



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Το έργο και η ζωή του Fermat

Σπουδαστές: **Μενδρινός Χαράλαμπος** (AM 8906)
Μαυρογεώργης Γρηγόριος (AM 8905)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς**, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: **2023 – 2024**

Ημερομηνία ανάθεσης: 01.12.2022

Ημερομηνία κατάθεσης: 14.12.2023

Ημερομηνία εξέτασης: 20.12.2023

Α/Α	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά	2
Περίληψη	3
1. Τόπος γέννησης, οικογένεια και εκπαίδευση	3
2. Μαθηματικοί κύκλοι	4
3. Διοικητική και πολιτική σταδιοδρομία	5
4. Ο «Πρίγκιπας των ερασιτεχνών» και ο Πιερ ντε Καρκαβύ	6
5. Η αλληλογραφία με τον Fermat	7
6. Το πρόβλημα της κυκλοειδούς καμπύλης	7
7. Η μέθοδος των μεγίστων και των ελάχιστων	9
8. Πολλαπλά ενδιαφέροντα	10
9. Ένας ιδιόμορφος τρόπος εργασίας	11
10. Η διαμάχη με τον Descartes	13
11. Η θεωρία της διάθλασης	15
12. Νόμος του Snell	15
13. Η γέννηση του τελευταίου θεωρήματος	16
Βιβλιογραφία	27

Λέξεις κλειδιά

Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restructi (Αποκατάσταση των επίπεδων τόπων του Απολλώνιου), *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum* (Μέθοδος περί της ευρέσεως μελισσών και ελάχιστων και περί των εφαπτομένων καμπυλών), *Ad locos planos et solidos isagoge* (Εισαγωγή στους επίπεδους και στερεούς τόπους), *Cede Deo seu, Christus moriens* (Μακριά από τον Θεό, αν ο Χριστός ήταν θνητός), *Discours de la méthode* (Συζητήσεις περί της μεθόδου), *Essais* (Εκθέσεις), *Analyse pour les réfractions et Synthese pour les réfractions* (Ανάλυση περί των διαθλάσεων και σύνθεση περί των διαθλάσεων) σπείρες, κυκλοειδής καμπύλη, βραχυστοχρόνιο πρόβλημα, αρχή του Fermat, θεωρία των αριθμών, θεωρία των στροβίλων

Περίληψη

Το **1^ο αίνιγμα** που περιβάλλει τον Fermat είναι ότι δεν είναι γνωστό με ακρίβεια πότε γεννήθηκε. Το **2^ο αίνιγμα** είναι που έμαθε μαθηματικά; Τα έμαθε στο πανεπιστήμιο; Του τα δίδαξε κάποιος φίλος; Σπούδασε νομικά, εργάζονταν όλη του τη ζωή ως δικαστικός υπάλληλος και για εννέα δικαστικά έτη (1638, 1644, 1645, 1648, 1649, 1655, 1656, 1663, 1664) ήταν δικαστής. Παντρεύτηκε μία ξαδέρφη της μητέρας του και απέκτησαν πέντε παιδιά. Η ποσότητα και η ποιότητα των ανακαλύψεων του, που του χάρισαν τον τίτλο του **πρίγκιπα των ερασιτεχνών**. Ο Fermat συνέλαβε και εφάρμοσε την βασική ιδέα του διαφορικού λογισμού 13 χρόνια πριν από τη γέννηση του Newton και 17 πριν από εκείνη του Leibniz. Ο Descartes και ο Fermat, ο καθένας τους τελειώς ανεξάρτητα από τον άλλο επινόησε την αναλυτική γεωμετρία.

1. Τόπος γέννησης, οικογένεια και εκπαίδευση

Το **πρώτο αίνιγμα** που περιβάλλει τον Fermat είναι ότι δεν είναι γνωστό με ακρίβεια πότε γεννήθηκε. Συνήθως ημερομηνία γέννησης του ορίζεται η **20.08.1601**, στο Beaumont de Lomagne της περιφέρειας Ταρν-ε-Γκαρόν, στη νότια Γαλλία. Η ημερομηνία αυτή, που προστέθηκε το **1844** από τον Louis Tauriac, προϋποθέτει ότι ο Fermat είναι γιος του Dominic Fermat, εμπόρου δερματίνων ειδών και δεύτερου συμβούλου του Μπομόν και της Κλερ ντε Λον (Claire de Long), κόρης του Κλεμάν ντε Λον, Δεσπότη του Μπαρέζ. Ωστόσο, σύμφωνα με το πιστοποιητικό θανάτου που διατηρείται στα αρχεία της πόλης ο Fermat πέθανε στην Καστρ στις **12.01.1665** και η επιτύμβια επιγραφή εκτίθενται στο μουσείο των Αυγουστίνων Πατέρων της Τουλούζης αναφέρεται ότι πέθανε σε ηλικία 57 ετών. Είναι προφανές ότι κάτι δεν ταιριάζει, επειδή αυτό θα τοποθετούσε το έτος γέννησης του γύρω στο 1608.

Το **1980** ο ηγούμενος Dugros πρότεινε μία άλλη θεωρία. Σύμφωνα με αυτόν, ο Fermat ήταν γιος του Dominic Fermat και της Françoise cazeneuve, κόρης ενός πλούσιου εμπόρου της περιοχής του Μπομόν. Η υπόθεση του βασίζεται στο ότι 1603 ο Dominic ήταν παντρεμένος με την Φρανσουάζ και το 1607 ήταν παντρεμένος με την Κλερ ντε Λον.

Το **2002** ο Pierre Gairin έθεσε ξανά το ερώτημα και μελέτησε προσεκτικά το γενεαλογικό δέντρο του Fermat αναζητώντας μία πειστική απάντηση. Βρέθηκαν τότε νέα στοιχεία που άφησαν και πάλι το ζήτημα ανοιχτό. Αναμένοντας νεότερα στοιχεία, ο Fermat θα μπορούσε να ήταν ο γιος της Κλερ ντε Λον, κόρης μιας οικογένειας Γάλλων ευγενών και θα μπορούσε να έχει γεννηθεί γύρω στο 1605 ή πιο πιθανό το 1606. Ακόμα και έτσι, η επιτύμβια υπογραφή εξακολουθεί να μην έχει σαφή εξήγηση. Φαίνεται ότι ο Fermat είχε έναν αδερφό και δύο αδερφές και όταν ήταν μικρός έλαβε εκπαίδευση από τους φραγκισκανούς μοναχούς του Grandselve. Λίγα είναι γνωστά ακόμα για την παιδική του ηλικία. Και όμως, σε όλη τη ζωή του ένιωθε μεγάλη αγάπη για τη γενέτειρά του και δεν εντυπωσιάστηκε από τό εκθαμβωτικό Παρίσι.

Το **δεύτερο αίνιγμα** που περιβάλλει τον Fermat είναι της εκπαίδευσης του. Η πολυμαθία του ήταν πέρα από κάθε αμφιβολία. Μετέφρασε τους κλασικούς, είχε τέλεια γνώση λατινικών και ελληνικών και οι γνώσεις τους στα μαθηματικά ήταν αναμφισβήτητες. Όμως που έμαθε μαθηματικά; Τα έμαθε στο πανεπιστήμιο; Του τα δίδαξε κάποιος φίλος; Υπάρχουν αμφιβολίες σχετικά με το πρόγραμμα εκπαίδευσης και την επαγγελματική πορεία του Fermat, αν και μερικά σχόλια των επιστολών που μπορούν να συναχθούν κάποια πράγματα. Κατά τη νεότητα του φοίτησε στο πανεπιστήμιο της Τουλούζης για να ολοκληρώσει τις σπουδές του. Η πρόθεση του και σίγουρα αυτή της οικογένειάς του, ήταν να σπουδάσει νομική μία καριέρα

μεγάλου κύρους που ανοίγει πολλές πόρτες και παρείχε σοβαρή εκπαίδευση, προσφέροντας επίσης τη δυνατότητα να γίνει υπαλλήλου δικαστηρίων.

2. Μαθηματικοί κύκλοι

Αργότερα ο Fermat μετακόμισε στο Μπορντό, όπου σύμφωνα με ορισμένους βιογράφους άσκησε το επάγγελμα του δικηγόρου και γνώρισε κατά πάσα πιθανότητα τον Αύγουστο του **1626** τον Jean Beaugrand, ο οποίος ανήκει σε ένα κύκλο αναγνωρισμένων μαθηματικών που συναντιόνταν συχνά σε αυτή την πόλη. Στις αρχές του 17^{ου} αιώνα, η επιστημονική κοινότητα συνειδητοποίησε τα οφέλη που συνεπαγόταν η ανταλλαγή ιδεών και άρχισαν να δημιουργούνται δίκτυα μαθηματικών που διατηρούσαν συχνή επικοινωνία. Έθεταν ερωτήματα, πρότειναν λύσεις, εξηγούσαν μεθόδους, διατύπωναν νέες σκέψεις και έβαζαν νέες προκλήσεις.

Και το Μπορντό ήταν ένα από αυτά τα κέντρα ιδεών, κερδίζοντας τα ταλέντα και εμφανίζοντας υψηλές δόσεις δημιουργικότητας. Το περιβάλλον αυτό σίγουρα προσέλκυσε την προσοχή του νερού Fermat. Ο Beaugrand έδειχνε πάντα περήφανος μεταξύ των φίλων του που είχε ανακαλύψει τον Fermat και ήταν ένας από τους ανθρώπους που συνέβαλαν περισσότερο στη γνωστοποίηση του έργου του. Ο Beaugrand έφτασε να γίνει μέρος της υψηλής πολιτικής κοινωνίας του Παρισιού, ήταν ευρέως αναγνωρισμένος για τις μαθηματικές δεξιότητες του και λέγεται ότι ήταν μαθητής του **Vieta**. Στο Παρίσι σύχναζε στην ομάδα μαθηματικών που συγκεντρωνόταν γύρω από τον **Marin Mersenne**, στον οποίο εξηγούσε πάντα ότι πρόκειται για τα δικά του ευρήματα και εκείνα του φίλου Fermat. Όταν κάποιος ήταν γνωστός στον Mersenne ισοδυναμούσε με το να είναι γνωστός σε όλο τον μαθηματικό κόσμο εκείνης της εποχής. Ο Beaugrand ταξίδεψε στην Ιταλία προσκεκλημένος του Γάλλου πρεσβευτή Bellievre. Εκεί ως ένας καλός μαθητικός τουρίστας, επισκέφτηκε τον Cavalieri στην Μπολόνια, τον Castellì στη Ρώμη και τον Γαλιλαίο στο Αρτσέτρι, κοντά στην Φλωρεντία. Με όλους τους διατήρησε μία γόνιμη αλληλογραφία μετά την επιστροφή του στο Παρίσι. Και όπως δε θα μπορούσε να γίνει διαφορετικά, μίλησε σε όλους για το φίλο του Fermat.

Στο Μπορντό ο Fermat συναναστρεφόταν με τους D'Espagnet, Filon, Prades. Συζητώντας μαζί τους διεύρυνε τους μαθητικούς του ορίζοντες και γνώσεις πολλές προσωπικότητες της επιστήμης. Από τον Ετιέν Ντ'Εσπανιέ, σύμβουλο του Κοινοβουλίου του Μπορντό, εξοικειώθηκε με το έργο και τους συμβολισμούς του Βιέτ. Να σημειωθεί ότι εκείνη την εποχή η μετάδοση της γνώσης εξαρτώνταν σε μεγάλο βαθμό από τις φιλίες και τις επαφές που υπήρχαν. Το Μπορντό ήταν η πόλη όπου εμφανίστηκαν οι πρώτες μαθηματικές γνώσεις του Fermat και στην οποία γεννήθηκαν πολλά από τα έργα του, όπως η αποκατάσταση των Επίπεδων Τόπων του Απολλώνιου *Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti*», η μέθοδος περί της ευρέσεως μελισσών και ελάχιστων και περί των εφαπτομένων καμπυλών *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*, και μερικές έρευνες για τα μαγικά τετράγωνα.

Η Οικογένεια του Fermat

Ενάμιση μήνα μετά την πρώτη εκλογή του ως επιτρόπου, ο Fermat παντρεύτηκε μία ξαδέρφη της μητέρας του, τη Λουίζ ντε Λον, την **01.06.1631**. Το ζευγάρι απέκτησε πέντε παιδιά: **Κλεμάν-Σαμουέλ** ο οποίος ήταν δικαστικός όπως ο ίδιος ο Fermat και στον οποίο οφείλεται η μερική έκδοση των έργων του πατέρα του, **Ζαν** ο οποίος ήταν αρχιδιάκονος του Φιμαράνς, **Κλερ** η οποία παντρεύτηκε και ο εγγονός της Ζαν Γκαγιάρ, διαδέχθηκε ως σύμβουλος τον Ζαν Φρανσουάζ, γιο του Samuel και **Κατερίνα & Λουίζ**, που αφιερώθηκαν στη θρησκεία.

3. Διοικητική και πολιτική σταδιοδρομία

Μετά την παραμονή του στο Μπορντό, ο Fermat μετακόμισε στην Ορλεάνη, όπου τελείωσε τις νομικές σπουδές του και τελικά στην Τουλούζη, όπου ξεκίνησε μία λαμπρή επαγγελματική σταδιοδρομία. Στις **14.05.1631** διορίστηκε σύμβουλος στο Κοινοβούλιο της Τουλούζης και επίτροπος του Συμβουλίου των αιτήσεων, στο οποίο συζητούσαν τις δημόσιες υποθέσεις. Στις **30.12.1634** διορίστηκε σύμβουλος του Συμβουλίου Συνοπτικών Διαδικασιών και το **1638** έλαβε μία θέση συμβούλου στο Δικαστήριο. Τον Αύγουστο **1648** ονομάστηκε σύμβουλος του Συμβουλίου Διαταγμάτων και το **1654** διάβασε την πρώτη του έκθεση στο ανώτατο συμβούλιο. Με λίγα λόγια, ο Fermat ακολούθησε μία κοινωνική σταδιοδρομία δικαίου και κατείχε σημαντικές θέσεις ευθύνης. Ως αποσταγμένα αυτών των αξιωμάτων του δόθηκε το δικαίωμα να αλλάξει όνομα του με το πιο διακεκριμένο Πιερ ντε Fermat.

Είναι πιθανό η σταδιοδρομία του να βοηθήθηκε από την επιδημία που έπληξε την περιοχή γύρω στο 1650 και προκάλεσε μεγάλο αριθμό θανάτων. Τόσοι θάνατοι σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα πρέπει να άφησαν κενές θέσεις στο δικαστικό σώμα, στο οποίο η εμπειρία έχει σημαντική αξία, συνεπώς τα αξιώματα καταλαμβάνουν συνήθως άτομα κάποιας ηλικίας. Η σύγχυση ήταν τόσο μεγάλη που το **1653** κυκλοφόρησε η λανθασμένη πληροφορία για το θάνατο του Fermat, ο οποίος υπέφερε επίσης από την επιδημία. Στη συνέχεια αυτή η πληροφορία διορθώθηκε.

Σχετικά με την επιμέλεια με την οποία ο Fermat ασκούσε την εργασία του έχουμε διαφορετικές απόψεις. Από τη μία πλευρά, το **1664** ο δικηγόρος Pierre Sarponta, δήλωνε «*θα ήθελα να μιλήσω για την κρίση σας στις υποθέσεις του παλατιού, όπου περάσατε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής σας και όπου φαίνεται ότι έχετε δείξει τόσο ακεραιότητα και τόσο επάρκεια στη διαχείριση της δικαιοσύνης, που διερωτάται κανείς, που έχοντας αποκτήσει τις ιδιότητες ενός σπουδαίου δικαστή, ήσασταν ικανός να αποκτήσετε μία πλήρη κατανόηση τόσων πολλών άλλων πραγμάτων, τα οποία είναι τόσο διαφορετικά από αυτή την ειδικότητα*». Πρέπει να σημειωθεί ότι ο Sarponta ήταν φίλος του Fermat και του αφιέρωσε τη γαλλική μετάφραση της εργασίας του Torricelli για την κίνηση του νερού, που δημοσιεύτηκε την ίδια χρονιά. Από την άλλη πλευρά του **1963** ο Zean Baptiste Colbert, δήλωνε στο Κοινοβούλιο της Τουλούζης για τον Fermat, «*πολύ μορφωμένο άτομα, έχει γνωριστεί παντού με τους σοφούς, αλλά αδιάφορος. Δεν είναι ιδιαίτερα καλός ομιλητής*».

Αυτή η αναφορά ήταν μέρος μιας μυστικής έκθεσης σχετικά με το δικαστικό σώμα που προετοίμαζε ο τότε Υπουργός οικονομικών του Λουδοβίκου ΙΔ', Colbert ο οποίος σε γενικές γραμμές φάνηκε αρκετά σκληρός με όλους τους δικαστές. Δεδομένου ότι ο Fermat δεν ήταν μέλος των φίλων του Πρωθυπουργού Gaspard de Fieubet, δεν αποτελεί έκπληξη το ότι η έκθεση αυτή δεν τον επαινούσε. Σε κάθε περίπτωση, φαίνεται βέβαιο ότι ο Fermat εκτελούσε ικανοποιητικά την εργασία του και στο μέτρο του δυνατού προσπαθούσε να μην μπλέκει σε μπελάδες. Δεν ήταν εύκολο έργο, αφού εκείνη την εποχή η Γαλλία ζούσε σε μία περίοδο πολιτικών αναταραχών, από τη μία πλευρά οι εντάσεις μεταξύ καθολικών και ουγενότων, από την άλλη οι συνεχείς μάχες για την εξουσία. Είναι η εποχή καρδινάλιου Μαζαρέν, η εποχή των σωματοφυλάκων. Ήταν εύκολο να υποστηρίξεις κάποιον σήμερα για να βρεθείς στη δυσμένεια των άλλων αύριο. Το πιο δύσκολο ήταν να διατηρήσεις ισορροπία μεταξύ των δύο. Και αυτό είναι που κατά πάσα πιθανότητα οδηγούσε τη δραστηριότητα του Fermat. Ποτέ δεν αναζήτησε την εξουσία και ίσως γι'αυτό απέφυγε να πάει στο Παρίσι και επικέντρωσε τη δραστηριότητά του σε μικρές πόλεις.

Ήταν πάντα κοντά στον τόπο της παιδικής του ηλικίας και για εννέα δικαστικά έτη (1638, 1644, 1645, 1648, 1649, 1655, 1656, 1663, 1664) ήταν δικαστής στο Καστρ, μία μικρή πολύ λίγα χιλιόμετρα από το Μπομόν ντε Λομάνι. Από την

άλλη πλευρά, ο Fermat δεν είχε ιδιαίτερες σχέσεις με την αστική τάξη της εποχής. Η θέση του ως δικαστής τον υποχρέωνε να διατηρεί ασφαλή απόσταση από εκείνους που κάποια μέρα ίσως θα έπρεπε να καταφύγουν στη δικαιοσύνη για την επίλυση των ζητημάτων τους. Κατά μία έννοια, ο Fermat αναγκάστηκε να ζήσει τη μοναξιά του αξιώματος του. Ενώ αλλά άτομα του επαγγέλματος του, αφιέρωναν τον ελεύθερο χρόνο τους για να γράφουν για την Αυλή και το δικαστικό σώμα, αυτός αφιέρωνε όλο τον ελεύθερο χρόνο του στα μαθηματικά.

4. Ο «Πρίγκιπας των ερασιτεχνών» και ο Πιερ ντε Καρκαβύ

Ο Fermat διαμαρτυρόταν συνεχώς για την έλλειψη χρόνου που είχε. Τον Ιούνιο 1640, έγραφε στον φίλο του Mersenne «αισθάνομαι πίεση από πολλές ασχολίες που δεν με αφήνουν πολύ χρόνο για να ασχοληθώ με αυτά τα πράγματα», και αργότερα, το Μάρτιο 1641, «οι ασχολίες με τις οποίες οι δικαστικές υποθέσεις μου γεμίζουν το κεφάλι, με εμποδίζουν να μπορέσω να διαβάσω με ησυχία τις εκθέσεις που μου κάνατε τη χάρη να μου στείλετε». Παρόλα αυτά, όποτε μπορούσε έβρισκε το χρόνο για τα μαθηματικά και μοιραζόταν αυτό το πάθος με άλλους συναδέλφους του επαγγέλματος και με άλλους μαθηματικούς του κόσμου.

Ο Fermat είναι ένα καθαρό παράδειγμα ότι είναι δυνατό να συνδυαστούν επαγγέλματα και ενδιαφέροντα στο υψηλότερο επίπεδο. Υπό την έννοια αυτή ήταν μοναδικός στην εποχή του. Πολλοί από τους συναδέλφους του ήταν καλοί μαθηματικοί και έκαναν αξιόλογες ανακαλύψεις. Το αξιοσημείωτο στην περίπτωση του είναι η ποσότητα και η ποιότητα των ανακαλύψεων του, που του χάρισαν τον τίτλο του «Πρίγκιπα των ερασιτεχνών» και είναι ο λόγος που ο αμερικανικός συγγραφέας Julian Coolidge δεν τον συμπεριέλαβε στο περίφημο λεξικό των ερασιτεχνών μαθηματικών, αφού πρέπει να τον θεώρησε «μεταξύ των επαγγελματιών». Στην Τουλούζη ο Fermat γνώρισε τον Πιερ ντε Καρκαβύ, σύμβουλο του κοινοβουλίου της Τουλούζης μεταξύ 1632 και 1636 και μεγάλο λάτρη των μαθηματικών. Αυτή η φιλία έπαιξε βασικό ρόλο στην πραγματική ζωή του Fermat. Αν και ο Καρκαβύ δεν είχε ειδική πανεπιστημιακή εκπαίδευση, ούτε τα αποτελέσματα του στα μαθηματικά ήταν ιδιαίτερα σημαντικά, αξίζει ειδικής μνείας η αλληλογραφία που διατηρούσε με πολλούς επιστήμονες της εποχής του και ότι σήμαινε αυτό για τη διάδοση της γνώσης. Σε όλη τη ζωή του ο Καρκαβύ διατηρούσε τακτική αλληλογραφία με τον Fermat, Huygens, Pascal, Descartes, Mersenne, Γαλιλαίο, Torricelli. Πολλές ανακαλύψεις δεν δημοσιεύονταν ποτέ και ο μόνος τρόπος για να τις γνωρίσει κανείς ήταν μέσα από τα γράμματα που έγραφαν οι εμπνευστές τους. Για την πρόοδο των μαθηματικών είναι πολύ σημαντικοί οι άνθρωποι που δημιουργούσαν νέα πράγματα, αλλά επίσης και εκείνοι που αφιερώνουν μεγάλο μέρος του χρόνου τους για να τα διασώσουν.

Αυτές οι επιστολές δεν περιοριζόταν στη διαβίβαση αποτελεσμάτων, αλλά έκαναν σχόλια και πρότειναν νέες εισφορές που αργότερα λαμβάνονταν υπόψη και ενσωματώνονταν σε άλλα έργα. Πρέπει να ήταν πολύ συναρπαστικό να ζει κανείς σε μία εποχή στην οποία κάθε επιστολή που παραλάμβανε θα μπορούσα να σημαίνει μια πλημμύρα νέων ιδεών και ένα ανανεωμένο ερέθισμα δραστηριότητας. Οι επιστολές μπορούσαν να αργήσουν εβδομάδες για να φτάσουν στον προορισμό τους, αν δεν χάνονταν στο δρόμο. Ο χρόνος λειτουργούσε με διαφορετικό ρυθμό, το ρολόι της ταχυδρομικής υπηρεσίας δεν είχε καμία σχέση με τα σημερινά ηλεκτρονικά ταχυδρομεία. Το 1636 ο Καρκαβύ αγόρασε μία θέση συμβούλου στο Μεγάλο Συμβούλιο του Παρισιού και μετακόμισε στην πρωτεύουσα. Ο Fermat συνέχισε την αλληλογραφία του με αυτόν και του έστειλε πολλά από τα έργα του. Μόλις έφτασε

στο Παρίσι, ο Καρκαβύ συναντηθεί προσωπικά με τον Mersenne, έναν βασικό χαρακτήρα στην ιστορία των μαθηματικών.

5. Η αλληλογραφία με τον Fermat

Όταν ο Πιερ ντε Καρκαβύ μετακόμισε στο Παρίσι το 1636 και εξήγησε στον Mersenne τις ιδέες του Fermat σχετικά με την θεωρία του Γαλιλαίου για την ελεύθερη πτώση των σωμάτων, ο Mersenne εννοείτε αμέσως με μεγάλη περιέργεια για τις απόψεις του μαθηματικού του έγραψε μία επιστολή. Ο Fermat απάντησε λεπτομερώς στις **26.04.1636**. Εκτός από την εξήγηση για ότι ζητούσε, του γνωστοποίησε την εργασία του για τις σπείρες, που προέκυψε από τη μελέτη της τροχιάς της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων εφαρμόζοντας μεθόδους εμπνευσμένες από το έργο του Αρχιμήδη «Περί ελίκων». Του μίλησε για το έργο του της αποκατάστασης των «Επιπέδων Τόπων» του Απολλωνίου. Στην επιστολή του έγραφε

«Έχω βρει επίσης πολλούς τρόπους ανάλυσης για διάφορα πρόβλημα, τόσο αριθμητικά όσο και γεωμετρικά, για τη λύση των οποίων η ανάλυση του Βιέτ δεν θα ήταν αρκετή. Θα τα μοιραστώ όλα αυτά μαζί σας όποτε θέλετε και θα το κάνω χωρίς καμία φιλοδοξία, από την οποία είναι πιο ελεύθερος και πιο απομακρυσμένος από οποιοδήποτε άλλο άτομο στον κόσμο». Ο Fermat επωφεληθείτε από την ευκαιρία για να θέσει στον Mersenne δύο προβλήματα σχετικά με τα μέγιστα και του ζητά να βάλει στους μαθηματικούς του Παρισιού την πρόσκληση να τα επιλύσουν. Σε αυτή την 1^η επιστολή του Fermat στον Mersenne έχουμε ήδη ένα Fermat σε καθαρή κατάσταση. Από τη μία πλευρά, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα η αλληλογραφική σχέση με την επιστημονική κοινότητα της εποχής του, επειδή οι επιστολές θα είναι χωρίς αμφιβολία ένα από τα βασικά οχήματα της έκφρασης των ιδεών του. Από την άλλη πλευρά, αποφεύγει κάθε είδους πρωταγωνιστικό ρόλο.

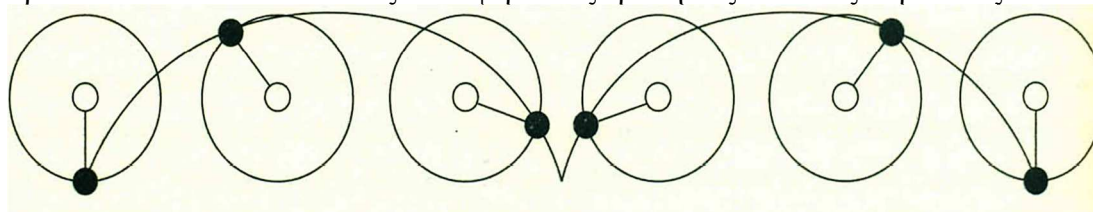
Ο Fermat υπηρετεί τις ιδέες και την επιστήμη, πέρα από την ιδιότητα του συγγραφέα. Και τέλος, φαίνεται η αγάπη του για να προτείνει νέα προβλήματα, νέες μαγνητικές προσκλήσεις, μέσω των οποίων μέτρα τη σοφία των σύγχρονων του. Ακριβώς επειδή έχει την απάντηση, οι προσκλήσεις που έθετε ο μαθηματικός γινότανε δίπλα συναρπαστικές. Αν κάποιος κατάφερνε να τις λύσει θα μπορούσε να θέσει υπό αμφισβήτηση την αξία του που έχει την πρώτη λύση, αλλά αν κανείς δεν μπορούσε τις λύσει, η αξία της απάντησης αυξανόταν πάρα πολύ καθώς επίσης και η δόξα αυτού την κατείχε. Και φυσικά, ο Mersenne κοινοποιούσε με ευχαρίστηση τις προσκλήσεις που έθετε ο Fermat για τους σύγχρονούς του.

6. Το πρόβλημα της κυκλοειδούς καμπύλης

Το **1632** έφτασε στο Παρίσι ο Ζιλ Περσόν ντε Ρομπερβλάλ και να διδάξει στο Βασιλικό Κολλέγιο. Ο Mersenne εκτίμησε αμέσως το εξαιρετικό ταλέντο του για τα μαθηματικά και ήρθε σε επαφή μαζί του για να προτείνει κάποιες ερωτήσεις στις οποίες δεν είχε βρει ακόμα τη λύση, μεταξύ των οποίων αυτή που αφορούσε το κυκλοειδές. Αρχίζει να οργανώνεται η χημεία της συνενοχής για την επίλυση προβλημάτων. Το **1599** ο Γαλιλαίος είχε ορίσει το κυκλοειδές ως τον γεωμετρικό τόπο που περιγράφει ένα σημείο του κύκλου όταν αυτός κυλάει πάνω σε μία ευθεία. Ο Mersenne γοητεύτηκε αμέσως από μία τόσο όμορφη καμπύλη και αποφάσισε να την μελετήσει. Ενδιαφέρθηκε να μάθει μερικές από τις ιδιότητές της, το μήκος ενός τόξου καμπύλης, την περιοχή που περιβάλλει, κλπ. Για να προσδιορίσει το εμβαδόν αυτής της καμπύλης, ο Γαλιλαίος είχε κατασκευάσει προσεκτικά ένα μεταλλικό μοντέλο και το έχει ζυγίσει σε μία ζυγαριά. Με αυτό είχε πετύχει μία καλή προσέγγιση, αλλά δεν ήταν ικανοποιημένος. Ήθελε μία ακριβή απάντηση. Οι παθητικές μέθοδοι ζουν στον παράδεισο των ιδεών και μπορούν να προσβλέπουν

στην τελειότητα. Δεν περιορίζονται από τις ατέλειές του μεταλλικού μοντέλου ούτε από τις ανακρίβειες της ζυγαριάς. Ο Mersenne μελέτησε το κυκλοειδές για χρόνια, δημοσιεύοντας αποτέλεσμα του σε διάφορα έργα, *Quaestiones in genesim* (1623, Ερωτήσεις περί της Γεννήσεως), *Synopsis mathematica* (1626, Μαθηματική σύνοψη) και *Questions inouies* (1634, Πρωτοφανείς ερωτήσεις).

Ως συνήθως, έθεσε σε λειτουργία τον μηχανισμό των επιστολών και ενημέρωσε τους άλλους αλληλογράφους του για τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν και για τα θέματα που παρέμεναν άλυτα. Ο Torricelli, ο Fermat ο Descartes, ο Roberval, υπολόγισαν όλοι σωστά ότι η περιοχή που υπάρχει κάτω από ένα τόξο του κυκλοειδούς είναι τριπλάσια του εμβαδού του κύκλου. Ο Roberval και ο Wren υπολόγισαν ότι το μήκος του τόξου είναι ίσο με οκτώ φορές στην ακτίνα. Με αυτό το νέο τρόπο εργασίας που έστησε ο Mersenne, όλα τα ταλαντούχα μυαλά προσκαλούνταν να λύσουν τις ενδιαφέρουσες ερωτήσεις που τους παρουσιάζονταν.



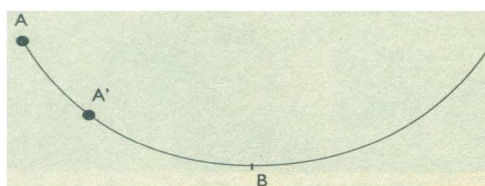
Μοντέλο του κυκλοειδούς

Τα αποτελέσματα δεν ήταν καρπός της απομόνωσης των στοχαστών, αλλά της συνεργασίας και της ανταλλαγής ιδεών. Ποιός μπορούσε να φανταστεί ότι αυτή η τόσο ωραία καμπύλη την οποία μία μέρα ορίσε ο Γαλιλαίος από ένα κύκλο που κυλά πάνω σε μία ευθεία, θα προτεινόταν μερικά χρόνια αργότερα από τον Ζεράρ Ντεζάργκ για το σχεδιασμό των δοντιών στα γρανάζια των μηχανών, και τελικά θα έλυne το πρόβλημα της βραχυστόχρονης και τις ταυτόχρονης καμπύλης!

Το πρόβλημα της ταυτόχρονης και της βραχυστόχρονης

Έστω ότι θέλουμε να πάμε από το Α στο Β με το πιο γρήγορο δυνατό τρόπο ενώ υποβαλλόμαστε αποκλειστικά στη δράση της βαρύτητας, ή πράγμα που είναι το ίδιο, θέλουμε να βρούμε τη μορφή που πρέπει να έχει η καμπύλη πάνω στην οποία γλιστράμε ώστε φεύγοντας από το Α να φτάσουμε το συντομότερο στο Β. Αυτή η καμπύλη ονομάζεται βραχυστόχρονη (από τις ελληνικές λέξεις βράχυστος, συντομότερος και χρόνος).

Στην αρχή, η διαίσθησή λέει ότι ο γρηγορότερος τρόπος για να γλιστρήσουμε από το Α στο Β είναι η μικρότερη απόσταση, δηλαδή η ευθεία γραμμή. Ωστόσο, δεν είναι έτσι. Η ταχύτερη γραμμή είναι το αντεστραμμένο τόξο κυκλοειδούς που διέρχεται από το Α και έχει το ελάχιστο του στο Β.

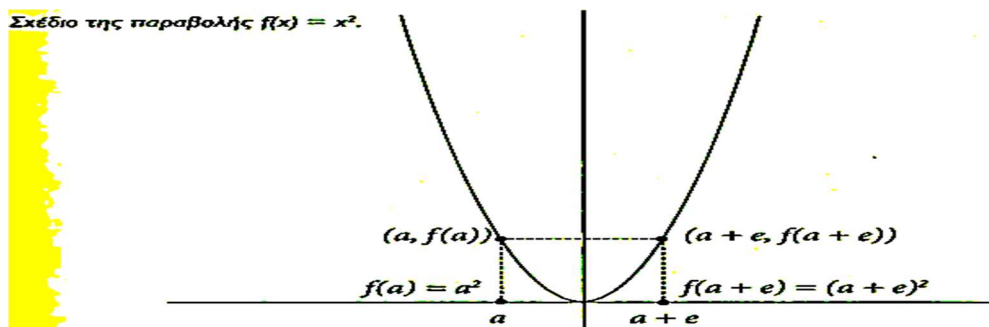


Το 1696 ο Johann Bernoulli γνωρίζει ήδη τη λύση στο πρόβλημα και προκάλεσε τους επιστήμονες της εποχής να το λύσουν και αυτοί. Το πρόβλημα λύθηκε ανεξάρτητα από τους Leibniz, Newton, Johann Bernoulli και De L' Hospital. Το 1673 ο Huygens ανακάλυψε ότι αν ένα αντικείμενο αφεθεί να πέσει σε ένα τόξο κυκλοειδούς, δεν έχει σημασία από ποιο ύψος, κάνει πάντα τον ίδιο χρόνο για να φτάσει στη βάση. Ως εκ τούτου, το κυκλοειδές λύνει επίσης το πρόβλημα της ταυτόχρονης (από τις ελληνικές λέξεις το αυτό και χρόνος).

7. Η μέθοδος των μεγίστων και των ελάχιστων

Οι Roberval και Mersenne ήταν περίεργοι για τα αποτελέσματα του Fermat περί των μεγίστων και των ελάχιστων. Οι προκλήσεις που έθετε και έλυνε ο Fermat στις επιστολές του δε μπορούσαν να είναι αποτελέσματα συμπτώσεων, έπρεπε να είναι το αποτέλεσμα μαθηματικών μεθόδων αγνώστων μέχρι τότε. Συνειδητοποίησαν ότι ο Fermat έφτανε πολύ μακρύτερα από τους σύγχρονους του όταν έλυνε τα προβλήματα των μεγίστων και των ελάχιστων και του ζήτησαν να εξηγήσει τις μεθόδους του. Η απάντηση του Fermat δεν άργησε καθόλου και έστειλε τρία κείμενα, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*, *Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti* και *Ad locos planos et solidos isagoge* (Εισαγωγή στους επίπεδους και στερεούς τόπους), για να τα εξετάσουν οι μαθηματικοί του Παρισιού. Με αυτό ο Fermat κερδίζει τη φήμη ενός μαθηματικού 1^{ης} γραμμής. Στη μέθοδο μεγίστων και ελαχίστων ο Fermat παρατηρεί ότι όταν μία συνάρτηση φτάσει σε ένα γνωστό όριο, τότε μία ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων τέμνει τη συνάρτηση σε ένα μόνο σημείο και ότι στις τιμές ακριβώς κάτω από μέγιστο, μία ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων τέμνει τη συνάντηση σε δύο πολύ κοντινά σημεία, το ένα στα δεξιά και το άλλο στα αριστερά του μέγιστου σημείου. Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη την τιμή της συνάντησης στο ανώτατο όριο, $f(a)$ και μία πολύ κοντινή τιμή $f(a + e)$ όπου e είναι μία πολύ μικρή ποσότητα, προκύπτει ότι οι τιμές αυτές θα πρέπει να είναι πρακτικά ίσες και συνεπώς, πρέπει να «παρισούνται». Ως αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας παίρνουμε μία εξίσωση η οποία, μετά την αφαίρεση της τιμής e επειδή είναι αμελητέα, επιτρέπεται να υπολογιστεί το a .

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Η γραφική παράσταση της φαίνεται στην εικόνα. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(a) = a^2$. Για αυτό θεωρείται μία πολύ κοντινή τιμή $f(a + e) = (a + e)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot e + e^2$. Μετά «παρισούνται», δηλαδή θεωρούνται τόσο κοντινές που ισούνται με $a^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot e + e^2$.



Υστερα λύνεται η εξίσωση που προκύπτει. Εξαλείφοντας το a^2 από τα δύο μέλη της ισότητας έχουμε $2 \cdot a \cdot e + e^2 = 0$ και διαιρώντας με e προκύπτει ότι $2 \cdot a \cdot e = 0$. Τέλος, το e θεωρείται τόσο κοντινό στο 0 που παραλείπεται και παραμένει $2 \cdot a = 0$ άρα $a = 0$, το οποίο υπολογίζει σωστά το ελάχιστο της δεδομένης συνάρτησης. Όπως μπορούμε να δούμε, μετά την «παρισότητα» (adégalité) έχουμε μία εξίσωση ισοδύναμη με το να πάρουμε την παράγωγο της συνάρτησης και να την εξισώσουμε με το μηδέν, σε μία εποχή στην οποία δε γνώριζαν ούτε τι ήταν παράγωγος, ούτε τι ήταν υπολογισμός των ορίων συναρτήσεων. Άρα, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι ορισμένοι μαθηματικοί είδαν με επιφυλάξεις τη διαδικασία της «παρισότητας». Όμως, η διαίσθηση του Fermat σε αυτό τον συλλογισμό αποδεικνύεται απόλυτα λαμπρή.

8. Πολλαπλά ενδιαφέροντα

Η αποκατάσταση των χαμένων έργων του Απολλώνιου ήταν μέρος ενός φιλόδοξου μαθηματικού σχεδίου που ξεκίνησαν οι Vieta και Marino Ghetaaldi, στο οποίο στη συνέχεια προστέθηκαν οι Willebrord Snell και Fermat ο οποίος ήταν σπουδαίος γνώστης των κλασικών γλωσσών και οι ευρείες γνώσεις του στα μαθηματικά του επέτρεπαν να αντιμετωπίζει με εξαιρετικό τρόπο το δύσκολο έργο της μετάφρασης των ελληνικών και λατινικών επιστημονικών έργων των κλασικών συγγραφέων. Άρα, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι, όταν ένας μεταφραστής συναντούσε ένα δυσνόητο απόσπασμα που είχε σχέση με συλλογισμούς επιστημονικού ή μαθηματικού τύπου, κατέφευγε σε αυτόν για να το επιλύσει.

Στην Τουλούζη γνώρισε τον Charles de Montchal, ελληνιστή και μεγάλο βιβλιόφιλο, η συλλογή χειρογράφων του οποίου θα αποτελούσε με την πάροδο του χρόνου τμήμα της Bibliothèque du Roi. Ο Fermat είχε πρόσβαση σε αυτό το εξάισιο αρχείο. Ο Montchal του έδειξε το *Les Harmoniques* (Αρμονικά), ένα έργο μουσικής που γράφτηκε από τον Μανουήλ Βρυέννιο, Βυζαντινό δάσκαλό της θεωρίας της μουσικής του 14^{ου} αιώνα. Ο Fermat διάβασε αυτό το κείμενο και έγραψε μερικές σημειώσεις στα περιθώρια. Είναι το στυλ του, καθώς διαβάσει η φαντασία του πετά, του έρχονται πολλές ιδέες και τις σημειώνει για να συλλογιστεί για αυτές αργότερα και να μην τις ξεχάσει. Στην Καστρ συναντήθηκε με τον Πιερ Sarponta, ο οποίος το 1664 έγραψε το *Traité de la mesure des eaux courantes*, μετάφραση στα γαλλικά του έργου του Βενεδικτίνου Πατέρα Benedetto Castelli. Έκανε επίσης μία γαλλική μετάφραση του έργου του Torricelli που εξέταζε το ίδιο θέμα και στη μετάφραση αυτή αποφάσισε να περιλάβει την περιγραφή που έκανε ο Fermat για ένα όργανο μέτρησης της πυκνότητας των υγρών που περιγράφεται από τον Συνέσιο επίσκοπο της Κυρήνης, σύγχρονο της Υπατίας της Αλεξανδρινής.

Ο Castelli σημείωνε ότι άλλοι πριν από τον Fermat είχαν προσπαθήσει ανεπιτυχώς να κατανοήσουν τη λειτουργία μιας τέτοιας μοναδικής συσκευής. Ο Sarponta θαύμαζε την ευρυμάθεια του Fermat και εκτός από το ότι του αφιέρωσε το έργο, ήταν γεμάτος επαίνους για αυτόν «Όλοι οι σοφοί κάθε είδους λογοτεχνίας σας συμβουλεύονται για τα δύσκολα αποσπάσματα που συναντούν στα βιβλία. Θα μπορούσα να προτείνω μία σειρά από εξαιρετικές παρατηρήσεις που έχετε κάνει για τον Συνέσιο, τον Φροντίνο τον Αθήναιο και πολλούς άλλους συγγραφείς και τις διευκρινίσεις που έχετε δώσει στα σκοτεινά αποσπάσματα που δε μπορούν να γίνουν κατανοητά από τους Scaliger, Casaubon, Petau και Saummaise. Με λίγα λόγια φαίνεται κύριε ότι έχετε γεννηθεί για να κυβερνάται την αυτοκρατορία των γραμμάτων και να είστε ο κυρίαρχος νομοθέτης όλων των σοφών».

Η ευρυμάθεια του Fermat, συνεπώς, ήταν αναγνωρισμένη από πολλούς από τους ανθρώπους που τον ήξεραν. Τα ενδιαφέροντα του περιλάμβαναν όλη τη γνώση, με βαθύ εγκυκλοπαιδικό ύφος που δε διέκρινε τα όρια μεταξύ των επιστήμων και των γραμμάτων. Όλοι θεωρούσαν τον Fermat ως ένα σοφό πρόθυμο να ακούει και να δίνει τη γνώμη του. Έτσι, ήταν πολλοί αυτοί που τον πλησίαζαν και ζητούσαν τη συνεργασία του. Ο Fermat έγραψε σημειώσεις σε πολλά από τα βιβλία που διάβαζε, αφήνοντας καταγραφές των παρατηρήσεων, των σκέψεών του. Όλα χωρούσαν στα περιθώρια των βιβλίων που διάβαζε. Πράγματι, τα λογοτεχνικά έργα του Fermat είναι γνωστά μόνο από τις σημειώσεις που έκανε στα περιθώρια των προσωπικών του βιβλίων. Συνέθεσε ακόμα και ένα ποίημα με περίπου εκατό εξаметρικούς στίχους στα λατινικά, *Cede Deo seu, Christus moriens* (Μακριά από τον Θεό, αν ο Χριστός ήταν θνητός), που αφιέρωσε στον Guez de Balzac, το οποίο διαβιβάστηκε στην Académie de Castres το 1656. Εν κατακλείδι, ο Fermat ένιωθε μεγάλο σεβασμό και θαυμασμό για τους κλασικούς, ενώ ταυτόχρονα ζούσε έντονα την περιπέτεια του να φέρνει νέες

ιδέες «που δεν είναι στα βιβλία», αρχαία ή σύγχρονα. Ήταν ένθερμος αναγνώστης του Francis Bacon και ζούσε με ενθουσιασμό το ξεκίνημα της νέας επιστήμης.

Το παγκόσμιο πνεύμα του τον οδηγούσε να υποστηρίζει την ενότητα όλων των γνώσεων, και συμφωνούσε με τον Mersenne στην ιδέα ότι όση περισσότερη επικοινωνία υπάρχει και όσες περισσότερες ιδέες καταγράφονται, τόσο περισσότερο θα προχωρήσει η επιστήμη. Έτσι, το **1657** πρότεινε στον Cureau de la Chambre, σχετικά με την διάθλαση, ότι «αν μπορείτε να μου επιτρέψετε να ενώσω λίγα από τη γεωμετρία μου στη φυσική σας, θα κάνουμε μία πρωτότυπη κοινή εργασία». Ο Fermat απολάμβανε την ομορφιά των μαθηματικών. Ήξερε ότι πίσω από τις αποδείξεις και τα θεωρήματα κρυβόταν μια αισθητική και μια φιλοσοφία της γνώσης. Ο τρόπος με τον οποίο παρουσίαζε τα αποτελέσματα του και έθετε τις προκλήσεις του, δείχνει ένα ενθουσιώδες άτομο που επηρεάζει τους φίλους του. Στις **25.12.1640** έγραψε στον Mersenne «Για όσα μου γράφει ο κύριος Φρενίκλ, θα του στείλω μερικές προτάσεις που πιστεύω ότι θα εκτιμήσει και το λέω με κάθε σεμνότητα, πολύ πιο όμορφες από όλα αυτά που έχουμε συζητήσει προηγουμένως».

Πορτρέτο του Francis Bacon. Ο Άγγλος φιλόσοφος, υπερασπιστής της επιστημονικής μεθόδου, ήταν ιδιαίτερα αγαπητός στον Fermat



Αργότερα, στις **02.08.1641**, ο Φρενίκλ έγραψε στον Fermat «Οι μέθοδοι που δίνετε [...] είναι πραγματικά πολύ όμορφες και έχετε τον τρόπο να εκθέτετε καλά τους κανόνες σας και αυτό τους δίνει μια κάποια χάρη που τους κάνει ακόμα πιο ευπρόσδεκτους».

9. Ένας ιδιόμορφος τρόπος εργασίας

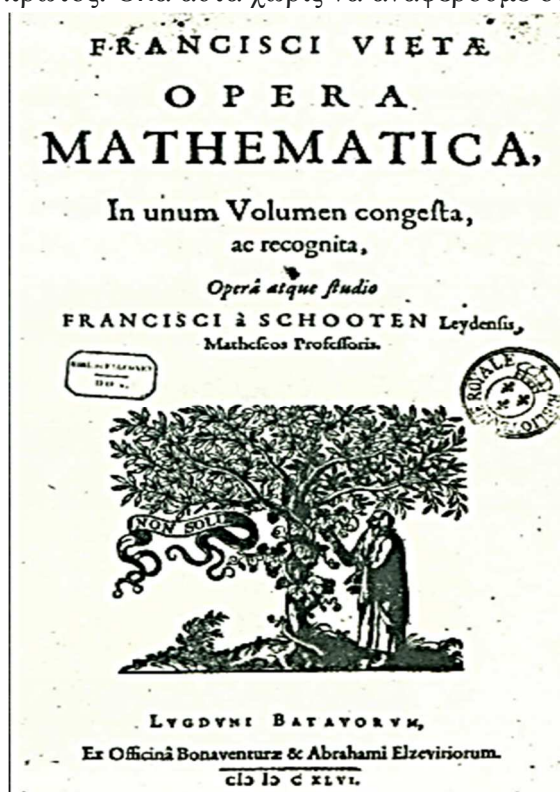
Πολλοί ιστορικοί αναρωτιούνται γιατί ο Fermat σημείωσε τόσα πολλά πράγματα και έγραψε τόσα λίγα. Γιατί να μην γράψει βιβλία που να εξηγούν τις ιδέες και τις ανακαλύψεις του. Όμως καθώς γνωρίζουμε περισσότερο τον Fermat καταλαβαίνουμε ότι απλά αυτός ήταν ο τρόπος της εργασίας του. Δεν ήταν επαγγελματίας μαθηματικός. Του άρεσε να σκέφτεται για τα μαθηματικά, τη φυσική, τη λογοτεχνία, τη φιλοσοφία, τη μουσική και να κάνει σχόλια. Ήταν σα να κάνει μια συνομιλία με το βιβλίο που διάβαζε και να δίνει τη γνώμη του στο στενό περιθώριο που του επέτρεπε η σελίδα. Ήταν σαν να σκέφτεται φωναχτά. Όμως τις πλήρεις και αυστηρές αποδείξεις όλων των πιθανών περιπτώσεων τις άφηνε για άλλα άτομα, ίσως πιο έμπειρα ή ίσως με περισσότερο χρόνο. Το γράψιμο ενός βιβλίου θα συνεπαγόταν μια αφοσίωση και ένα χρόνο που δε διέθετε. Αφιέρωνε τον χρόνο του για να σκέφτεται και να εμβαθύνει σε καινούργια πράγματα. Τα ενδιαφέροντά του ήταν τόσα που δε μπορούσε να σταματήσει για να γράψει ένα βιβλίο με όλες τις εισαγωγές, τις βασικές εξηγήσεις και τις λεπτομέρειες των αποδείξεων του.

Μόλις ένα θέμα ήταν σαφές για αυτόν, έκανε μια σημείωση και περνούσε σε ένα άλλο ζήτημα. Όλα αυτά θα μπορούσαν να δώσουν την εικόνα ενός Fermat χωρίς σκοπό, ο οποίος καταπιανόταν με θέματα πότε ένα εδώ, πότε είναι εκεί, εντελώς αποκομμένα και χωρίς κανένα βασικό στόχο. Το έργο του δεν αποσκοπεί να θέσει τις βάσεις για νέα μαθηματικά στο ύφος του *Introduction en l'art analytique* (Εισαγωγή

αναλυτική τέχνη) του Vieta που αποσκοπεί να δώσει λύση σε όλα τα προβλήματα, ή του *Géométrie* του Descartes το οποίο προσπαθεί να εξηγήσει όλα τα φαινόμενα της φύσης. Όμως γνώριζε πολύ καλά ότι οι μέθοδοι του χρησίμευαν για την πρόοδο της επιστήμης και έφεραν την επανάσταση στον τρόπο εργασίας, παρέχοντας στη σκέψη νέα εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων που προηγουμένως, με τις παλιές μεθόδους, δεν είχαν βρει καμία λύση. Ο τρόπος εργασίας του Fermat είναι αναμφίβολα ένα από τα συστατικά που αποτελεί μέρος του θρύλου του. Ο τρόπος του για την επίλυση προβλημάτων αποπνέει πρωτοτυπία και δημιουργικότητα, όμως μερικές φορές είναι δύσκολο να αφομοιωθεί και δεν ικανοποιεί αρκετά όλες τις μαθηματικές λεπτομέρειες που του ζήτησαν ορισμένοι από τους σύγχρονους του. Το είδος της γραφής που ταιριάζει καλύτερα στον τρόπο σκέψης του ήταν ακριβώς οι επιστολές. Σε αυτές μπορούσε να μιλήσει ελεύθερα για την επιστήμη, χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα να ακολουθεί μία επίσημη ομιλία. Ήταν επίσης ο ιδανικός τρόπος για να θέτει νέες προκλήσεις στους αλληλογράφους του και να αποδέχεται αυτές που του έθεταν εκείνοι. Αν το απαιτούσε η περίπτωση, μπορούσε να εμβαθύνει σε κάποια λεπτομέρεια, αν και συνήθως έδινε μόνο πινελιές των λύσεων, ως ενδείξεις ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να ακολουθήσει τη δική του σκέψη σχετικά με τα πραγματευόμενα θέματα και ως απόδειξη ότι είχε πραγματικά τη λύση, αλλά ότι δεν ήταν πρόθυμος να την παραχωρήσει εύκολα. Αυτή η αντίσταση για να εξηγήσει τις μεθόδους του αποτελούσε κομμάτι του του συναρπαστικού παιχνιδιού προκλήσεων, που θα κορυφωνόταν λαμπρά με την πρόκληση του τελευταίου θεωρήματος του.

Παρόλα αυτά, οι επιστολές, παρά τις αρετές του, είχαν επίσης τα προβλήματά τους. Μερικές φορές οδηγούσαν σε κάποια παρεξήγηση, η οποία αργούσε χρόνια να επιλυθεί, ή απλά δεν επιλυόταν ποτέ. Μερικές φορές δημιουργούνταν ατέρμονες συζητήσεις για το αν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα το έλυσε αυτός που πρώτος το είπε ή αυτός που πρώτος το έγραψε. Μερικές φορές οι ιδέες προερχόταν από διάφορα άτομα και στη συνέχεια διάφορα άτομα διεκδικούσαν την πατρότητά τους ή ακόμα ένα ερώτημα λυνόταν ανεξάρτητα από διάφορα άτομα και στη συνέχεια συζητούσαν για το ποιος άξιζε τη δόξα του να είναι ο πρώτος. Όλα αυτά χωρίς να αναφέρουμε ότι ορισμένοι αλληλογράφοι έβρισκαν απόλαυση σε όλα αυτά τα θέματα, ή ότι μερικές φορές συνέβαινε κάποια αδιακρισία που έχει καταστροφικές συνέπειες για όποιον εμπλεκόταν σε αυτήν. Σίγουρα ο Fermat προσπάθησε να μείνει στο περιθώριο όλων αυτών των ζητημάτων, ωστόσο, δε μπόρεσε να το καταφέρει παρά τη θέλησή του.

Προμετωπίδα ενός από τα βιβλία του Vieta τον οποίο ο Fermat μελέτησε πολύ, αν και οι δύο μαθηματικοί είχαν πολύ διαφορετικές φιλοδοξίες & μεθόδους εργασίας



10. Η διαμάχη με τον Descartes

Στις αρχές του **1637** και μέσω του Mersenne, ο Descartes ζήτησε από τον Βασιλιά της Γαλλίας το προνόμιο να δημοσιεύσει το *Discours de la methode* (Συζητήσεις περί της μεθόδου) και τις τρεις *Essais* (Εκθέσεις). Ο Μπογκράν κατείχε εκείνη την εποχή τη θέση του γραμματέα του καγκελάριου και ως εκ τούτου είχε μια υπεύθυνη θέση που του επέτρεπε να επηρεάσει το ζήτημα.

Ο καγκελάριος Pierre Seguiet, διατήρησε ένα αντίγραφο της πρώτης έκθεσης του Descartes, *La Dioptrique* (Η διόπτρα), για να την υποβάλει σε εκτίμηση. Ο Μπογκράν, χωρίς την άδεια του δημιουργού και χωρίς να ενημερώσει τον Mersenne, απέστειλε ένα αντίγραφο της έκθεσης στον φίλο του Fermat για να του δώσει τη γνώμη του. Ο Mersenne έμαθε για αυτό αργότερα και έγραψε μια επιστολή στον Fermat ζητώντας του να είναι διακριτικός και οποιαδήποτε παρατήρηση που θα ήθελε να κάνει γι' αυτό να τη γνωστοποιήσει απευθείας στον ίδιο και σε κανέναν άλλο.

Στις **22.09.1637** ο Fermat έγραψε στον Mersenne «*Μου ζητήσατε την άποψή μου σχετικά με την έκθεση της Οπτικής του κ. Descartes. Εδώ είναι οι εντυπώσεις μου για αυτές τις νέες προτάσεις, επειδή αν και οι συνέπειες που αυτός συμπεραίνει, όταν εξετάζει τη μορφή που πρέπει να έχουν οι φακοί, είναι όμορφες, θα ήταν επιθυμητό οι βάσεις στις οποίες στηρίζονται να είχαν ελεγχθεί καλύτερα, επειδή αυτό δεν συμβαίνει. Όμως, φοβάμαι ότι η αλήθεια απουσιάζει τόσο όσο και η απόδειξη*». Στην ίδια επιστολή ο Fermat ανέφερε τους λόγους στους οποίους βάσιζε την άποψή του. Στο *La Dioptrique* προτείνεται ένα μοντέλο για τη φύση του φωτός για να εξηγήσει το νόμο της διάθλασης. Όμως αυτό το μοντέλο κάνει υποθέσεις που για τον Fermat δεν ήταν επαρκώς αιτιολογημένες. Ο Fermat επισήμανε ότι υπήρχε αντίφαση μεταξύ της ιδέας της στιγμιαίας διάδοσης του φωτός και ότι η ταχύτητα του φωτός εξαρτάται από το μέσο στο οποίο διαδίδεται. Και ούτε έβλεπε προφανές ότι το φως διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα όσο πυκνότερο ήταν το μέσο.

Ο Mersenne διαβίβασε στον Descartes τις γνώμες του Fermat και όπως μπορεί να υποθέσει κανείς του Descartes του κακοφάνηκαν πολύ. Έτσι, τον Οκτώβριο του **1637** ανταποκρίθηκε στην Mersenne «*Το σφάλμα που ο κ. Fermat βρίσκει στην απόδειξή μου (στη διάθλαση) δεν είναι παρά φανταστικό και δείχνει αρκετά καλά ότι δεν έκανε περισσότερο από μια πρόχειρη εξέταση της έκθεσής μου*». Όμως ο Fermat δεν επιδίωκε την αντιπαράθεση, αλλά την ανακάλυψη της αλήθειας. Σε μια επιστολή που έγραψε στον Mersenne τον Δεκέμβριο του **1637** πρότεινε ένα νέο μοντέλο για τη διάθλαση. Στην ίδια επιστολή έγραψε: «*[...] δεν είναι ούτε από ζήλια, ούτε από άμιλλα που συνεχίζω αυτό τον μικρό αντίλογο, αλλά μόνο για να κάνω την αλήθεια να λάμψει*.

Αυτό που είμαι σίγουρος ότι θα ευχαριστήσει τον κ. Descartes, η αξία του οποίου είναι επίσης πολύ γνωστή και την οποία αναγνωρίζω ρητώς εδώ». Αλλά η διαμάχη είχε ήδη αρχίσει. Για τον Descartes οι απόψεις του Fermat ήταν μια πρόκληση για το πρόσωπό του και τις ιδέες του. Το *Discours de la methode* και οι τρεις *Essais* ήταν η βάση της φιλοσοφίας του και το θεμέλιο της σκέψης του.

Έτσι αποφάσισε να προετοιμαστεί για μια κανονική μάχη. Στις **18.01.1638** έγραψε στον Mersenne «*Αν αυτός ο συγγραφέας έχει εκπλαγεί που δεν έχω τέτοιους κανόνες στη γεωμετρία μου, εγώ έχω πολύ περισσότερους λόγους να εκπλήσσομαι που αυτός θέλησε να αγωνιστεί με κακά όπλα. Όμως θέλω ακόμα να του δώσω χρόνο να ανέβει ξανά στο άλογο και να πάρει όλες τις βελτιώσεις που μπορεί να επιλέξει για αυτόν τον αγώνα*». Όταν ο Fermat έστειλε στους μαθηματικούς του Παρισιού το *Methodius ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum* για να το εκτιμήσουν, ο Descartes βρήκε την ευκαιρία και τον κατηγορήσε για αμφίβολη συλλογιστική. Οι Roberval και Pascal βγήκαν να υπερασπίσουν τον Fermat, ενώ αρχικά ο Μυντόρζ και ο Ντεζάργκ στάθηκαν στο πλευρό του Descartes.

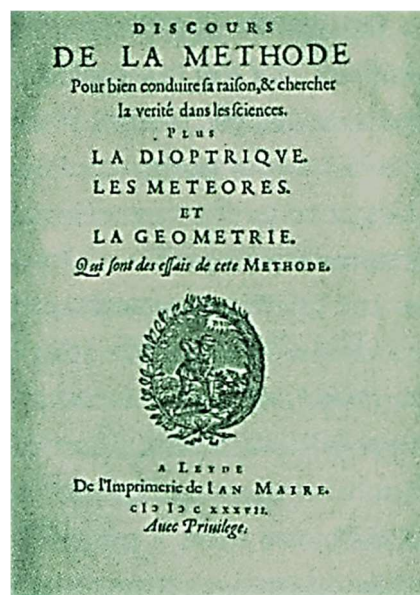
Τον Απρίλιο του **1638** ο Roberval έγραψε: «Όταν ο κ. Descartes καταλάβει καλά τη μέθοδο μεγίστων και ελαχίστων του κ. Fermat και την *inventionem tangentium linearum curvarum*, τότε θα πάψει να εκπλήσσεται που αυτή η μέθοδος έχει τους υπερασπιστές της και θα θαυμάσει τη μέθοδο ο ίδιος, η οποία είναι εξαιρετική και αντάξια του συγγραφέα της». Είναι περίεργος ο ρόλος του Mersenne σε αυτή την ιστορία, επειδή στην πραγματικότητα όλα συμβαίνουν μέσω αυτού. Τόσο ο Descartes όσο και ο Fermat απευθύνουν τις επιστολές τους στον Mersenne, θεωρώντας ως δεδομένο ότι στη συνέχεια αυτός θα τις εξηγήσει στην άλλη πλευρά. Τελικά, ο Descartes έδωσε δίκιο στον Fermat και ο Descartes αποδέχτηκε την ετυμολογία των αποδεικτικών στοιχείων και αναγνώρισε ότι «βλέποντας την τελευταία μέθοδο που χρησιμοποιεί για να βρει τις εφαπτόμενες των καμπυλών, δε μπορώ να απαντήσω με άλλο τρόπο παρά λέγοντας ότι είναι πολύ καλή και ότι αν το είχε εξηγήσει με τον τρόπο αυτό από την αρχή, δε θα τον είχα αντικρούσει καθόλου». Σιγά-σιγά τα πνεύματα ηρέμησαν. Στις **29.06.1638** ο Descartes έγραψε στον Mersenne «Είδα αυτά που είχατε την ευγένεια να μου στείλετε σχετικά με τις επιστολές που σας έγραψε ο κ. Fermat. Και πρώτα σχετικά με αυτό που είπε ότι στο πρώτο μου άρθρο συνάντησε πιο πικρά λόγια από ότι ανέμενε, του ζητώ πολύ ταπεινά συγγνώμη, και να σκεφτεί ότι δεν τον γνώριζα».

Αρχική σελίδα του περίφημου *Λόγου περί της μεθόδου* του Descartes, που περιλαμβάνει το δοκίμιο για τη διόπτρα που προκάλεσε την αντιπαράθεση με τον Fermat

Τέλος, τον Οκτώβριο **1638**, ο Descartes έγραψε για πρώτη φορά μια επιστολή προς τον Fermat, ως ένδειξη συγγνώμης: «Πρέπει να ομολογήσω εδώ ότι ειλικρινά δεν έχω γνωρίσει ποτέ κανέναν που μου έδωσε την εντύπωση ότι γνωρίζει τόσο τη γεωμετρία όσο εσείς. Ωστόσο, όπως επιδιορθώνουμε προσεκτικότερα τα μικρά ελαττώματα ενός διαμαντιού παρά τα μεγάλα μιας κοινής πέτρας, έτσι σκέφτηκα ότι έπρεπε να εξετάσω πιο προσεκτικά αυτό που προέρχεται από την πλευρά σας από αυτό που θα προερχόταν από ένα άλλο άτομο που θα εκτιμούσα λιγότερο». Ωστόσο, το περιστατικό δεν τέλειωσε εδώ. Παρά τα λόγια του, ο Descartes αναγνώρισε στον Fermat μια ιδιοφυΐα και έναν αντίπαλο και για αυτό τον φοβόταν και προσπαθούσε να τον δυσφημίσει όποτε μπορούσε.

Σε μια περίπτωση, αφού ανέλυσε την εργασία του Fermat για τον καθορισμό της εφαπτομένης σε μια κυκλοειδή καμπύλη, η οποία ήταν πράγματι σωστή, ο Descartes έγραψε στον Mersenne λέγοντας ότι η εργασία περιείχε σφάλματα και ότι ο Fermat ήταν ανεπαρκής ως μαθηματικός και ως στοχαστής. Το βάρος του Descartes ανάμεσα στην επιστημονική κοινότητα της εποχής του συνέβαλε σίγουρα ώστε πολλοί επιστήμονες να έχουν μια παραπλανητική εικόνα για τον Fermat. Αλλά η ιδιοφυΐα του Fermat συνέχιζε να λάμπει. Πράγματι, ήταν ο πρώτος που έθεσε τις βάσεις της αλγεβρικής γεωμετρίας, πριν ο Descartes δημοσιεύσει τη «Γεωμετρία» του. **Μαζί με τον Pascal θεμελίωσε τη θεωρία των πιθανοτήτων.**

Στην αριθμητική, τα αποτελέσματά του και οι μέθοδοι των αποδείξεων του σηματοδότησαν την αρχή της σύγχρονης **θεωρίας των αριθμών**. Και αυτά μόνο για



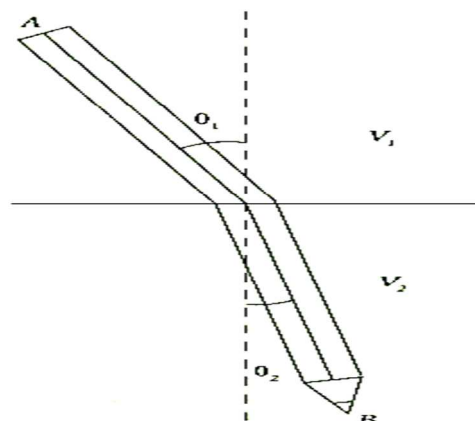
να αναφέρουμε μερικά παραδείγματα. Τέλος, ως μαθηματικός δεν υπήρχε καμία αμφιβολία ότι ο Fermat εκτόπιζε πραγματικά τον Descartes. Ακόμα και έτσι ο Fermat προσπάθησε να κατευνάσει την κατάσταση και με λεπτή αίσθηση του χιούμορ, σχετικά με ένα λάθος που είχε παρατηρήσει στο *La Geometrie*, είπε ότι θαύμαζε τόσο την ιδιοφυία του Descartes, ώστε ακόμα και όταν έκανε λάθη, η εργασία του ήταν πιο πολύτιμη από άλλων που δεν διέπρατταν κανένα.

11. Η θεωρία της διάθλασης

Αναφορικά με τη θεωρία της διάθλασης, η ιστορία είχε επίσης τη συνέχεια της. Μετά το θάνατο του Descartes, ένας από τους μαθητές του θέλησε να ετοιμάσει μια δημοσίευση με όλη την αλληλογραφία του. Ζήτησε τη συνεργασία του Fermat για να συλλέξει τα γράμματα που είχαν ανταλλάξει οι δυο τους. Αυτό ώθησε τον Fermat να επανεξετάσει την εργασία του για τη διάθλαση και μη μένοντας απόλυτα ικανοποιημένος με τα επιχειρήματα του μελέτησε και πάλι αυτό το θέμα. Τότε ήταν που όρισε την αρχή σύμφωνα με την οποία το φως ακολουθεί τις πορείες ελάχιστου χρόνου, γνωστή ως **αρχή του Fermat**, δημοσιεύθηκε στο *Analyse pour les réfractions et Synthese pour les refractions* (Ανάλυση περί των διαθλάσεων και σύνθεση περί των διαθλάσεων), που χρονολογείται περίπου στο 1660 και από αυτή δίνεται μια μαθηματική εξήγηση του νόμου του Snell. Πρόκειται για άλλο ένα παράδειγμα της επιμονής του Fermat για την επίλυση των ζητημάτων που έθετε. Δεν τον πείραζε να επιστρέφει ξανά και ξανά για να συνεισφέρει νέα στοιχεία. Την ίδια επιμονή περίμενε από τους συγχρόνους του για να λύνουν τις προκλήσεις που έθεταν μεταξύ τους.

12. Νόμος του Snell

Όταν βάζουμε ένα ραβδί στο νερό δίνει την εντύπωση ότι είναι σπασμένο. Η κλίση του μέσα στο νερό φαίνεται διαφορετική από αυτήν που έχει έξω. Αυτό το οπτικό φαινόμενο, που ονομάζεται **διάθλαση**, οφείλεται στο ότι η ταχύτητα του φωτός αλλάζει ανάλογα με την πυκνότητα του μέσου που διασχίζει. Ο αέρας είναι λιγότερο πυκνός από το νερό και η ταχύτητα του φωτός είναι μεγαλύτερη στον αέρα παρά στο νερό επειδή συναντά μικρότερη δυσκολία στο πέρασμά του. Ο Snell ανακάλυψε έναν τύπο, γνωστό ως νόμο του Snell ο οποίος σχετίζει την ταχύτητα του φωτός στα δύο μέσα, και τις γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης $\sin \theta_1 / V_1 = \sin \theta_2 / V_2$. Η αρχή του Fermat δίνει μια μαθηματική εξήγηση για αυτό το φαινόμενο. Σύμφωνα με αυτή την αρχή το φως ακολουθεί τις πορείες ελάχιστου χρόνου. Έστω όπως φαίνεται στο διπλανό γράφημα, ότι ένα πουλί ήθελε να πάει από το σημείο A στην άκρη του ραβδιού που βγαίνει έξω από το νερό, στο σημείο B στην άκρη του ραβδιού που είναι βυθισμένο. Έστω ότι στον αέρα πετά με ταχύτητα V_1 και στο νερό βουτάει με ταχύτητα V_2 . Ο Fermat απέδειξε ότι ο γρηγορότερος τρόπος για να πάει από το A στο B δεν ήταν η ευθεία γραμμή, αλλά η γραμμή που ακολουθούσε η κλίση του ραβδιού. Συνεπώς, το πουλί θα έπρεπε να ακολουθήσει τη γραμμή του ραβδιού για να φτάσει στο B το συντομότερο δυνατό.



13. Η γέννηση του τελευταίου θεωρήματος

Είναι αδύνατο ένας κύβος να είναι το άθροισμα δύο κύβων, μια τέταρτη δύναμη να είναι το άθροισμα δύο τετάρτων δυνάμεων, ή γενικά οποιοσδήποτε αριθμός που είναι μια δύναμη μεγαλύτερη από δύο να είναι το άθροισμα δύο δυνάμεων όπως αυτές. Ανακάλυψα μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη την οποία το περιθώριο αυτό είναι πολύ μικρό για να χωρέσει.

Και μια μέρα έπεσε στα χέρια του Fermat ένα αντίγραφο των *Αριθμητικών* του Διόφαντου. Καθώς διάβαζε αυτό το βιβλίο ζωγραφίζονταν στο μυαλό του μαθηματικά τοπία εκπληκτικής ομορφιάς, ενώ ταυτόχρονα επινοούσε μερικά από τα πιο διαβολικά προβλήματα που ο Fermat έθεσε στη μαθηματική κοινότητα. Ανάμεσα τους και το περίφημο τελευταίο θεώρημα, από όλες τις προκλήσεις του, είναι με διαφορά αυτή που άργησε περισσότερο να επιλυθεί. Ο Fermat το έγραψε στο περιθώριο της σελίδας με το πρόβλημα 8 του 2^{ου} τόμου. Οι αναφορές για το αίνιγμα του Fermat στη θεωρία των αριθμών ανάγονται στην αλεξανδρινή εποχή. Από τη μία πλευρά, είναι τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, που χρονολογούνται περίπου από τον 2^ο αιώνα π.Χ. και από την άλλη, τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου, τα οποία είναι περίπου πέντε ή έξι αιώνες αργότερα. Με βάση αυτά τα δύο βιβλία οικοδομήθηκε για περίπου 1.500 χρόνια πρακτικά όλη η μαθηματική έρευνα στον κόσμο της Μεσογείου και της Μέσης Ανατολής. Δε γίνεται όλες οι πάπιες μας να είναι κύκνοι.

Έτσι αφού έχουμε εμφανίσει τον Descartes ως έναν από τους κορυφαίους μαθηματικούς όλων των εποχών, πρέπει να δικαιολογήσουμε τον ισχυρισμό, που συχνά λέγεται και σπάνια αμφισβητείται, ότι ο πιο μεγάλος μαθηματικός του 17^{ου} αιώνα ήταν ένας σύγχρονος του Descartes, ο Fermat (1601-1665). Αυτό βέβαια αφήνει τον Newton (1642-1727) έξω από τον χορό. Μπορεί όμως να υποστηριχθεί ότι ο Fermat ήταν τουλάχιστον ισάξιος του Νευτώνα ως καθαρός μαθηματικός και όπως και να'χει, το ένα τρίτο της ζωής του Newton κύλησε τον 18^ο αιώνα ενώ ο Fermat έζησε σε όλη του τη ζωή μέσα στον 17^ο αιώνα. Ο Newton φαίνεται να θεωρούσε τα μαθηματικά του κυρίως ως ένα εργαλείο για την επιστημονική εξερεύνηση δίνοντας κατεξοχήν βάρος στην τελευταία. Από την άλλη, ο Fermat ήταν περισσότερο στραμμένος στα καθαρά μαθηματικά, αν και έκανε επίσης αξιόλογα πράγματα σε εφαρμογές των μαθηματικών στην επιστήμη, ιδιαίτερα στην οπτική. Τα μαθηματικά μόλις είχαν περάσει στην μοντέρνα τους φάση με τη δημοσίευση από τον Descartes της αναλυτικής γεωμετρίας το 1637 και πρόκειται για πολλά χρόνια ακόμη να έχουν τόσο πρωί την έκταση, ώστε ένας προικισμένος άνθρωπος θα μπορούσε να προσλάβει βάση μας αξιόλογα αποτελέσματα και στις δύο κατευθύνσεις, την καθαρή και την εφαρμοσμένη. Ως καθαρός μαθηματικός, ο Newton έφτασε στην κορυφή με την επινόηση του λογισμού, κάτι που έγινε ανεξαρτηता και από τον Leibniz.

Ο Fermat συνέλαβε και εφάρμοσε την βασική ιδέα του διαφορικού λογισμού 13 χρόνια πριν από τη γέννηση του Newton και 17 πριν από εκείνη του Leibniz. Αν και δεν ανηγαγε την μέθοδο του, όπως ο Leibniz, σε ένα σύνολο πλέον κανόνων που ακόμη και ένας βλάκας μπορεί να εφαρμόσει σε εύκολα προβλήματα. Και όσον αφορά τους Descartes και Fermat, ο καθένας τους τελείως ανεξάρτητα από τον άλλο επινόησε την αναλυτική γεωμετρία. Αλληλολογραφούσαν πάνω στο αντικείμενο αυτό, γεγονός που δεν αναιρεί τον προηγούμενο ισχυρισμό. Το μεγαλύτερο όμως μέρος της προσπάθειας του Descartes επενδύθηκε σε διάφορες επιστημονικές έρευνες, στην επεξεργασία της φιλοσοφίας του και στην εξωφρενική **θεωρία των στροβίλων** του ηλιακού συστήματος, η οποία επί μακρόν υπήρξε ένας σοβαρός αντίπαλος, ακόμη και στην Αγγλία, της όμορφης στην απλότητα της, μη μεταφυσικής νευτώνειας θεωρίας της παγκόσμιας βαρυτητας. Φαίνεται πως ο Fermat

δεν είχε ποτέ ελκυσθεί, όπως συνέβαινε με τον Descartes και τον Pascal, από την απατηλή γοητεία της φιλοσοφησης γύρω από τον Θεό, τον άνθρωπο και το σύμπαν ως ένα όλο· έτσι, αφού έπαιξε τον ρόλο του στο λογισμό και στην αναλυτική γεωμετρία και έχοντας ζήσει μία ήρεμη ζωή γεμάτη συνεχή σκληρή δουλειά για να κερδίσει τα προς το ζην, ήταν ακόμη ελεύθερος να αφιερώσει τη διάθεσιμη ενέργεια του στην αγαπημένη του ενασχόληση, στα καθαρά μαθηματικά, και να επιτύχει το μεγαλύτερο του έργο, τη θεμελίωση της θεωρίας των αριθμών, χάριν της οποίας πέρασε στην αιωνιότητα. Θα δούμε σε λίγο ότι ο Fermat μοιράστηκε με τον Pascal την δημιουργία της μαθηματικής θεωρίας των πιθανοτήτων. Αν όλα αυτά τα πρώτης γραμμής επιτεύγματα δεν είναι αρκετά για να τον θέσουν επικεφαλής των συγχρόνων του, μπορούμε να ρωτήσουμε τότε ποιος έκανε περισσότερα από ότι αυτός.

Ο Fermat ήταν γεννημένος πρωτοουργός. Ήταν επίσης, με την αυστηρότερη έννοια της λέξης, στον βαθμό που αναφερόμαστε στην επιστήμη και στα μαθηματικά του, ένας ερασιτέχνης. Αναμφίβολα πρόκειται για έναν από τους επιφανέστερους ερασιτέχνες στην ιστορία της επιστήμης, αν όχι για τον καθεαυτό κορυφαίο. Η ζωή του ήταν ήσυχη, γεμάτη δουλειά και χωρίς μεγάλα γεγονότα, όμως πέτυχε πάρα πολλά σε αυτήν. Θα αναφερθούμε επι τροχάδην στα ουσιώδη γεγονότα της ειρηνικής του καριέρας. Τα πρώτα του μαθήματα τα έκανε στο σπίτι στη γενέτειρά του· τις κατοπινές του σπουδές, προετοιμαζόμενος να ακολουθήσει τον δικαστικό κλάδο, τις συνέχισε στην Τουλούζη. Καθώς έζησε όλη του τη ζωή με ησυχία και μετριοπάθειά, αποφεύγοντας τις άσκοπες διενέξεις και ούτε είχε μία αφοσιωμένη αδερφή σαν την Gilberte, την αδελφή του Pascal, για να καταγράψει τα παιδικά του επιτεύγματα χάριν των επερχόμενων γενεών, λίγα πράγματα έχουν διασωθεί σχετικά με τα μαθητικά του χρόνια. Το ότι πρέπει να τα πήγαινε περίφημα, γίνεται φανερό από τα όσα κατάφερε στην ωριμότητα του· κανένας χωρίς γερά θεμέλια δε θα μπορούσε να γίνει τόσο καλός κλασικός φιλόλογος όπως έγινε ο Fermat.

Η θαυμάσια εργασία του στην θεωρία των αριθμών και γενικά στα μαθηματικά δε μπορεί να αποδοθεί σε σχολικές επιδράσεις, διότι τα πεδία όπου έκανε τη σημαντικότερη εργασία του δεν τα είχαν καν διανοηθεί τον καιρό που ήταν μαθητής και μόλις κάποιες νύξεις θα μπορούσαν να είχαν γίνει για αυτά στη διάρκεια των σπουδών του. Τα μόνα γεγονότα άξια μνείας στη ζωή του είναι η τοποθέτηση του στην Τουλούζη, στα 30 του χρόνια (**14.05.1631**), ως επιτρόπου αιτήσεων· ο γάμος του την 1 Ιουνίου του ίδιου χρόνου με την Louise de Long, ξαδέλφη της μητέρας του, που του έδωσε τρεις γιους, ένας από τους οποίους (ο Clement Samuel) έγινε ο εκτελεστής της επιστημονικής διαθήκης του πατέρα του, και δύο κόρες που έγιναν μοναχές· η προαγωγή του το **1648** στο βασιλικό συμβούλιο του τοπικού κοινοβουλίου της Τουλούζης, μία θέση που την κράτησε με αξιοπρέπεια, ακεραιότητα και μεγάλη ικανότητα για 17 χρόνια, όλη η επαγγελματική ζωή 34 χρόνων πήγε στην γεμάτη απαιτήσεις υπηρεσία στο κράτος· και τέλος, ο θάνατος του στην Castres **12.01.1665**, στα 65 του χρόνια, δύο μέρες αφού είχε διεκπεραίωση μία υπόθεση στην ίδια πόλη. Και όμως, αυτός ο έντιμος, μετριοπαθής, ακριβοδίκαιος άνθρωπος με την ήσυχη ζωή, έχει μία από τις ομορφότερες ιστορίες στην ιστορία των μαθηματικών.

Το έργο *Ιστορία* του Πρίγκιπα των ερασιτεχνών μαθηματικών άσκησε μία ακατανίκητη βοήθεια στους ερασιτέχνες της μαθηματικής επιστήμης σε όλες τις πολιτισμένες χώρες κατά τους τελευταίους τρεις αιώνες. Η θεωρία των αριθμών όπως ονομάζεται, είναι πιθανώς το μόνο πεδίο των μαθηματικών από το οποίο ένας ταλαντούχος ερασιτέχνης μπορεί να ελπίζει να βγάλει κάτι ενδιαφέρον. Θα ρίξουμε μία ματιά πρώτα στις άλλες του συνεισφορές, αφού όμως αναφέρουμε την πάροδο την περίεργη πολυμάθεια του στις ανθρωπιστικές επιστήμες. Η γνώση των βασικών ευρωπαϊκών γλωσσών και φιλολογιών της ηπειρωτικής Ευρώπης ήταν πλατιά και

ακριβής, ενώ η ελληνική και λατινική φιλολογία του είναι υπόχρεες για μερικές σημαντικές διορθώσεις. Στη σύνθεση στίχων στα λατινικά, γαλλικά και ισπανικά, ένα από τα κατορθώματα των αριστοκρατών της εποχής του, έδειχνε μεγάλη δεξιότητα και λεπτό γούστο. Θα καταλάβουμε την ομαλή του ζωή, αυτήν ενός λόγιου, αν τον σκιαγραφήσουμε ως έναν άνθρωπο προσηνή, όχι μυγιάγγιχτο σε ζητήματα κριτικής (όπως έγινε ο Newton στο στερνά του), χωρίς αλαζονεία με κάποια πάντως ματαιοδοξία, την οποία ο Descartes, το αντίθετο του από κάθε άποψη, την χαρακτήρισε λέγοντας «ο κύριος Fermat είναι ένας Γασκώνας, ενώ εγώ δεν είμαι».

Ο υπαινιγμός για το Γασκώνας είναι πιθανό να αναφέρεται σε ένα αξιαγάπητο καυχησιάρη τύπο, τον οποίο μερικοί Γάλλοι συγγραφείς (για παράδειγμα, ο Rostand στον *Cyrano de Bergerac*, πράξη 2, σκηνή 7) Αποδίδουν στους ήρωες τους από την Γασκωνία. Μπορεί να υπάρχει κάποια δόση ματαιοδοξίας στις επιστολές του Fermat, αλλά είναι πάντα μάλλον αφελής και δεν προκαλεί· δεν είναι μάλιστα τίποτα μπροστά σε αυτό που δικαιολογημένα θα μπορούσε να πιστέψει για τη δουλειά του, ακόμη και αν τα μυαλά του είχαν πάρει αέρα. Και όσον αφορά τον Descartes, ας μην ξεχνάμε ότι δε θα μπορούσε να χαρακτηριστεί εντελώς αμερόληπτος κριτής. Θα δούμε σε λίγο ότι το δικό του στρατιωτικό πείσμα των υποχρεώσεων να έρθει δεύτερος και καταϊδρωμένος στον παρατεταμένο ανταγωνισμό του με τον «Γασκώνα» πάνω στα εξαιρετικά σημαντικό ζήτημα των εφαπτομένων. Λαμβάνοντας υπόψιν την απαιτητική φύση των επισήμων καθηκόντων του Fermat και την ποσότητα των μαθηματικών πρώτου μεγέθους που παρήγαγε, ορισμένοι προβληματιζόταν για το πως βρήκε το χρόνο για όλα αυτά. Ένας Γάλλος κριτικός υποδεικνύει μία πιθανή λύση: η εργασία του ως σύμβολου του βασιλιά, τον βοήθησε μάλλον πάρω τον εμπόδιζε στις διανοητικές του δραστηριότητες. Αντίθετα με άλλους δημόσιους λειτουργούς, στο στρατό για παράδειγμα, οι κοινοβουλευτικοί σύμβουλοι αναμένονταν να κρατούν τους εαυτούς τους σε απόσταση από τους συμπολίτες τους και να απέχουν από αχρείαστες κοινωνικές δραστηριότητες, από τον φόβο μήπως δωροδοκηθούν ή και κατά άλλο τρόπο διαφθαρούν κατά την απομάκρυνση από το γραφείο τους. Έτσι, ο Fermat είχε άφθονο ελεύθερο χρόνο.

Εκθέτουμε τώρα εν συντομία τον ρόλο του Fermat στην εξέλιξη του λογισμού. Ένα γεωμετρικό ισοδύναμο προς το θεμελιώδες πρόβλημα του διαφορικού λογισμού είναι η χάραξη ευθείας γραμμής εφαπτομένης σε δοθέν, ανοιχτό, συνεχές τόξο καμπύλης σε κάποιο δοθέν σημείο του. Μία αρκετά ικανοποιητική περιγραφή του τι σημαίνει εδώ «συνεχές», είναι «ομαλό, χωρίς διακοπές ή ξαφνικά άλματα». Για να δώσουμε έναν ακριβή μαθηματικό ορισμό, θα χρειαζόμασταν σελίδες ορισμών και λεπτών διακρίσεων, οι οποίες σίγουρα θα είχαν καταπλήξει και γεμίσει απορία τους επινοητές του λογισμού, συμπεριλαμβανομένων των Newton και Leibniz. Και μαντεύουμε πως, αν όλες αυτές οι λεπτότητες που οι σύγχρονοι σπουδαστές απαιτούν είχαν παρουσιαστεί στους πρώτους λόγους, ο λογισμός δεν θα είχε επινοηθεί.

Οι δημιουργοί του λογισμού συμπεριλαμβανομένου του Fermat, βασίστηκαν στη γεωμετρική και φυσική (κυρίως κινητική και δυναμική) διαίσθηση. Για να προχωρήσουν. Κοίταξαν σε ότι στην φαντασία τους περνούσε για γράφημα μίας «συνεχούς» καμπύλης, απεικόνισαν την διαδικασία χάραξης μίας ευθείας γραμμής εφαπτομένης στην καμπύλη σε κάποιο σημείο P με το να πάρουν ένα άλλο σημείο Q επίσης πάνω στην καμπύλη, να σχηματίσουν την ευθεία PQ που ενώνει τα P και Q και κατόπιν, με τη φαντασία τους, να αφήσουν το σημείο Q να γλιστρήσει κατά μήκος του τόξου της καμπύλης, μέχρι που να συμπίσει με το P, οπότε η χορδή PQ, στην οριακή θέση που μόλις περιγραψαμε, έγινε η εφαπτομένη PP στην καμπύλη στο σημείο P, αυτό ακριβώς που ζητούσαν.

Το επόμενο βήμα ήταν να μεταφράσουν όλα αυτά σε αλγεβρική ή αναλυτική

γλώσσα. Γνωρίζοντας τις συντεταγμένες x, y του σημείου P στο γράφημα και εκείνες, έστω $x+a, y+b$, του Q πριν αρχίσει να γλιστρά κατά μήκος της καμπύλης για να συμπίσει με το P , έλεγξαν το γράφημα και είδαν ότι η κλίση της χορδής PQ ήταν ίση με b/a , προφανώς ένα μέτρο του «απότομου» της χορδής σε σχέση με τον άξονα των x (τη γραμμή κατά μήκος της οποίας μετρώνται οι x αποστάσεις). Αυτό το «απότομο» είναι ακριβώς αυτό που εννοείτε με τον όρο κλίση. Έτσι, γινόταν φανερό ότι η απαιτούμενη κλίση της εφαπτομένης στο P (μετα από το γλιστρημα του Q , ώστε να συμπίσει με το P) θα ήταν η οριακή τιμή του b/a καθώς τόσο το b όσο και το a πλησιάζουν στην τιμή 0 ταυτόχρονα· διότι οι συντεταγμένες $x+a, y+b$ του Q , τελικά γίνονται οι συντεταγμένες x, y δηλαδή του P . Αυτή η οριακή τιμή είναι η απαιτούμενη κλίση. Έχοντας την κλίση και το σημείο P μπορούσαν να χαράξουν την εφαπτόμενη.

Δεν ήταν αυτή ακριβώς η διαδικασία με την οποία ο Fermat έφερνε εφαπτόμενες, όμως ο δικός του τρόπος ήταν, υπό ευρεία έννοια, ισοδύναμος με ότι έχει περιγραφεί. Γιατί θα έπρεπε όλα αυτά να αξίζουν τη σοβαρή προσοχή ενός λογικού ή πρακτικού ανθρώπου; Είναι μία μεγάλη ιστορία, μόνο μία νύξη της οποίας χρειάζεται να γίνει εδώ. Μία από τις θεμελιώδεις ιδέες στη δυναμική είναι εκείνη της ταχύτητας ενός κινούμενου σωματιδίου. Αν παραστήσουμε γραφικά τη σχέση ανάμεσα στον αριθμό μονάδων αποστασης που καλύπτει το σωματίδιο και τον αριθμό μονάδων του χρόνου που απαιτούνται για την κάλυψη αυτής της απόστασης, παίρνουμε μία ευθεία ή καμπύλη γραμμή, η οποία απεικονίζει την κίνηση του σωματιδίου, ενώ το απότομο αυτής της γραμμής σε κάποιο σημείο της θα μας δώσει προφανώς την ταχύτητα του σωματιδίου τη στιγμή που αντιστοιχεί στο σημείο· όσο ταχύτερα κινείται το σωματίδιο, τόσο πιο απότομη θα είναι η κλίση της εφαπτομένης γραμμής. Αυτή η κλίση μετρά πραγματικά την ταχύτητα του σωματιδίου σε κάθε σημείο της διαδρομής του. Το πρόβλημα της ταχύτητας, όταν μεταφερθεί στη γεωμετρία, είναι ακριβώς εκείνο της εύρεσης της κλίσης της εφαπτομένης σε δοσμένο σημείο της καμπύλης. Υπάρχουν ανάλογα προβλήματα που αφορούν σε εφαπτόμενα επίπεδα επιφανειών (που επίσης έχουν ενδιαφέρουσες ερμηνείες από την άποψη της μηχανικής και της μαθηματικής φυσικής) και όλα αντιμετωπίζονται με τον διαφορικό λογισμό, του οποίου το θεμελιώδες πρόβλημα επιχειρήσαμε να περιγράψουμε όπως παρουσιάστηκε στον Fermat και στους διαδόχους του.

Μία άλλη χρήση αυτού του λογισμού μπορεί να υποδειχθεί από ότι έχει ήδη λεχθεί. Υποθέτουμε ότι κάποια ποσότητα y είναι συνάρτηση μίας άλλης t , πράγμα που συμβολίζουμε με $y = f(t)$ και που σημαίνει ότι, όταν ο t αντικατασταθεί από έναν συγκεκριμένο αριθμό, έστω το 10, έτσι ώστε να πάρουμε τον $f(10)$ (τιμή της f στο 10), μπορούμε να υπολογίσουμε από την **αλγεβρική έκφραση** της f που υποθέτουμε δεδομένη, την αντίστοιχη τιμή του y , εδώ $y = f(10)$. Για μεγαλύτερη σαφήνεια, έστω ότι η $f(t)$ είναι εκείνη η συγκεκριμένη **συνάρτηση** του t που δηλώνεται στην άλγεβρα με t^2 ή txt . Τότε όταν $t=10$ παίρνουμε $y = f(10)$, συνεπώς εδώ $y = 10^2 = 100$ για αυτή την τιμή του t , όταν $t = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$ και το ίδιο ισχύει για κάθε τιμή του t .

Όλα αυτά είναι οικεία σε εκείνον που δεν έχουν περάσει περισσότερα από 30 ή 40 χρόνια αφότου τελείωσε την βασική του εκπαίδευση, όμως μερικοί μπορεί να έχουν ξεχάσει τι έκαναν στην αριθμητική όταν ήταν παιδιά. Αλλά και ο πιο ξεχασιάρης θα βλέπει ότι θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε το γράφημα της $y = f(t)$

για κάθε συγκεκριμένη περίπτωση της f (όταν $f(t)$ είναι t^2 , το γράφημα είναι μία παραβολή σαν ανεστραμμένο τόξο). Φανταστείτε ότι έχει γίνει το γράφημα. Αν έχει **μέγιστα** (τα πιο ψηλά) ή **ελάχιστα** (τα πιο χαμηλά) σημεία, σημεία πιο ψηλά ή πιο χαμηλά από εκείνο που βρίσκονται σε άμεση γειτνίαση, παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη σε κάθε ένα από αυτά τα μέγιστα ή ελάχιστα είναι παράλληλη στον άξονα των t . Δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης σε ένα τέτοιο ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) της $f(t)$ που σχεδιάσαμε, είναι μηδέν. Έτσι, αν αναζητούσαμε τα ακρότατα μίας δεδομένης συνάρτησης $f(t)$, θα έπρεπε πάλι να λύσουμε το πρόβλημα της κλίσης για τη συγκεκριμένη καμπύλη $y = f(t)$ έχοντας βρει την κλίση για το γενικό σημείο t, y θα έπρεπε να εξισώσουμε με το μηδέν την αλγεβρική έκφραση αυτής της κλίσης για να βρούμε τις τιμές του t που αντιστοιχούν στα ακρότατα. Αυτό είναι ουσιαστικά που έκανε ο Fermat στη μέθοδο των μεγίστων και ελαχίστων που επινόησε στα 1628–1629, αλλά που έφερε ανεπίσημα στη δημοσιότητα μόνο μετά από 10 χρόνια, όταν έστειλε μία αναφορά για αυτήν στον Descartes μέσω του Mersenne.

Οι επιστημονικές εφαρμογές αυτού του απλού επινοήματος, δεόντως επεξεργασμένου φυσικά, για να αντιμετωπιστούν πολύ πιο πολύπλοκα προβλήματα από αυτά που μόλις περιγράψαμε, είναι αναρίθμητες και φτάνουν μακριά. Στη μηχανική, για παράδειγμα, όπως ανακάλυψε ο Lagrange, υπάρχει μία ορισμένη **συνάρτηση** των θέσεων (συντεταγμένων) και των ταχυτήτων των σωμάτων που εμπλέκονται σε ένα πρόβλημα, η οποία, όταν εξεταστεί κοντά σε ορισμένο ακρότατο, μας εφοδιάζει με τις **εξισώσεις κίνησης** του θεωρουμένου συστήματος, δηλαδή τις εξισώσεις που μας καθιστούν ικανούς να καθορίσουμε την κίνηση, δηλαδή να την περιγράψουμε πλήρως, σε κάθε δεδομένη στιγμή. Στη φυσική υπάρχουν πολλές ανάλογες συναρτήσεις, η καθεμία από τις οποίες συνοψίζει έναν εκτεταμένο κλάδο της μαθηματικής φυσικής, με την απλή απαίτηση η υπό συζήτηση συνάρτηση να έχει ακρότατο. Ο Hilbert το 1916 βρήκε μία τέτοια συνάρτηση για τη γενική σχετικότητα.

Ο Fermat δεν ξόδευε ανόητα τον χρόνο του όταν καταπιανόταν, στο περιθώριο της απαιτητικής δουλειάς του, με τα προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων. Ο ίδιος εφήρμοσε με όμορφο και εντυπωσιακό τρόπο τις αρχές του στην οπτική. Μπορεί να σημειωθεί ότι αυτή η συγκεκριμένη ανακάλυψη αποδείχτηκε το σπέρμα της νεότερης κβαντικής θεωρίας, στη μαθηματική της διάσταση, εκείνη της **κυματομηχανικής**, επεξεργασμένες από το 1926. Ο Fermat Ανακάλυψε αυτό που συνήθως ονομάζεται η **αρχή του ελάχιστου χρόνου**. Θα ήταν ακριβέστερο να λέγαμε ακρότατου (ελαχιστου ή μεγιστου) αντί του ελάχιστου. Σύμφωνα με αυτήν την αρχή, αν μία ακτίνα φωτός περάσει από ένα σημείο A σε ένα άλλο σημείο B, ανακλώμενη και διαθλώμενη (**διαθλώμενη**, δηλαδή κυρτούμενη, όπως συμβαίνει όταν περνά από τον αέρα στο νερό ή μέσα από ζελέ μεταβλητής πυκνότητας) καθ' οποιονδήποτε τρόπο, κατά τη μετάβαση η διαδρομή της μπορεί να υπολογιστεί, όλες οι συστροφές και οι καμπυλώσεις της οι οφειλόμενες στην διάθλαση και όλες οι κινήσεις της μπρος και πίσω οι οφειλόμενες στις ανακλάσεις, με βάση τη μοναδική απαίτηση πως ο χρόνος για να φθάσει από το A στο B πρέπει να είναι ένα ακρότατο.

Από αυτήν την αρχή ο Fermat συνήγαγε τους γνωστούς νόμους της ανακλασης και διάθλασης: η **γωνία πρόσπτωσης** (στην ανάκλαση) **ισούται με την γωνία ανάκλασης**, το **ημίτονο της γωνίας πρόσπτωσης** (στην διάθλαση) **ισούται με ένα σταθερό πολλαπλάσιο του ημιτόνου της γωνίας διάθλασης κατά το πέρασμα από ένα μέσο σε ένα άλλο**. Το ζήτημα της αναλυτικής γεωμετρίας έχει ήδη αναφερθεί, ο Fermat υπήρξε ο πρώτος που την εφήρμοσε στο χώρο των τριών

διαστάσεων. Ο Descartes ήταν ευχαριστημένος με τις δύο διαστάσεις. Η επέκταση, δεν θα ήταν προφανής ακόμη και σε κάποιο προικισμένο άτομο που ξεκινούσε από το σημείο όπου είχε φτάσει ο Descartes. Μπορεί να πει κανείς ότι υπάρχει συνήθως μεγαλύτερη δυσκολία στο να βρεθεί μία γνήσια επέκταση ενός συγκεκριμένου είδους γεωμετρίας από τις δύο στις τρεις διαστάσεις, απ'ό,τι στο πέρασμα από τις τρεις στις τέσσερις ή στις πέντε..., ή στις n . Ο Fermat διόρθωσε τον Descartes σε ένα ουσιώδες σημείο (εκείνο της ταξινόμησης των καμπυλών, βάσει του βαθμού τους). Φαίνεται ολωσδιόλου φυσικό ότι ο κάπως εύθικτός Descartes θα φιλονικούσε γι αυτό με τον ατάραχο "Γασκωνο" Fermat. Ο στρατιώτης ήταν συχνά οξύς στη διαφωνία του με τη μέθοδο των εφαπτόμενων του Fermat, ο αμετακίνητος νομομαθής ήταν πάντα ανεπηρέαστα ευγενικός. Όπως συμβαίνει συνήθως, εκείνος που διατήρησε την ψυχραιμία του τα κατάφερε καλύτερα στην διαμάχη. Όμως ο Fermat αξιζε τη νίκη, όχι διότι ήταν πιο επιδέξιος συζητητής, αλλά επειδή είχε το δίκιο με το μέρος του.

Παραεμπιπτόντως, θα ήταν εύλογο να υποθέταμε ότι ο Newton είχε ακούσει για τη χρησιμοποίηση του λογισμού από τον Fermat και ότι θα είχε μιλήσει για αυτό. Ωστόσο, μέχρι το 1934 καμιά μαρτυρία περί αυτού δεν είχε δημοσιευθεί, όμως εκείνο τον χρόνο ο καθηγητής L.T. More γράφοντας τη βιογραφία του Newton έφερε στην επιφάνεια ένα γράμμα που είχε περάσει μέχρι τότε απαρατήρητο, στο οποίο ο **Newton λέει ρητά ότι την υπόδειξη για την μέθοδο του διαφορικού λογισμού την πήρα από τη μέθοδο του Fermat για την χάραξη εφαπτόμενων**. Θα μιλήσουμε τώρα για την μεγαλύτερη εργασία του Fermat, αυτήν που είναι κατανοητή από όλους, μαθηματικούς και ερασιτέχνες. Πρόκειται για την αποκαλούμενη **θεωρία των αριθμών ή ανώτερη αριθμητική**, ή τέλος, για να χρησιμοποιήσουμε το μή σχολαστικό όνομα που ήταν αρκετά καλό για τον Gauss, **αριθμητική**. Οι Έλληνες είχαν διαιρέσει το άτακτο υλικό που εμείς στα σχολικά εγχειρίδια αποδίδουμε με τον όρο «αριθμητική», σε δύο διακεκριμένες κατηγορίες, τη **λογιστική** και την **αριθμητική**, η πρώτη από τις οποίες είχε να κάνει με πρακτικές εφαρμογές του υπολογιστικού συλλογισμού στο εμπόριο και στην καθημερινή ζωή γενικά, ενώ η δεύτερη, αριθμητική με την έννοια των Fermat και Gauss, προσπαθούσε να ανακαλύψει τις ιδιότητες των αριθμών ως τέτοιων.

Η αριθμητική, στα τελικά ο ίσως δυσκολότερα προβλήματα της, εξετάζει τις αμοιβές σχέσεις των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, 4, 5,..... τις οποίες ψιθυρίζουμε σχεδόν αμέσως με το που αρχίζουμε να μιλάμε. Στην προσπάθειά τους να ρίξουν φως σε αυτές τις σχέσεις, οι μαθηματικοί έχουν οδηγηθεί στην επινόηση λεπτοφυών και δυσνοητών θεωριών στην άλγεβρα και στην ανάλυση, θεωριών με σωρεία από τεχνικότητες που συσκοτίζουν το αρχικά προβλήματα, εκείνα που αφορούν τους 1, 2, 3, των οποίων όμως την πραγματική δικαίωση θα αποτελέσει η λύση αυτών των προβλημάτων. Στο μεταξύ, τα δευτερεύοντα προϊόντα αυτών των φαινομενικά άχρηστων ερευνών προσφέρουν πλούσια αμοιβή σε εκείνους που τα αναλαμβάνουν, με το να υποδεικνύουν ένα πλήθος από πανίσχυρες μεθόδους που εφαρμόζονται σε άλλους χώρους των μαθηματικών οι οποίοι βρίσκονται σε άμεση σχέση με το φυσικό σύμπαν. Για να δώσουμε ένα μόνο παράδειγμα, η τελευταία φάση της άλγεβρας, αυτή που καλλιεργείται σήμερα από επαγγελματίες αλγεβριστές και ρίχνει τελείως νέο φως στη θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων, έλκει την καταγωγή της κατ' ευθείαν από τις προσπάθειες να απαντηθεί το απλό **τελευταίο θεώρημα του Fermat**.

Αρχίζουμε με μία περίφημη πρόταση του Fermat πάνω στους πρώτους αριθμούς. Ένας θετικός πρώτος αριθμός, η συντομότερα ένας πρώτος, είναι κάθε αριθμός μεγαλύτερος από το ένα ο οποίος έχει διαιρέτες (χωρίς υπόλοιπο) μόνο το 1 και τον εαυτό του, για παράδειγμα οι 2, 3, 5, 7, 13, 17, είναι πρώτοι και το ίδιο συμβαίνει με τους 257, 65537. Όμως ο 4294967297 δεν είναι πρώτος διότι έχει το

641 ως διαιρέτη και δεν είναι πρώτος και ο 18446744073709551617, διότι διαιρείται ακριβώς από τον 274177, οι 641 και 274177 είναι πρώτοι. Όταν λέμε στην αριθμητική ότι ένας αριθμός έχει διαιρέτη έναν άλλον αριθμό, ή ότι διαιρείται από έναν άλλο, εννοούμε ότι διαιρείται ακριβώς χωρίς να αφήνει υπόλοιπο. Έτσι, ο 14 διαιρείται από τον 7, όχι όμως από τον 15. Οι δύο μεγάλοι αριθμοί δόθηκαν πιο πάνω εσκεμμένο, για το λόγο που θα γίνει στο γνωστός λίγο παρακάτω. Για να ανακαλέσουμε έναν άλλο ορισμό, η n -οστη δύναμη δοθέντος αριθμό, έστω του N , είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των n παραγόντων, όλων ίδιων με N και γράφεται N^n δηλαδή $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ και $8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$.

Για λόγους ομοιομορφίας, το ίδιο το N μπορεί να γράφει ως N^1 . Ξανά, μία παγίδα όπως η 2^{3^5} σημαίνει ότι πρόκειται να υπολογίσουμε πρώτα το $3^5 = 243$ και εν συνεχεία να υψώσουμε το 2 σε αυτή τη δύναμη δηλαδή 2^{243} , το αποτέλεσμα έχει 74 ψηφία. Το επόμενο σημείο είναι μεγάλης σπουδαιότητας στη ζωή του Fermat και στην ιστορία των μαθηματικών. Έστω οι αριθμοί 3, 5, 17, 257, 65537. Όλοι ανήκουν σε μία «ακολουθία» συγκεκριμένου είδους, διότι όλοι παράγονται (από τον 1 και τον 2) με την ίδια απλή διαδικασία, η οποία φαίνεται από τις ισότητες

$$3 = 2 + 1$$

$$5 = 2^2 + 1$$

$$17 = 2^4 + 1$$

$$257 = 2^8 + 1$$

$$65537 = 2^{16} + 1$$

και αν θελήσουμε να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς, βλέπουμε ότι οι δύο μεγάλοι αριθμοί που δόθηκαν πιο πάνω είναι $2^{32} + 1$ και $2^{64} + 1$, επίσης αριθμοί της ακολουθίας. Έχουμε έτσι 7 αριθμούς που ανήκουν σε αυτή την ακολουθία και οι πρώτοι 5 από αυτούς τους αριθμούς είναι πρώτοι, όμως οι τελευταίοι δύο όχι.

Παρατηρώντας πώς συνετέθη η ακολουθία, σημειώνουμε τους εκθέτες (τους πάνω δεξιά αριθμούς που δηλώνουν ποιές δυνάμεις του 2 λαμβάνονται), συγκεκριμένα τους 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 και επισημαίνουμε ότι είναι (εκτός από τον πρώτο οποίες μπορεί να γραφεί 2^0 , όπως στην άλγεβρα, χαριν ομοιομορφίας),

$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$. Δηλαδή, η ακολουθία μας είναι $2^{2^n} + 1$ όπου το n διατρέχει τους φυσικούς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Δε χρειάζεται να σταματήσουμε στο $n=6$, $n=7, 8, 9, \dots$ μπορούμε να συνεχίσουμε την ακολουθία απεριόριστα, παίρνοντας όλο και πιο μεγάλους αριθμούς. Έστω ότι τώρα θέλουμε να βρούμε αν ένας συγκεκριμένος αριθμός αυτής της ακολουθίας είναι πρώτος. Αν και υπάρχουν πολλές συντομεύσεις ελέγχου και ολόκληρες κατηγορίες υποψηφίων διαιρετών μπορούν να απορριφθούν με απλή εξέταση και παρόλο που η μοντέρνα αριθμητική περιορίζει τα είδη υποψηφίων διαιρετών που χρειάζεται να ελεγχθούν, το πρόβλημά μας απαιτεί την ίδια περίπου εργασία που θα απαιτούσε η διαίρεση του δοθέντος αριθμού διαδοχικά με όλους τους πρώτους 2, 3, 5, 7, ... που είναι μικρότεροι από την τετραγωνική ρίζα του αριθμού. Αν κανένας από αυτούς δε διαιρεί τον αριθμό, τότε ο αριθμός είναι πρώτος. Δε χρειάζεται να πούμε ότι η ταλαιπωρία που συνεπάγεται ένας τέτοιος έλεγχος, ακόμη και αν χρησιμοποιήσουμε σύντομους δρόμους, θα λειτουργούσε απαγορευτικά ακόμη και για μία τόσο μικρή τιμή του n όπως το 100. (Ο αναγνώστης μπορεί να βεβαιωθεί προσπαθώντας να αντιμετωπίσει την περίπτωση $n=8$). Ο Fermat διατείνονταν και ήταν πεπεισμένος ότι όλοι οι αριθμοί της ακολουθίας είναι πρώτοι. Οι αριθμοί που ήδη εκτέθηκαν (οι αντιστοιχούντες στο $n=5, 6$) τον διαψεύδουν όπως έχουμε δει. Αυτό είναι το σημείο με ιστορικό

ενδιαφέρον που θέλουμε να τονίσουμε: ο **Fermat υπέθεσε λάθος, όμως δεν ισχυρίστηκε ότι είχε αποδείξει την υποθέση του**. Μερικά χρόνια αργότερα, εξέθεσε όντως με σκοτεινό τρόπο το τι είχε κάνει, έτσι που μερικοί κριτικοί οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι είχε αυτοαπατηθεί. Η σημασία αυτού του γεγονότος θα φανεί καθώς προχωρούμε. Ως ψυχολογικό περίεργο μπορεί να αναφερθεί πως ο Zerah Colburn, ο μικρός Αμερικανός με τις καταπληκτικές υπολογιστικές ικανότητες, όταν ρωτήθηκε αν αυτός ο έκτος αριθμός του Fermat (4294967297) ήταν πρώτος ή όχι, αποκρίθηκε μετά από σύντομο υπολογισμό με το μυαλό του, ότι δεν ήταν, καθώς είχε διαιρέτη τον 641. Ήταν ανίκανος να εξηγήσει τη διαδικασία με την οποία έφτασε στο σωστό συμπέρασμα. Πριν αφήσουμε τους **αριθμούς του Fermat** $2^{2^n} + 1$, θα ρίξουμε μία ματιά στην τελευταία δεκαετία του 18^{ου} αιώνα, όπου αυτοί οι μυστηριώδεις αριθμοί ήταν μερικώς υπεύθυνοι για ένα από τα δύο ή τρία σημαντικότερα συμβάντα σε όλη την μακρά ιστορία των μαθηματικών. Για κάποιο διάστημα ένας νεαρός στα 18 του ταλαντευόταν, σύμφωνα με την παράδοση, ανάμεσα στα μαθηματικά και στη φιλολογία, που και τα δύο διεκδικούσαν το ανυπέρβλητο ταλέντο του.

Ήταν εξ ίσου προικισμένος και για τα δύο. Αυτό που τον έκανε να αποφασίσει, ήταν μία όμορφη ανακάλυψη σχετικά με ένα απλό πρόβλημα στη στοιχειώδη γεωμετρία. Ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές έχει όλες τις πλευρές ίσες και το ίδιο συμβαίνει και με τις n γωνίες του. Οι αρχαίοι Έλληνες νωρίς ανακάλυψαν πως να κατασκευάζουν κανονικά πολύγωνα των 3, 4, 5, 6, 8, 10 και 15 πλευρών χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη και είναι εύκολη υπόθεση με τα ίδια όργανα να κατασκευασθεί από ένα κανονικό πολύγωνο με δεδομένο αριθμό πλευρών ένα άλλο κανονικό πολύγωνο με διπλάσιο αριθμό πλευρών. Το επόμενο βήμα θα ήταν να προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη κανονικά πολύγωνα με 7, 9, 11, 13,... πλευρές. Πολλοί προσπάθησαν, όμως απέτυχαν, επειδή τέτοιες κατασκευές είναι αδύνατες, μόνο που αυτοί δεν το ήξεραν. Μετά από ένα διάστημα μεγαλύτερο των 2200 χρονών, ο νεαρός μας που δεν ήξερε τι να επιλέξει, τα μαθηματικά ή τη φιλολογία, πραγματοποίησε το επόμενο βήμα, ένα μεγάλο βήμα, προς τα εμπρός.

Όπως έχει δηλωθεί, είναι αρκετό να θεωρήσουμε μόνο πολύγωνα με περιττό αριθμό πλευρών. Ο νέος άνδρας απέδειξε πως **η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός κανονικού πολυγώνου με περιττό αριθμό πλευρών είναι δυνατή ακριβώς τότε, όταν ο αριθμός είναι είτε ένας πρώτος αριθμός του Fermat (δηλαδή πρώτος της μορφής $2^{2^n} + 1$ είτε ένα γινόμενο ολως διαφορετικών μεταξύ των πρώτων αριθμών του Fermat**. Έτσι, η κατασκευή είναι δυνατή για κανονικά πολύγωνα με 3, 5 ή 15 πλευρές, όπως γνώριζαν οι Έλληνες, αλλά όχι για την περίπτωση που ο n ισούται με 7, 9, 11 ή 13, ενώ είναι επίσης δυνατή για $n = 17$ ή 257 ή 65537 για $n =$ με όποιον πρώτο Fermat συναντούμε μετά το 65537 στην ακολουθία 3, 5, 17, 257, 65537, ... αν υπάρχει τέτοιος, κανένας ακόμη (1936) δεν το γνωρίζει και η κατασκευή είναι επίσης δυνατή για $n = 3 \cdot 17$ ή $5 \cdot 257 \cdot 65537$ κλπ. Ήταν αυτή η ανακάλυψη, που δημοσιεύθηκε την 01.06.1796 αλλά πραγματοποιήθηκε στις 30.03.1796, η οποία έπεισε το νέο άνδρα να επιλέξει τα μαθηματικά και όχι τη φιλολογία. Το όνομα του ήταν **Gauss**. Σαν ανακάλυψη, διαφορετικού τύπου που έκανε ο Fermat σχετικά με αριθμούς, διατυπώνουμε αυτό που είναι γνωστό ως **θεώρημα του Fermat** (όχι το τελευταίο θεώρημά του). Αν n είναι κάποιος ακέραιος αριθμός και p ένας πρώτος αριθμός, τότε ο $n^p - n$ είναι διαιρετός διά του p . Για παράδειγμα, αν $p = 3$, $n = 5$ λαμβάνουμε $5^3 - 5 = 125 - 5 = 120 = 3 \cdot 40$. Για $n = 2, p = 11$ παίρνουμε $2^{11} - 2 = 2048 - 2 = 2046 = 11 \cdot 186$.

Είναι δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να πεις γιατί ορισμένα θεωρήματα στην

αριθμητική θεωρούνται σημαντικά, ενώ άλλα, ίσης δυσκολίας στην απόδειξη, βαπτίζονται τετριμμένα. Ένα κριτήριο, αλλά όχι απαραίτητα καθοριστικό, είναι αν το θεώρημα χρησιμοποιείται σε άλλες περιοχές των μαθηματικών. Ένα άλλο είναι ότι καλεί για περαιτέρω έρευνα στην αριθμητική ή στα μαθηματικά γενικότερα και ένα τρίτο ότι είναι από ορισμένη άποψη καθολικό. Το μόλις διατυπωθέν θεώρημα του Fermat ικανοποιεί όλες αυτές τις κάπως αυθαίρετες απαιτήσεις, είναι πολύτιμο σε διάφορα τμήματα των μαθηματικών, όπως η θεωρία των ομάδων, η οποία με τη σειρά της βρίσκεται στη ρίζα της θεωρίας των αλγεβρικών εξισώσεων· έχει σταθεί αιτία για πολύπλευρη έρευνα, της οποίας σπουδαίο παράδειγμα αποτελεί το αντικείμενο των πρωταρχικών ριζών, τέλος είναι καθολικό με την έννοια ότι διατυπώνει μία ιδιότητα όλων των πρώτων αριθμών, τέτοιες γενικές προτάσεις είναι εξαιρετικά δύσκολο να βρεις και πολύ λίγες είναι γνωστές.

Ως συνήθως, ο Fermat διατύπωσε το θεώρημα του σχετικά με το $n^p - n$ χωρίς απόδειξη. Η πρώτη απόδειξη δόθηκε από τον Leibniz σε ένα αχρονολογητο χειρόγραφο, αλλά φαίνεται ότι ήταν γνωστή μία απόδειξη πριν από το 1683. Ο αναγνώστης ίσως θελήσει να δοκιμάσει τις δυνάμεις του προσπαθώντας να μηχανευτεί μία απόδειξη. Αυτό που χρειάζεται είναι οι ακόλουθες προτάσεις που μπορούν να αποδειχθούν, μπορούμε όμως να τις θεωρήσουμε δεδομένες για το σκοπό μας: κάθε ακέραιος αριθμός μπορεί να γράφει με μοναδικό τρόπο, εκτός από αλλαγή σειράς των παραγόντων του, ως γινόμενο πρώτων αριθμών, αν ένας πρώτος διαιρεί το γινόμενο δύο ακεραίων αριθμών, τότε διαιρεί τουλάχιστον έναν από αυτούς.

Παράδειγμα ο $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, και ο 24 δε μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών με έναν ουσιαστικά διαφορετικό τρόπο, θεωρούμε $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$, $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$, $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ως ίδια, ο 7 διαιρεί το 42 και $42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$ και σε κάθε ένα από αυτά τα γινόμενα που δίνουν το 42, ο 7 διαιρεί έναν τουλάχιστον από τους πολλαπλασιαζόμενους αριθμούς, ξανά, ο 98 είναι διαιρετός δια του 7 και $98 = 7 \cdot 14$ όπου ο 7 διαιρεί τον 7 και τον 14, συνεπώς έναν τουλάχιστον από αυτούς. Εδώ φαίνεται να είναι η κατάλληλη στιγμή για να παραθέσουμε μερικές διάσημες παρατηρήσεις του Gauss που αφορούν στο αγαπημένο πεδίο ενδιαφερόντων του Fermat και στο δικό του. Η μετάφραση είναι του Ιρλανδού αριθμοθεωρητικού H.J.S. Smith (1826–1883), από την εισαγωγή του Gauss στη συλλογή μαθηματικών εργασιών του Eisenstein που δημοσιεύθηκε στα 1847. «*Η ανώτερη αριθμητική εμφανίζεται με ένα ανεξάντλητο απόθεμα από ενδιαφέρουσες αλήθειες, από αλήθειες επιπροσθέτως που δεν είναι απομονωμένες, αλλά παρουσιάζουν μία στενή εσωτερική σύνδεση έτσι που μεταξύ τους ανακαλύπτουμε, καθώς αυξάνουν οι γνώσεις μας, νέους και μερικές φορές τελείως απροσδόκητους δεσμούς. Μεγάλο μέρος των θεωριών της αναδίνει μία επιπρόσθετη γοητεία, λόγω της ιδιοτυπίας ότι σπουδαιές προτάσεις, με τη σφραγίδα της απλότητας πάνω τους, μπορούν συχνά να ανακαλυφθούν με επαγωγή και ωστόσο έχουν ένα τέτοιο βάθος που να μην μπορούμε να βρούμε την απόδειξη τους πριν από πολλές μάταιες απόπειρες· και ακόμη και τότε, όταν τα καταφέρουμε, είναι συχνά μέσα από κουραστικές και τεχνικές διαδικασίες, ενώ οι απλούστερες μέθοδοι είναι επί μακρόν κρυμμένες*».

Ως μία από αυτές τις ενδιαφέρουσες αλήθειες που αναφέρει ο Gauss, θεωρείται συνήθως το πιο όμορφο (όχι όμως και το πιο σημαντικό) πράγμα που ο Fermat ανακάλυψε γύρω από τους αριθμούς: **κάθε πρώτος αριθμός της μορφής $4n+1$ είναι άθροισμα δύο τετραγώνων κατά έναν και μόνο τρόπο**. Εύκολα αποδεικνύεται ότι **κανένας αριθμός της μορφής $4n-1$ δεν είναι άθροισμα δύο τετράγωνων**. Καθώς όλοι οι πρώτοι οι μεγαλύτεροι του 2 φαίνεται αμέσως πως είναι της μίας ή της άλλης μορφής, δε χρειάζεται να προσθέσουμε τίποτε άλλο. Για παράδειγμα, όταν ο 37 διαιρεθεί με τον 4 αφήνει υπόλοιπο 1, έτσι ο 37 πρέπει να

είναι άθροισμα τετράγωνών δύο φυσικών αριθμών. Κάνοντας δοκιμές (υπάρχουν καλύτεροι τρόποι) βρίσκουμε πραγματικά ότι $37 = 1 + 36 = 1^2 + 6^2$ και πως δεν υπάρχουν όλα τετράγωνα, τέτοια ώστε $37 = x^2 + y^2$. Για τον πρώτο 101 είναι $1^2 + 10^2$ για τον 41 έχω $4^2 + 5^2$. Από την άλλη, ο $19 = 4 \cdot 5 - 1$, δεν είναι άθροισμα δύο τετραγώνων. Όπως σχεδόν για όλη του τη δουλειά στην αριθμητική, ο Fermat δεν άφησε απόδειξη αυτού του θεωρήματος. Πρώτα αποδείχτηκε από τον μεγάλο Euler το 1749, αφού είχε παλέψει 7 χρόνια να βρει μία απόδειξη. Όμως ο Fermat περιγράφει την ιδιοφυή μέθοδο που επινόησε, με την οποία απέδειξε αυτό και μερικά άλλα από τα υπέροχα του αποτελέσματα. Καλείται **άπειρη κάθοδος**. Ο τρόπος που την περιγραφει είναι και συνοπτικός και καθαρός και έτσι μεταφράζουμε ελεύθερα από το γράμμα του, τον Αύγουστο του 1659, στον Carcavi:

«Για πολύ καιρό, δεν ήμουν σε θέση να εφαρμόσω τη μέθοδο μου σε καταφατικές προτάσεις, διότι ο ελιγμός και τα τεχνάσματα για να τις καταφέρεις είναι πολύ πιο δύσκολα από εκείνα που απαιτούνται στην περίπτωση των αρνητικών προτάσεων. Έτσι, όταν έπρεπε να αποδείξω ότι κάθε πρώτος αριθμός, ο οποίος υπερβαίνει κάποιο πολλαπλάσιο του 4 κατά 1, συντίθεται από δύο τετράγωνα, βασανίστηκα πραγματικά.

Στο τέλος όμως, μία σκέψη που επανέλαβα πολλές φορές με φώτισε και τώρα οι καταφατικές προτάσεις υποτάσσονται στη μέθοδο μου, με τη βοήθεια ορισμένων νέων αρχών που πρέπει απαραίτητα να συνδυαστούν με αυτήν. Η συλλογιστική μου πορεία σε καταφατικές προτάσεις έχει ως εξής: αν ένας αυθαίρετα επιλεγμένος πρώτος της μορφής $4n+1$ δεν είναι άθροισμα δύο τετράγωνών, [αποδεικνύω ότι] θα υπάρξει άλλος της ίδιας φύσης, μικρότερος από αυτόν που επέλεξα και [για αυτό] ένας τρίτος ακόμα μικρότερος και λοιπά. Πραγματοποιώντας μία άπειρη κάθοδο με αυτό τον τρόπο, τελικά φθάνουμε στον αριθμό 5, τον ελάχιστο από όλους τους αριθμούς αυτού του είδους $4n+1$. [Από την απόδειξη που αναφέρθηκε και από την αρχική της υπόθεση] έπεται ότι ο 5 δεν είναι άθροισμα δύο τετραγώνων. Όμως είναι. Για αυτό πρέπει να συνάγουμε με την εις άτοπον απαγωγή πως όλοι οι αριθμοί της μορφής $4n+1$ είναι αθροίσματα δύο τετραγώνων».

Όλη η δυσκολία στην εφαρμογή της καθόδου σε ένα νέο πρόβλημα βρίσκεται στο πρώτο βήμα, εκείνο στο οποίο αποδεικνύεται ότι, αν η αρχική υπόθεση είναι αληθής για κάποιον αριθμό του είδους που μας αφορά, αυθαίρετα επιλεγμένο, τότε θα αληθεύει και για κάποιον του ίδιου είδους. Δεν υπάρχει γενική μέθοδος εφαρμόσιμη σε όλα τα προβλήματα για να γίνει αυτό το βήμα. Χρειάζεται κάτι σπανιότερο από τη «ζωώδη υπομονή» ή από την υπερεκτιμώμενη «απεριόριστη ικανότητα για καταβολή προσπάθειας» για να βρεθεί μονοπάτι σε αυτόν τον αγριότοπο. Σε εκείνους που φαντάζονται ότι μεγαλοφυΐα δεν είναι τίποτα περισσότερο από την ικανότητα να είσαι ένας καλός λογιστής, θα μπορούσαμε να τους συστήσουμε να εξασκήσουν την απεριόριστη υπομονή τους στο τελευταίο θεώρημα του Fermat. Πριν το διατυπώσουμε, δίνουμε ακόμη ένα παράδειγμα των απατηλα απλών προβλημάτων που ο Fermat έλυνε. Εδώ μπαίνουμε στην περιοχή της **διοφαντικής ανάλυσης** όπου, ο Fermat αρίστευσε. Όποιος αρέσκεται να παίζει με αριθμούς, θα μπορούσε να σταθεί στο παράξενο γεγονός ότι $27 = 25 + 2$. Αυτό που παρουσιάζει για το ενδιαφέρον είναι ότι τόσο το 27 όσο και το 25 είναι ακριβείς δυνάμεις, συγκεκριμένα $27 = 3^3$, $25 = 5^2$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $y^3 = x^2 + 2$ έχει λύση ανάμεσα τους ακέραιους αριθμούς, συγκεκριμένα τους $y = 3, x = 5$. Σαν άσκηση σε τεστ υπερευφυΐας, ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει ότι αυτοί είναι οι μόνοι ακέραιοι που ικανοποιούν την εξίσωση. Αυτό δεν είναι εύκολο.

Η εξίσωση $y^3 = x^2 + 2$, με τον περιορισμό η λύση y, x να είναι ακέραιοι

αριθμοί, είναι απροσδιόριστη (διότι υπάρχουν περισσότεροι άγνωστοι, συγκεκριμένα δύο, y, x , από τις εξισώσεις [εδώ μία] που τους συνδέουν) και διοφαντική από το όνομα του Έλληνα που ήταν από τους πρώτους που επέμεινε στις ακέραιες λύσεις των εξισώσεων ή λιγότερο περιοριστικά, σε ρητές (κλασματικές) λύσεις. Δεν είναι δύσκολο να περιγραφεί μία απειρία λύσεων χωρίς τον περιορισμό των ακεραίων αριθμών, έτσι μπορούμε να δώσουμε στον x οποιαδήποτε τιμή θέλουμε και στη συνέχεια να προσδιορίσουμε τον y προσθέτοντας τον 2 στο x^2 και βγάζοντας την τρίτη ρίζα από το αποτέλεσμα. Όμως το διοφαντικό πρόβλημα της εύρεσης όλων των ακεραίων λύσεων είναι ένα τελείως διαφορετικό ζήτημα. Η λύση $y = 3, x = 5$ φαίνεται με έλεγχο, η δυσκολία του προβλήματος είναι να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν άλλοι ακέραιοι y, x που να ικανοποιούν την εξίσωση. Ο Fermat λέει ότι δεν υπάρχουν άλλες ακέραιες λύσεις, αλλά ως συνήθως, απέκρουσε τη λύση του και περάσανε πολλά χρόνια από το θάνατο του μέχρι να βρεθεί μία απόδειξη.

Αυτή τη φορά δεν μάντευε, το πρόβλημα είναι δύσκολο. Υποστήριζε ότι είχε μία απόδειξη· μία απόδειξη βρέθηκε αργότερα. Έτσι, για όλους τους ισχυρισμούς του Fermat έχει βρεθεί στη συνέχεια απόδειξη, με εξαίρεση την περίπτωση του φαινομενικά απλού ισχυρισμού στο τελευταίο του θεώρημα, που οι μαθηματικοί δίνουν επί 300 χρόνια μάχες να το αποδείξουν χωρίς αποτέλεσμα. Τόσο ο έντιμος χαρακτήρας του όσο και η ασυναγωνιστη διεισδυτικότητα του ως αριθμοθεωρητικού δίνουν εγκυρότητα στην άποψη αρκετών, αλλά όχι όλων, ότι ήξερε για τι μιλούσε, όταν υποστήριζε ότι κατείχε μία απόδειξη του θεωρήματος του. Ήταν συνήθεια του Fermat, διαβάζοντας τον Διόφαντο του Bachet, να σημειώνει τα αποτελέσματα των συλλογισμών του στο περιθώριο του αντιγραφου του. Το περιθώριο δεν προσφερόταν για το γράψιμο των αποδείξεων. Έτσι, σχολιάζοντας το 8^ο πρόβλημα του 2^{ου} βιβλίου της Αριθμητικής του Διόφαντου, που ζητά ρητές λύσεις (κλάσματά ακεραίων) της εξίσωσης $a^2 = x^2 + y^2$, ο Fermat γράφει «Αντιθέτως, δεν είναι δυνατό να σπάσουμε έναν κύβο σε δύο άλλους, μία τεταρτη δύναμη σε δύο τέταρτες δυνάμεις, ή γενικά κάθε δύναμη πέραν της 2^{ης} σε άθροισμα δύο δυνάμεων του ίδιου βαθμού, έχω ανακαλύψει μία πραγματικά θαυμάσια απόδειξη [αυτού του γενικού θεωρήματος] που αυτό το περιθώριο είναι πολύ στενό για τη χωρέσει» (Fermat, *Oeuvres*, III, σελίδα 241). Αυτό είναι το περίφημο τελευταίο θεώρημα του, που ανακαλύψε στα 1637 περίπου.

Επαναδιατυπώνοντάς το σε σύγχρονη γλώσσα, το πρόβλημα του Διοφάντου είναι να βρεθούν ακέραιοι αριθμοί ή κλάσματά a, x, y τέτοιοι ώστε $a^2 = x^2 + y^2$, ο Fermat ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι ή κλάσματα ώστε $a^3 = x^3 + y^3$ ή $a^4 = x^4 + y^4$ ή γενικά, τέτοιοι ώστε $a^n = x^n + y^n$ με τον n ακέραιο μεγαλύτερο του 2. Το πρόβλημα του Διόφαντου ($n = 2$) έχει απειρία λύσεων, δείγματα είναι οι $x = 3, y = 4, a = 5$ και $x = 5, y = 12, a = 13$. Ο ίδιος ο Fermat έδωσε μία απόδειξη με τη μέθοδο του, της άπειρης καθόδου για το αδύνατον της περίπτωσης $a^4 = x^4 + y^4$. Από την εποχή του ακόμη, η περίπτωση $a^n = x^n + y^n$ έχει αποδειχθεί χωρίς λύση τους ακέραιους αριθμούς (ή κλάσματά) για μία πληθώρα αριθμών n (για όλους τους πρώτους τους μικρότερους του 14.000, αν κανένas από τους αριθμούς a, x, y δε διαιρείται με τον n), όμως δεν είναι αυτό το ζητούμενο. Το ζητούμενο είναι μία απόδειξη για όλους τους n τους μεγαλύτερες του 2.

Ο Fermat έλεγε ότι είχε μία θαυμάσια απόδειξη. Μετά τα όσα έχουν ειπωθεί, είναι πιθανόν ο Fermat να είχε ξεγελαστεί; Ένας μεγάλος αριθμοθεωρητικός, ο Gauss ψήφισε κατά του Fermat. Ίσως όμως η αλεπού που δε μπορούσε να φτάσει τα σταφύλια δήλωσε πως αυτά ήταν ξινά. Άλλοι έχουν ταχθεί με το μέρος του Fermat. Ο

Fermat υπήρξε 1^{ος} τάξης μαθηματικός, άνθρωπος αδιαφιλονίκητα έντιμος και ένας αριθμόθεωρητικός χωρίς ανώτερο του στην ιστορία.

Βιβλιογραφία

- Αναπολιτάνος, Δ. (1985). «Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών», Δ΄ έκδοση, Αθήνα: Νεφέλη.
- Παντελίδης, Γ.– Κραββαρίτης, Δ. (1997). «Λεξικό μαθηματικών», Αθήνα: Πατάκη.
- Bell, E. (2000). «Οι μαθηματικοί», τόμος 1, 3^η έκδοση, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Boyer, K.B.– Merzbach, U.C. (1968). «Η ιστορία των μαθηματικών», 2^η έκδοση, Αθήνα: Πνευματικός.
- Davis, D. (2001). «Η φύση & η δύναμη των μαθηματικών», Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Evans, H. (1990). «Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών μετά το 1650», τόμος 2, Αθήνα: τροχαλία.
- Loria, G. «Ιστορία των μαθηματικών», τόμος 3^A, Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Mankiewicz, R. (2002). «Η ιστορία των μαθηματικών», Αθήνα: Αλεξάνδρεια.
- Polya, G. (2001). «Η μαθηματική ανακάλυψη», τόμος 1, Αθήνα: κάτοπτρο.
- Smith, D. (1951). «History of mathematics», volume 1, New York: Dover Publications, INC.
- Struik, D. (1980). «Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών», β΄ έκδοση, Αθήνα: Δαίδαλος –Ζαχαρόπουλος.