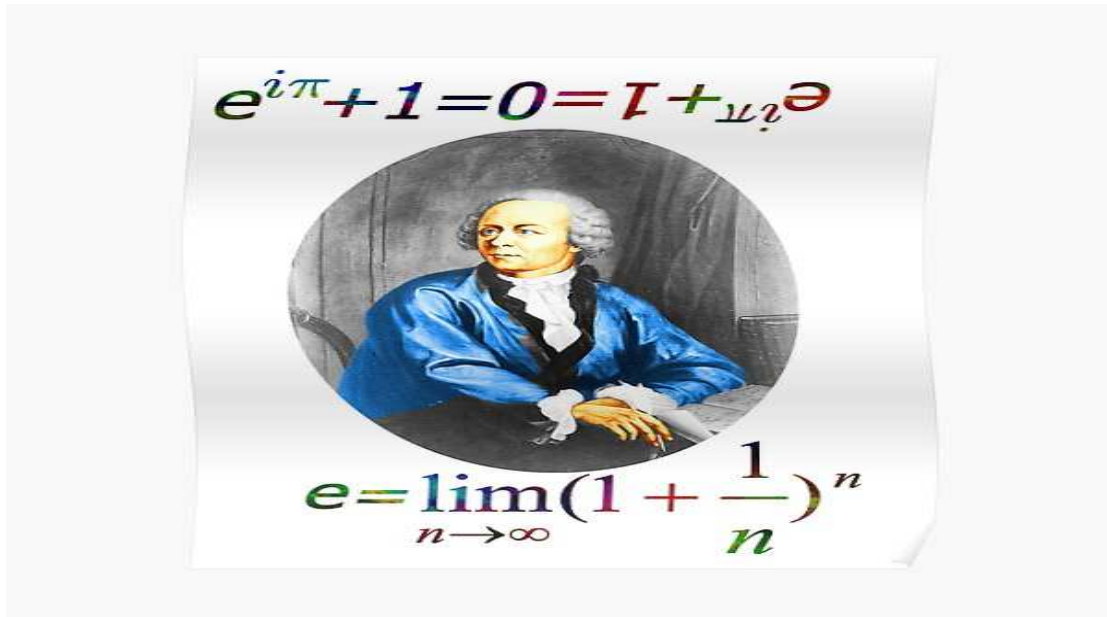




Πτυχιακή εργασία
Το έργο και η ζωή του Euler

Σπουδαστές: Δερβένης Νικόλαος (ΑΜ 8613)
Δεληγιάννης Νικόλαος Μιχαήλ (ΑΜ 8612)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (Μ.Εδ.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ημερομηνία ανάθεσης: **01.12.2022**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **.... 12.2023**
 Ημερομηνία εξέτασης: **.... 12.2023**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά	3
Περίληψη	3
1. Γέννηση και παιδική ηλικία	6
2. Τα πρώτα βήματα	6
3. Ο Euler στην Πετρούπολη	6
4. Καθηγητής Πανεπιστημίου και δημιουργία οικογένειας	7
5. Συγγραφή άρθρων	7
6. Η διεθνής αναγνώριση	8
7. Ο Euler στο Βερολίνο	9
8. Επιστροφή στην Πετρούπολη	10
9. Η μνήμη του Euler	11
10. Το έργο του Euler	11
11. Euler και ναυσιπλοΐα	15
12. Ο θάνατος του Euler	15
13. Φυσική και αστρονομία	16
14. Λογική	16
15. Θεωρία γράφων	16
16. Επέτειοι	17
17. Μαθηματική σημειογραφία	18
18. Euler και θεωρία αριθμών	19
Βιβλιογραφία	20

Λέξεις κλειδιά

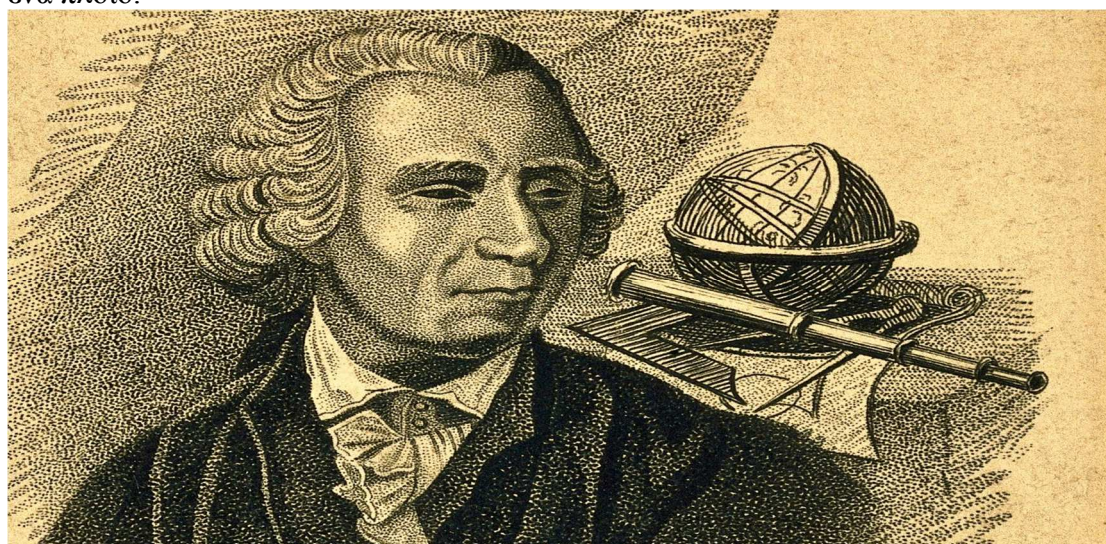
Πρόβλημα των ιστίων, αριθμός Euler ($e=2,718211821\dots$), αστεροειδής 2002 Euler, πίνακες γεωγραφικού μήκους, «Μηχανική», νομισματικό σύστημα, αποχετευτικό σύστημα, συνταξιοδοτικό σύστημα, κανάλια ναυσιπλοΐας, ανάλυση, λογισμός, κωνικές τομές & τετραγωνικές επιφάνειες σε τρισδιάστατο χώρο, ασφαλίσεις, συντάξεις, μαθηματική θεωρία των επενδύσεων, *Introductio in analysin infinitorum*, *Institutiones calculi differentialis*, *Institutiones calculi integralis*, *Methodus inveniendi lineas curvas maxime minimas proprietates gaudentes*, υδροδυναμική, ανάλυση των περιστροφών, εξισώσεις Euler

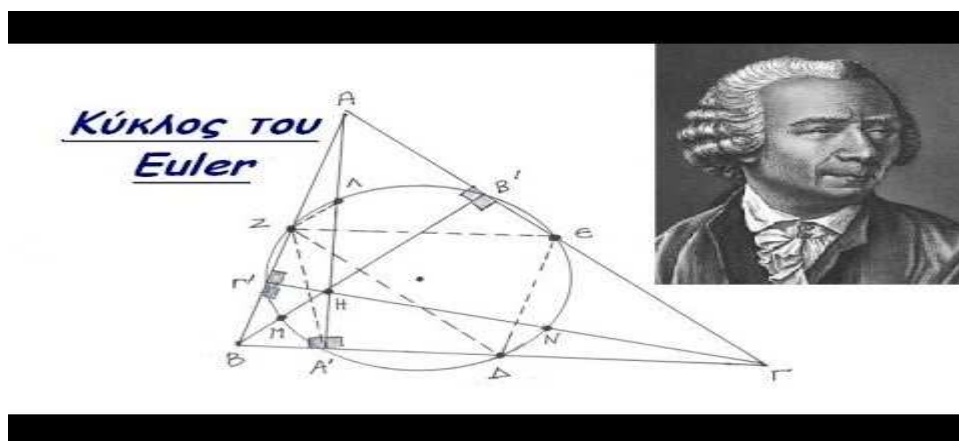
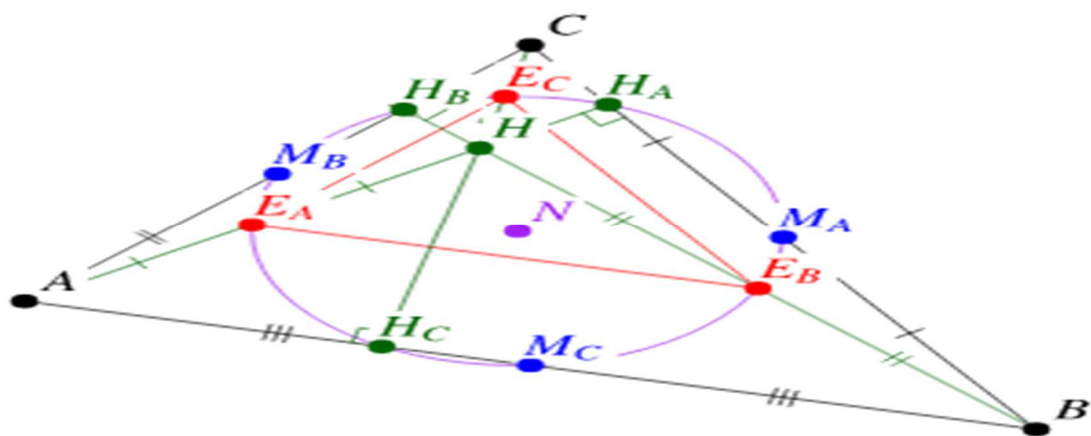
Περίληψη

«Η Ιστορία δείχνει πως εκείνοι οι ηγέτες οι οποίοι ενθάρρυναν την καλλιέργεια των μαθηματικών, την κοινή πηγή όλων των θετικών επιστημών, είναι επίσης αυτοί των οποίων η διακυβέρνηση υπήρξε η πιο λαμπρή και η δόξα τους κράτησε περισσότερο».

Michel Chasles

Το ότι «ο Euler έκανε υπολογισμούς χωρίς εμφανή προσπάθεια, όπως οι άλλοι αναπνέουν ή όπως σηκώνονται οι αετοί στον αέρα» (όπως έγραψε ο Arago), δεν αποτελεί υπερβολή για την απaráμιλλη ευκολία με την οποία έκανε μαθηματικά ο Leonard Euler (1707–1783) ο πιο παραγωγικός μαθηματικός στην ιστορία, που οι σύγχρονοί του τον αποκάλεσαν «η ανάλυση ενσαρκωμένη» ο Euler έγραφε τις μεγάλες του εργασίες με την ευκολία με την οποία ένας ικανός συγγραφέας συνθέτει ένα γράμμα προς ένα στενό του φίλο. Ακόμη και η ολική τύφλωση του κατά τα τελευταία 17 έτη της ζωής του, δεν επιβράδυνε τους ρυθμούς της ασύγκριτης παραγωγικότητας του πραγματικά, αν η απώλεια της όρασης του έπαιξε κάποιο ρόλο, ήταν ότι όξυνε την αντίληψη του Euler για το εσωτερικό κόσμο της φαντασίας του. Μία δήλωση που έγινε από τον Laplace εκφράζει την επίδραση του Euler στα μαθηματικά: «Διαβάστε Euler, διαβάστε Euler, είναι ο κύριος όλων μας». Το 1727 πήρε μέρος για πρώτη φορά στο *Paris academy* στο διαγωνισμό *Prize problem*. Το ζητούμενο εκείνης της χρονιάς ήταν οι διαγωνιζόμενοι να βρουν τον καλύτερο τρόπο να τοποθετηθούν τα κατάρτια σε ένα πλοίο.





Vollständige
Anleitung
zur
Algebra
von **Bibl. Colleg. Crems.**
Hrn. Leonhard Euler.

Erster Theil.
Von den verschiedenen Rechnungs = Arten,
Verhältnissen und Proportionen.



Bibl. Colleg. Crems.

St. Petersburg.
gedruckt bey der Kayf. Acad. der Wissenschaften 1770.

1. Γέννηση και παιδική ηλικία

Ο Leonard (ή Leonhard) Euler, γιός του Paul Euler και της συζύγου του Marguerite Brucker, υπήρξε μάλλον ο μεγαλύτερος επιστήμονας στην ιστορία της Ελβετίας. Γεννήθηκε στη Βασιλεία την **15.04.1707**. Τον επόμενο χρόνο πήγε με τους γονείς του στο γειτονικό χωριό Riehen, όπου ο πατέρας του έγινε Καλβινιστής Πάστορας. Ο Paul Euler ήταν ολοκληρωμένος μαθηματικός, έχοντας μαθητεύσει κοντά στον Jacob Bernoulli. Ο πατέρας του ήθελε να ακολουθήσει ο Leonard τα χνάρια του και να τον διαδεχθεί στην εκκλησία του χωριού, ευτυχώς όμως, έκανε το λάθος να διδάξει στο αγόρι μαθηματικά. Από νωρίς ο νεαρός Euler ήξερε τι ήθελε να κάνει. Όμως υπάκουσε στην επιθυμία του πατέρα του και μπαίνοντας στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας σπούδασε θεολογία και εβραϊκή γλώσσα.

Στα μαθηματικά ήταν αρκετά προχωρημένος ώστε να τραβήξει την προσοχή του Johannes Bernoulli, ο οποίος γενναιόδωρα άρχισε να κάνει ένα εβδομαδιαίο κατ' ιδίαν μάθημα στον νεαρό. Ο Euler περνούσε το υπόλοιπο της εβδομάδας προετοιμαζόμενος για το επόμενο μάθημα, ώστε να έχει όσο το δυνατόν λιγότερες ερωτήσεις προς τον δάσκαλό του. Σύντομα η επιμέλεια και ικανότητα του τον έκαναν να κερδίσει τη φιλία των Daniel και Nicolaus Bernoulli. Μέχρι που πήρε το master του το **1724** στην ηλικία των 17 ετών, είχε τη δυνατότητα να απολαμβάνει τη ζωή του όπως ήθελε, όμως ο πατέρας του άρχισε τότε να επιμένει ότι θα έπρεπε να παρατήσει τα μαθηματικά για να αφοσιωθεί πλήρως στη θεολογία. Υποχώρησε πάντως, όταν οι Bernoulli's του είπαν πως ο γιος του ήταν προορισμένος να γίνει ένας μεγάλος μαθηματικός και όχι πάστορας στο Riehen. Αν και η προφητεία επαληθεύτηκε, η θρησκευτική αγωγή που πήρε από νωρίς τον επηρέασε σε όλη τη ζωή του και ποτέ δεν απαρνήθηκε ούτε ένα μόριο από την καλβινιστική πίστη του. Πράγματι, όσο περνούσαν τα χρόνια φαινόταν να ανταποκρίνεται όλο και περισσότερο στο κάλεσμα του πατέρα του οργανώνοντας οικογενειακές προσευχές για όλα τα μέλη του σπιτιού του, τις οποίες έκλεινε συνήθως ο ίδιος με κήρυγμα.

2. Τα πρώτα βήματα

Η πρώτη ανεξάρτητη εργασία του Euler έγινε όταν ήταν 19 ετών. Έχει ειπωθεί πως αυτή η πρώτη προσπάθεια είναι αποκαλυπτική τόσο της δύναμης όσο και της αδυναμίας του μεγαλύτερου μέρους του έργου του. Η Παρισινή Ακαδημία είχε προτείνει τη λύση του προβλήματος των ιστίων για την απονομή του βραβείου της το **1727**. Ο Euler απέτυχε να κερδίσει το έπαθλο, του δόθηκε όμως τιμητικός έπαινος. Επρόκειτο στο μέλλον να επιστρέψει δριμύτερος, αφού ξέρουμε ότι κέρδισε το βραβείο 12 φορές. Το ισχυρότερο μέρος της εργασίας ήταν η ανάλυση, η μαθηματική τεχνική της, η αδυναμία της εντοπίζονταν στη σχεδόν ολοκληρωτική έλλειψη πρακτικότητας. Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει, αν θυμηθούμε τα παραδοσιακά αστεία για το ανύπαρκτο ελβετικό ναυτικό. Ο Euler είναι πιθανό να είχε δει μία ή δυο βάρκες στις λίμνες της Ελβετίας, όμως δεν είχε δει ακόμη πλοίο.

Τον επέκριναν, δικαιολογημένα μερικές φορές, επειδή άφηνε τα μαθηματικά του να απομακρύνονται από την πραγματικότητα. Το φυσικό σύμπαν ήταν για τον Euler μόνο μια ελκυστική ευκαιρία για τα μαθηματικά και σπάνια κάτι του φαινόταν ενδιαφέρον από μόνο του, και αν το σύμπαν δεν ταίριαζε στην ανάλυσή του, το λάθος ήταν του σύμπαντος.

3. Ο Euler στην Πετρούπολη

Γνωρίζοντας πως ήταν γεννημένος μαθηματικός, ο Euler έβαλε υποψηφιότητα για τη θέση του καθηγητή στη Βασιλεία. Αποτυγχάνοντας να πάρει τη θέση, συνέχισε τις μελέτες του ελπίζοντας να βρει μια θέση στην ακαδημία της Πετρούπολης κοντά

στους Daniel και Nicolaus Bernoulli. Αυτοί είχαν προθυμοποιηθεί να του βρουν μια θέση στην ακαδημία και να τον κρατούσαν ενήμερο πάνω στην υπόθεση. Σε αυτή τη φάση της καριέρας του, ο Euler παραδόξως δε φαινόταν να νοιάζεται και τόσο για το τι θα έπρεπε να κάνει, φτάνει αυτό να έχει σχέση με την επιστήμη. Όταν οι Bernoulli's του έγραψαν για την προοπτική ενός ανοίγματος στον ιατρικό τομέα της ακαδημίας της Πετρούπολης ο Euler ρίχτηκε στη μελέτη της φυσιολογίας στη Βασιλεία, παρακολουθώντας τις διαλέξεις στην Ιατρική. Αλλά ακόμα και έτσι, δε μπορούσε να κρατηθεί μακριά από τα μαθηματικά. Η η φυσιολογία του αυτιού απαιτούσε μια μαθηματική έρευνα για τον ήχο, που με τη σειρά της οδηγούσε σε μια άλλη για τη διάδοση των κυμάτων και ούτω καθ' εξής, αυτή η πρώιμη εργασία συνέχισε να πετά κλαδιά σε όλη την καριέρα του Euler, σαν ένα από τρελαμένο δέντρο κάποιου εφιάλητη. Οι Bernoulli's δούλευαν γρήγορα.

Ο Euler προσελήφθη στην Πετρούπολη το **1727**, επίσημα ως συνεργάτης του ιατρικού τομέα της Ακαδημίας. Ένας σοφός όρος της συνεργασίας προέβλεπε πως κάθε μέλος που προερχόταν από το εξωτερικό έπρεπε να φέρει μαζί του δυο μαθητές, στην πραγματικότητα μαθητευόμενους για να εκπαιδευτούν. Η χαρά του Euler γρήγορα έγινε καπνός. Την ίδια ημέρα που πατούσε το ρωσικό έδαφος, η φιλελεύθερη Αικατερίνη 1^η πέθανε. Η Αικατερίνη, ερωμένη του Πέτρου του Μεγάλου πριν γίνει σύζυγος του, φαίνεται πως υπήρξε ανοιχτό μυαλό κατά πολλούς τρόπους και ήταν αυτή που στα δυο μόνο χρόνια της εξουσίας της υλοποίησε τις επιθυμίες του Πέτρου για την ίδρυση της Ακαδημίας. Μετά το θάνατο της Αικατερίνης η εξουσία περιήλθε σε μια κτηνωδέστατη φατρία, επειδή δεν είχε ενηλικιωθεί ο νόμιμος διάδοχος του θρόνου (που άλλωστε πέθανε πριν μπορέσει να αναλάβει την εξουσία). Οι νέοι ηγεμόνες έβλεπαν την Ακαδημία ως περιττή πολυτέλεια και για μερικούς ανήσυχους μήνες σκέφτονταν να μειώσουν τα μέλη της, στέλνοντας τους ξένους στα σπίτια τους. Έτσι είχαν τα πράγματα όταν έφτασε εκεί ο Euler. Μέσα στη σύγχυση δεν ελέγχθη τίποτε για τη θέση στον ιατρικό τομέα και έτσι γλίστρησε στον μαθηματικό τομέα, αφού στο μεταξύ στην απελπισία του είχε σχεδόν δεχθεί μία θέση υπολογαγού στο ναυτικό.

4. Καθηγητής Πανεπιστημίου και δημιουργία οικογένειας

Στη συνέχεια τα πράγματα άρχισαν να πηγαίνουν καλύτερα και ο Euler στρώθηκε να δουλέψει. Επί έξι χρόνια ήταν σκυμμένος στη δουλειά του, όχι μόνο γιατί ήταν απορροφημένος από τα μαθηματικά, αλλά και γιατί δεν τολμούσε να κάνει μια κανονική κοινωνική ζωή καθώς παντού πρακτόρευαν χαφιέδες. Το **1733** ο Daniel Bernoulli επέστρεψε στην ελεύθερη Ελβετία έχοντας μπουχτίσει στην Αγία Ρωσία, και ο Euler στα 26 του κατέλαβε την πρώτη θέση των μαθηματικών στην Ακαδημία.

Αισθανόμενος ότι επρόκειτο να μείνει καρφωμένος στην Πετρούπολη για το υπόλοιπο της ζωής του, αποφάσισε να παντρευτεί, να τακτοποιηθεί και να κάνει ότι καλύτερο. Η κυρία λεγόταν Κατερίνα, κόρη του ζωγράφου Gsell, τον οποίο ο Πέτρος ο Μεγάλος είχε πάρει μαζί του στη Ρωσία. Οι πολιτικές συνθήκες χειροτέρεψαν και ο Euler επιθυμούσε διακαώς να φύγει. Όμως η γρήγορη άφιξη του ενός παιδιού μετά το άλλο, τον έκαναν να αισθάνεται πιο δέσμιος των περιστάσεων από πριν, και έτσι βρήκε καταφύγιο στην ασταμάτητη δουλειά. Ορισμένοι βιογράφοι βρίσκουν ίχνη της ακαταμάχητης παραγωγικότητας του σε αυτό το πρώτο ταξίδι στη Ρωσία, η σύννεση τον υποχρέωσε να αναπτύξει στο έπακρο την φιλοπονία του, κάτι που τον χαρακτήριζε έκτοτε.

5. Συγγραφή άρθρων

Ο Euler ήταν ένας από εκείνους τους μεγάλους μαθηματικούς που μπορούσε να εργαστεί οπουδήποτε και κάτω από οποιεσδήποτε συνθήκες. Αγαπούσε πολύ τα παιδιά

(είχε 13 δικά του που όλα εκτός από 5 πέθαναν σε πολύ μικρή ηλικία) και συχνά έγραφε τις εργασίες του με ένα μωρό στα πόδια του, ενώ τα άλλα παιδιά έπαιζαν γύρω του. Είναι απίστευτη η ευκολία με την οποία έγραφε τα πιο δύσκολα μαθηματικά. Πολλοί θρύλοι έχουν επιζηήσει σχετικά με τη συνεχή εκροή των ιδεών του. Μερικοί αναμφίβολα αποτελούν υπερβολές, λέγεται όμως ότι ξεπετούσε ένα μαθηματικό άρθρο στη μισή ώρα ανάμεσα στο πρώτο και στο δεύτερο κάλεσμα για φαγητό. Με το που τελείωνε ένα άρθρο, το έβαζε στην κορυφή του σωρού που περίμενε τον τυπογράφο. Όταν χρειαζόταν υλικό για τα πεπραγμένα της Ακαδημίας, ο τυπογράφος μάζευε μια δέσμη φύλλων από το επάνω μέρος του σωρού.

Αυτό εξηγεί γιατί συνέβαινε συχνά οι ημερομηνίες δημοσίευσης να έχουν αντίθετη σειρά από εκείνες της συνθέσεως. Το τρελό αποτέλεσμα έφτανε στο αποκορύφωμά του εξαιτίας της συνήθειας του Euler να επιστρέφει πολλές φορές σε ένα θέμα για να ξεκαθαρίσει ή να επεκτείνει κάτι που είχε ήδη βρει έτσι, σε κάποιες περιπτώσεις, βλέπει κανείς μια ακολουθία από άρθρα σε ένα συγκεκριμένο θέμα σαν να κοιτάζει μέσα από το λάθος άκρο ενός τηλεσκοπίου.

6. Η διεθνής αναγνώριση

Όταν ο μικρός τσάρος πέθανε, η Anna Ivanovna (ανιψιά του Πέτρου) έγινε Αυτοκράτειρα το 1730 και για την Ακαδημία τα πράγματα έγιναν καλύτερα. Όμως η έμμεση άσκηση της εξουσίας από τον εραστή της Ernest de Biron, είχε ως συνέπεια μια αιματηρή βασιλεία του τρόμου από τις χειρότερες στην ιστορία της Ρωσίας. Ο Euler επί μία δεκαετία αφοσιώθηκε αθόρυβα στη δουλειά του. Στα μισά αυτής της περιόδου δέχτηκε ένα πρώτο βαρύ πλήγμα. Είχε αποφασίσει να κερδίσει το βραβείο της Ακαδημίας του Παρισιού πάνω σε ένα πρόβλημα της αστρονομίας, για τη λύση του οποίου ορισμένοι από τους κορυφαίους μαθηματικούς της εποχής είχαν ζητήσει ένα χρονικό περιθώριο αρκετών μηνών. **Ο Euler το έλυσε σε 3 μέρες.**

Όμως η αδιάκοπη προσπάθεια είχε ως αποτέλεσμα μια ασθένεια που οδήγησε στην απώλεια της όρασης από το δεξί μάτι του. Ας σημειωθεί εδώ πώς η σύγχρονη λεπτολόγα κριτική έχει δείξει πως το αστρονομικό πρόβλημα δεν ήταν πια κατά κανένα τρόπο υπεύθυνο για την απώλεια της όρασης από το μάτι του Euler. Το πώς όμως κατάφεραν οι ακαδημαϊκοί κριτικοί (ή κάποιοι άλλοι) να γνωρίζουν τόσο πολλά για τον αποκαλούμενο νόμο της αιτίας και του αποτελέσματος, είναι ένα μυστήριο του οποίου η λύση αφήνεται στο φάντασμα του David Hume (ενός σύγχρονου του Euler).

Με αυτήν την επιφύλαξη θα σταθούμε και εμείς στην πασίγνωστη ιστορία του Euler και του αθεϊστή (ή κατά πάσα πιθανότητα μόνο πανθεϊστή) Γάλλου φιλοσόφου Denis Diderot (1713–1784). Πρόκειται για ελαφρά χρονολογική παρέμβαση, καθώς συνέβη κατά τη δεύτερη παραμονή του Euler στη Ρωσία. Προσκεκλημένος από την Αικατερίνη τη Μεγάλη να επισκεφτεί την αυλή της, ο Diderot έβγαζε τα έξοδά του προσπαθώντας να μνήσει τους αυλικούς στον αθεϊσμό. Μπουχτισμένη μαζί του η Αικατερίνη παράγγειλε στον Euler να βάλει φίμωτρο στον θορυβώδη φιλόσοφο. Αυτό ήταν εύκολο για τον Euler, μιας και όλα τα μαθηματικά ήταν σαν κινέζικα για τον Diderot. Ο **De Morgan** αναφέρει το τι συνέβη στο κλασικό βιβλίο τους «ο Σάκος με τα παράδοξα» (1872). «Ο Diderot πληροφορήθηκε πως ένας σοβαρός μαθηματικός κατείχε μια αλγεβρική απόδειξη της ύπαρξης θεού και θα την παρουσίαζε μπροστά σε όλη την αυλή, αν ήθελε να την ακούσει (ο Diderot). Ο φιλόσοφος συγκατένευσε ευχαρίστως. Ο Euler προχώρησε προς το μέρος του και είπε με σοβαρότητα και με απόλυτη σιγουριά «Κύριε, $\frac{a+b^n}{n} = x$, συνεπώς υπάρχει θεός αποκριθείτε!» Στον Diderot φάνηκε σαν κάτι με λογική, αλλά δυσνόητο. Ταπεινωμένος από τα ασταμάτητα γέλια που διαδέχτηκαν τη στενάχωρη σιωπή του, ο ταλαίπωρος ζήτησε από την Αικατερίνη την άδεια να επιστρέψει αμέσως στη Γαλλία. Του την έδωσε με χάρη. Ανικανοποίητος

από αυτό το αριστούργημα, ο Euler ασχολήθηκε τώρα με κάθε σοβαρότητα, με την κατασκευή άλλων αποδείξεων ότι υπάρχει θεός και ότι η ψυχή δεν είναι ύλη. Αναφέρεται πως και οι δυο αποδείξεις περιελήφθησαν σε θεολογικές πραγματείες της εποχής. Πρόκειται ίσως για τις εκλεκτότερες μαργαρίτες της μη μαθηματικής πλευράς της μεγαλοφυΐας του. Κατά την παραμονή του στη Ρωσία ο Euler δεν ασχολήθηκε αποκλειστικά με τα μαθηματικά. Οπουδήποτε τον καλούσαν να χρησιμοποιήσει το μαθηματικό του ταλέντο σε κάτι που δεν απείχε πολύ από τα καθαρά μαθηματικά, ανταπέδιδε τα χρήματα που επένδυε σε αυτόν η κυβέρνηση και με το παραπάνω μάλιστα. Έγραψε τα στοιχειώδη μαθηματικά εγχειρίδια για τα σχολεία της Ρωσίας, επέβλεπε το κυβερνητικό τμήμα της γεωγραφίας, βοήθησε στην αναμόρφωση του συστήματος των μέτρων και των σταθμών και επιτόνησε πρακτικά μέσα για τον έλεγχο των κλιμάκων. Αυτές ήταν μερικές από τις δραστηριότητές του. Και ανεξάρτητα από τα πόσα άλλα πράγματα έκανε, συνέχιζε να παράγει μαθηματικά.

Μια από τις σπουδαιότερες εργασίες αυτής της περιόδου ήταν η πραγματεία του **1736**, πάνω στη μηχανική. Ας σημειωθεί πως η χρονολογία δημοσίευσης συμπίπτει με το κλείσιμο (παρά ένα χρόνο) ενός αιώνα από τη δημοσίευση της αναλυτικής γεωμετρίας του Καρτέσιου. Η πραγματεία του Euler έκανε στη μηχανική ότι ο Καρτέσιος έκανε στη γεωμετρία, την ελευθέρωσε από τα δεσμά της συνθετικής παρουσίας και την έκανε αναλυτική. Το *Principia* του Νεύτωνα θα μπορούσε να είχε γραφτεί να είχε γραφεί από τον Αρχιμήδη, η «**Μηχανική**» του Euler δε θα μπορούσε να είχε γραφτεί από κανέναν Έλληνα. Για πρώτη φορά ολόκληρη η ισχύς του λογισμού κατευθύνθηκε στη μηχανική, σηματοδοτώντας το πέρασμα αυτή της βασικής επιστήμης στη σύγχρονη εποχή. Σε αυτό ο Euler ξεπεράστηκε από τον φίλο του Lagrange, όμως στον Euler ανήκει η τιμή του πρώτου αποφασιστικού βήματος.

7. Ο Euler στο Βερολίνο

Μετά το θάνατο της Άννας το 1740 Ρωσική Κυβέρνηση έγινε πιο φιλελεύθερη, όμως ο Euler είχε περάσει ήδη αρκετά, με ευχαρίστηση λοιπόν δέχτηκε την πρόσκληση του Φρειδερίκου του μεγάλου να γίνει μέλος της βερολινέζικης Ακαδημίας. Η χήρα βασιλομήτωρ εντυπωσιάστηκε από τον Euler και προσπάθησε να τον εξιχνιάσει. Οι απαντήσεις του όμως ήταν μονοσύλλαβες.

«**Γιατί δε θέλετε να μου μιλήσετε;**» τον ρώτησε.

«**Κυρία**», της αποκρίθηκε, «**Έρχομαι από μια χώρα όπου, αν μιλήσεις, σε κρεμούν**».

Τα επόμενα 24 έτη της ζωής του τα πέρασε στο Βερολίνο, όχι τελείως αρμονικά, καθώς ο Φρειδερίκος θα προτιμούσε έναν καλογυαλισμένο αυλικό από τον απλό Euler. Αν και ο Φρειδερίκος αισθανόταν καθήκον του να ενθαρρύνει την ανάπτυξη των μαθηματικών, περιφρονούσε το αντικείμενο, όντας πολύ μέτριος ο ίδιος σ' αυτό. Όμως εκτίμησε το ταλέντο του Euler αρκετά ώστε να τον μπλέξει σε πρακτικά προβλήματα μεταξύ άλλων, με το νομισματικό σύστημα, το αποχετευτικό σύστημα, τα κανάλια ναυσιπλοΐας, το συνταξιοδοτικό σύστημα. Η Ρωσία ποτέ δεν άφησε τον Euler τελείως ελεύθερο, ακόμη και όταν ήταν στο Βερολίνο του πλήρωνε μέρος του μισθού του. Παρά τα πολλά άτομα που εξαρτιόνταν από αυτόν, ο Euler ήταν εύπορος, έχοντας στην κατοχή του μια φάρμα στο Charlotte burg, εκτός από το σπίτι του στο Βερολίνο.

Κατά τη ρωσική εισβολή του **1760** η φάρμα του λεηλατήθηκε. Ο Ρώσος στρατηγός, δηλώνοντας ότι δεν έκανε πόλεμο κατά των επιστημών, αποζημίωσε τον Euler δίνοντάς του αρκετά περισσότερα από το πραγματικό μέγεθος της απώλειας. Όταν η Αυτοκράτειρα Ελισάβετ άκουσε για τη ζημιά στη φάρμα, του έστειλε ένα επιπλέον σημαντικό χρηματικό ποσό. Μια αιτία της αντιδημοτικότητας του Euler στην αυλή του Φρειδερίκου ήταν η αδυναμία του να κρατηθεί μακριά από τις ανταλλαγές

επιχειρημάτων πάνω σε φιλοσοφικά ζητήματα, για τα οποία δεν γνώριζε τίποτα. Ο Βολτέρος, που περνούσε μεγάλο μέρος του χρόνου του κολακεύοντας τον Φρειδερίκο, εύρισκε μεγάλη ευχαρίστηση να δένει τον άτυχο Euler σε μεταφυσικούς κόμπους, παρέα με άλλους λαμπρούς χειριστές του λόγου. Ο Euler τα δεχόταν όλα με καλή προαίρεση και γελούσε μαζί με τους άλλους για τις γελοίες γκάφες του.

Ο Φρειδερίκος άρχισε να εκνευρίζεται, και αναζήτησε έναν πιο εκλεπτυσμένο φιλόσοφο να ηγηθεί της Ακαδημίας του και να διασκεδάσει την αυλή του. Ο D' Alembert προσκλήθηκε στο Βερολίνο για να εποπτεύσει την κατάσταση. Ανάμεσα σε αυτόν και στον Euler προϋπήρχε μια ψυχρότητα από κάποια μαθηματική αιτία. Όμως ο D' Alembert δεν ήταν από εκείνους που θα άφηναν μια προσωπική διαφορά να σκιάσει την κρίση του και δήλωσε απροκάλυπτα στο Φρειδερίκο πως θα ήταν βλασφημία να βάλει άλλον μαθηματικό πάνω από τον Euler. Αυτό αύξησε το πείσμα και τον θυμό του Φρειδερίκου περισσότερο από ποτέ, έτσι που η κατάσταση έγινε ανυπόφορη για τον Euler. Διαισθάνθηκε πως τα παιδιά του δεν είχαν καμία ευκαιρία στην Πρωσία. Σε ηλικία 59 ετών (το **1766**) επέστρεψε στην Πετρούπολη μετά από εγκάρδια πρόσκληση της Αικατερίνης της Μεγάλης.

8. Επιστροφή στην Πετρούπολη

Η Αικατερίνη υποδέχθηκε τον μαθηματικό σα να ήταν γαλαζοαίματος, θέτοντας στη διάθεση του ένα πλήρως εξοπλισμένο σπίτι γι αυτόν και για τα 18 εξαρτημένα μέλη της οικογένειάς του, παραχωρώντας του επίσης έναν από τους μαγείρους της. Ήταν τότε που ο Euler άρχισε να χάνει την όραση και από το άλλο του μάτι (από καταρράκτη) και σε λίγο καιρό τυφλώθηκε τελείως. Στην αλληλογραφία των Lagrange, D' Alembert και άλλων κορυφαίων μαθηματικών εκφράζεται η ανησυχία και η συμπάθεια τους για την αναπηρία. Ο Euler παρακολουθούσε ατάραχος το πλησίασμα της τύφλωσης. Χωρίς καμία αμφιβολία, η βαθιά θρησκευτική του πίστη τον βοήθησε να αντιμετωπίσει το πεπρωμένο. Όμως δεν παραδόθηκε στη σιωπή και στο σκοτάδι. Αμέσως κάθισε να βρει τρόπους να ξεπεράσει το πρόβλημα. Πριν τυφλωθεί τελείως εξασκήθηκε στο γράψιμο των μαθηματικών τύπων με κιμωλία σε μια μεγάλη πλάκα. Στη συνέχεια, με τους γιους του (ιδιαίτερα τον Albert) σε ρόλο γραφένων, υπαγόρευε τις φράσεις που εξηγούσαν τους τύπους. Αντί να μειωθεί, η μαθηματική του παραγωγικότητα αυξήθηκε. Πέντε χρόνια μετά την επιστροφή του στην Πετρούπολη, τον βρήκε μια άλλη καταστροφή.

Στη μεγάλη πυρκαγιά του **1771** το σπίτι του και όλη η επίπλωση καταστράφηκαν και μόνο χάρη στον ηρωισμό του Ελβετού υπηρέτη του (Peter Grimm ή Grimmon) ο Euler γλίτωσε. Με κίνδυνο της ζωής του, ο Grimm μετέφερε τον τυφλό και άρρωστο κύριο του μέσα από τις φλόγες. Η βιβλιοθήκη κάηκε, αλλά χάρη στις έγκαιρες ενέργειες του κόμη Orloff όλα τα χειρόγραφα του Euler σώθηκαν.

Η αυτοκράτειρα Αικατερίνη γρήγορα αποκατέστησε όλη τη ζημιά και σε σύντομο διάστημα ο Euler ρίχτηκε πάλι στη δουλειά. Το **1776** (στα 69 του) τον βρήκε μεγαλύτερη συμφορά, με τον θάνατο της γυναίκας του. Τον επόμενο χρόνο ξαναπαντρεύτηκε. **Η δεύτερη σύζυγός του η Salome Abigail Gsell, ήταν ετεροθαλής αδερφή της πρώτης.** Η μεγαλύτερη τραγωδία του ήταν η αποτυχία (ίσως λόγω απροσεξίας του χειρουργού) μιας εγχείρησης για την αποκατάσταση της όρασης στο αριστερό του μάτι, το μόνο για το οποίο υπήρχε κάποια ελπίδα. Η εγχείρηση υπήρξε «επιτυχής» και η χαρά του Euler ήταν απερίγραπτη. Σύντομα όμως παρουσιάστηκε κάποια μόλυνση και αφού υπέφερε επί μακρόν από φρικτούς πόνους όπως τους περιέγραψε ο ίδιος, ξανακύλησε στο σκοτάδι.

9. Η μνήμη του Euler

Σε όλη τη ζωή ο Euler ευτύχησε να έχει μια μνήμη φαινόμενο. Ήξερε απέξω την Αινειάδα του Βιργιλίου και, παρ' όλο που σπάνια είχε ξανακοιτάξει το βιβλίο από τότε που ήταν νέος, μπορούσε πάντα να απαγγείλει τις πρώτες και τις τελευταίες γραμμές της κάθε σελίδας. **Η μνήμη του ήταν και οπτική και ακουστική.** Διέθετε επίσης εξαιρετική ικανότητα για υπολογισμούς με το μυαλό όχι μόνο αριθμητικού τύπου, αλλά και του πολύ δυσκολότερου τύπου που απαιτούνται στην ανώτερη άλγεβρα και στο λογισμό. Όλοι οι βασικοί τύποι, σε όλη την έκταση των μαθηματικών της εποχής του, ήταν με ακρίβεια εντυπωμένοι στη μνήμη του.

Σαν παράδειγμα αυτής της ικανότητας ο Condorcet αναφέρει την περίπτωση δύο μαθητών του Euler που είχαν υπολογίσει το άθροισμα των δεκαεπτά ορών μιας πολύπλοκης συγκλίνουσας σειράς (για μια συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής) διαφωνώντας μεταξύ τους για μια μονάδα στο πεντηκοστό ψηφίο του αποτελέσματος.

Για να αποφασίσει ποιος είχε δίκιο, ο Euler έκανε όλο τον υπολογισμό με το μυαλό του, η απάντησή του ήταν όντως η σωστή. Όλα αυτά τώρα ήρθαν προς βοήθεια του και η απώλεια της όρασής δεν του στοίχισε πάρα πολύ. Ακόμη και έτσι όμως, φαίνεται απίστευτο το ακόλουθο κατόρθωμά του στη διάρκεια των δεκαεπτά χρόνων σκοταδιού. Η σεληνιακή θεωρία, η κίνηση της σελήνης, το μοναδικό πρόβλημα που προξενούσε πονοκέφαλο στο Νεύτωνα, έτυχε της πρώτης διεξοδικής επεξεργασίας στα χέρια του Euler. Όλη η πολύπλοκη ανάλυση έγινε στο μυαλό του.

10. Το έργο του Euler

Κοιτάζοντας το τεράστιο έργο του Euler μπορεί προς στιγμή να μας δημιουργηθεί η εντύπωση πως οποιοσδήποτε ταλαντούχος άνθρωπος θα μπορούσε να φέρει σε πέρας ένα μεγάλο μέρος απ' αυτό, σχεδόν με την ίδια ευκολία που το έκανε ο Euler. Όμως μια επιθεώρηση των σημερινών μαθηματικών θα μας βγάλει από την πλάνη μας. Γιατί η παρούσα κατάσταση των μαθηματικών με τα πυκνά της δάση από θεωρίες, όταν λάβουμε υπ' όψιν μας και τη δύναμη των μεθόδων που έχουμε στη διάθεσή μας, δεν είναι συγκριτικά πιο πολύπλοκη από αυτή που αντιμετώπισε ο Euler. Τα μαθηματικά έχουν ωριμάσει σήμερα για έναν δεύτερο Euler.

Στις μέρες του συστηματοποίησε και ενοποίησε τεράστιες περιοχές από άτακτα διασκορπισμένα μερικά αποτελέσματα και απομονωμένα θεωρήματα, καθαρίζοντας το έδαφος και δένοντας μαζί πολύτιμα πράγματα με την εύχρηστη δύναμη του αναλυτικού του μηχανισμού. Ακόμη και σήμερα, μεγάλο μέρος της ύλης που μαθαίνει κανείς σε ένα σχολικό μάθημα μαθηματικών βρίσκεται πρακτικά στην κατάσταση που το άφησε ο Euler. Για παράδειγμα, η παρουσίαση των κωνικών τομών και των τετραγωνικών επιφανειών στον χώρο των τριών διαστάσεων από την άποψη της γενικής εξίσωσης δεύτερου βαθμού, είναι του Euler. Επίσης, το αντικείμενο των ετήσιων προσόδων και όλων όσων απορρέουν από αυτό (ασφάλειες, συντάξεις και τα όμοια) πήρε τη σημερινή μορφή, οικεία στους σημερινούς σπουδαστές ως **η μαθηματική θεωρία των επενδύσεων**, από τον Euler.

Όπως τονίζει ο Arago, μια αιτία της μεγάλης και άμεσης επιτυχίας που είχε ο Euler σαν δάσκαλος με τα γραπτά του, ήταν η ολοκληρωτική έλλειψη της υπερηφάνειας, με την κακή της έννοια. Αν κάποιες εργασίες συγκριτικά μικρότερης αυθύπαρκτης αξίας απαιτούνταν για το ξεκαθάρισμα κάποιων σημείων σε προηγούμενες και εντυπωσιακότερες εργασίες, δεν δίσταζε να τις γράψει. Δεν είχε κανένα φόβο μήπως του πέσει η υπόληψη. Ακόμη και στη δημιουργική πλευρά του, ο Euler συνδύαζε διδασχή με ανακάλυψη. Οι μεγάλες του πραγματείες του 1748, 1755 και 1768–1770 στον λογισμό (**Introductio in analysin infinitorum, Institutiones calculi differentialis, Institutiones calculi integralis**) αμέσως έγιναν κλασικές και

συνέχισαν επί 75 έτη να εμπνέουν νέους ανθρώπους που επρόκειτο να εξελιχθούν σε μεγάλους μαθηματικούς. Ήταν όμως με τη εργασία του πάνω στον λογισμό των μεταβολών (**Method us inveniendi line as curuas maxim minimize proprietes gauntness**, 1744) που αναδείχθηκε ο Euler σε μαθηματικό πρώτης τάξης. Έχουμε ήδη αναφερθεί στο μεγάλο βήμα προς τα εμπρός που έκανε ο Euler όταν εισήγαγε την ανάλυση, στη μηχανική και ως παράδειγμα αναφέρουμε την ανάλυση των περιστροφών. Η αναλυτική μηχανική είναι κλάδος των καθαρών μαθηματικών.

Η αυστηρότερη κριτική που ασκήθηκε από τους συγχρόνους του στο έργο του, είχε να κάνει με την ανεξέλεγκτη παρόρμηση του να κάνει υπολογισμούς χάρη της όμορφης ανάλυσης και μόνο. Σε ορισμένες περιπτώσεις συνέβαινε να μην έχει κατανοήσει επαρκώς τις φυσικές καταστάσεις που επιχειρούσε να περιγράψει με μαθηματικά. Παρόλα αυτά, οι θεμελιώδεις εξισώσεις της κίνησης των ρευστών, σε χρήση σήμερα στην υδροδυναμική, είναι δικές του. Μπορούσε να είναι αρκετά πρακτικός όταν άξιζε τον κόπο. Μια ιδιαιτερότητα της ανάλυσης του Euler πρέπει να αναφερθεί σύντομα, μιας και υπήρξε σε μεγάλο βαθμό υπεύθυνη για ένα από τα κύρια ρεύματα των μαθηματικών στον 19^ο αιώνα. Ήταν η από μέρους του αναγνώριση πως, εκτός από την περίπτωση που μια άπειρη σειρά συγκλίνει, δεν είναι ασφαλής η χρήση της. Για παράδειγμα με ατέρμονη διαίρεση βρίσκουμε

$$\frac{1}{(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots$$

Αν θέσουμε $x=\frac{1}{2}$, καταλήγουμε στο ατόπημα

$$2 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

Η μελέτη της σύγκλισης δείχνει πως μπορούμε να αποφύγουμε παράδοξα αυτού του τύπου. Το περίεργο είναι πως, ενώ ο Euler καταλάβαινε την αναγκαιότητα να είναι κανείς προσεκτικός όταν χρησιμοποιεί άπειρες διαδικασίες, δεν έδειξε στους σχετικούς χειρισμούς τη δέουσα προσοχή σε μεγάλο μέρος της δουλειάς του. Η πίστη του στην ανάλυση ήταν τόσο μεγάλη, που ενίοτε αναζητούσε μια εξωφρενική «εξήγηση» για την επικύρωση μιας προφανούς ανοησίας. Έχοντας όμως πει όλα τα παραπάνω, πρέπει να προσθέσουμε πως λίγοι έφτασαν ή πλησίασαν τον Euler, στην ποσότητα παραγωγής πρωτότυπου και αξιόλογου έργου. Εκείνοι που αγαπούν την αριθμητική, ένα όχι πολύ «σπουδαίο» αντικείμενο ίσως, θα του απέμεναν ισάξιο στεφάνι στη διοφαντική ανάλυση με εκείνο που φόρεσαν ο Fermat και ο Διόφαντος.

Ο Euler ήταν ο πρώτος και ο μεγαλύτερος, ανάμεσα στους καθολικούς μαθηματικούς. Ούτε ήταν μαθηματικός περιχαρακωμένος στα μαθηματικά: στη λογοτεχνία και σε όλες τις επιστήμες, περιλαμβανομένης και της βιολογίας, ήταν τουλάχιστον καλά διαβασμένος. Όμως ακόμη και όταν απολάμβανε την Αινειάδα του, δεν ήταν δυνατό παρά να δει κάποιο πρόβλημα –πρόσκληση στη μαθηματική του ιδιοφυΐα. Ο στίχος **πέφτει άγκυρα, η βιαστική καρίνα σταματά** τον ώθησε να μελετήσει την κίνηση του πλοίου σε τέτοιες συνθήκες.

Η παμφάγα περιέργεια του καταβρόχθισε κάποτε ακόμη και την αστρολογία, έδειξε όμως πως δεν την είχε χωνέψει, αφού αρνήθηκε ευγενικά να συνθέσει το ωροσκόπιο του Πρίγκιπα Ivan όταν διατάχτηκε να το κάνει το 1740, υποδεικνύοντας πως το ωροσκόπιο είναι η δουλειά του αστρονόμου της αυλής. Ο αστρονόμος έπρεπε να το αναλάβει. Ένα έργο της βερολινέζικης περιόδου τον αποκαλύπτει ως κομπό (αν και κάπως θρησκόληπτο) συγγραφέα, πρόκειται για τα διάσημα **Γράμματα σε μια Γερμανίδα Πριγκίπισσα** που γράφτηκαν για να παραδώσουν μαθηματικά μηχανικής, φυσικής οπτικής, αστρονομίας, θεωρίας ήχου κ.λ.π. στην Πριγκίπισσα του Anhalt-Dessau, ανιψιά του Φρειδερίκου. Αυτά τα γράμματα απέκτησαν τεράστια δημοτικότητα και κυκλοφορήσαν ως βιβλίο σε επτά γλώσσες. Το λαϊκό ενδιαφέρον για την επιστήμη δεν είναι προνόμιο της εποχής μας, όπως συνήθως πιστεύουμε.

Η έκταση του έργου του Euler δεν ήταν γνωστή με ακρίβεια ούτε το 1936, όμως έχει εκτιμηθεί πως εξήντα με ογδόντα τόμοι μεγάλου σχήματος θα απαιτούνταν για την έκδοση των απάντων του. Το **1909** η Ελβετική εταιρεία φυσικών επιστημών ανέλαβε τη συλλογή και δημοσίευση των διασκορπισμένων εργασιών του με την οικονομική ενίσχυση πολλών ιδιωτών και μαθηματικών εταιρειών από όλο τον κόσμο, ισχυριζόμενοι σωστά ότι ο Euler ανήκει σε όλο τον πολιτισμένο κόσμο και όχι μόνο στην Ελβετία. Οι προσεκτικές εκτιμήσεις των πιθανών εξόδων περίπου (80.000 δολάρια του 1909) ανατράπηκαν από την ανακάλυψη στην ακαδημία της Πετρούπολης μιας ολόκληρης μάζας χειρόγραφων του Euler, την ύπαρξη των οποίων δεν υποψιαζόταν κανείς. **Η μαθηματική σταδιοδρομία του Euler εκεί ξεκίνησε τη χρονιά που πέθανε ο Νεύτων.** Καλύτερη εποχή για μια ιδιοφυΐα όπως εκείνη του Euler δε μπορούσε να βρεθεί. Η αναλυτική γεωμετρία (που είδε για πρώτη φορά το φως της δημοσιότητας το 1637) βρισκόταν σε χρήση επί 90 έτη, ο λογισμός περίπου πενήντα και ο νευτώνειος νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας, το κλειδί για τη φυσική αστρονομία, είχε τεθεί υπ' όψιν του μαθηματικού κοινού πριν από 40 έτη.

Στο κάθε ένα από αυτά τα πεδία είχε λυθεί ένας τεράστιος αριθμός μεμονωμένων προβλημάτων με αξιοσημείωτες απόπειρες εδώ και εκεί για ενοποίηση, όμως δεν είχε εξαπολυθεί ακόμη μια συστηματική επιχείρηση ενοποίησης όλων των μαθηματικών, καθαρών και εφαρμοσμένων, με τη μορφή που υπήρχαν τότε.

Ειδικότερα, οι ισχυρές αναλυτικές μέθοδοι των Descartes, Newton και Leibniz δεν είχαν τύχει ακόμη εξαντλητικής εκμετάλλευσης με τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα, ιδιαίτερα στη μηχανική και στη γεωμετρία. Σε ένα χαμηλότερο επίπεδο, η άλγεβρα και η τριγωνομετρία ήταν έτοιμες για συστηματοποίηση και επέκταση, η τελευταία ιδιαίτερα, ήταν έτοιμη για ουσιαστική συμπλήρωση.

Οι διοφαντική ανάλυση και οι ιδιότητες των φυσικών αριθμών, το πεδίο του Fermat, δεν επιδέχονταν μια τέτοια «προσωρινή τελειοποίηση» (ούτε και σήμερα άλλωστε) αλλά και εδώ ακόμη απέδειξε ο Euler τη μαεστρία του. Μπορούμε να πούμε ότι από τα πιο αξιοσημείωτα γνωρίσματα της καθολικής μεγαλοφυΐας του Euler ήταν η δύναμή της και στα δυο κύρια ρεύματα των μαθηματικών, του συνεχούς και του διακριτού. Ως αλγοριθμιστής ο Euler υπήρξε αξεπέραστος και πιθανό σε απόσταση από τους άλλους, με εξαίρεση ίσως τον Jacobi. Αλγοριθμιστής είναι ο μαθηματικός που επινοεί αλγόριθμους (ή αλγόριθμους) για τη λύση ειδικών προβλημάτων. Σαν ένα πολύ απλό παράδειγμα, υποθέτουμε (ή αποδεικνύουμε) πως κάθε θετικός πραγματικός αριθμός έχει μια πραγματική τετραγωνική ρίζα. Πως όμως θα υπολογιστεί η ρίζα; Υπάρχουν πολλοί γνωστοί τρόποι, ένας αλγοριθμιστής επινοεί τέτοιες πρακτικές μεθόδους. Ή για να επανέλθουμε ξανά στη διοφαντική ανάλυση και στον ολοκληρωτικό λογισμό, η λύση ενός προβλήματος μπορεί να μην είναι ορατή μέχρι να γίνει κάποια ευφυής (συχνά απλή) αντικατάσταση μιας ή περισσότερων μεταβλητών από συναρτήσεις άλλων μεταβλητών.

Αλγοριθμιστής είναι ο μαθηματικός στον οποίο τέτοια έξυπνα τεχνάσματα έρχονται με φυσικό τρόπο. Δεν υπάρχει συστηματικός τρόπος αναζήτησης, οι αλγοριθμιστές όπως και οι προικισμένοι στιχουργοί, γεννιούνται, δε γίνονται. Είναι της μόδας σήμερα να περιφρονείται όποιος είναι απλός αλγοριθμιστής, παρ' όλα αυτά, όταν ένας πραγματικά μεγάλος του είδους, όπως ο Ινδός Ramanujan, εμφανίζεται απροσδόκητα από το πουθενά, ακόμη και οι πιο ειδήμονες της ανάλυσης τον χαιρετίζουν σαν δώρο εξ ουρανού. Η σχεδόν υπερφυσική ενόραση του για φαινομενικά ασύνδετες φόρμουλες, αποκαλύπτει κρυφά μονοπάτια που οδηγούν από τη μια περιοχή στην άλλη και οι συστηματικοί της ανάλυσης διαβλέπουν νέους στόχους στο ξεκαθάρισμα των μονοπατιών. Ένας αλγοριθμιστής είναι ένας φορμαλιστής που αγαπά τις όμορφες φόρμουλες αυτές καθ' εαυτές.

Πρέπει να μνημονεύσουμε δυο περιστάσεις που διεύρυναν την καταπληκτική δραστηριότητά του και της έδωσαν μία κατεύθυνση. Τον 18^ο αιώνα τα Πανεπιστήμια δεν ήταν τα κύρια ερευνητικά κέντρα στην Ευρώπη. Θα μπορούσαν να είχαν γίνει τέτοια νωρίτερα, αλλά αυτό προσέκρουσε στην κλασική παράδοση και την εύλογη εχθρότητα της προς την επιστήμη. Τα μαθηματικά κρατούσαν σε μεγάλο βαθμό από την αρχαιότητα και για αυτό τύχαιναν εκτίμησης, πράγμα που δε συνέβαινε με τη φυσική. Επιπλέον, ένας μαθηματικός σε ένα Πανεπιστήμιο της εποχής, αναμενόταν να επενδύσει πολλή προσπάθεια στη διδασκαλία στοιχειωδών πραγμάτων, η έρευνά του, αν γινόταν καθόλου, θα ήταν μια πολυτέλεια χωρίς οικονομικό όφελος, ακριβώς όπως συμβαίνει σήμερα σε ένα μέσο Αμερικανικό ίδρυμα ανώτερης παιδείας. Τα μέλη των Βρετανικών πανεπιστημίων μπορούσαν να κάνουν ότι ήθελαν.

Λίγοι όμως αποφάσισαν να κάνουν κάτι και ότι κατάφερναν (ή δεν κατάφερναν) δε μπορούσε να επηρεάσει τις απολαβές τους. Σε ένα τέτοιο καθεστώς χαλαρότητας ή εμφανούς εχθρότητας, δεν υπήρχε αποχρών λόγος για να προχωρήσουν τα Πανεπιστήμια στο δρόμο της επιστήμης και δεν το έκαναν. Έτσι, τον πρώτο ρόλο ανέλαβαν να παίζουν οι διάφορες βασιλικές Ακαδημίες, υποστηριζόμενες από γενναιόδωρους και διορατικούς ηγεμόνες. Τα μαθηματικά οφείλουν πάρα πολλά στο Φρειδερίκο τον Μεγάλο της Πρωσίας και στην Αικατερίνη τη Μεγάλη της Ρωσίας, για την ευρύτητα πνεύματος του φιλελευθερισμού τους. Αυτοί έκαναν δυνατή την επί έναν αιώνα συνεχή μαθηματική πρόοδο, σε μια από τις πιο δραστήριες περιόδους στην ιστορία της επιστήμης. Στην περίπτωση του Euler, το Βερολίνο και η Πετρούπολη προσέφεραν τα νεύρα της μαθηματικής δημιουργίας.

Και οι δύο αυτές εστίες δημιουργικότητας όφειλαν την έμπνευσή τους στην ακούραστη φιλοδοξία του Leibniz. Οι Ακαδημίες που είχαν σχεδιαστεί από τον Leibniz, έδωσαν στο Euler την ευκαιρία να γίνει ο παραγωγικότερος μαθηματικός όλων των εποχών, έτσι κατά μία έννοια ο Euler ήταν ο εγγονός του Leibniz. Η ακαδημία του Βερολίνου αργόσβηνε επί σαράντα χρόνια από έλλειψη εγκεφάλων όταν ο Euler, με την υποκίνηση του Φρειδερίκου του Μεγάλου, την έσπρωξε ξανά στη ζωή και η Ακαδημία της Πετρούπολης, στην οποία ο Πέτρος ο Μεγάλος δεν πρόλαβε να οργανώσει σύμφωνα με το πρόγραμμα του Leibniz, θεμελιώθηκε σταθερά από τη διάδοχό του. Αυτές οι ακαδημίες δεν ήταν όπως ορισμένες σήμερα, που η κύρια λειτουργία τους είναι η απονομή της ιδιότητας του μέλους σε αναγνώριση ενός καλού έργου που ήδη έχει γίνει. Ήταν ερευνητικοί οργανισμοί που πλήρωναν τα κύρια μέλη τους για να παράγουν επιστημονική έρευνα.

Επιπλέον, οι μισθοί και τα επιμίσθια ήταν αρκετά ώστε ζήσει κάποιος και η οικογένειά του με αξιοπρέπεια. Στο σπίτι του Euler έμεναν κάποτε όχι λιγότερα από δεκαοκτώ άτομα και όμως, του προσφέρονταν τα μέσα για να τους ζήσει όλους με επαρκή τρόπο. Για να δώσουμε μια τελική πινελιά ελκυστικότητας στη ζωή ενός ακαδημαϊκού του 18^{ου} αιώνα, αρκεί να πούμε ότι αν τα παιδιά του είχαν κάποιο ταλέντο, τότε είχαν εξασφαλισμένο ένα καλό ξεκίνημα. Αυτό μας φέρνει σε μια δεύτερη κυρίαρχη επίδραση στην τεράστια μαθηματική παραγωγή του Euler.

Οι ηγεμόνες που πλήρωναν τους λογαριασμούς ήθελαν φυσικά κάτι περισσότερο από αφηρημένη κουλτούρα έναντι των χρημάτων τους. Πρέπει όμως να τονιστεί πως, εφόσον έπαιρναν λογική ανταπόδοση για την επένδυσή τους, δεν επέμεναν να ξοδεύουν οι υπάλληλοί τους το υπόλοιπο χρόνο τους, σε παραγωγική εργασία, ο Euler, ο Lagrange και οι άλλοι ακαδημαϊκοί ήταν ελεύθεροι να κάνουν ότι ήθελαν. Ούτε ασκούσαν πίεση έως τα όρια της ανοχής για να στύψουν τα λίγα άμεσης πραγματικής απόδοσης αποτελέσματά, που η πολιτεία μπορούσε να χρησιμοποιήσει. Σοφότεροι για την εποχή τους από ότι πολλοί διευθυντές ερευνητικών ιδρυμάτων σήμερα, οι ηγεμόνες του 18^{ου} αιώνα υποδείκνυαν κάπου – κάπου τις άμεσες ανάγκες

τους και άφηναν την επιστήμη να ακολουθήσει το δρόμο της. Φαινόταν να καταλαβαίνουν από ένστικτο, πως η αποκαλούμενη καθαρή έρευνα θα μπορούσε να δώσει ως παράγωγα τα πρακτικά πράγματα που επιθυμούσαν, αν γινόταν η σωστή υπόδειξη από καιρού εις καιρόν.

11. Euler και ναυσιπλοΐα

Στη γενική αυτή θέση υπάρχει μια εξαίρεση, η οποία ούτε αποδεικνύει ούτε αντικρούει τον κανόνα. Συνέβησαν έτσι τα πράγματα, ώστε το κορυφαίο πρόβλημα στη μαθηματική έρευνα στα χρόνια του Euler να συμπίπτει με το πρώτο ίσως πρακτικό πρόβλημα του αιώνα, τον έλεγχο των θαλασσών. Εκείνο το έθνος που η τεχνική του στη ναυσιπλοΐα ξεπερνούσε την τεχνική των ανταγωνιστικών εθνών, θα εξουσίαζε αναπόφευκτα τις θάλασσες. Όμως η ναυσιπλοΐα είναι στην ουσία ένα ζήτημα ακριβούς καθορισμού της θέσης κάποιου στη θάλασσα, εκατοντάδες μίλια μακριά από την ξηρά, πράγμα εξαιρετικά σημαντικό για την επιτυχή προετοιμασία μιας ναυμαχίας. Η Βρετανία εξουσίαζε τις θάλασσες. Αυτό οφειλόταν σε αξιόλογο βαθμό στο ότι οι πλοηγοί των καραβιών της ήταν σε θέση να εκμεταλλευτούν πρακτικά τα αποτελέσματα των καθαρά μαθηματικών ερευνών στην ουράνια μηχανική κατά τον 18^ο αιώνα. Μια τέτοια εφαρμογή απασχόλησε τον Euler άμεσα.

Ο θεμελιωτής της σύγχρονης πλοήγησης είναι βέβαια ο Newton, αν και ο ίδιος δε σκοτίστηκε ποτέ για αυτήν και ποτέ (από όσο τουλάχιστον μας είναι γνωστό) δεν πάτησε το πόδι του σε κατάστρωμα πλοίου. Η θέση στη θάλασσα προσδιορίζεται από παρατηρήσεις των ουράνιων σωμάτων (που ενίοτε περιλαμβάνουν τους δορυφόρους του Δία, σε πραγματικά εντυπωσιακές πλοήγησης) και αφού ο νευτώνειος νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας υποδείκνυε τη δυνατότητα να υπολογιστούν προκαταβολικά για έναν αιώνα (αν φυσικά υπήρχε η ανάλογη ανάγκη και υπομονή) οι θέσεις των πλανητών και η φάση της Σελήνης, εκείνοι που ήθελαν να κυριαρχήσουν στις θάλασσες έβαζαν τους επί των υπολογισμών να προσδιορίσουν μελλοντικές θέσεις με βάση το ναυτιλιακό αλμανάκ. Σε ένα τέτοιο πρακτικό εγχείρημα η Σελήνη παρουσιάζει ένα ιδιαίτερα δύσκολο πρόβλημα, εκείνο των τριών σωμάτων που ασκούν αμοιβαίες έλξεις μεταξύ τους σύμφωνα με το νόμο του Newton. Αυτό το πρόβλημα θα εμφανιστεί πολλές φορές καθώς προχωρούμε προς τον 20^ο αιώνα, ο Euler ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε μια επιδεκτική υπολογισμού λύση του προβλήματος της Σελήνης (η σεληνιακή θεωρία). Τα τρία σώματα είναι η Σελήνη, η Γη και ο Ήλιος. Είναι ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα σε όλο το φάσμα των μαθηματικών.

Ο Euler δεν το έλυσε, όμως η μέθοδος προσεγγιστικού υπολογισμού που πρότεινε (ξεπερασμένη σήμερα από καλύτερες μεθόδους) ήταν αρκετά πρακτική ώστε να αξιοποιηθεί από κάποιον Άγγλο επιφορτισμένο με τις υπολογιστικές πράξεις στον καταρτισμό των πινάκων της Σελήνης για λογαριασμό του Βρετανικού Αρχηγείου του Ναυτικού. Για τη δουλειά του ο Άγγλος πήρε 5.000 λίρες (σημαντικό ποσό για εκείνη την εποχή) ενώ στον Euler δόθηκε ένα δώρο 300 λιρών για την προσφορά της μεθόδου.

12. Ο θάνατος του Euler

Ο Euler διατήρησε την πνευματική του ζωντάνια και δύναμη μέχρι τις τελευταίες στιγμές πριν το θάνατό του, στις **18.09.1788**, όταν ήταν 77 ετών. Αφού πέρασε ευχάριστα το απόγευμα υπολογίζοντας τους νόμους της ανόδου των μπαλονιών στην πλάκα γραφής του, δείπνησε ως συνήθως με τον Lexell και την οικογένειά του. Ο «**πλανήτης του Herschel**» (ο Ουρανός) είχε ανακαλυφθεί πρόσφατα, ο Euler σκιαγραφεί τον υπολογισμό της τροχιάς του. Λίγο αργότερα ζήτησε να του φέρουν το εγγόνι του. Ενώ έπαιζε με τα παιδιά και έπινε τσάι, υπέστη μια προσβολή. Η πίπα έπεσε από το χέρι και με τη λέξη «πεθαίνω» ο Euler σταμάτησε να ζει και να υπολογίζει.

13. Φυσική και αστρονομία

Ο Euler βοήθησε στην ανάπτυξη της εξίσωσης δοκού Euler–Bernoulli, η οποία έγινε ο ακρογωνιαίος λίθος της μηχανικής. Εκτός από την επιτυχή εφαρμογή των αναλυτικών εργαλείων του στα προβλήματα της κλασικής μηχανικής, ο Euler εφάρμοσε αυτές τις τεχνικές και στα ουράνια προβλήματα. Το έργο του στην αστρονομία αναγνωρίστηκε με μια σειρά βραβείων από την Ακαδημία του Παρισιού κατά τη διάρκεια της καριέρας του. Επιτεύγματά του περιλαμβάνουν τον προσδιορισμό με μεγάλη ακρίβεια των τροχιών των κομητών και άλλων ουράνιων σωμάτων, την κατανόηση της φύσης των κομητών και τον υπολογισμό της παράλλαξης του Ήλιου. Οι υπολογισμοί του συνέβαλαν επίσης στην ανάπτυξη των ακριβών πινάκων γεωγραφικού μήκους. Επιπλέον, ο Euler συνέβαλε σημαντικά στην οπτική. Διαφώνησε με τη σωματιδιακή θεωρία του φωτός του Newton στα *Opticks*, η οποία ήταν τότε η επικρατούσα θεωρία. Το 1740 οι μελέτες του σχετικά με την οπτική βοήθησαν να διασφαλιστεί ότι η θεωρία των κυμάτων του φωτός που προτείνει ο Κρίστιαν Χόιγκενς θα γίνει ο κυρίαρχος τρόπος σκέψης, τουλάχιστον μέχρι την ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας του φωτός. Το 1757 δημοσίευσε ένα σημαντικό σύνολο εξισώσεων για την ροή ιδανικού υγρού χωρίς τη χρήση ιξώδους, που είναι γνωστές σήμερα ως εξισώσεις Euler.

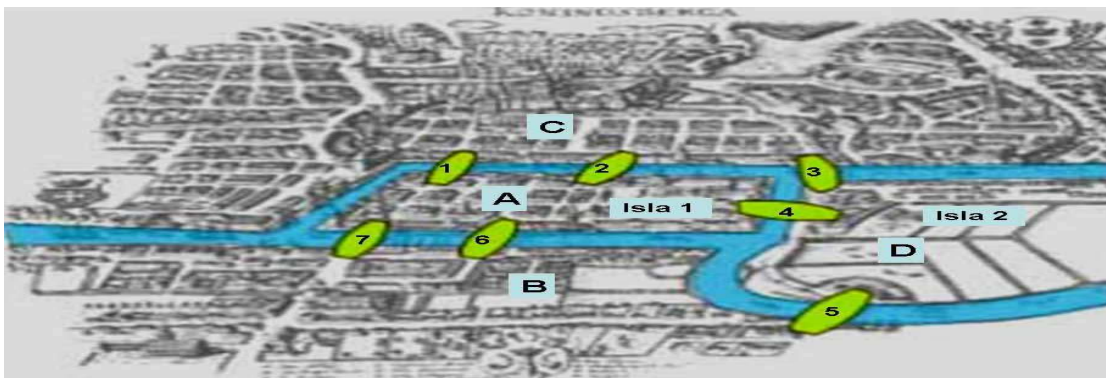
14. Λογική

Στον Euler οφείλεται η χρήση κλειστών καμπυλών για να τονίσει τη συλλογιστική λογική (1768). Αυτά τα διαγράμματα έχουν γίνει γνωστά ως διαγράμματα Euler.

15. Θεωρία γράφων

Το 1736, έλυσε το πρόβλημα που είναι γνωστό ως επτά γέφυρες του Königsberg. Η πόλη του Königsberg, στην Πρωσία χτίστηκε στον ποταμό Πρέγκελ και περιλάμβανε δύο μεγάλα νησιά που συνδέονταν μεταξύ τους και με την ηπειρωτική χώρα με επτά γέφυρες. Το πρόβλημα είναι να αποφασιστεί κατά πόσον είναι δυνατόν να ακολουθηθεί μια διαδρομή που διασχίζει κάθε γέφυρα ακριβώς μια φορά και να επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης. Η απάντηση είναι ότι δεν είναι δυνατό, δηλαδή δεν υπάρχει μονοπάτι του Euler. Η λύση αυτή θεωρείται ότι είναι το 1^ο θεώρημα της θεωρίας γράφων, ειδικότερα της θεωρίας των επίπεδων γράφων.

Ο Euler επινόησε τον τύπο $K + E = A + 2$, που συσχετίζει τον αριθμό των κορυφών, των ακμών και των εδρών ενός κυρτού πολυέδρου και ως εκ τούτου ενός επίπεδου γραφήματος. Η τιμή $K + E - A$ είναι σήμερα γνωστή ως η χαρακτηριστική Euler του γραφήματος (ή κάποιου άλλο μαθηματικού αντικειμένου) και σχετίζεται με το γένος του αντικειμένου. Η μελέτη και γενίκευση αυτού του τύπου, ειδικά από τους Cauchy και L'Huilier, αποτελεί την αρχή της τοπολογίας.



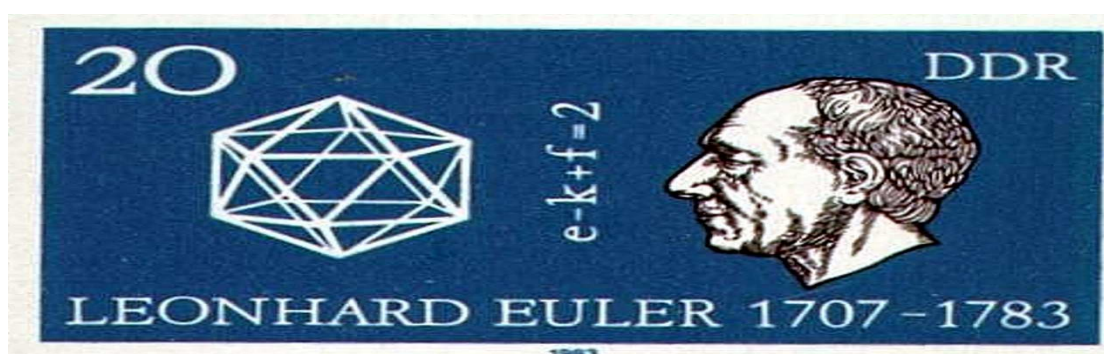
16. Επέτειοι

Ο Euler απεικονίστηκε στο ελβετικό χαρτονόμισμα των 10 φράγκων και σε πολυάριθμα γραμματόσημα της Ελβετίας, της Γερμανίας και της Ρωσίας. Ο αστεροειδής 2002 Euler ονομάστηκε προς τιμήν του. Μνημονεύεται από την Λουθηρανική εκκλησία στο ημερολόγιο των Αγίων της στις 24 Μαΐου.



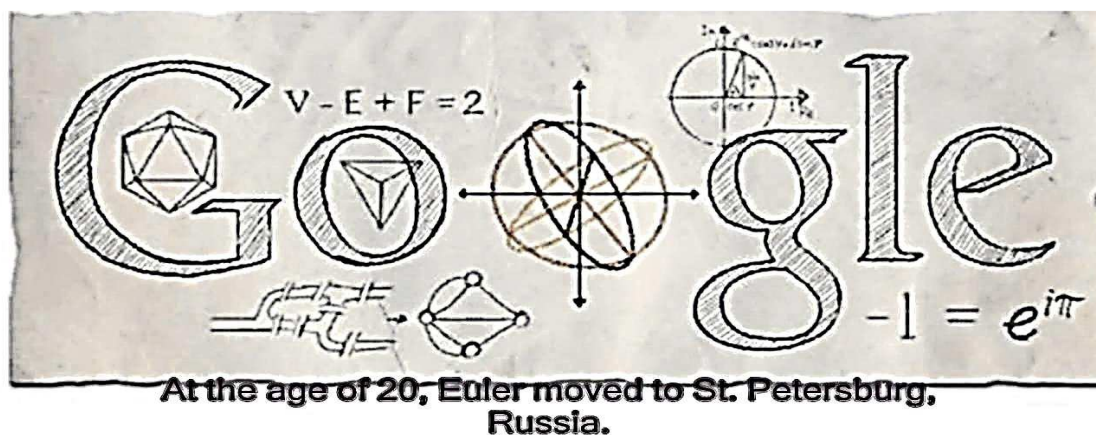
Download from Dreamstime.com
This watermarked sample image is for previewing purposes only.

96889368
Sergei Nezhinski | Dreamstime.com





Ήταν ένας αφοσιωμένος Χριστιανός (πιστός στην αδιαμφισβήτητη αλήθεια της Βίβλου) που έγραψε απολογητική και πολέμησε σθεναρά εναντίον των επιφανών αθεϊστών της εποχής του. Στις 15.04.2013, τα 306α γενέθλια του Euler εορτάστηκαν με ένα Google Doodle.



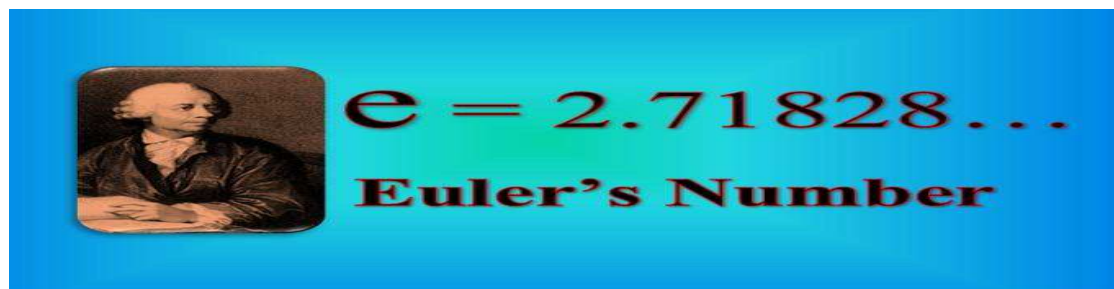
17. Μαθηματική σημειογραφία

Ο Euler εισήγαγε και διέδωσε αρκετούς συμβατικούς συμβολισμούς μέσα από τα πολυάριθμα και ευρείας κυκλοφορίας εγχειρίδιά του. Πιο συγκεκριμένα, εισήγαγε την έννοια της συνάρτησης και ήταν ο πρώτος που έγραψε το $f(x)$ το οποίο χαρακτηρίζει τη συνάρτηση f που εφαρμόζεται στη μεταβλητή x . Εισήγαγε τη σύγχρονη σημειογραφία για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, το γράμμα e για τη βάση του φυσικού λογαρίθμου (γνωστό σήμερα και ως αριθμός του Euler), το γράμμα Σ για τα αθροίσματα και το γράμμα i να υποδηλώσει τη φανταστική μονάδα. Η χρήση του γράμματος π για να υποδηλώσει την αναλογία περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του επίσης διαδόθηκε από τον Euler, αν και δεν προέρχεται από αυτόν.

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$



$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



18. Euler και θεωρία αριθμών

Το ενδιαφέρον του Euler για τη θεωρία αριθμών μπορεί να αποδοθεί στην επίδραση του Christian Goldbach, φίλου του από την Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης. Ένα μεγάλο μέρος του αρχικού έργου του Euler στην αριθμητική θεωρία βασίστηκε στο έργο του Fermat. Ο Euler ανέπτυξε κάποιες από τις ιδέες του Fermat και διέψευσε κάποιες από τις εικασίες του. Ο Euler συνέδεσε τη μορφή της κατάταξης των πρώτων αριθμών με ιδέες στην ανάλυση. Απέδειξε ότι το άθροισμα των αντίστροφων των πρώτων αριθμών αποκλίνει. Με αυτό τον τρόπο, ανακάλυψε τη σχέση μεταξύ της συνάρτησης Ζήτα και των πρώτων αριθμών και αυτό είναι γνωστό ως ο τύπος του Euler για τη συνάρτηση Ζήτα. Απέδειξε τις ταυτότητες του Newton, το μικρό θεώρημα του Fermat, το θεώρημα του Fermat για το άθροισμα των τετραγώνων δύο αριθμών και συνέβαλε σημαντικά στο θεώρημα των τεσσάρων τετραγώνων του Lagrange. Επίσης όρισε τη συνάρτηση Euler $\varphi(n)$ που μετρά το πλήθος των θετικών ακεραίων μικρότερων ή ίσων του n που είναι σχετικά πρώτοι με

το n . Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες αυτής της συνάρτησης, ο ίδιος γενίκευσε το μικρό θεώρημα του Fermat σε αυτό που είναι σήμερα γνωστό ως θεώρημα του Euler.

Συνέβαλε σημαντικά στη θεωρία των τέλειων αριθμών, η οποία είχε συναρπάσει τους μαθηματικούς από την εποχή του Ευκλείδη και διατύπωσε τον νόμο της τετραγωνικής αμοιβαιότητας. Η έννοια αυτή θεωρείται ως το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των αριθμών, και οι ιδέες του, άνοιξαν το δρόμο για το έργο του Gauss. Το 1772 απέδειξε ότι ο 2.147.483.647 είναι πρώτος αριθμός Μερσέν. Μπορεί να παρέμεινε ο πιο μεγάλος γνωστός πρώτος αριθμός έως το 1867.

Βιβλιογραφία

- Αναπολιτάνος Δ. (1985). «Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών», Δ΄ έκδοση, Αθήνα: Νεφέλη.
- Παντελίδης Γ. – Κραββαρίτης Δ. (1997). «Λεξικό μαθηματικών», Αθήνα: Πατάκης.
- E. Bell, (2000). «Οι μαθηματικοί», τόμος 1, 3^η έκδοση, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Karl B. Boyer–Uta C. Merzbach, (1968). «Η ιστορία των μαθηματικών», 2^η έκδοση, Αθήνα: Πνευματικός.
- D. Davis, (2001). «Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών», Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- H. Evans, (1990). «Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών μετά το 1650», τόμος 2, Αθήνα: τροχαλία.
- G. Loria, «Ιστορία των μαθηματικών», τόμος 3^A, Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- R. Mankiewicz, (2002). «Η ιστορία των μαθηματικών», Αθήνα: Αλεξάνδρεια.
- G. Polya, (2001). «Η μαθηματική ανακάλυψη», τόμος 1, Αθήνα: κάτοπτρο.
- D. Smith, (1951). «History of mathematics», volume 1, New York: Dover Publications, INC.
- D. Struik, (1980). «Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών», β΄ έκδοση, Αθήνα: Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος.