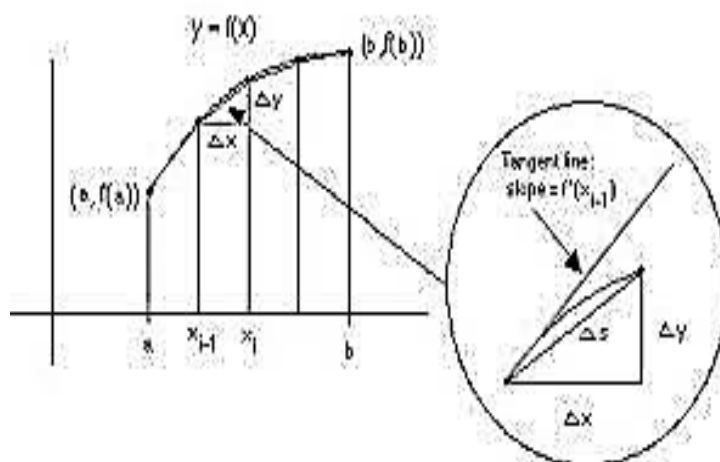




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Μήκος τόξου καμπύλης

Σπουδαστές: **Μητσακόπουλος Παναγιώτης** (AM 9073)
Μερσινάϊ Μαρίνος (AM 9072)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς**, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής.

Ακαδημαϊκό έτος: **2023–2024**

Ημερομηνία ανάθεσης: 15.12.2023
 Ημερομηνία κατάθεσης: 24.04.2024
 Ημερομηνία εξέτασης: 13.05.2024

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Δέκα 10	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Δρ. Αναστασόπουλος Γεώργιος Μηχανολόγος Μηχανικός Επίκουρος Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά	2
Περίληψη	2
1. Ιστορική εξέλιξη της μέτρησης του μήκους του τόξου μίας καμπύλης γραμμής.....	4
1.1 Η Αρχαιότητα	4
1.2 Ο 17 ^{ος} αιώνας	4
1.3 Μορφή του ολοκληρώματος.....	4
1.4 Καμπύλες γραμμές με άπειρο μήκος	4
1.5 Γενίκευση σε ψευδο-Riemannian πολλαπλότητες	5
1.6 Τόξα των κύκλων	5
1.7 Τόξα των μεγίστων κύκλων της Γης.....	6
1.8 Το ναυτικό μίλι	6
1.9 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα	7
1.10 Μήκος τόξου	8
1.11 Μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής.....	9
1.12 Εύρεση των ορίων ολοκλήρωσης	10
1.13 Εφαρμογές	10
1.14 Μήκος του τόξου επίπεδης καμπύλης γραμμής, σε πολικές συντεταγμένες.....	24
1.15 Εφαρμογές	24
Βιβλιογραφία	33

Λέξεις κλειδιά

Συγχορδιακή απόσταση, μήκος του τόξου, μέθοδος της εξάντλησης, χιλιόμετρο, ναυτικό μίλι, *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica*, κανονική τεθλασμένη γραμμή, περιγεγραμμένη τεθλασμένη γραμμή, εγγεγραμμένη τεθλασμένη γραμμή

Περίληψη

Ο καθορισμός του μήκους των αντικανονικών τμημάτων του τόξου, ονομάζεται και ευθυγράμμιση της καμπύλης. Ιστορικά, πολλές μέθοδοι

χρησιμοποιήθηκαν για συγκεκριμένες καμπύλες. Η έλευση του απειροστικού λογισμού, οδήγησε σε μια γενική φόρμουλα που παρέχει κλειστού τύπου λύσεις σε ορισμένες περιπτώσεις. Μία καμπύλη γραμμή στο επίπεδο, μπορεί να προσεγγιστεί από τη σύνδεση ενός πεπερασμένου αριθμού σημείων στην καμπύλη χρησιμοποιώντας τμήματα της γραμμής για να δημιουργήσω ένα πολυγωνικό μονοπάτι. Δεδομένου ότι είναι εύκολο να υπολογιστεί το μήκος του κάθε γραμμικού τμήματος, (χρησιμοποιώντας το πυθαγόρειο θεώρημα σε ευκλείδειο χώρο), το συνολικό μήκος της προσέγγισης μπορεί να βρεθεί από την άθροιση των μηκών του κάθε γραμμικού τμήματος. Αυτή η προσέγγιση είναι γνωστή ως η (σωρευτικά) **συγχορδιακή απόσταση**.

Αν η καμπύλη δεν είναι ήδη μία πολυγωνική διαδρομή, τότε χρησιμοποιώντας έναν προοδευτικά μεγαλύτερο αριθμό τμημάτων, με μικρότερο μήκος, θα επιτύχω καλύτερη προσέγγιση. Τα μήκη των διαδοχικών προσεγγίσεων δεν θα μειωθούν, το πλήθος τους μπορεί να αυξάνεται επ' άπειρο, αλλά οι ομαλές καμπύλες θα τείνουν σε ένα πεπερασμένο όριο, καθώς τα μήκη των τμημάτων μικραίνουν αυθαίρετα. Για κάποιες καμπύλες, υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός L ο οποίος είναι ένα άνω όριο του μήκους της κάθε πολυγωνικής προσέγγισης. Αυτές οι καμπύλες, ονομάζονται ευθυγραμμίσιμες και ο αριθμός L ορίζεται ως το **μήκος του τόξου**.

1. Ιστορική εξέλιξη της μέτρησης του μήκους του τόξου μίας καμπύλης γραμμής

1.1 Η Αρχαιότητα

Για ένα μεγάλο τμήμα της ιστορίας των μαθηματικών, ακόμα και οι μεγαλύτεροι στοχαστές θεώρησαν αδύνατο να υπολογιστεί το μήκος του ακανόνιστου τόξου. Παρά το γεγονός ότι ο Αρχιμήδης είχε πρωτοπορήσει έναν τρόπο για την εξεύρεση του χώρου κάτω από μια καμπύλη με τη «μέθοδο της εξάντλησης», λίγοι πίστευαν ότι ήταν ακόμη δυνατό για τις καμπύλες να έχουν σαφή μήκη, όπως και για τις ευθείες γραμμές. Ο 1^{ος} λόγος καταρρίφθηκε σε αυτό τον τομέα, όπως συχνά έχει γίνει στο λογισμό, με προσέγγιση. Οι άνθρωποι άρχισαν να εγγράφουν πολύγωνα εντός των καμπυλών και να υπολογίζουν το μήκος των πλευρών για μία κάπως ακριβή μέτρηση του μήκους. Με τη χρήση περισσότερων τμημάτων και μειώνοντας το μήκος του κάθε τμήματος, ήταν σε θέση να αποκτήσουν μία ολοένα και πιο ακριβή προσέγγιση. Ειδικότερα, με την εγγραφή ενός πολυγώνου πολλών πλευρών σε έναν κύκλο, ήταν σε θέση να βρουν κατά προσέγγιση διάφορες τιμές του π .

1.2 Ο 17^{ος} αιώνας

Τον 17^ο αιώνα, η μέθοδος της εξάντλησης οδήγησε στην ευθυγράμμιση με γεωμετρικές μεθόδους, από αρκετές υπερβατικές καμπύλες όπως η:

- λογαριθμική σπείρα από τον Evangelista Torricelli το 1645 (ή κατά άλλους από τον John Wallis το 1650),
- κυκλοειδής καμπύλη από τον Christopher Wren το 1658 και
- αλυσοειδής καμπύλη από τον Gottfried Leibniz το 1691.

Το 1659 ο Wallis πιστώνεται την ανακάλυψη του William Neile της πρώτης ευθυγράμμισης μίας μη τετριμμένης αλγεβρικής καμπύλης, την ημικυβική παραβολή. Πριν από την πλήρη επίσημη ανάπτυξη του λογισμού, η βάση για τη σύγχρονη ολοκληρωτική μορφή για το μήκος του τόξου, ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από τους Hendrik van Heuraet και Pierre de Fermat.

Το 1659 ο Hendrik van Heuraet δημοσίευσε μία κατασκευή που δείχνει ότι το πρόβλημα προσδιορισμού του μήκους του τόξου, μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα προσδιορισμού της περιοχής κάτω από μία καμπύλη (δηλαδή, αποτελεί αναπόσπαστο). Ως παράδειγμα της μεθόδου του, καθόρισε το μήκος του τόξου μίας ημικυβικής παραβολής, το οποίο απαιτείται για να βρεθεί η περιοχή κάτω από μια παραβολή.

Το 1660, ο Fermat δημοσίευσε μία πιο γενική θεωρία που περιέχει το ίδιο αποτέλεσμα, στο έργο του *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica* (Γεωμετρική διατριβή για καμπύλες γραμμές σε σύγκριση με ευθείες γραμμές).

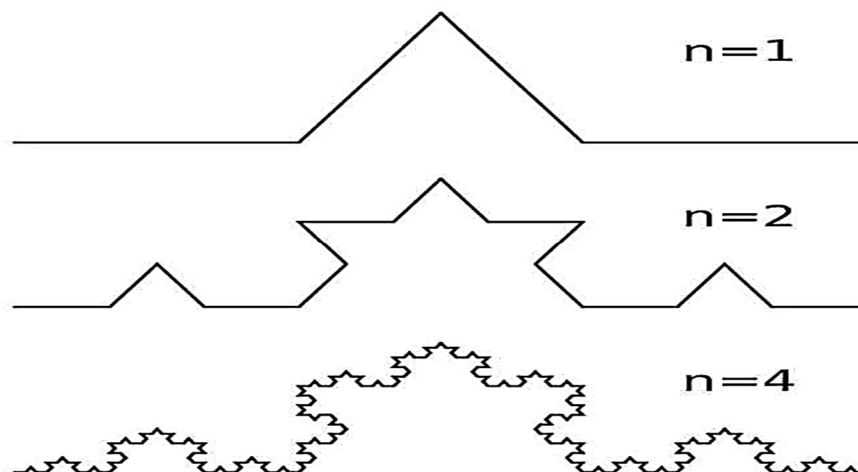
1.3 Μορφή του ολοκληρώματος

Πριν από την πλήρη επίσημη ανάπτυξη του λογισμού, η βάση για τη σύγχρονη ολοκληρωτική μορφή για τον υπολογισμό του μήκους του τόξου, ανακαλύφθηκε από τους Hendrik van Heuraet και Pierre de Fermat.

1.4 Καμπύλες γραμμές με άπειρο μήκος

Μερικές καμπύλες είναι μη ευθυγραμμίσιμες. Δηλαδή, δεν υπάρχει ανώτατο όριο για τα μήκη των πολυγωνικών προσεγγίσεων, το μήκος μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλο. Ανεπίσημα, οι εν λόγω καμπύλες λέγεται ότι έχουν άπειρο μήκος. Υπάρχουν συνεχείς καμπύλες επί των οποίων κάθε τόξο (εκτός από ένα μόνο σημείο τόξου) έχει άπειρο μήκος. Ένα παράδειγμα μίας τέτοιας καμπύλης είναι η

καμπύλη Koch. Ένα άλλο παράδειγμα μίας καμπύλης με άπειρο μήκος είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ που ορίζεται για κάθε ανοικτό σύνολο και $f(0) = 0$. Μερικές φορές η Hausdorff διάσταση και το μέτρο Hausdorff, χρησιμοποιούνται για την ποσοτικοποίηση του μεγέθους αυτών των καμπυλών.



1.5 Γενίκευση σε ψευδο-Riemannian πολλαπλότητες

Έστω M είναι μια (ψευδο-) Riemannian πολλαπλότητα, $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ μια καμπύλη στην M και g ένας (ψευδο-) μετρικός χώρος. Το μήκος του γ ορίζεται να είναι $\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\pm g(\gamma'(t))} dt$, όπου $\gamma'(t) \in T(\gamma(t))$. M είναι το διάνυσμα

εφαπτομένη της g σε t . Το πρόσημο της τετραγωνικής ρίζας επιλέγεται μία φορά για μία δεδομένη καμπύλη, για να εξασφαλιστεί ότι η τετραγωνική ρίζα είναι ένας πραγματικός αριθμός. Το θετικό πρόσημο επιλέγεται για καμπύλες χώρου, σε έναν ψευδο-Riemannian συλλέκτη. Το αρνητικό πρόσημο, μπορεί να επιλεγεί για καμπύλες χρόνου. Έτσι, το μήκος μίας καμπύλης είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Συνήθως, δεν υπάρχουν καμπύλες που θεωρούνται εν μέρει χώρου και εν μέρει χρόνου. Στη θεωρία της σχετικότητας, μήκος τόξου καμπυλών χρόνου (παγκόσμιες γραμμές) είναι ο ιδανικός χρόνος που θα παρέλθει κατά μήκος της παγκόσμιας γραμμής και μήκος του τόξου μίας καμπύλης του χώρου είναι η ιδανική απόσταση κατά μήκος της καμπύλης.

1.6 Τόξα των κύκλων

Τα μήκη των τόξων συμβολίζονται με ℓ (εκ του length) ή με s , δεδομένου ότι η λατινική λέξη για το μήκος (ή το μέγεθος) είναι spatium. Παρακάτω:

r είναι η ακτίνα ενός κύκλου,

d είναι η διάμετρος του,

C είναι περιφέρειά του,

ℓ είναι το μήκος ενός τόξου του κύκλου και

θ είναι η γωνία η οποία το τόξο υποτείνει στο κέντρο του κύκλου.

Οι αποστάσεις r , d , C , s εκφράζονται στις ίδιες μονάδες.

- Είναι $C = 2\pi r = \pi d$ (Αυτή η εξίσωση είναι ο ορισμός του π)

- Αν το τόξο είναι ημικύκλιο, τότε $C = \pi r = \pi \frac{d}{2}$.
- Αν η γωνία θ είναι σε ακτίνια, τότε $\ell = r\theta$.
- Αν η γωνία θ είναι σε μοίρες, τότε $\ell = \frac{\pi r \theta}{180} = \frac{2\pi r \theta}{360} = \frac{C\theta}{180}$.
- Αν η γωνία θ είναι σε βαθμούς (100 βαθμούς ή gradians είναι η μία ορθή γωνία), τότε $\ell = \frac{\pi r \theta}{200} = \frac{2\pi r \theta}{400} = \frac{C\theta}{400}$.
- Αν η γωνία θ είναι σε στροφές (μία στροφή είναι μία πλήρης περιστροφή, ή 360° ή 400 βαθμούς, ή 2 ακτίνια), τότε $\ell = C\theta$.

1.7 Τόξα των μεγίστων κύκλων της Γης

Δύο μονάδες μέτρησης του μήκους, το **ναυτικό μίλι** (ν.μ.) και το **χιλιόμετρο** (Km), είχαν αρχικά οριστεί έτσι ώστε τα μήκη των τόξων των μεγίστων κύκλων στην επιφάνεια της Γης, να σχετίζονται απλά αριθμητικά με τις γωνίες που υποτείνουν στο κέντρο του. Η απλή εξίσωση, ισχύει στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- αν το μήκος ℓ του τόξου είναι σε ναυτικά μίλια και η γωνία θ είναι σε λεπτά του τόξου (1/60 βαθμού) ή
- αν το μήκος ℓ του τόξου είναι σε χιλιόμετρα και η γωνία θ είναι σε βαθμούς (1/100 grad).

Το μήκος της περιφέρειας της Γης να είναι ίσο με 40.000 Km, ή 21.600 ν.μ. Αυτοί είναι οι αριθμοί των αντίστοιχων μονάδων γωνίας σε μια πλήρη περιστροφή. Αυτοί οι ορισμοί του Km και του ν.μ. έχουν αντικατασταθεί από πιο ακριβείς, αλλά οι αρχικοί ορισμοί εξακολουθούν να είναι αρκετά ακριβείς για εννοιολογικούς σκοπούς, καθώς και για ορισμένους υπολογισμούς. Για παράδειγμα, συνεπάγονται ότι 1 Km είναι ακριβώς 0,54 ν.μ. Χρησιμοποιώντας επίσημους σύγχρονους ορισμούς, ένα ναυτικό μίλι είναι ακριβώς 1,852 Km=1.852 m, το οποίο σημαίνει ότι 1 Km $\approx$ 0,53995680 ν.μ. Αυτή η μοντέρνα αναλογία διαφέρει από τη μία που υπολογίζεται από τους αρχικούς ορισμούς, κατά λιγότερο από 1/10.000.

1.8 Το ναυτικό μίλι

Δεν υπάρχει ένα διεθνώς εγκεκριμένο σύμβολο για το ναυτικό μίλι και υπάρχουν διάφορα σύμβολα σε χρήση. Το σύμβολο **M** χρησιμοποιείται ως συντομογραφία για το ναυτικό μίλι από τον διεθνή υδρογραφικό οργανισμό. Το σύμβολο **NM** χρησιμοποιείται από τον διεθνή οργανισμό πολιτικής αεροπορίας. Το σύμβολο **nmi** χρησιμοποιείται από το ινστιτούτο μηχανικών ηλεκτρικών & ηλεκτρονικών συσκευών και το γραφείο εκδόσεων των Ηνωμένων Πολιτειών. Το σύμβολο **nm** είναι μια μη τυποποιημένη συντομογραφία με χρήση σε πολλές ναυτικές εφαρμογές και κείμενα, μεταξύ άλλων και στις κατευθύνσεις ναυσιπλοΐας και πιλότων της ακτής της αμερικανικής κυβέρνησης. Η λέξη *μίλι* προέρχεται από τη λατινική λέξη που σημαίνει «χίλια βήματα», mille passus.

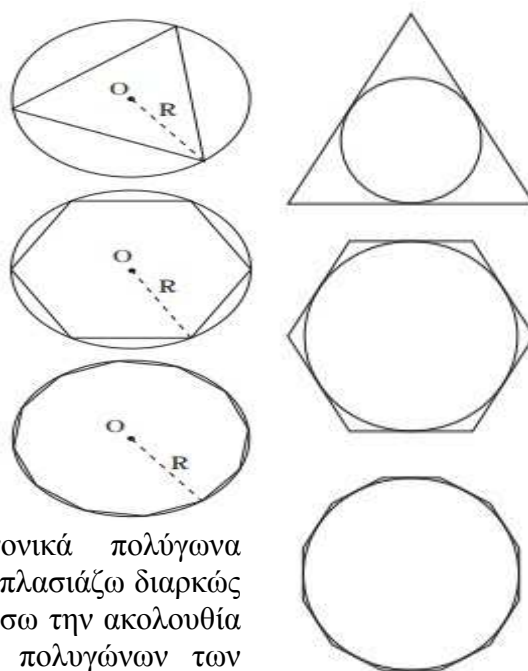
Η πλοήγηση στη θάλασσα γινόταν με το μάτι μέχρι το 1.500 περίπου, όταν άρχισαν να αναπτύσσονται τα πρώτα όργανα ναυσιπλοΐας και οι χαρτογράφοι ξεκίνησαν να χρησιμοποιούν ένα σύστημα συντεταγμένων με παράλληλους κύκλους για το γεωγραφικό πλάτος και μεσημβρινούς για το γεωγραφικό μήκος. Στα τέλη του 16^{ου} αιώνα, οι Άγγλοι γνώριζαν ότι η αναλογία των αποστάσεων στην θάλασσα σε μοίρες ήταν σταθερή κατά μήκος κάθε μέγιστου κύκλου όπως ο ισημερινός ή σε κάθε μεσημβρινός, υποθέτοντας ότι η Γη ήταν μια σφαίρα.

Ο Ρόμπερτ Χιουζ έγραψε το 1594 ότι η απόσταση κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου ήταν 60 μίλια ανά μοίρα. Το 1623 ο Έντμουντ Γκάντερ έγραψε ότι η απόσταση κατά μήκος ενός μεγάλου κύκλου ήταν 20 λεύγες ανά μοίρα. Έτσι, ο Χιουζ χρησιμοποίησε ρητά ναυτικά μίλια, ενώ ο Γκάντερ δεν το έκανε. Δεδομένου ότι η Γη δεν είναι τέλεια σφαίρα, αλλά έχει πεπλατυσμένο σφαιροειδές σχήμα με ελαφρώς πεπλατυσμένους πόλους, ένα λεπτό γεωγραφικού πλάτους δεν είναι σταθερό, όντας περίπου 1.861 στους πόλους και 1.843 μέτρα στον Ισημερινό. Η Γαλλία και άλλες χώρες που χρησιμοποιούν το μετρικό σύστημα δηλώνουν ότι σε αυτή την αρχή το ναυτικό μίλι είναι ένα λεπτό του μεσημβρινού σε γεωγραφικό πλάτος 45^0 , αλλά αυτό είναι η σύγχρονη αιτιολόγηση για έναν υπολογισμό που αναπτύχθηκε περίπου ένα αιώνα νωρίτερα. Από τα μέσα του 19^{ου} αιώνα, η Γαλλία όριζε το ναυτικό μίλι βάσει του ορισμού του μέτρου όπως θεσπίστηκε το 1791, όπου αντιστοιχεί με το δέκατο εκατομμυριοστό ενός τετάρτου του μεσημβρινού. Έτσι προκύπτει η μαθηματική σχέση $10,000,000 \text{ m} \left[\frac{90}{60} \times 60 \right] = 1.851,85 \text{ m} \approx 1.852 \text{ m}$, ορίζοντας το μετρικό μήκος του ναυτικού μιλίου. Η Γαλλία νομιμοποίησε τη χρήση του για το πολεμικό ναυτικό το 1906 και πολλές χώρες που χρησιμοποιούν το μετρικό σύστημα ψήφισαν υπέρ της διεθνούς χρήσης του στο διεθνές υδρογραφικό συνέδριο το 1929.

Τόσο οι Η.Π.Α. όσο και το Ηνωμένο Βασίλειο χρησιμοποιούσαν το μέσο λεπτό του τόξου. Δηλαδή ένα λεπτό του τόξου ενός μέγιστου κύκλου μίας σφαίρας που έχει την ίδια επιφάνεια με το ελλειψοειδές του Κλαρκ (1866). Η ακτίνα του ελλειψοειδούς του Κλαρκ είναι 6.370.997,2 μέτρα. Το προκύπτον λεπτό του τόξου είναι 1.853,2480 μέτρα. Οι ΗΠ.Α. επέλεξαν πέντε σημαντικά ψηφία για το ναυτικό μίλι (6080.2 πόδια) ενώ το Ηνωμένο Βασίλειο επέλεξε τέσσερα σημαντικά ψηφία για το μίλι του ναυαρχείου (6080 πόδια). Το 1929, το διεθνές ναυτικό μίλι ορίστηκε από την 1^η Διεθνή έκτακτη υδρογραφική διάσκεψη στο Μονακό ως μονάδα ίση με 1.852 μέτρα. Οι Η. Π.Α. δεν υιοθέτησαν το διεθνές ναυτικό μίλι μέχρι το 1954. Η Βρετανία το υιοθέτησε το 1970, αλλά οι νομικές αναφορές σε απαρχαιωμένες μονάδες έχουν μετατραπεί σε 1.853 m.

1.9 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

Με τη βοήθεια της περιμέτρου των κανονικών πολυγώνων προσεγγίζω την έννοια του μήκους κύκλου. Έστω κύκλος (O,R) και εγγράφω σε αυτόν διαδοχικά ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα κανονικό 6-γωνο, ένα κανονικό 12-γωνο και γενικά ένα πολύγωνο με διπλάσιο κάθε φορά πλήθος πλευρών από το προηγούμενο. Καθώς ο αριθμός των πλευρών των κανονικών πολυγώνων διπλασιάζεται, από το σχήμα φαίνεται ότι «το κανονικό πολύγωνο τείνει να ταυτισθεί με τον κύκλο». Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγω και αν αντί εγγεγραμμένων θεωρήσω κανονικά πολύγωνα περιγεγραμμένα στον κύκλο (O,R) και διπλασιάζω διαρκώς το πλήθος των πλευρών τους. Αν θεωρήσω την ακολουθία (P_n) των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων των εγγεγραμμένων στον κύκλο (O,R) και την ακολουθία (P'_n)



των περιμέτρων των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων γύρω από τον ίδιο κύκλο, τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός L μεγαλύτερος όλων των όρων της ακολουθίας (P_n) και μικρότερος όλων των όρων της (P'_n) με την εξής ιδιότητα: καθώς το n διπλασιάζεται, οι όροι των ακολουθιών (P_n) και (P'_n) προσεγγίζουν όλο και περισσότερο τον αριθμό L . Ο αριθμός L (που είναι το κοινό όριο των ακολουθιών και ανεξάρτητος από την επιλογή κανονικών πολυγώνων) λέγεται **μήκος του κύκλου** (O,R) . Ο Ιπποκράτης ο Χίος απέδειξε πρώτος ότι ο λόγος $\frac{\ell}{2R}$ του μήκους (ℓ) του κύκλου προς τη διάμετρό του $(2R)$ είναι σταθερός, δηλαδή είναι ο ίδιος για κάθε κύκλο. Η σταθερή αυτή τιμή του λόγου $\frac{\ell}{2R}$ συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα π (αρχικό της λέξης περιφέρεια) δηλαδή $\frac{\ell}{2R} = \pi$, οπότε προκύπτει ότι το μήκος ℓ του κύκλου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $\ell = 2\pi R$. Ο αριθμός π είναι ένας άρρητος, υπερβατικός αριθμός και μια προσέγγισή του, που στην πράξη χρησιμοποιείται, είναι $\pi \cong 3,14$. Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε ως προσέγγιση του π το 22.

1.10 Μήκος τόξου

Έστω ένα τόξο AB ενός κύκλου (O,R) . Μία τεθλασμένη με άκρα τα σημεία A , B και τις άλλες κορυφές της σημεία του τόξου λέγεται **εγγεγραμμένη** στο τόξο AB . Στην περίπτωση που οι πλευρές της είναι ίσες, λέγεται κανονική τεθλασμένη.



Μια τεθλασμένη με άκρα τα A , B και πλευρές εφαπτόμενες του τόξου AB λέγεται **περιγεγραμμένη** τεθλασμένη στο τόξο AB . Η έννοια της κανονικής περιγεγραμμένης ορίζεται, όπως στην περίπτωση της εγγεγραμμένης. Το μήκος του τόξου AB κύκλου (O, R) ορίζεται όπως και το μήκος του κύκλου. Δηλαδή το **μήκος του τόξου** AB είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός ℓ τον οποίο προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο τα μήκη P_n και P'_n των κανονικών τεθλασμένων γραμμών των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων αντίστοιχα, στο τόξο AB , καθώς το n διπλασιάζεται. Επειδή ο κύκλος είναι τόξο 360° με μήκος $2\pi R$, το τόξο 1° έχει μήκος $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ και ένα τόξο μ° έχει μήκος $\frac{2\pi R\mu}{360} = \frac{\pi R\mu}{180}$. Ένα τόξο κύκλου με μήκος R λέγεται **ακτίνιο** (rad). Το τόξο ενός ακτινίου ισούται με το $\frac{1}{2\pi}$ του κύκλου, άρα η σχέση μεταξύ ακτινίου και μοίρας είναι

$$1 \text{ rad} = \frac{1}{2\pi} 360^\circ = \frac{1}{\pi} 180^\circ = \frac{1}{3,14159} 180^\circ = 57,295828$$

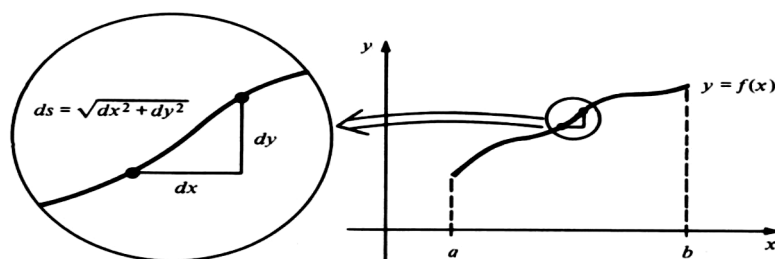
και μετατρέποντας την στο εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης είναι $1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$.

Αν a είναι το μέτρο ενός τόξου σε ακτίνια και μ είναι το μέτρο του σε μοίρες, τότε από τη σχέση $a = \frac{\pi\mu}{180}$ προκύπτει ότι $\frac{a}{\pi} = \frac{\mu}{180}$. Επειδή ο π είναι άρρητος αριθμός, το μέτρο ενός τόξου σε ακτίνια δεν το υπολογίζω αριθμητικά, αλλά το δίνω ως συνάρτηση του π .

Π.χ. το τόξο 30° ισούται με $\frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \cong 0,5236 \text{ rad}$, αλλά το εκφράζω απλούστερα ως $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$. Λόγω της αντιστοιχίας τόξων και επίκεντρων γωνιών, το ακτίνιο χρησιμοποιείται και για τη μέτρηση των γωνιών.

1.11 Μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής

Το μήκος ενός τμήματος μίας καμπύλης γραμμής στο επίπεδο, ονομάζεται πολλές φορές μήκος τόξου της καμπύλης. Υποθέτω ότι το μήκος αυτό υπάρχει και θα προσπαθήσω να το εκφράσω με τη βοήθεια του ολοκληρώματος. Σε πρώτη φάση περιορίζομαι σε καμπύλες που είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Γενικότερες καμπύλες θα θεωρήσω αργότερα. Θεωρώ μία καμπύλη γραμμή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ από $x = a$ ως $x = b$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η καμπύλη αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από απειροστά τμήματα. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχω ότι το μήκος ds κάθε απειροστού τμήματος είναι $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Είναι $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$ άρα $ds = \sqrt{dx^2 + (f'(x))^2 dx^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Άρα, για να βρω το μήκος της καμπύλης πρέπει να υπολογίσω το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής η οποία ορίζεται από παραμετρικές εξισώσεις, δίνεται από το ολοκλήρωμα $\ell = \int_a^\beta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ (1)

Αν τα x, y, z είναι συναρτήσεις του t , δηλαδή αν είναι $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, τότε ο γενικός τύπος (1) γίνεται

$$\ell = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt,$$

δηλαδή, ο τύπος (1) είναι γενικός και ισχύει αν τα x, y, z είναι συναρτήσεις κάθε άλλης μεταβλητής.

Π.χ. Αν $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$, $z = z(\omega)$, τότε ο τύπος του μήκους του τόξου της

$$\text{καμπύλης γραμμής λαμβάνει τη μορφή } \ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2} d\omega$$

- Αν η καμπύλη είναι επίπεδη, δηλαδή αν $z = 0$ (ή κάποια από τις τρεις μεταβλητές είναι μηδέν), τότε το μήκος του τόξου της επίπεδης καμπύλης γραμμής

$$\text{δίνεται από τον τύπο } \ell = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

- Αν η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τον άξονα xx' , τότε το μήκος του τόξου της

$$\text{καμπύλης γραμμής δίνεται από τον τύπο } \ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + 1} dy$$

εφόσον η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τον άξονα yy' .

1.12 Εύρεση των ορίων ολοκλήρωσης

- Συνήθως δίνονται.
- Αν θέλω να υπολογίσω το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων τομής αυτής με τον άξονα xx' , θέτω στην εξίσωση της καμπύλης $y = 0$ και λαμβάνω ως όρια τις μεταβολές του x .

- Αν θέλω να υπολογίσω το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων τομής της καμπύλης με τον άξονα yy' , θέτω στην εξίσωση της καμπύλης $x = 0$ και λαμβάνω ως όρια τις μεταβολές του y .

1.13 Εφαρμογές

1. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = x^{3/2}$ από $x = 0$ ως

$x = 5$. Είναι $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$ άρα το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής δίνεται από

$$\text{τον τύπο } \ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \text{ δηλαδή}$$

$$\ell = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx = \frac{4}{9} \int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \left[\frac{4}{9} \frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^5$$

$$= \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{4}5\right)^{3/2} - 1 \right] = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{49}{4}\right)^{3/2} - 1 \right] = \frac{8}{27} \left[\frac{7^3}{2^3} - 1 \right] = \frac{8}{27} \left(\frac{343 - 8}{8} \right) = \frac{335}{27}$$

2. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $x = 3y^{3/2} - 1$ από $y = 0$ έως

$y = 4$. Είναι $x' = \frac{9\sqrt{y}}{2}$. Το μήκος της καμπύλης γραμμής δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}\ell &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + 1} \, dy = \int_0^4 \sqrt{\frac{81}{4}y + 1} \, dy = \frac{4}{81} \int_0^4 \left(\frac{81}{4}y + 1\right)^{1/2} d\left(\frac{81}{4}y + 1\right) = \left[\frac{4}{81} \frac{\left(\frac{81}{4}y + 1\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\ &= \frac{8}{243} \left[\left(\frac{81}{4} \cdot 4 + 1\right)^{3/2} - 1 \right] = \frac{8}{243} (82\sqrt{82} - 1)\end{aligned}$$

3. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $24xy = x^4 + 48$ από $x = 2$ ως $x = 4$. Λύνω ως προς y και έχω $y = \frac{x^4 + 48}{24x}$, $y' = \frac{1}{8} \left(x^2 - \frac{16}{x^2} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{x^4 - 16}{x^2} \right)$

Το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής δίνεται από τον τύπο $\ell = \int_a^{\beta} \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$

$$\begin{aligned}&= \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{1}{64} \left(\frac{x^4 - 16}{x^2} \right)^2} \, dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{64x^4 + x^8 - 32x^4 + 256}{64x^4}} \, dx = \int_2^4 \frac{\sqrt{x^8 + 32x^4 + 256}}{8x^2} \, dx \\ &= \int_2^4 \frac{\sqrt{(x^4 + 16)^2}}{8x^2} \, dx = \int_2^4 \frac{x^4 + 16}{8x^2} \, dx = \frac{1}{8} \int_2^4 \left(x^2 + \frac{16}{x^2} \right) \, dx = \frac{1}{8} \int_2^4 x^2 \, dx + 2 \int_2^4 x^{-2} \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{24} - \frac{2}{x} \right]_2^4 = \left(\frac{4^3}{24} - \frac{2}{4} \right) - \left(\frac{2^3}{24} - \frac{2}{2} \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16 - 3 - 2 + 6}{6} = \frac{17}{6}\end{aligned}$$

4. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$ από $x = 1$ ως $x = 4$. Είναι $y' = \frac{x^6 - 1}{2x^3}$. Το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής δίνεται από τον

$$\text{τύπο } \ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(y')^2 + 1} \, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{(x^6 - 1)^2}{4x^6}} \, dx = \int_1^4 \frac{\sqrt{4x^6 + x^{12} - 2x^6}}{4x^6} \, dx =$$

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x^{12} + 2x^6 + 1}}{2x^3} \, dx = \int_1^4 \frac{\sqrt{(x^6 + 1)^2}}{2x^3} \, dx = \int_1^4 \frac{x^6 + 1}{2x^3} \, dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) \, dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_1^4 x^3 \, dx + \frac{1}{2} \int_1^4 x^{-3} \, dx \left[\frac{1}{2} \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^4 = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{1}{4x^2} \right) \Big|_1^4 = \left(\frac{4^4}{8} - \frac{1}{4 \cdot 4^2} \right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) =$$

$$\frac{256}{8} - \frac{1}{64} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{2048 - 1 - 8 + 16}{64} = \frac{2055}{64}$$

5. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $x = t^2, y = t^3$ από $t = 0$ ως $t = 4$. Η καμπύλη δίνεται σε παραμετρικές εξισώσεις. Το μήκος της δίνεται από τον

τύπο $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ ή $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$. Βρίσκω τις παραγώγους

$dx = 2t \cdot dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t, dy = 3t^2 \cdot dt \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2$. Αντικαθιστώ και έχω:

$$\ell = \int_0^4 \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \int_0^4 2t \sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2} dt = \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}t^2\right)^{\frac{1}{2}} dt^2 = \frac{4}{9} \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}t^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}t^2\right) =$$

$$\left[\frac{4 \left(1 + \frac{9}{4}t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{9 \cdot 3}{2}} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{4}t^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{8}{27} (37\sqrt{37} - 1)$$

6. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $x = \omega - \eta\mu\omega, y = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega$ από $\omega = 0$ ως $\omega = 2\pi$. Η καμπύλη γραμμή δίνεται σε παραμετρικές εξισώσεις. Το

μήκος της καμπύλης γραμμής, δίνεται από τον τύπο $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ή από τον τύπο

$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2} d\omega$. Βρίσκω τις παραγώγους

$$dx = (1 - \sigma\upsilon\nu\omega) d\omega \Rightarrow \frac{dx}{d\omega} = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$dy = \eta\mu\omega d\omega \Rightarrow \frac{dy}{d\omega} = \eta\mu\omega \quad \text{Αντικαθιστώ και έχω}$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 d\omega^2 + \eta\mu^2\omega d\omega^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu^2\omega} d\omega$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\sigma\upsilon\nu\omega} d\omega = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu\omega} d\omega = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} d\omega = 4 \int_0^{2\pi} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) d\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$4 \left[-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 4 [-\sigma\upsilon\nu\pi - (-\sigma\upsilon\nu 0)] = 4(1+1) = 8$$

7. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = \frac{\alpha}{2} \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}} \right)$ από

$x = 0$ ως $x = \alpha$. Είναι $y' = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\alpha} e^{\frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}} \right)$. Το μήκος του τόξου

δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{\alpha} \sqrt{(y')^2 + 1} dx = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{x/\alpha} - e^{-x/\alpha} \right)^2} dx = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{2x/\alpha} + e^{-2x/\alpha} - 2 \right)} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \sqrt{4 + e^{2x/\alpha} + e^{-2x/\alpha} - 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \sqrt{e^{2x/\alpha} + e^{-2x/\alpha} + 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \sqrt{\left(e^{x/\alpha} + e^{-x/\alpha} \right)^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \left(e^{x/\alpha} + e^{-x/\alpha} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} e^{x/\alpha} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} e^{-x/\alpha} dx = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\alpha} e^{x/\alpha} d\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{\alpha}{2} \int_0^{\alpha} e^{-x/\alpha} d\left(\frac{-x}{\alpha}\right) \\
&\left[\frac{\alpha}{2} e^{x/\alpha} - \frac{\alpha}{2} e^{-x/\alpha} \right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha}{2} \left[e^{x/\alpha} - e^{-x/\alpha} \right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha}{2} \left[\left(e - e^{-1} - (1 - 1) \right) \right] = \frac{\alpha}{2} (e - e^{-1}) = \frac{\alpha(e^2 - 1)}{2e}
\end{aligned}$$

8. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y^2 = 12x$ από το σημείο $(0,0)$ ως το σημείο $(3,6)$. Βρίσκω την παράγωγο του x ως προς y και ολοκληρώνω, ως προς τον άξονα yy' . Είναι $x' = \frac{y}{6}$.

$$\text{Άρα, } \ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + 1} dy = \int_0^6 \sqrt{\frac{y^2}{36} + 1} dy = \frac{1}{6} \int_0^6 \sqrt{y^2 + 36} dy$$

Για να υπολογίσω το ολοκλήρωμα θέτω $\sqrt{y^2 + 36} = t - y$, υψώνω στο τετράγωνο και είναι $y^2 + 36 = t^2 + y^2 - 2ty$ ή $y = \frac{t^2 - 36}{2t}$ ή $dy = \frac{t^2 + 36}{2t^2} dt$

Αντικαθιστώ και έχω

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \int_0^6 (t - y) \frac{t^2 + 36}{2t^2} dt &= \frac{1}{6} \int_0^6 \left(t - \frac{t^2 - 36}{2t} \right) \frac{t^2 + 36}{2t^2} dt = \frac{1}{6} \int_0^6 \frac{(t^2 + 36)^2}{4t^3} dt \\
&= \frac{1}{24} \int_0^6 \frac{t^4 + 72t^2 + 1296}{t^3} dt = \frac{1}{24} \int_0^6 t dt + 3 \int_0^6 \frac{dt}{t} + 54 \int_0^6 t^{-3} dt = \frac{t^2}{48} + 3 \ln t + 54 \frac{t^{-2}}{-2} \\
&= \frac{t^2}{48} + 3 \ln t - 27 \frac{1}{t^2} = \left[\frac{1}{48} \left(y + \sqrt{y^2 + 36} \right)^2 + 3 \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 36} \right) - \frac{27}{\left(y + \sqrt{y^2 + 36} \right)^2} \right]_0^6 \\
&= 3 \left[\sqrt{2} + \ln(6 + 6\sqrt{2}) \right]
\end{aligned}$$

9. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = \sqrt{x}$ από $x = 0$ ως $x = 1$. Είναι $x' = 2y$. Επειδή το x μεταβάλλεται από $x = 0$ ως $x = 1$, το y θα μεταβάλλεται από $y = 0$ έως $y = \pm 1$, δηλαδή σε μία τιμή του x έχω δύο τιμές του y , άρα η καμπύλη γραμμή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα xx' . Βρίσκω το μήκος από 0 έως 1, δεν διπλασιάζω διότι αρχικά θέλω το μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ και

όχι της $y = \pm\sqrt{x}$. Είναι $\ell = \int_0^1 \sqrt{1+4y^2} dy$, θέτω $\sqrt{1+4y^2} = t - 2y$ και λύνω όπως στην προηγούμενη εφαρμογή.

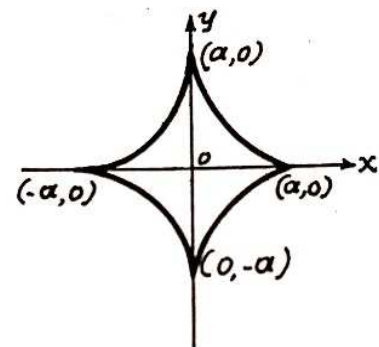
10. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = \frac{3}{2} \left(e^{x/3} + e^{-x/3} \right)$ από $x = 0$ ως $x = 3$. Είναι $y' = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} e^{x/3} - \frac{1}{3} e^{-x/3} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{x/3} - e^{-x/3} \right)$.

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{x/3} - e^{-x/3} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \sqrt{4 + e^{2x/3} + e^{-2x/3} - 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \sqrt{e^{2x/3} + e^{-2x/3} + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 \sqrt{\left(e^{x/3} + e^{-x/3} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(e^{x/3} + e^{-x/3} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 e^{x/3} dx + \frac{1}{2} \int_0^3 e^{-x/3} dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^3 e^{x/3} d\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{3}{2} \int_0^3 e^{-x/3} d\left(\frac{-x}{3}\right) = \frac{3}{2} \left(e^{x/3} - e^{-x/3} \right)_0^3 = \frac{3}{2} [e - e^{-1} - (1 - 1)] = \frac{3(e^2 - 1)}{2e} \end{aligned}$$

11. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (κλειστή καμπύλη). Το μήκος δίνεται από τον τύπο $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Είναι $y' = \frac{-y^{1/3}}{x^{1/3}}$. Τα όρια ολοκλήρωσης του x

είναι από 0 έως a και θα βρω το $\frac{1}{4}$ του μήκους



$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} \right)^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}} dx \\ &= \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = \sqrt[3]{a} \int_0^a x^{-1/3} dx = \left[\frac{\sqrt[3]{a} x^{2/3}}{\frac{2}{3}} \right]_0^a = \frac{3}{2} \sqrt[3]{a} \cdot a^{2/3} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^3} = \frac{3}{2} a \end{aligned}$$

Άρα $\ell_{\text{ολικό}} = 4 \frac{3}{2} a = 6a$

2ος τρόπος

Μπορώ να χρησιμοποιήσω παραμετρικές εξισώσεις $x = \alpha \cdot \sigma \nu^3 \varphi$, $y = \alpha \cdot \eta \mu^3 \varphi$,
 οπότε το μήκος του τόξου της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2} d\omega, \text{ όπου } dx = -3\alpha \cdot \sigma \nu^2 \varphi \cdot \eta \mu \varphi d\varphi, \quad dy = 3\alpha \cdot \eta \mu^2 \varphi \cdot \sigma \nu \varphi d\varphi$$

Κάνω αλλαγή των ορίων ολοκλήρωσης. Στη σχέση $x = \alpha \sigma \nu^3 \varphi$:

• θέτω όπου $x = a$ και έχω $\sigma \nu^3 \varphi = 1 \Rightarrow \sigma \nu \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0^0$

• θέτω όπου $x = 0$ και έχω $\sigma \nu \varphi = 0$ άρα $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\ell = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{9\alpha^2 \sigma \nu^4 \varphi \cdot \eta \mu^2 \varphi d\varphi^2 + 9\alpha^2 \eta \mu^4 \varphi \cdot \sigma \nu^2 \varphi d\varphi^2} d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{9\alpha^2 \cdot \sigma \nu^2 \varphi \cdot \eta \mu^2 \varphi \cdot (\sigma \nu^2 \varphi + \eta \mu^2 \varphi) d\varphi^2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 3\alpha \cdot \sigma \nu \varphi \cdot \eta \mu \varphi d\varphi$$

$$= 3\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \eta \mu \varphi d\eta \mu \varphi = \left(3\alpha \frac{\eta \mu^2 \varphi}{2} \right) \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0 = 3\alpha \left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{-3\alpha}{2}$$

Άρα, $\ell = \frac{3\alpha}{2}$ (λαμβάνω την απόλυτη τιμή), συνεπώς $\ell_{\text{ολικό}} = 4 \frac{3\alpha}{2} = 6\alpha$.

12. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $9ay^2 = x(x-3a)^2$ από

$$x = 0 \text{ ως } x = 3a. \text{ Είναι } y' = \frac{x-a}{2\sqrt{a}\sqrt{x}} \text{ και } \ell = \int_0^{3a} \sqrt{1+(y')^2} dx$$

$$\ell = \int_0^{3a} \sqrt{1 + \left(\frac{x-a}{2\sqrt{ax}}\right)^2} dx = \int_0^{3a} \frac{\sqrt{x^2 + x^2 + 2ax}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} dx = \int_0^{3a} \frac{x+a}{2\sqrt{a}\sqrt{x}} dx = \frac{\int_0^{3a} (x^{1/2} + ax^{-1/2}) dx}{2\sqrt{a}}$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{a}} \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - a \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right) \right]_0^{3a} = \left[\frac{1}{2\sqrt{a}} \left(\frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2a\sqrt{x} \right) \right]_0^{3a} = \frac{\frac{2 \cdot 3a \cdot \sqrt{3a}}{3} + 2a \cdot \sqrt{3a}}{2\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot 2\sqrt{a} \cdot a\sqrt{3} = a\sqrt{3}. \text{ Επειδή όταν βρω την τιμή του } y \text{ βλέπω } y = \pm \text{ αυτό}$$

σημαίνει ότι η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον άξονα yy' . Το ολικό μήκος θα είναι διπλάσιο, δηλαδή $\ell_{\text{ολικό}} = 2a\sqrt{3}$.

13. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $e^y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ από $x = a$ ως

$x = \beta$. Είναι $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, $y' = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$. Το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}\ell &= \int_a^\beta \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}} dx = \int_a^\beta \sqrt{\frac{(e^{2x} - 1)^2 + 4e^{2x}}{e^{2x} - 1}} dx = \\ &= \int_a^\beta \sqrt{\frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 4e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}} dx = \int_a^\beta \sqrt{\frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}} dx = \int_a^\beta \frac{\sqrt{(e^{2x} + 1)^2}}{e^{2x} - 1} dx = \int_a^\beta \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx\end{aligned}$$

Θέτω $e^{2x} = t$, $2e^{2x} dx = dt$, $dx = \frac{dt}{2e^{2x}} = \frac{dt}{2t}$ τα όρια θα είναι από $t = e^{2a}$ ως $t = e^{2\beta}$

$$= \int_{e^{2a}}^{e^{2\beta}} \frac{t+1}{t-1} \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int_{e^{2a}}^{e^{2\beta}} \frac{t+1}{t(t-1)} dt = \frac{1}{2} \int_{e^{2a}}^{e^{2\beta}} \frac{A dt}{t} + \frac{1}{2} \int_{e^{2a}}^{e^{2\beta}} \frac{B dt}{t-1} = \left[\frac{1}{2} A \ln t + \frac{1}{2} B \ln(t-1) \right]_{e^{2a}}^{e^{2\beta}}$$

Υπολογίζω τις τιμές των A, B και βρίσκω $A = -1$, $B = 2$

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{1}{2} \ln t + \ln(t-1) \right]_{e^{2a}}^{e^{2\beta}} = \left[-\ln \sqrt{t} + \ln(t-1) \right]_{e^{2a}}^{e^{2\beta}} = \left[\ln \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right]_{e^{2a}}^{e^{2\beta}} \\ &\ln \frac{e^{2\beta} - 1}{\sqrt{e^{2\beta}}} - \ln \frac{e^{2a} - 1}{\sqrt{e^{2a}}} = \ln \frac{e^{2\beta} - 1}{e^\beta} - \ln \frac{e^{2a} - 1}{e^a} = \ln(e^{2\beta} - 1) - \ln e^\beta - \ln(e^{2a} - 1) + \ln e^a\end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{e^{2\beta} - 1}{e^{2a} - 1}\right) - \beta + \alpha = \ln\left(\frac{e^{2\beta} - 1}{e^{2a} - 1}\right) + \alpha - \beta$$

14. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $x = \alpha(\sigma\upsilon\nu\omega + \omega\eta\mu\omega)$ από $\omega = 0$ ως $\omega = \omega_1$. Είναι $y = \alpha(\eta\mu\omega - \omega\sigma\upsilon\nu\omega)$. Το μήκος του τόξου της καμπύλης

γραμμής δίνεται από τον τύπο $\ell = \int_a^\beta \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} dx$ με

- $dx = \alpha(-\eta\mu\omega + \eta\mu\omega + \omega\sigma\upsilon\nu\omega) d\omega = \alpha\omega\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$
- $dy = \alpha(\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega + \omega\eta\mu\omega) d\omega = \alpha\omega\eta\mu\omega d\omega$

$$\ell = \int_0^{\omega_1} \sqrt{\alpha^2 \omega^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega d\omega^2 + \alpha^2 \omega^2 \eta\mu^2 \omega d\omega^2} = \int_0^{\omega_1} \alpha \omega d\omega = \left[\alpha \frac{\omega^2}{2} \right]_0^{\omega_1}. \text{ Άρα, } \ell = \frac{\alpha \omega_1^2}{2}$$

15. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $x = e^\omega \eta \mu \omega$, $y = e^\omega \sigma \upsilon \nu \omega$

από $\omega = 0$ ως $\omega = \frac{\pi}{2}$. Είναι $\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$\bullet dx = (e^\omega \eta \mu \omega + e^\omega \sigma \upsilon \nu \omega) d\omega = e^\omega (\eta \mu \omega + \sigma \upsilon \nu \omega) d\omega$$

$$\bullet dy = (e^\omega \sigma \upsilon \nu \omega - e^\omega \eta \mu \omega) d\omega = e^\omega (\sigma \upsilon \nu \omega - \eta \mu \omega) d\omega$$

Το μήκος $\frac{\pi}{2}$ του τόξου δίνεται από τον τύπο

$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{2\omega} (\eta \mu \omega + \sigma \upsilon \nu \omega)^2 d\omega^2 + e^{2\omega} (\eta \mu \omega - \sigma \upsilon \nu \omega)^2 d\omega^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\omega d\omega \sqrt{\eta \mu^2 \omega + \sigma \upsilon \nu^2 \omega + 2\eta \mu \omega \cdot \sigma \upsilon \nu \omega + \sigma \upsilon \nu^2 \omega + \eta \mu^2 \omega - 2\eta \mu \omega \cdot \sigma \upsilon \nu \omega}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\omega \sqrt{2} d\omega = \left[\sqrt{2} e^\omega \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right)$$

16. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ από $x = 1$ ως

$x = 2$. Είναι $y' = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$. Το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής δίνεται από τον τύπο

$$\ell = \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{e^{4x} - 2e^{2x} + 1 + 4e^{2x}}}{e^{2x} - 1} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{(e^{2x} + 1)^2}}{e^{2x} - 1} dx = \int_1^2 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx. \text{ Θέτω } e^{2x} = t, \quad 2e^{2x} dx = dt, \quad dx = \frac{dt}{2e^{2x}} = \frac{dt}{2t}$$

Τα όρια ολοκλήρωσης θα είναι από $t = e^2$ ως $t = e^4$

$$\ell = \int_{e^2}^{e^4} \frac{(t+1) dt}{(t-1) 2t} = \frac{1}{2} \int_{e^2}^{e^4} \frac{(t+1) dt}{t(t-1)} = \frac{1}{2} \int_{e^2}^{e^4} \frac{A dt}{t} + \frac{1}{2} \int_{e^2}^{e^4} \frac{B dt}{t-1} \quad (\text{Υπολογίζω τα } A, B \text{ και βρίσκω})$$

$$A = -1, B=2 = \left[\frac{1}{2} \ln t + \ln(t-1) \right]_{e^2}^{e^4} = \left[\ln \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right]_{e^2}^{e^4} = \ln \frac{e^4 - 1}{\sqrt{e^4}} - \ln \frac{e^2 - 1}{\sqrt{e^2}}$$

$$= \ln \frac{\frac{e^4 - 1}{e^2}}{\frac{e^2 - 1}{e}} = \ln \frac{e^4 - 1}{e(e^2 - 1)} = \ln \frac{e^2 + 1}{e}$$

17. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = \ln(1-x^2)$ από $x = 0$ ως $x = \frac{1}{2}$. Είναι $y' = \frac{-2x}{1-x^2}$. Το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^{1/2} \sqrt{1+(y')^2} \, dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \, dx = \int_0^{1/2} \frac{(1+x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2} \, dx = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x^4-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2}} \, dx \\&= \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{(1-x^2)^2} \, dx = \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2} \, dx = - \int_0^{1/2} \frac{x^2+1}{x^2-1} \, dx = - \int_0^{1/2} \left(1+\frac{2}{x^2-1}\right) \, dx = - \int_0^{1/2} dx - 2 \int_0^{1/2} \frac{dx}{(x+1)(x-1)} \\&= -\sqrt{x_0} - \int_0^{1/2} \frac{A \, dx}{x+1} - 2 \int_0^{1/2} \frac{B \, dx}{x-1}. \quad \text{Υπολογίζω τα A, B και βρίσκω } A = \frac{-1}{2}, B = \frac{1}{2}. \text{ Άρα,} \\&= -\sqrt{x_0} + \int_0^{1/2} \frac{dx}{x+1} - \int_0^{1/2} \frac{dx}{x-1} = -\sqrt{x_0} + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\bigg|_0^{1/2} = -\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}\right) - \ln(-1) \\&= -\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) - \ln(-1) = -\frac{1}{2} + \ln(-3) - \ln(-1) = -\frac{1}{2} + \ln 3 = \ln 3 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

18. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ από $x = 1$ ως $x = 2$. Είναι $y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2-1}{2x}$. Το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}\ell &= \int_1^2 \sqrt{1+(y')^2} \, dx = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2} \, dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{4x^2+(x^2-1)^2}{4x^2}} \, dx \\&= \int_1^2 \sqrt{\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}} \, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{2x} \, dx = \int_1^2 \frac{x^2+1}{2x} \, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right) \, dx \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 + \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \ln 2\right)\end{aligned}$$

19. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = \ln \tau \epsilon \mu x$ από $x = 0$ ως $x = \frac{\pi}{3}$. Είναι $y = \ln \frac{1}{\sigma \nu \nu x}$, $y' = \epsilon \varphi x$. Το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής

$$\text{δίνεται από τον τύπο } \ell = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \epsilon \varphi^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sigma \nu \nu x}$$

Θέτω $\epsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) = t$ άρα $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ και $\sigma \nu \nu x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Τα όρια ολοκλήρωσης θα είναι από $t = 0$ ως $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Αντικαθιστώ και έχω

$$\ell = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = -2 \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dt}{t^2-1} = -2 \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dt}{(t+1)(t-1)} = -2 \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{A dt}{t+1} - 2 \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{B dt}{t-1}$$

$$\text{Είναι } A = \frac{-1}{2}, B = \frac{1}{2}, \text{ άρα } = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dt}{t+1} - \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dt}{t-1} = \left[\ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) \right]_0^{\sqrt{3}/3} =$$

$$\ln \left(\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3} \right) - \ln(-1) = \ln \left(-\frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}} \right) - \ln(-1) = \ln \frac{-\sqrt{3}+3}{-1} = \ln \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}$$

20. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της $y = \ln \sigma \tau \epsilon \mu x$ από $x = \frac{\pi}{6}$ ως $x = \frac{\pi}{2}$. Είναι

$y' = \ln \frac{1}{\eta \mu x} = -\sigma \varphi x$. Το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής δίνεται από τον

$$\text{τύπο } \ell = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1 + \sigma \varphi^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\eta \mu x}.$$

Θέτω $\epsilon \varphi \frac{x}{2} = t$ και έχω $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\eta \mu x = \frac{2t}{1+t^2}$ Αντικαθιστώ και έχω

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2dt}{\frac{1+t^2}{2t}} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dt}{t} = \ln t = \left[\ln \epsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln \epsilon \varphi \left(\frac{\pi}{4} \right) - \ln \epsilon \varphi \left(\frac{\pi}{12} \right) = \ln 1 - \ln \epsilon \varphi \left(\frac{\pi}{12} \right) = -\ln \epsilon \varphi \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

Από την παρακάτω σχέση

$$\epsilon \varphi \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\epsilon \varphi \left(\frac{\pi}{12} \right)}{1 - \epsilon \varphi^2 \left(\frac{\pi}{12} \right)} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\epsilon \varphi \left(\frac{\pi}{12} \right)}{1 - \epsilon \varphi^2 \left(\frac{\pi}{12} \right)} \Rightarrow \sqrt{3}\epsilon \varphi^2 \left(\frac{\pi}{12} \right) + 6\epsilon \varphi \left(\frac{\pi}{12} \right) - \sqrt{3} = 0$$

βρίσκω $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right) = -3 - 2\sqrt{3}$ που απορρίπτεται, άρα $\ell = -\ln(-3 + 2\sqrt{3})$ και λαμβάνοντας την απόλυτη τιμή είναι $\ell = \ln(-3 + 2\sqrt{3})$.

21. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = \frac{1}{2}x^2$ από $x = 0$ ως $x = 1$.

Είναι $y' = x$ και $\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$.

Θέτω $\sqrt{1 + x^2} = t - x$, $1 + x^2 = t^2 - 2tx + x^2$, $x = \frac{t^2 - 1}{2t} dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$

Τα όρια ολοκλήρωσης θα είναι από $t = 1$ ως $t = 1 + \sqrt{2}$. Αντικαθιστώ και έχω

$$\begin{aligned}\ell &= \int_1^{1+\sqrt{2}} (t-x) \frac{t^2+1}{2t} dt = \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(t - \frac{t^2+1}{2t}\right) \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{(t^2+1)^2}{4t^3} dt \\&= \frac{1}{4} \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int_1^{1+\sqrt{2}} t dt + \frac{1}{2} \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} + \frac{1}{4} \int_1^{1+\sqrt{2}} t^{-3} dt = \left[\frac{t^2}{8} + \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{8t^2} \right]_1^{1+\sqrt{2}} \\&= \frac{(1+\sqrt{2})^2}{8} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2} - \frac{1}{8(1+\sqrt{2})^2} - \frac{1}{8} - \frac{\ln 1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) \right]\end{aligned}$$

22. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $x = \frac{y^4}{2} + \frac{1}{16y^2}$ από $y = 1$

ως $y = 2$. Είναι $x' = 2y^3 - \frac{1}{8y^3}$.

$$\begin{aligned}\ell &= \int_1^2 \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(2y^3 - \frac{1}{8y^3}\right)^2} dy = \int_1^2 \sqrt{1 + 4y^6 + \frac{1}{64y^6} - \frac{1}{2}} dy = \\&= \int_1^2 \sqrt{4y^6 + \frac{1}{64y^6} + \frac{1}{2}} dy = \int_1^2 \sqrt{\left(2y^3 + \frac{1}{8y^3}\right)^2} dy = \int_1^2 \left(2y^3 + \frac{1}{8y^3}\right) dy = 2 \int_1^2 y^3 dy + \frac{1}{8} \int_1^2 y^{-3} dy = \\&= \left[\frac{2y^4}{4} + \frac{1}{8} \frac{y^{-2}}{-2} \right]_1^2 = \frac{y^4}{2} - \frac{1}{16y^2} \Big|_1^2 = \left(\frac{16}{2} - \frac{1}{64} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16} \right) = 8 - \frac{1}{64} - \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{483}{64}\end{aligned}$$

23. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της κλειστής καμπύλης γραμμής $x^2 + y^2 = 4$

Είναι $y = \sqrt{4-x^2}$, άρα $y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Το μήκος του τόξου της καμπύλης δίνεται από

τον τύπο $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(y')^2} dx$. Η καμπύλη γραμμή είναι κύκλος και μεταβάλλεται το x

από -2 ως 2 . Αν ολοκληρώσω από -2 ως 2 θα βρω το $\frac{1}{2}$ του μήκους. Αν όμως ολοκληρώσω από 0 έως 2 , θα βρω το $\frac{1}{4}$ του μήκους.

$$\ell = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}} dx = 2 \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} =$$

Θέτω $x = 2t \Rightarrow dx = 2dt$ τα νέα όρια ολοκλήρωσης είναι από -1 ως 1 .

$$= 2 \int_{-1}^1 \frac{2dt}{4-4t^2} = 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [2 \cdot \text{τοξημ}t]_{-1}^1 = 2[\text{τοξημ}1 - \text{τοξημ}(-1)] = 2\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\pi$$

Άρα $\ell_{\text{ολικό}} = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$

24. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = \ln \sigma \upsilon \nu x$ από $x = 0$ ως

$$x = \frac{\pi}{3}. \text{ Είναι } y' = \frac{-\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} \text{ και } \ell = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x}} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sigma \upsilon \nu x}$$

Στη συνέχεια ακολουθείτε η διαδικασία της εφαρμογής 19.

25. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της $y = \ln \eta \mu x$ από $x = \frac{\pi}{4}$ ως $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Είναι } y' = \frac{\sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu x}, \quad \ell = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{\sigma \upsilon \nu^2 x}{\eta \mu^2 x}} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\eta \mu x} = \left[\ln \varepsilon \varphi \frac{x}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$\ln \varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{4} \right) - \ln \varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{8} \right) = \ln 1 - \ln \varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{8} \right) = -\ln \varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{Από τη σχέση } \varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{2\varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{8} \right)}{1 - \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{\pi}{8} \right)} \Rightarrow 1 = \frac{2\varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{8} \right)}{1 - \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{\pi}{8} \right)} \text{ έπεται } \varepsilon \varphi = \frac{\pi}{8} \text{ και έχω}$$

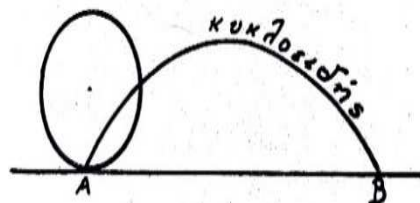
$$\varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{8} \right) = -1\sqrt{2} \text{ ή } \varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{8} \right) = -1 - \sqrt{2} \text{ η οποία όμως απορρίπτεται διότι δίνει αρνητικό}$$

$$\text{λογάριθμο. Άρα } \ell = \begin{cases} -\ln(-1+\sqrt{2}) \\ \text{ή} \\ \ln(-1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

26. Εύρεση του μήκος της κυκλοειδούς καμπύλης $x = \alpha(\omega - \eta\mu\omega)$, $y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)$
Οι περιμετρικές εξισώσεις της κυκλοειδούς καμπύλης είναι:
 $x = \alpha(\omega - \eta\mu\omega)$, $y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)$.

Κυκλοειδής είναι η καμπύλη την οποία γράφει ένα σημείο μίας περιφέρειας κύκλου όταν ο οποίος κυλιέται πάνω σε μια ευθεία γραμμή.

Αν αυτή η ευθεία γραμμή ληφθεί ως άξονας x' , τότε θέλω να βρω το μήκος μεταξύ των διαδοχικών σημείων τομής της καμπύλης με τον άξονα x' . Για να βρω τα άκρα ολοκλήρωσης θέτω $y = 0$ άρα $\alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega) = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega = 1$ άρα $\omega = 0$ ή $\omega = 2\pi$.



$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 d\omega^2 + \alpha^2\eta^2 d\omega^2} = \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\sigma\upsilon\nu\omega} d\omega =$$

$$\alpha\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu\omega} d\omega = 2\alpha\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega = 4\alpha\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) d\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left[4\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]_0^{2\pi} =$$

$$-4\alpha\sigma\upsilon\nu\pi - (-4\alpha\sigma\upsilon\nu 0) = -4\alpha(-1) - (-4\alpha) = 8\alpha$$

27. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $x = e^t \sigma\upsilon\nu t$, $y = e^t \eta\mu t$, $z = e^t$ από $t = -\infty$ ως $t = 0$. Η καμπύλη δίνεται σε

περιμετρικές εξισώσεις $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$,

$$dx = e^t(\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t)dt, \quad dy = e^t(\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t)dt, \quad dz = e^t dt$$

$$\ell = \int_{-\infty}^0 \sqrt{e^{2t}(\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t)^2 dt^2 + e^{2t}(\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t)^2 dt^2 + e^{2t} dt^2}$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^t dt \sqrt{(\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t)^2 + (\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t)^2} = \sqrt{2} \int_{-\infty}^0 e^t dt \quad \text{Το τελευταίο είναι γενικευμένο}$$

ολοκλήρωμα. Άρα, το $\int_{-\infty}^0 e^t dt$ θα υπάρχει αν υπάρχει το $\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 e^t dt$ και είναι ένας

συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός A . Τότε είναι $\int_{-\infty}^0 e^t dt = A$ και

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 e^t dt = \left[e^t \right]_u^0 = e^0 - e^u = 1 \quad \text{διότι } e^{-\infty} = 0. \quad \text{Άρα } \ell = \sqrt{2}.$$

28. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $x^2 = 3y, 2xy = 9z$ από $x=0$ ως $x=a$. Επειδή δίνονται οι μεταβλητές των x θα θεωρήσω τα y, z συναρτήσεις του x . Είναι $y = \frac{x^2}{3}, z = \frac{2x^3}{27}$ άρα $y' = \frac{2x}{3}, z' = \frac{2x^2}{9}$.

$$\ell = \int_0^a \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx =$$

$$\int_0^a \sqrt{1 + \frac{4x^2}{9} + \frac{4x^4}{81}} dx = \frac{1}{9} \int_0^a \sqrt{81 + 36x^2 + 4x^4} dx = \frac{1}{9} \int_0^a \sqrt{(9 + 2x^2)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^a (9 + 2x^2) dx = \frac{1}{9} \left[x + \frac{2x^3}{3} \right]_0^a = \frac{1}{9} \left(9a + \frac{2a^3}{3} \right)$$

29. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = \text{τοξημ}x, z = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$ από $x=0$ ως $x=a$. Επειδή δίνονται οι μεταβολές του x , βρίσκω τις παραγώγους $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, z' = \frac{1}{2(1-x^2)}$. Το ζητούμενο μήκος δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{1 + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{4(1-x^2)^2}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{4(1-x^2)^2 + 4(1-x^2) + 1}{4(1-x^2)^2}} dx = \int_0^a \frac{\sqrt{4-8x^2+4x^4+4-4x^2+1}}{2(1-x^2)} dx$$

$$= \int_0^a \frac{\sqrt{9-12x^2+4x^4}}{2(1-x^2)} dx = \int_0^a \frac{\sqrt{(2x^2-3)^2}}{2(1-x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x^2-3}{1-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int_0^a \frac{2x^2-3}{x^2-1} dx$$

$$= \frac{-1}{2} \int_0^a \left(2 - \frac{1}{x^2-1} \right) dx = \frac{-1}{2} \int_0^a 2 dx = \frac{-1}{2} \int_0^a \frac{dx}{x^2-1} \int_0^a = [-x]_0^a + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{dx}{(x+1)(x-1)}$$

$$= [-x]_0^a + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{A dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{B dx}{x-1} = -[x]_0^a - \ln(x+1) + \ln(x-1) =$$

Είναι $\left(A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2} \right)$ άρα

$$-x + \ln \left[\frac{x-1}{x+1} \right]_0^a = -a + \ln \frac{a-1}{a+1} - \ln(-1) = -a + \ln \left(\frac{\frac{a-1}{a+1}}{-1} \right) = -a + \ln \frac{1-a}{1+a}$$

Δηλαδή $\ell = \ln \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) - \alpha$

1.14 Μήκος του τόξου επίπεδης καμπύλης γραμμής, σε πολικές συντεταγμένες

Το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής, της οποίας η εξίσωση δίνεται σε πολικές συντεταγμένες, λαμβάνεται από τον τύπο $\ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta} \right)^2} d\theta$ ή από τον

τύπο $\ell = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{p^2 \left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 + 1} dp$, όπου θ_1, θ_2 οι μεταβολές της πολικής γωνίας και ρ_1, ρ_2 οι μεταβολές της πολικής ακτίνας.

1.15 Εφαρμογές

30. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = e^{2\theta}$ από $\theta = 0$ ως $\theta = 2\pi$.

Είναι $dp = 2e^{2\theta} d\theta$, $\frac{dp}{d\theta} = 2e^{2\theta}$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta} \right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{4\theta} + 4e^{4\theta}} d\theta = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} e^{2\theta} d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^{2\pi} e^{2\theta} d2\theta \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} [e^{2\theta}]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{4\pi} - 1) \end{aligned}$$

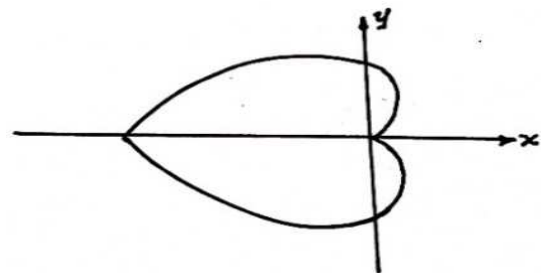
31. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = \alpha(1 - \sigma \nu \theta)$ από $\theta = 0$ ως $\theta = 2\pi$.

Είναι $\ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta} \right)^2} d\theta$

και $dp = -\alpha \eta \mu \theta d\theta$, $\frac{dp}{d\theta} = -\alpha \eta \mu \theta$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 (1 - \sigma \nu \theta)^2 + \alpha^2 \eta \mu^2 \theta} d\theta =$$

$$\alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\sigma \nu \theta + \sigma \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \theta} d\theta = \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\sigma \nu \theta} d\theta = \alpha \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sigma \nu \theta} d\theta$$



$$= \alpha \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\eta\mu^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2\alpha \int_0^{2\pi} \eta\mu \frac{\theta}{2} d\theta = \left[-4\alpha \sigma \nu \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 8\alpha$$

32. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της $p = \alpha(1 - \eta\mu\theta)$ από $\theta = \frac{\pi}{2}$ ως $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Τα όρια από $\theta = 0$ ως $\theta = 2\pi$ δίνουν λάθος αποτέλεσμα.

$$\text{Είναι } dp = -\alpha \sigma \nu \theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = -\alpha \sigma \nu \theta$$

$$\ell = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{\alpha^2 (1 - \eta\mu\theta)^2 + \alpha^2 \sigma \nu^2 \theta} d\theta =$$

$$\alpha \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 - 2\eta\mu\theta + \eta\mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \theta} d\theta =$$

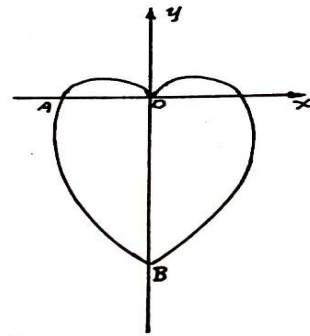
$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \alpha \sqrt{2 - 2\eta\mu\theta} d\theta = \alpha \sqrt{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 - \eta\mu\theta} d\theta =$$

$$\alpha \sqrt{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 - \eta\mu\theta} d\theta = \alpha \sqrt{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{2\sigma \nu^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} d\theta =$$

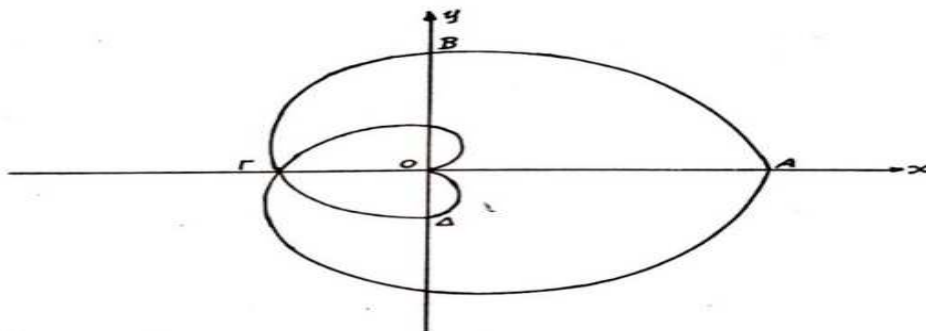
$$= 2\alpha \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sigma \nu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) d\theta = 4\alpha \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sigma \nu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) d\left(\frac{\theta}{2} \right) = \left[4\alpha \eta\mu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 4\alpha \eta\mu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) - 4\alpha \eta\mu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 4\alpha \eta\mu \pi - 4\alpha \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} \right) = -4\alpha.$$

Άρα $\ell = 4\alpha$. Αυτό είναι το μισό μήκος διότι ολοκλήρωσα από $\frac{\pi}{2}$ ως $\frac{3\pi}{2}$ και βρήκα το μήκος του ΟΑΒ. Άρα $\ell_{\text{ολικό}} = 8\alpha$.



33. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = \sigma \nu \nu^4 \frac{\theta}{4}$ από $\theta = 0$ ως $\theta = 2\pi$. Είναι $dp = 4\alpha \sigma \nu \nu^3 \frac{\theta}{4} \left(-\eta\mu \frac{\theta}{4} \right) \frac{1}{4} d\theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = -\alpha \sigma \nu \nu^3 \frac{\theta}{4} \eta\mu \frac{\theta}{4}$



$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 \sigma \nu^8 \left(\frac{\theta}{4}\right) + \alpha^2 \sigma \nu^6 \left(\frac{\theta}{4}\right) \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{4}\right)} d\theta = \alpha \int_0^{2\pi} \sigma \nu^3 \left(\frac{\theta}{4}\right) d\theta \\
&= 4\alpha \int_0^{2\pi} \sigma \nu^2 \left(\frac{\theta}{4}\right) \sigma \nu \left(\frac{\theta}{4}\right) d\left(\frac{\theta}{4}\right) = 4\alpha \int_0^{2\pi} \sigma \nu^2 \left(\frac{\theta}{4}\right) d\left(\eta \mu \frac{\theta}{4}\right) = 4\alpha \int_0^{2\pi} \left(1 - \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{4}\right)\right) d\left(\eta \mu \frac{\theta}{4}\right) \\
&= 4\alpha \int_0^{2\pi} d\eta \mu \left(\frac{\theta}{4}\right) - 4\alpha \int_0^{2\pi} \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{4}\right) d\left(\eta \mu \frac{\theta}{4}\right) = 4\alpha \left[\eta \mu \left(\frac{\theta}{4}\right) - \frac{\eta \mu^3 \left(\frac{\theta}{4}\right)}{3} \right]_0^{2\pi} = 4\alpha \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8\alpha}{3}
\end{aligned}$$

Βρήκα το μήκος ΑΒΓΔΟ, που είναι το μισό του ζητούμενου, άρα

$$\ell_{\text{ολικό}} = 2 \frac{8\alpha}{3} = \frac{16\alpha}{3}$$

34. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = e^{3\theta+5}$ από $\theta = 0$ ως

$$\theta = \frac{\pi}{4}. \text{ Είναι } dp = 3e^{3\theta+5} d\theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = 3e^{3\theta+5}$$

$$d\ell = \int_0^{\pi/4} \sqrt{e^{6\theta+10} + 9e^{6\theta+10}} d\theta = \sqrt{10} \int_0^{\pi/4} e^{3\theta+5} d\theta = \frac{\sqrt{10}}{3} \int_0^{\pi/4} e^{3\theta+5} d(3\theta+5) = \left[\frac{\sqrt{10}}{3} e^{3\theta+5} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3} \left(e^{\frac{3\pi}{4}+5} - e^5 \right) = \frac{\sqrt{10}}{3} e^5 \left(e^{\frac{3\pi}{4}} - 1 \right)$$

35. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης

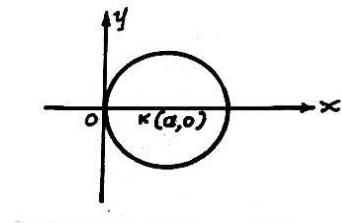
γραμμής $p = 2a \sigma \nu \theta$ από $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ως $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Είναι } dp = -2a \eta \mu \theta d\theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = -2a \eta \mu \theta$$

$$\ell = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4\alpha^2 \sigma \nu^2 \theta + 4\alpha^2 \eta \mu^2 \theta} d\theta =$$

$$2\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = [2\alpha \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\alpha \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2\pi\alpha. \text{ Αν ήθελα μπορούσα να ολοκληρώσω}$$

από 0 ως $\frac{\pi}{2}$ και να διπλασιάσω το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής που θα βρω.



36. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = \alpha \tau \varepsilon \mu^2 \frac{\theta}{2}$ από $\theta = 0$

$$\text{ως } \theta = \frac{\pi}{2}. \text{ Είναι } p = \alpha \frac{1}{\sigma \nu^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} dp = \frac{-2 \sigma \nu \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(-\eta \mu \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \frac{1}{2}}{\sigma \nu^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} d\theta, \text{ άρα}$$

$$dp = \frac{\alpha \eta \mu \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\sigma \nu^3 \left(\frac{\theta}{2} \right)} d\theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = \frac{\alpha \eta \mu \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\sigma \nu^3 \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\ell = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\sigma \nu^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} + \frac{\alpha^2 \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\sigma \nu^6 \left(\frac{\theta}{2} \right)}} d\theta = \alpha \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sigma \nu^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\sigma \nu^6 \left(\frac{\theta}{2} \right)}} d\theta = \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sigma \nu^3 \left(\frac{\theta}{2} \right)} =$$

$$2\alpha \int_0^{\pi/2} \sigma \nu^{-3} \left(\frac{\theta}{2} \right) d \left(\frac{\theta}{2} \right) = 2\alpha \left(-\frac{\sigma \nu^{-2} \left(\frac{\theta}{2} \right) \eta \mu \left(\frac{\theta}{2} \right)}{-2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sigma \nu^{-1} \left(\frac{\theta}{2} \right) d \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$= \left[\alpha \frac{\eta \mu \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\sigma \nu^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right]_0^{\pi/2} + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{d \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\sigma \nu \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \text{Για το τελευταίο ολοκλήρωμα θέτω } \varepsilon \varphi \frac{\theta}{4} = t \text{ και}$$

$$\text{έχω } d \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{2dt}{1+t^2}, \sigma \nu \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \text{ Τα όρια γίνονται από } t=0 \text{ ως } t = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{Από τη σχέση } \varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{2\varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{8} \right)}{1 - \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{\pi}{8} \right)} \text{ βρίσκω την } \varepsilon \varphi \left(\frac{\pi}{8} \right) \text{ και έχω } t = -1 + \sqrt{2},$$

$t = -1 - \sqrt{2}$ η οποία απορρίπτεται για δύο λόγους:

- Είναι μικρότερη της $t = 0$ που είναι το κατώτερο όριο
- Στο τελικό αποτέλεσμα θα έχω αρνητικό λογάριθμο

Αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα και έχω

$$= \alpha \sqrt{2} + \alpha \int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{2dt}{1-t^2} = \alpha \sqrt{2} - 2\alpha \int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2-1} = \alpha \sqrt{2} - 2\alpha \int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{dt}{(t+1)(t-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha\sqrt{2} - 2\alpha \int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{Adt}{t+1} - 2\alpha \int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{Bdt}{t+1} = \left(A = \frac{-1}{2}, B = \frac{1}{2} \right) \\
&= \alpha\sqrt{2} + \alpha \int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t+1} - \alpha \int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t-1} = \alpha\sqrt{2} + \alpha [\ln(t+1) - \ln(t-1)]^{1+\sqrt{2}} \\
&= \alpha\sqrt{2} + \left[\alpha \ln \frac{t+1}{t-1} \right]_0^{-1+\sqrt{2}} = \alpha\sqrt{2} + \alpha \left[\ln \frac{-1+\sqrt{2}+1}{-1+\sqrt{2}-1} - \ln(-1) \right] = \alpha\sqrt{2} + \alpha \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2} \right) \\
&= \alpha\sqrt{2} + \alpha \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right) = \alpha \left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) \right] = \alpha \left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) \right]
\end{aligned}$$

37. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = \alpha\theta$ από $\theta = 0$ ως $\theta = 2\pi$. Θα δειχθεί ότι το μήκος είναι $\alpha\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{\alpha}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2\theta^2 + \alpha^2} d\theta = \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta$$

$$\text{Θέτω } \sqrt{\theta^2 + 1} = t - \theta \Rightarrow \theta^2 + 1 = t^2 - 2t\theta + \theta^2 \Rightarrow \theta = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad \text{άρα } d\theta = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$$

αντικαθιστώ και έχω

$$= \alpha \int (t - \theta) \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt = \alpha \int \left(t - \frac{t^2 - 1}{2t} \right) \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt = \alpha \int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt = \frac{\alpha}{4} \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^3} dt$$

$$= \frac{\alpha}{4} \int t dt + \frac{\alpha}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{\alpha}{4} \int t^{-3} dt = \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \ln t + \frac{\alpha}{4} \frac{t^{-2}}{-2} = \alpha \left[\frac{t^2}{8} + \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{8t^2} \right]$$

Θέτω την τιμή του $t = \theta + \sqrt{\theta^2 + 1}$ και έχω

$$\alpha \frac{1}{8} \left[\left(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1} \right)^2 - \frac{1}{\left(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1} \right)^2} \right] + \frac{\alpha}{2} \ln \left[\theta + \sqrt{\theta^2 + 1} \right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{\alpha}{8} \left[2\theta^2 + 1 + 2\theta\sqrt{\theta^2 + 1} - \frac{2\theta^2 + 1 - 2\theta\sqrt{\theta^2 + 1}}{(2\theta^2 + 1)^2 - (2\theta\sqrt{\theta^2 + 1})^2} \right] + \frac{\alpha}{2} \ln \left[\theta\sqrt{\theta^2 + 1} \right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{\alpha}{8} \left[2\theta^2 + 1 + 2\theta\sqrt{\theta^2 + 1} - \frac{2\theta^2 + 1 - 2\theta\sqrt{\theta^2 + 1}}{4\theta^4 + 4\theta^2 + 1 - 4\theta^4 - 4\theta^2} \right] + \frac{\alpha}{2} \ln \left[\theta\sqrt{\theta^2 + 1} \right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{\alpha}{8} \left[2\theta^2 + 1 + 2\theta\sqrt{\theta^2 + 1} - 2\theta^2 - 1 + 2\theta\sqrt{\theta^2 + 1} \right] + \frac{\alpha}{2} \ln \left[\theta\sqrt{\theta^2 + 1} \right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{\alpha}{8} \left(4\theta\sqrt{\theta^2 + 1} \right) + \frac{\alpha}{2} \ln \left[\theta\sqrt{\theta^2 + 1} \right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{\alpha}{8} \left(8\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} \right) + \frac{\alpha}{2} \ln \left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1} \right) - \frac{\alpha}{8} (0) - \frac{\alpha}{8} \ln(1) =$$

$$a\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{\alpha}{2} \ln \left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1} \right)$$

38. Δείξτε ότι το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = \alpha e^{\alpha\theta}$ από το σημείο $(0, 0)$ ως το σημείο (ρ, θ) είναι $\frac{p}{\alpha} = \sqrt{\alpha^2 + 1}$. Είναι $dp = \alpha e^{\alpha\theta} d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dp} = \frac{1}{\alpha e^{\alpha\theta}}$

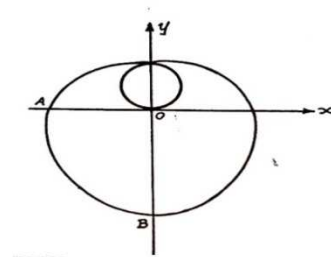
Λαμβάνω τον τύπο $\ell = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{p \left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 + 1} dp$. Το p μεταβάλλεται από 0 ως ρ άρα

$$\ell = \int_0^p \sqrt{e^{2\alpha\theta} \frac{1}{\alpha^2 e^{2\alpha\theta}} + 1} dp = \int_0^p \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1} dp = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} \int_0^p dp = \left[\frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} p \right]_0^p = \frac{p}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + 1}$$

39. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = \alpha \eta \mu^3 \frac{\theta}{3}$ από $\theta = 0$ ως $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

$$\text{Είναι } dp = 3\alpha \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \sigma \upsilon \nu \left(\frac{\theta}{3} \right) \frac{1}{3} d\theta$$

$$\text{Άρα } \frac{dp}{d\theta} = \alpha \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \sigma \upsilon \nu \left(\frac{\theta}{3} \right)$$



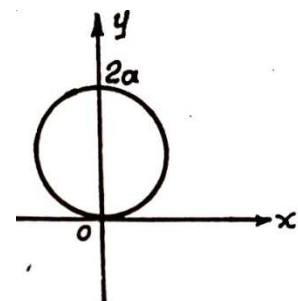
$$\ell = \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\alpha^2 \eta \mu^6 \left(\frac{\theta}{3} \right) + \alpha^2 \eta \mu^4 \left(\frac{\theta}{3} \right) \sigma \upsilon \nu^2 \left(\frac{\theta}{3} \right)} d\theta = \alpha \int_0^{3\pi/2} \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) d\theta$$

$$= 3\alpha \int_0^{3\pi/2} \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) d \left(\frac{\theta}{3} \right) = 3\alpha \left[\frac{-\eta \mu \left(\frac{\theta}{3} \right) \cdot \sigma \upsilon \nu \left(\frac{\theta}{3} \right)}{2} + \frac{\theta}{2} \right]_0^{3\pi/2} = 3\alpha \left(\frac{\pi}{4} \right) - 3\alpha(0) = \frac{3\pi\alpha}{4}$$

Για να βρω το ολικό μήκος, διπλασιάζω, δηλαδή $\ell_{\text{ολικό}} = \frac{3\pi\alpha}{2}$

40. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = 2\alpha \eta \mu \theta$.

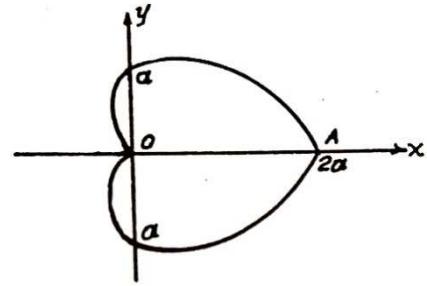
$$\text{Είναι } dp = 2\alpha \sigma \upsilon \nu \theta d\theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = 2\alpha \sigma \upsilon \nu \theta$$



$$\ell_{\text{ολικό}} = \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4\alpha^2 \eta \mu^2 \theta + 4\alpha^2 \sigma \nu^2 \theta} d\theta$$

$$= 2\alpha \int_0^{\pi} d\theta = [2\alpha\theta]_0^{\pi} = 2\alpha\pi$$

41. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $\rho = \alpha(1 + \sigma \nu \theta)$. Βρίσκω τα όρια ολοκλήρωσης ως εξής. Θέτω $\theta = 0$ και βρίσκω $\rho = 2\alpha$. Δηλαδή η καμπύλη για $\theta = 0$ ορίζεται. Η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον άξονα xx' . Το κατώτερο όριο είναι $\theta_1 = 0$. Για τον προσδιορισμό του ανώτερου ορίου βρίσκω τη μικρότερη τιμή του θ για την οποία το ρ μηδενίζεται, δηλαδή στη σχέση $\rho = \alpha(1 + \sigma \nu \theta)$ θέτω $\rho = 0$ και έχω $\sigma \nu \theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$.



Άρα
$$\ell = \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta,$$

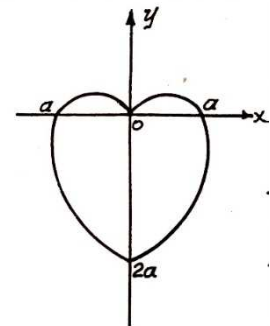
$$d\rho = -\alpha \eta \mu \theta d\theta \Rightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = -\alpha \eta \mu \theta$$

$$\ell = \int_0^{\pi} \sqrt{\alpha^2 (1 + \sigma \nu \theta)^2 + \alpha^2 \eta \mu^2 \theta} d\theta = \alpha \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\sigma \nu^2 \theta + 2\sigma \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \theta} d\theta$$

$$= \alpha \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\sigma \nu \theta} d\theta = \alpha \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sigma \nu \theta} d\theta = \alpha \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{2\sigma \nu^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

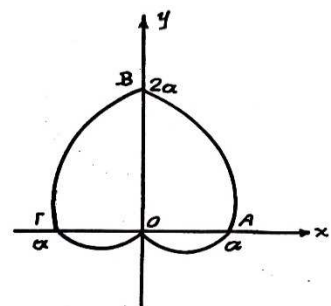
$$= 2\alpha \int_0^{\pi} \sigma \nu \left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4\alpha \int_0^{\pi} \sigma \nu \left(\frac{\theta}{2}\right) d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left[4\alpha \cdot \eta \mu \left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 4\alpha, \text{ Άρα } \ell_{\text{ολικό}} = 8\alpha$$

42. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $\rho = \alpha(1 - \eta \mu \theta)$ η οποία ορίζεται για κάθε τιμή του θ από 0 ως 2π . Η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον άξονα yy' άρα θα λάβω ως όρια από $\theta = \frac{\pi}{2}$ ως $\theta = \frac{3\pi}{2}$.



Δηλαδή
$$\ell = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta \text{ (βλέπε εφαρμογή 32).}$$

43. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $\rho = \alpha(1 + \eta \mu \theta)$. Τα όρια ολοκλήρωσης α είναι από $\theta = \frac{\pi}{2}$ ως $\theta = \frac{3\pi}{2}$.



$$dp = \alpha \sigma \nu \theta \, d\theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = \alpha \sigma \nu \theta$$

$$\ell = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{\alpha^2 (1 + \eta \mu \theta)^2 + \alpha^2 \sigma \nu^2 \theta} \, d\theta =$$

$$\alpha \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 + 2\eta \mu \theta + \eta^2 \theta + \sigma \nu^2 \theta} \, d\theta =$$

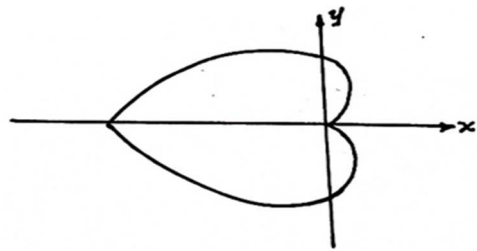
$$\alpha \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{2 + 2\eta \mu \theta} \, d\theta = \alpha \sqrt{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 + \eta \mu \theta} \, d\theta = \alpha \sqrt{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{2\eta \mu^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \, d\theta =$$

$$4\alpha \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta \mu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) d\theta = 8\alpha \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta \mu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) d\left(\frac{\theta}{2} \right) = \left[-8\alpha \sigma \nu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

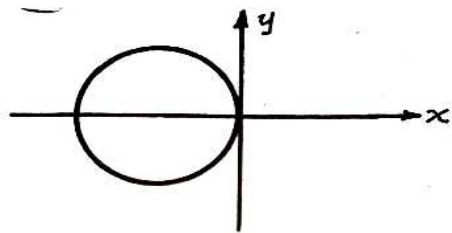
$$-8\alpha \sigma \nu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) + 8\sigma \nu \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = -8\alpha \sigma \nu \pi + 8\sigma \nu \frac{\pi}{2} = 8\alpha$$

44. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $p = \alpha(1 - \sigma \nu \theta)$. Τα όρια είναι από $\theta = 0$ ως $\theta = \pi$ και το αποτέλεσμα που βρίσκω το διπλασιάζω.

Αν όμως ολοκληρώσω από $\theta = 0$ ως $\theta = 2\pi$ βρίσκω κατευθείαν το ολικό μήκος, διότι μεταξύ $\theta = 0$ και $\theta = 2\pi$ η πολική ακτίνα p για κάθε τιμή του θ είναι διαφορετική του μηδενός. Είναι ίδια με την εφαρμογή 31.



45. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $p = -2a \cdot \sigma \nu \theta$. Η καμπύλη είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει το κέντρο της στον αρνητικό ημιάξονα άξονα xx' άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα xx' .

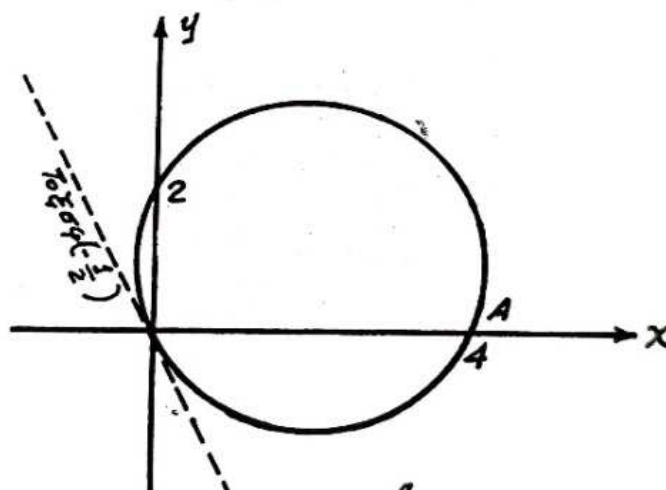


Είναι $dp = 2a\eta \mu \theta \, d\theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = 2a\eta \mu \theta$

$$\ell = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{4\alpha^2 \sigma \nu^2 \theta + 4\alpha^2 \eta \mu^2 \theta} \, d\theta = 2a \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta = [2a\theta]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{2\alpha 3\pi}{2} - \frac{2\alpha \pi}{2} = 2\alpha \pi$$

46. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $\rho = 4\sigma\upsilon\nu\theta + 2\eta\mu\theta$. Η καμπύλη είναι περιφέρεια κέντρου $K(2,1)$ και ακτίνας $\sqrt{5}$ άρα το μήκος της είναι $2\pi\sqrt{5}$ και έχει εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

Θα βρω το μήκος με πολικές συντεταγμένες. Θα πάρω ως όρια από $\theta = 0$ έως $\theta = \pi$ διότι αν κατασκευάσω την καμπύλη θα έχω τις εξής μεταβολές:



θ	0	$\frac{\pi}{2}$	τοξοσφ $\left(-\frac{1}{2}\right)$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	4	2	0	-4	-2	4

Ο κύκλος κλείνει όταν $\theta = \pi$ διότι η τιμή $\rho = 4$ και λαμβάνεται στο αντίθετο μέρος συμπίπτει με το Α.

$$\ell = \int_0^{\pi} \sqrt{(4\sigma\upsilon\nu\theta + 2\eta\mu\theta)^2 + (-4\eta\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta)^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{20} d\theta = \left[\sqrt{20}\theta \right]_0^{\pi} = \sqrt{20}\pi = 2\pi\sqrt{5}$$

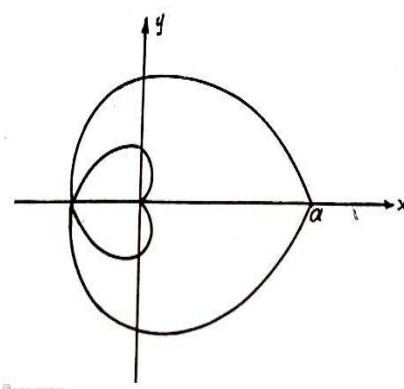
47. Να βρεθεί το μήκος της του τόξου της καμπύλης γραμμής $\rho = \alpha\eta\mu^4\left(\frac{\theta}{4}\right)$. Είναι

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2\eta\mu^8\left(\frac{\theta}{4}\right) + \alpha^2\eta\mu^6\left(\frac{\theta}{4}\right)\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\theta}{4}\right)} d\theta =$$

$$\alpha \int_0^{2\pi} \eta\mu^3\left(\frac{\theta}{4}\right) d\theta = 4\alpha \int_0^{2\pi} \eta\mu^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \eta\mu\left(\frac{\theta}{4}\right) d\left(\frac{\theta}{4}\right) =$$

$$-4\alpha \int_0^{2\pi} \left(1 - \sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{4}\right) d\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{4}\right) = -4\alpha \int_0^{2\pi} d\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{4}\right) + 4\alpha \int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\theta}{4}\right) d\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{4}\right) =$$

$$\left[-4\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{4}\right) + 4\alpha \frac{\sigma\upsilon\nu^3\left(\frac{\theta}{4}\right)}{3} \right]_0^{2\pi} = 0 + 4\alpha - 4\alpha \frac{1}{3} = \frac{8\alpha}{3}. \quad \text{Άρα } \ell_{ολ} = \frac{16\alpha}{3}$$



48. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $\rho = \alpha \sigma \nu^2 \frac{\theta}{2}$ από $\theta = 0$ ως $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Το μήκος δίνεται από τον τύπο $\ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$. Έχω

$$d\rho = -\alpha \sigma \nu \left(\frac{\theta}{2}\right) \eta \mu \left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{2} d\theta \Rightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = -\sigma \nu \left(\frac{\theta}{2}\right) \eta \mu \left(\frac{\theta}{2}\right). \text{ Αντικαθιστώ και έχω:}$$

$$\ell = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\alpha^2 \sigma \nu^4 \left(\frac{\theta}{2}\right) + \alpha^2 \sigma \nu^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\alpha^2 \sigma \nu^2 \frac{\theta}{2} \left(\sigma \nu^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) + \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \right)} d\theta = \int_0^{\pi/2} \alpha \sigma \nu \left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta =$$

$$2\alpha \int_0^{\pi/2} \sigma \nu \left(\frac{\theta}{2}\right) d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left[2\alpha \eta \mu \left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_0^{\pi/2} = 2\alpha \eta \mu \left(\frac{\pi}{4}\right) = \alpha \sqrt{2}. \text{ Δηλαδή } \ell = \alpha \sqrt{2}$$

Βιβλιογραφία

- Κανέλλος, Σ.Γ. (1955). «Ασκήσεις ανωτέρων μαθηματικών», Αθήνα,
- Μπαντές, Γ. «Από τη γεωμετρία της καμπυλότητας στα βαρυτικά κύματα»
- Ξένος, Π. κ.α. (1999). «Ευκλείδεια γεωμετρία Α' & Β' ενιαίου λυκείου», Αθήνα, ΟΕΔΒ
- Τζιβανίδης, Γ.Ι. (1964). «Σημειώσεις ανωτέρων μαθηματικών», Θεσσαλονίκη
- Χατζόπουλος, Δ.Ι. (1978). «Ανώτερα μαθηματικά», τόμος 2, έκδοση Ζ, Θεσσαλονίκη
- Ayres, F. (1950). "Differential & integral calculus", New York
- Bacon, H.M. (1955). "Differential & integral calculus", New York
- Farouki, R.T. (1999). «Καμπύλες από κίνηση, κίνηση από καμπύλες», Στο P-J. Laurent, Sablonniere & Schumaker (επιμέλεια), «Σχεδιασμός καμπύλης & επιφάνειας: Saint-Malo (1999).
- Hazewinkel, M. (2001), "Ευθυγραμμισμη καμπύλη», Εγκυκλοπαίδεια των Μαθηματικών, Springer
- Rudin, W. (1976). «Αρχές της μαθηματικής ανάλυσης», McGraw-Hill, Inc.
- Weisstein, Eric W., «Μήκος τόξου», MathWorld