagrange πως ο Lavoisier είχε κάνει τη χημεία «τόσο εύκολη όσο είναι η άλγεβρα», μπορεί να εκτιμηθεί από κάθε σπουδαστή της στοιχειώδους χημείας. Για τα μαθηματικά ο Lagrange πίστευε ότι ήταν τελειωμένη υπόθεση ή, τουλάχιστον, ότι περνούσαν σε μια περίοδο παρακμής. Έβλεπε τη χημεία, τη φυσική και την επιστήμη γενικά, να αναδεικνύονται ως τα κατ' εξοχήν γνωστικά αντικείμενα του μέλλοντος για τα καλύτερα μυαλά και έφτασε να προβλέψει πως οι έδρες των μαθηματικών στις Ακαδημίες και στα Πανεπιστήμια σύντομα θα έχαναν το κύρος τους, ξεπέφτοντας στο κοινό επίπεδο μιας έδρας της Αραβικής γλώσσας.

Από μια άποψη είχε δίκιο. Αν δεν ήταν ο Gauss, ο Abel, ο Galois, ο Cauchy και άλλοι για να εμψυχήσουν νέα πνοή στα μαθηματικά, το κύμα που ξεσήκωσε ο Νεύτων θα είχε κοπάσει μέχρι το 1850. Ευτυχώς ο Lagrange έζησε αρκετά για να προλάβει τα πρώτα ουσιαστικά βήματα του Gauss και να αντιληφθεί το αβάσιμο των ισχυρισμών του. Μπορούμε να γελάσουμε σήμερα με τον πεσιμισμό του Lagrange, αναλογιζόμενοι πως οι κορυφαίες στιγμές της προ του 1800 εποχής δεν ήταν παρά η χαρ αυγή των σύγχρονων μαθηματικών, που τώρα ζούμε στην πρώτη πρωινή τους ώρα και να αναρωτηθούμε πώς θα είναι το μεσημέρι, αν υπάρξει τέτοιο. Από το παράδειγμα του Lagrange μπορούμε να μάθουμε να αποφεύγουμε τις προφητείες.

18. Ο Lagrange και η γαλλική επανάσταση

Η επανάσταση έβγαλε τον Lagrange από την απάθεια του και του ανανέωσε το ζωνρό ενδιαφέρον του για τα Μαθηματικά. Σαν βολικό σημείο αναφοράς μπορούμε να θυμόμαστε την **14.07.1789**, τη μέρα που έπεσε η Βαστίλη. Όταν οι Γάλλοι αριστοκράτες και επιστήμονες κατάλαβαν επί τέλους τι συνέβαινε, επέμεναν να επιστρέψει ο Lagrange στο Βερολίνο όπου θα ήταν καλοδεχούμενος. Κανείς δε θα εναντιωνόταν στην αναχώρησή του. Όμως αυτός αρνήθηκε να αφήσει το Παρίσι, προτιμώντας να μείνει και να δει το «πείραμα». Ούτε αυτός ούτε οι φίλοι του είχαν προβλέψει την περίοδο της τρομοκρατίας και όταν ήρθε, ο Lagrange μετάνιωσε πικρά που είχε μείνει. Δε φοβόταν για τη ζωή του. Διότι ως ημιαλλοδαπός ήταν αρκετά ασφαλής, αλλά και διότι δε τη λογάριαζε και πολύ. Όμως τον αρρώσταιναν οι ωμότητες που διαπράττονταν και έχανε όση λίγη πίστη του είχε μείνει στην

ανθρώπινη φύση και στην κοινή λογική. «**Tu l' as voulu**» («Εσύ το θέλησες» ή «Εσύ θα το έκανες») έλεγε στον εαυτό του συνέχεια, καθώς η μια θηριωδία διαδεχόταν την άλλη και αντιλαμβανόταν συγκλονισμένος το μέγεθος του λάθους του να μείνει αυτόπτης μάρτυς της αναπόφευκτης φρίκης μιας επανάστασης. Οι μεγαλόσχημες διακηρύξεις των επαναστατών για την αναγέννηση του ανθρώπου και για την αναμόρφωση της φύσης του, τον άφηναν παγερά αδιάφορο. Όταν ο Lavoisier οδηγήθηκε στη γκιλοτίνα, κάτι που αναμφίβολα θα του άξιζε αν επρόκειτο απλώς για ζήτημα κοινωνικής δικαιοσύνης, ο Lagrange εξέφρασε την αγανάκτησή του για το ανόητο της εκτέλεσης: **«Τους πήρε μια στιγμή για να κόψουν αυτό το κεφάλι και εκατό χρόνια ίσως δε θα φθάσουν για να δημιουργηθεί ένα ισάξιο»**. Αλλά οι αγανακτισμένοι και καταπιεσμένοι πολίτες είχαν βεβαιώσει τον φοροσυλλέκτη Lavoisier, όταν η συμβολή του μεγάλου χημικού στην επιστήμη είχε προβληθεί ως ευνόητος λόγος για να μείνει το κεφάλι του στους ώμους του πως **«ο λαός δεν χρειάζεται την επιστήμη»**.

Αν και σχεδόν σε όλη του την επιστημονικά δραστήρια ζωή ο Lagrange είχε βασιλεύει ως πάτρωνες, δε συμπαθούσε τους βασιλικούς, ούτε τους επαναστάτες. Έμενε αμετακίνητος στην ενδιάμεση περιοχή του πολιτισμού που και οι δύο πλευρές είχαν καταπατήσει ανελέητα. Ήταν σε θέση να πάρει το μέρος των ανθρώπων που είχαν υποφέρει πάρα πολύ και να τους ευχηθεί επιτυχίες στην πάλη τους για μια αξιοπρεπή ζωή. Ήταν όμως πολύ ρεαλιστής για να τον εντυπωσιάσουν οι διάφορες χίμαιρες των ηγετών του λαού για το ξεπέρασμα της ανθρώπινης αθλιότητας και αρνιόταν να πιστέψει πως αυτές οι χίμαιρες αποτελούσαν ακαταμάχητη μαρτυρία για το μεγαλείο του ανθρώπινου μυαλού, όπως ισχυρίζονταν οι ενθουσιώδεις οπαδοί της γκιλοτίνας. «Αν θέλετε να δείτε το πραγματικό μεγαλείο του ανθρώπινου μυαλού», έλεγε, «μελετήστε τον Νεύτωνα στο σημείο που αναλύει το λευκό φως ή αποκαλύπτει το σύστημα του κόσμου». Τον αντιμετώπισαν με αξιοσημείωτη ανεκτικότητα. Με ειδικό θέσπισμα του δόθηκε «σύνταξη» και για να αυξηθούν τα έσοδά του, όταν ο πληθωρισμός του χαρτονομίσματος την κατέστησε ανύπαρκτη, τον τοποθέτησαν στην επιτροπή εφευρέσεων και σε κείνη του νομισματοκοπείου.

Όταν ιδρύθηκε η École Normale το 1795 (για την πρώτη εφήμερη ύπαρξή της), ο Lagrange έγινε καθηγητής των μαθηματικών. Όταν η Normale έκλεισε και η μεγάλη École Polytechnique ιδρύθηκε το 1797, ο Lagrange σχεδίασε το μάθημα των μαθηματικών και ήταν ο πρώτος καθηγητής. Ποτέ πριν δεν είχε ξαναδιδάξει, όταν κλήθηκε να εκπαιδεύσει φοιτητές με ανεπαρκή προπαιδεία. Προσαρμόζοντας τη διδασκαλία στο χαμηλό επίπεδο του ακροατηρίου του, οδήγησε τους μαθητές του στην ανάλυση μέσα από την αριθμητική και την άλγεβρα, μοιάζοντας περισσότερο σαν ένας από αυτούς παρά σαν καθηγητής τους. Ο μεγαλύτερος μαθηματικός της εποχής έγινε μεγάλος δάσκαλος των μαθηματικών, προετοιμάζοντας την άγρια νέα γενιά των στρατιωτικών μηχανικών του Ναπολέοντα για το ρόλο τους στην κατάκτηση της Ευρώπης. Η ιερή προκατάληψη πως όποιος ξέρει κάτι είναι ανίκανος να το διδάξει, διαλύθηκε. Πηγαίνοντας πολύ πιο πέρα από τα βασικά, ο Lagrange δημιουργούσε νέα πράγματα στα μαθηματικά μπροστά στα μάτια των μαθητών του και σε λίγο οι ίδιοι έπαιρναν μέρος σε αυτή τη διαδικασία.

Δύο τέτοιες εργασίες επρόκειτο να ασκήσουν μεγάλη επίδραση στην ανάλυση των πρώτων τριών δεκαετιών του 19^{ου} αιώνα. Οι μαθητές του Lagrange είχαν δυσκολίες με τις έννοιες του άπειρα μικρού και του άπειρα μεγάλου που διαπερνούν την παραδοσιακή μορφή του λογισμού. Για να ξεπεράσει αυτές τις δυσκολίες, ο Lagrange επιχείρησε να αναπτύξει τον λογισμό χωρίς να κάνει χρήση των **«απειροστών»** του Leibniz και της παράξενης έννοιας του ορίου του Νεύτωνα. Η θεωρία του δημοσιεύθηκε σε δύο έργα, στη **«Θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων»** (1797) και στα **«Μαθήματα πάνω στον λογισμό των συναρτήσεων»** (1801). Η σημασία αυτών των έργων δεν έγκειται στα μαθηματικά τους αποτελέσματα, αλλά στην ώθηση που έδωσαν στον Cauchy και στους άλλους για να κατασκευάσουν έναν ικανοποιητικό λογισμό. Ο Lagrange απέτυχε πλήρως. Όμως λέγοντας αυτό, καλό είναι να έχουμε κατά νου ότι ακόμη και σήμερα οι δυσκολίες με τις οποίες

πάλεψε ανεπιτυχώς, δεν έχουν ξεπεραστεί τελείως. Η προσπάθειά του ήταν αξιόλογη και για την εποχή του ικανοποιητική. Η πιο σημαντική προσφορά του Lagrange κατά τη διάρκεια της Επανάστασης ήταν ο ρόλος του στην τελειοποίηση του μετρικού συστήματος για τα βάρη και τα μέτρα. Στην ειρωνεία και στην κοινή λογική του οφείλεται που δεν επιλέχθηκε το 12 σαν βάση αντί του 10. Τα «πλεονεκτήματα» που προσφέρει το 12 είναι προφανή και προβάλλονται ακόμη και σήμερα σε εντυπωσιακές πραγματείες ενθουσιωδών προπαγανδιστών, που ελάχιστα διαφέρουν από την αδελφότητα του τετραγωνισμού του κύκλου. Η δωδεκαδική βάση, αν επιβαλλόταν πλάι στο 10 του αριθμητικού μας συστήματος, θα ήταν μια εξαγωνική ξυλόπροκα σε μια πενταγωνική τρύπα.

Για να δείξει το παράλογο της δωδεκαδικής βάσης, ο Lagrange πρότεινε το 11 ως ακόμη καλύτερη ιδέα, κάθε πρώτος αριθμός θα είχε το πλεονέκτημα να δίνει σε όλα τα κλάσματα τον ίδιο παρονομαστή μέσα στο σύστημα. Τα μειονεκτήματα είναι πολλά και προφανή σε όποιον καταλαβαίνει από διαίρεση. Η επιτροπή κατάλαβε τον υπαινιγμό και έμεινε στο 10. Ο Laplace με τον Lavoisier ήταν μέλη της επιτροπής στην πρώτη της σύνθεση, αλλά τρεις μήνες μετά «εκκαθαρίστηκαν» από τις θέσεις τους μαζί με μερικούς άλλους. Ο Lagrange παρέμεινε ως πρόεδρος. «Δεν ξέρω γιατί με κράτησαν», παρατήρησε, αγνοώντας πως το χάρισμά του να σιωπά του έσωσε όχι μόνο τη θέση αλλά και το κεφάλι του.

19. Ο 2ος γάμος του

Παρά το ενδιαφέρον έργο του, ο Lagrange εξακολουθούσε να είναι μόνος και απελπισμένος. Από αυτό το λυκόφως ανάμεσα στη ζωή και στον θάνατο, τον γλύτωσε σε ηλικία 56 χρόνων ένα κορίτσι σχεδόν 40 χρόνια νεότερό του, κόρη του φίλου του, του αστρονόμου Lemonnier. Την άγγιξε η δυστυχία του Lagrange και επέμεινε να τον παντρευτεί. Ο Lagrange ενέδωσε και αντίθετα σε όλους τους νόμους που διέπουν τη σχέση ενός ώριμου άνδρα και μιας πολύ νέας γυναίκας, ο γάμος αποδείχτηκε ιδανικός. Η νεαρή σύζυγος δεν ήταν μόνο αφοσιωμένη αλλά και ικανή. Έθεσε ως σκοπό της ζωής της να βγάλει τον σύζυγό της από τα αδιέξοδά του και να του ξαναζυπνήσει τη διάθεση για ζωή.

Από τη μεριά του ο Lagrange με ευχαρίστηση έκανε πολλές παραχωρήσεις και συνόδευε τη γυναίκα του σε χορούς στους οποίους ποτέ δε θα σκεφτόταν να πάει μόνος. Πριν περάσει πολύς καιρός, δεν άντεχε να μένει μόνος και στη διάρκεια των σύντομων απουσιών της, για ψώνια, ήταν δυστυχής. Ακόμη και μέσα στην καινούργια του ευτυχία ο Lagrange διατηρούσε την περίεργα απόμακρη στάση του προς τη ζωή και την απόλυτη ειλικρίνεια γύρω από τις επιθυμίες του. «Δεν είχα παιδιά από τον πρώτο μου γάμο» έλεγε, «δεν ξέρω αν θα αποκτήσω παιδιά από τον δεύτερο. Σχεδόν δεν έχω τέτοια επιθυμία». Θεωρούσε ως τη σημαντικότερη από τις επιτυχίες του το έλεγε απλά και ειλικρινά το ότι είχε μια τόσο τρυφερή και αφοσιωμένη σύντροφο σαν τη νεαρή του σύζυγο.

20. Lagrange και Μέγας Ναπολέων

Οι Γάλλοι τον περιβάλανε με πολλές τιμές. Ο άνθρωπος που υπήρξε ευνοούμενος της Μαρίας Αντουανέτας έγινε τώρα είδωλο των ανθρώπων που την έστειλαν στον θάνατο. Το 1796, όταν η Γαλλία προσάρτησε το Piemonte (Ιταλική επαρχία στους πρόποδες των Άλπεων, με πρωτεύουσα το Τορίνο), ο στρατηγός Ταλειράνδος διατάχθηκε να περιμένει τον πατέρα του Lagrange, που ζούσε ακόμη στο Τορίνο, για να του πει ότι «**Ο γιός σας, γέννημα του Piemonte και Γάλλος πολίτης σήμερα, έχει τιμήσει το ανθρώπινο είδος με τη μεγαλοφυΐα του**». Όταν ο Ναπολέων επιλαμβανόταν των αστικών ζητημάτων στα διαλείμματα των εκστρατειών του, συχνά συζητούσε με τον Lagrange πάνω σε φιλοσοφικά θέματα και για τον ρόλο των μαθηματικών σε ένα σύγχρονο κράτος, δείχνοντας μεγάλο σεβασμό για τον ευγενικό άνθρωπο που πάντα σκεφτόταν πριν μιλήσει και δεν ήταν ποτέ δογματικός. Κάτω από μια ήρεμη επιφυλακτικότητα ο Lagrange έκρυβε ένα ειρωνικό

πνεύμα, που άστραφτε απροσδόκητα σε ορισμένες περιπτώσεις. Μερικές φορές ήταν τόσο λεπτό ώστε πιο χοντροκομμένοι άνθρωποι ο Laplace, για παράδειγμα δεν το καταλάβαιναν όταν κατευθυνόταν σ' αυτούς. Μια φορά, υπερασπιζόμενος το πείραμα και την παρατήρηση σε βάρος των ονειροπολημάτων και της νεφελώδους θεωρητικολογίας, είχε παρατηρήσει: «**Αυτοί οι αστρονόμοι είναι παράξενοι δεν πιστεύουν μια θεωρία αν δεν συμφωνεί με τις παρατηρήσεις τους**». Κάποτε σ' ένα musicale κάποιος παρατήρησε ότι είχε αφαιρεθεί και τον ρώτησε γιατί του αρέσει η μουσική. «Μου αρέσει γιατί με απομονώνει» απάντησε. «Ακούω τα πρώτα τρία μέτρα, στο τέταρτο δεν ξεχωρίζω τίποτε, παραδίνομαι στις σκέψεις μου, τίποτα δε με διακόπτει με αυτό τον τρόπο έχω λύσει διάφορα δύσκολα προβλήματα».

Ακόμη και στον ειλικρινή του σεβασμό για τον Νεύτωνα διακρίνει κανείς μια ανεπαίσθητη απόχρωση της ίδιας λεπτής ειρωνείας. «Ο Νεύτων», έλεγε, «ήταν σίγουρα μεγαλοφυής **par excellence**, όμως πρέπει να συμφωνήσουμε πως ήταν επίσης ο πιο τυχερός: μόνο μια φορά βρίσκει κανείς το σύστημα του κόσμου και γίνεται διάσημος». Και πάλι: «Πόσο τυχερός ήταν ο Νεύτωνας που στα χρόνια του δεν είχε ακόμη ανακαλυφθεί το σύστημα του κόσμου!»

21. Το τέλος του

Η τελευταία επιστημονική προσπάθεια του Lagrange αφορούσε στην αναθεώρηση και επέκταση της Mécanique Analytique για μια δεύτερη έκδοση. Όλη η παλαιά του δύναμη επέστρεψε, αν και είχε περάσει τα εβδομήντα. Ξαναγυρνώντας στις παλιές του συνήθειες δούλευε ασταμάτητα, για να ανακαλύψει ότι το σώμα του δεν υπάκουε πλέον στο μυαλό του. Σε λίγο καιρό άρχισε να έχει λιποθυμικές τάσεις, ιδιαίτερα όταν σηκωνόταν από το κρεβάτι το πρωί. Μια ημέρα η γυναίκα του τον βρήκε αναίσθητο στο πάτωμα, με το κεφάλι άσχημα χτυπημένο κατά την πτώση του στην άκρη ενός τραπεζιού. Μετά από αυτό μετρίασε τους ρυθμούς του, συνέχισε όμως να εργάζεται. Η αρρώστια του, που ήξερε πως ήταν σοβαρή, δεν τον έβγαζε από την ηρεμία του, σε όλη του τη ζωή ο Lagrange έζησε όπως θα ήθελε να ζει ένας φιλόσοφος, αδιάφορος για τη μοίρα του.

Δύο μέρες πριν τον θάνατό του είχαν μαζευτεί στο σπίτι του ο Monge και άλλοι φίλοι, ξέροντας ότι πέθαινε και ότι ήθελε να τους πει κάτι από τη ζωή του. Τον βρήκαν καλύτερα, με εξαίρεση κάποιες διαλείψεις μνήμης που τον εμπόδισαν να τους πει αυτό που ήθελε. «Ήμουν πολύ άρρωστος χθες, φίλοι μου» είπε, «αισθάνθηκα ότι πέθαινα· το σώμα μου αδυνατίζε λίγο λίγο· οι διανοητικές και φυσικές λειτουργίες μου έσβηναν ανεπαίσθητα παρατηρούσα τη βαθμιαία μείωση της δύναμής μου και έφθασα στο τέλος χωρίς θλίψη, χωρίς παράπονο, με απαλό τρόπο. Ω! ο θάνατος δεν είναι κάτι που πρέπει να το φοβόμαστε, και όταν έρχεται χωρίς πόνο, είναι μια τελευταία λειτουργία που δεν έχει τίποτε το δυσάρεστο». Πίστευε ότι η ζωή έδρευε σε όλα του τα όργανα, σε όλη τη μηχανή του σώματος, που στην περίπτωση του αδυνατίζε εξ ίσου σε όλα της τα μέρη.

«Σε λίγα λεπτά δεν θα υπάρχουν πιά λειτουργίες, ο θάνατος θα είναι παντού· ο θάνατος είναι μόνο η απόλυτη ανάπαυση του σώματος». «Επιθυμώ να πεθάνω· ναι, επιθυμώ να πεθάνω και βρίσκω κάποια ευχαρίστηση σ' αυτό. Η γυναίκα μου όμως δεν το θέλει. Σε τέτοιες στιγμές θα προτιμούσα μια λιγότερο καλή γυναίκα, λιγότερο διατεθειμένη να μου ξαναδώσει τη δύναμή μου, κάποια που θα με άφηνε να τελειώσω ήσυχα. Είχα την καριέρα μου έχω κερδίσει κάποια φήμη στα μαθηματικά. Ποτέ δεν μίσησα κανέναν, δεν έχω κάνει κανένα κακό και θα ήταν καλά να τελειώνα, όμως η γυναίκα μου δεν το θέλει».

Σύντομα πραγματοποιήθηκε η επιθυμία του. Μια λιποθυμία, από την οποία δεν συνήλθε ποτέ, τον βρήκε λίγο μετά την αναχώρηση των φίλων του. Πέθανε νωρίς το πρωί της **10.04.1813**, στα 76 του χρόνια.

22. Miscellanea Taurinensia

Το 1758, με τη βοήθεια των μαθητών του, ο Lagrange δημιούργησε μια ομάδα, η οποία στη συνέχεια έγινε γνωστή ως Ακαδημία Επιστημών του Τορίνο, και τα περισσότερα από τα πρώτα γραπτά του μπορούν να βρεθούν στους πέντε τόμους των πράξεών της, γνωστοί ως **Miscellanea Taurinensia**. Πολλές από αυτές είναι περίτεχνα έγγραφα.

Ο 1^{ος} τόμος περιέχει ένα έγγραφο σχετικά με τη θεωρία της διάδοσης του ήχου. Σε αυτό δείχνει ένα λάθος που γίνεται από τον Νεύτωνα, χρησιμοποιεί τη γενική διαφορική εξίσωση της κίνησης, και την ενσωματώνει στην κίνηση σε ευθεία γραμμή. Αυτό το τεύχος περιλαμβάνει επίσης την πλήρη λύση του προβλήματος μίας σειράς εγκάρσιων παλμών. Σε αυτό το έγγραφο επισημαίνει την έλλειψη γενικότητας των λύσεων που δόθηκαν προηγουμένως από τους Taylor, D' Alembert και Euler και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η μορφή της καμπύλης σε οποιοδήποτε χρόνο t δίνεται από την εξίσωση $y = a \sin(mx) \sin(nt)$. Το άρθρο τελειώνει με μια αριστοτεχνική συζήτηση σχετικά με ήχους ένωσης, την ηχώ και τους παλμούς. Άλλα άρθρα σε αυτόν τον τόμο είναι σχετικά με τις αναδρομικές ακολουθίες, τις πιθανότητες, και του λογισμού των μεταβολών.

Ο 2^{ος} τόμος περιέχει μία μεγάλη σειρά σημειώσεων, που ενσωματώνει τα αποτελέσματα των διαφόρων εγγράφων στον 1^ο τόμο σχετικά με τη θεωρία και την σημειογραφία του λογισμού των μεταβολών. Και επεξηγεί τη χρήση του από το πόρισμα της αρχής της ελάχιστης δράσης, καθώς και από διάφορες λύσεις των προβλημάτων στη δυναμική.

Ο 3^{ος} τόμος περιλαμβάνει τη λύση πολλών δυναμικών προβλημάτων μέσω του λογισμού των μεταβολών, κάποια έγγραφα σχετικά με τον ολοκληρωτικό λογισμό, μια λύση του προβλήματος του Fermat που αναφέρεται παρακάτω: Δίνεται ένας ακέραιος n που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, να βρείτε έναν αριθμό x , έτσι ώστε $x^2n + 1$ να είναι ένα τέλειο τετράγωνο και τις γενικές διαφορικές εξισώσεις της κίνησης για τρία σώματα που κινούνται με βάση την αμοιβαία έλξη τους.

23. Το έργο του Lagrange στην άλγεβρα

Ο μεγαλύτερος αριθμός εγγράφων του κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου συνέβαλε στην Πρωσική Ακαδημία Επιστημών. Αρκετά από αυτά πραγματεύονται θέματα της άλγεβρας.

- Η συζήτηση του για τις αναπαραστάσεις των ακεραίων από τετραγωνικές μορφές (1769) και από γενικότερες αλγεβρικές μορφές (1770).

- Η προκήρυξη του για τη θεωρία της αποβολής, 1770.

- Το θεώρημα Lagrange δηλαδή ότι μία υποομάδα H μιας ομάδας πρέπει να διαιρεί τη ομάδα G .

- Τα έγγραφα του το 1770 και το 1771 σχετικά με τη γενική διαδικασία για την επίλυση μιας αλγεβρικής εξίσωσης οποιοδήποτε βαθμού μέσω των διαλυτικά Lagrange. Αυτή η μέθοδος αποτυγχάνει να δώσει ένα γενικό τύπο για τις λύσεις της εξίσωσης του βαθμού πέντε και υψηλότερα, επειδή η βοηθητική εξίσωση που εμπλέκεται έχει υψηλότερο βαθμό από ότι η αρχική. Η σημασία αυτής της μεθόδου είναι ότι εμφανίζει τις ήδη γνωστές φόρμουλες για την επίλυση των εξισώσεων του δευτέρου, τρίτου και τετάρτου βαθμού ως αποτέλεσμα μιας ενιαίας αρχής, και ήταν θεμελιώδης στη Θεωρία Galois. Η ολοκληρωμένη λύση της διωνυμικής εξίσωσης (δηλαδή μίας εξίσωσης της μορφής $ax^n + b = 0$) οποιουδήποτε βαθμού, περιέχεται σε αυτά τα έγγραφα.

- Το 1773 ο Lagrange θεώρησε την συναρτησιακή ορίζουσα τρίτης τάξης, μια ειδική περίπτωση αυτής του Jacobi. Απέδειξε επίσης τον τύπο για τον όγκο ενός τετραέδρου με μία από τις κορυφές του στην αρχή των αξόνων, ως το ένα έκτο της απόλυτης τιμής της ορίζουσας σχηματίζεται από τις συντεταγμένες των τριών άλλων κορυφών.

24. Το έργο του Lagrange στην αστρονομία

Τα ακόλουθα είναι τα πλέον σημαντικά επιτεύγματα του:

- Προσπάθησε να λύσει το γενικό πρόβλημα των τριών σωμάτων, με την επακόλουθη ανακάλυψη των δύο σταθερών προτύπου λύσεων, συγγραμμικών και ισοπλευρικών (1772). Οι εν λόγω λύσεις παρατηρήθηκε ότι εξηγούν αυτό που σήμερα είναι γνωστό ως σημείο Lagrange.

- Η προσέγκυση ελλειψοειδών (1773) που είναι βασισμένο στην εργασία του Maclaurin.

- Η κοσμική εξίσωση του φεγγαριού (1773) επίσης αξιοσημείωτο για την πρώτη εισαγωγή της ιδέας του δυναμικού. Το δυναμικό ενός σώματος σε οποιοδήποτε σημείο είναι το άθροισμα της μάζας του κάθε στοιχείου του σώματος, όταν διαιρείται με την απόστασή του από το σημείο. Ο Lagrange έδειξε ότι αν το δυναμικό ενός σώματος σε ένα εξωτερικό του σημείο ήταν γνωστό, τότε η έλξη προς οποιαδήποτε κατεύθυνση θα μπορούσε να βρεθεί αυτόματα. Η θεωρία του δυναμικού διαμορφώθηκε σε ένα έγγραφο που στάλθηκε στο Βερολίνο (1777).

- Η κίνηση των κόμβων της τροχιάς του πλανήτη (1774).

- Η σταθερότητα των πλανητικών τροχιών (1776).

- Δύο έγγραφα στα οποία η μέθοδος προσδιορισμού της τροχιάς του κομήτη από τρεις παρατηρήσεις είναι πλήρως καταρτισμένα, 1778 και 1783: αυτό δεν έχει αποδειχθεί πράγματι πρακτικά εφικτό, αλλά το σύστημα του υπολογισμού των διαταραχών με τη βοήθεια των μηχανικών αριθμητικών τετραγωνισμού αποτέλεσε τη βάση για τις περισσότερες μεταγενέστερες έρευνες σχετικά με το θέμα.

- Μεταξύ των 1781-1784 προσδιόρισε τα κοσμικά και τις περιοδικές μεταβολές των στοιχείων των πλανητών. Τα ανώτατα όρια που έθεσε για αυτά, συμφωνούν πολύ με εκείνα που έλαβε αργότερα ο Λεβεριέ. Ο Lagrange προσχώρησε στο βαθμό που η γνώση του επέτρεπε από τις μάζες των πλανητών.

- Τρία έγγραφα σχετικά με τη μέθοδο της παρεμβολής το 1783, 1792 και 1793, το τμήμα των πεπερασμένων διαφορών που ασχολούνται με αυτήν τώρα βρίσκεται στην ίδια φάση με εκείνη στην οποία ο Lagrange την άφησε.

25. Διαφορικός λογισμός και λογισμός των μεταβολών

Οι διαλέξεις του Lagrange για το διαφορικό λογισμό στην Ecole Polytechnique αποτελούν τη βάση της πραγματείας της αναλυτικής θεωρίας των συναρτήσεων, η οποία δημοσιεύθηκε το 1797. Αυτό το έργο είναι η επέκταση της ιδέας που περιέχεται σε ένα έγγραφο που είχε αποστείλει στο Βερολίνο το 1772 και ο σκοπός του ήταν να αντικαταστήσει στον διαφορικό λογισμό μία ομάδα θεωρημάτων που βασιζόνταν στην ανάπτυξη των αλγεβρικών συναρτήσεων, με βάση ιδίως την αρχή της γενικότητας της άλγεβρας. Μια παρόμοια μέθοδος που είχε χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν από τον John Landen στην εργασία **Residual Analysis** (Ανάλυση υπολοίπων), που δημοσιεύθηκε στο Λονδίνο το 1758. Ο Lagrange πίστευε ότι θα μπορούμε να ξεπεράσει αυτά τα προβλήματα, που συνδέονται με τη χρήση απείρων μεγάλων και απείρων μικρών ποσοτήτων, για τις οποίες προέκυψαν πολλές φιλοσοφικές αντιρρήσεις στη πραγματείες διαφορικού λογισμού. Το βιβλίο χωρίζεται σε τρία μέρη, το:

- πρώτο αναφέρεται στην γενική θεωρία των συναρτήσεων, και δίνει μια αλγεβρική απόδειξη του θεωρήματος του Taylor, η ισχύς της οποίας είναι, να τεθεί το ερώτημα,

- δεύτερο ασχολείται με εφαρμογές στη γεωμετρία και

- τρίτο με εφαρμογές στη μηχανική. Μια άλλη πραγματεία στις ίδιες γραμμές ήταν τα **Μαθήματα για τον λογισμό των συναρτήσεων**, που εκδόθηκε το 1804 και με δεύτερη έκδοση το 1806. Σε αυτό το βιβλίο ο Lagrange διατύπωσε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, στο πλαίσιο των προβλημάτων του λογισμού των μεταβολών με περιορισμούς.

Αυτά τα έργα αφιερωμένα στον διαφορικό λογισμό και τον λογισμό των μεταβολών μπορεί να θεωρηθεί ως το σημείο εκκίνησης για τις έρευνες των Cauchy, Jacobi, Weierstrass.

26. Απειροελάχιστες ποσότητες

Σε μεταγενέστερη περίοδο ο Lagrange επανήλθε στη χρήση των απειροελάχιστων ποσοτήτων (αντί να εισαγάγει τον διαφορικό λογισμό στη μελέτη των αλγεβρικών φορμών) και στον πρόλογο της 2^{ης} έκδοσης του βιβλίου **Μηχανική Αναλυτική**, η οποία εκδόθηκε το 1811, δικαιολογεί την απασχόληση των απειροελάχιστων ποσοτήτων και καταλήγει λέγοντας ότι: « Όταν έχουμε κατανοήσει το πνεύμα της απειροελάχιστης μεθόδου και έχουμε επαληθεύσει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της, είτε από τη γεωμετρική μέθοδο της πρωταρχικής και των τελικών δεικτών, ή με την αναλυτική μέθοδο που προέρχονται από συναρτήσεις, που μπορεί να χρησιμοποιήσουμε απείρως μικρές ποσότητες σαν ένα σίγουρο και πολύτιμο μέσο συντόμευσης και απλούστευσης των αποδείξεων μας.»

27. Πλανητική μηχανική

Η θεωρία των πλανητικών κινήσεων είχε αποτελέσει το αντικείμενο του σε μερικά από τα πιο αξιόλογα έγγραφα του Lagrange στο Βερολίνο. Το 1806 το θέμα συζητήθηκε ξανά από τον Poisson, ο οποίος, σε έγγραφο που διαβάστηκε στην Γαλλική Ακαδημία, έδειξε ότι οι τύποι Lagrange οδήγησαν σε ορισμένα όρια για τη σταθερότητα των τροχιών. Ο Lagrange, ο οποίος ήταν παρών, ξεκινάει να σκέφτεται ολόκληρο το θέμα εκ νέου και με έγγραφο που κοινοποιήθηκε στην Ακαδημία το 1808 εξήγησε πώς, από τη διακύμανση των αυθαιρέτων σταθερών, θα μπορούσαν να προσδιοριστούν οι περιοδικές και κοσμικές ανισότητες οποιουδήποτε συστήματος αλληλεπιδρώντων φορέων.

Βιβλιογραφία

- E.T. Bell (2000) «Οι μαθηματικοί». Τόμος 1, μετάφραση Καλογερόπουλος, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Luigi Pepe. «Giuseppe Luigi Lagrange». *Dizionario Biografico degli Italiani*. Enciclopedia Italiana.
- Morris Kline (1986). *Mathematics & the Search for Knowledge*. Oxford University Press. σελ. 214. ISBN 978-0-19-504230-6. Lagrange & Laplace, though of Catholic parentage, were agnostics.
- Halley, E. (1693). «IV. An Instance of the Excellence of the Modern ALGEBRA, in the Resolution of the Problem of finding the Foci of Optick Glasses universally». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **17** (205): 960–969. doi:10.1098/rstl.1693.0074.
- Fraser, Craig (1992). «Isoperimetric Problems in the Variational Calculus of Euler and Lagrange». *Historia Mathematica* **19**: 4–23. doi:10.1016/0315-0860(92)90052-D.
- Galletto, D., *The genesis of Mécanique analytique*, La Mécanique analytique de Lagrange et son héritage, II (Turin, 1989). *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **126** (1992), suppl. 2, 277–370, MR 1264671.
- Richard B. Vinter (2000). *Optimal Control*. Springer. ISBN 978-0-8176-4075-0.
- Delambre, Jean Baptiste Joseph (1816). «Notice sur la vie et les ouvrages de M. Malus, et de M. le Comte Lagrange». *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, Année 1812, Seconde Partie*. Paris: Firmin Didot. σελίδες xxvii–lxxx.
- W. W. Rouse Ball (1908). «Joseph Louis Lagrange (1736–1813)». *A Short Account of the History of Mathematics* (PDF) (4^η έκδοση). σελίδες 401–412.