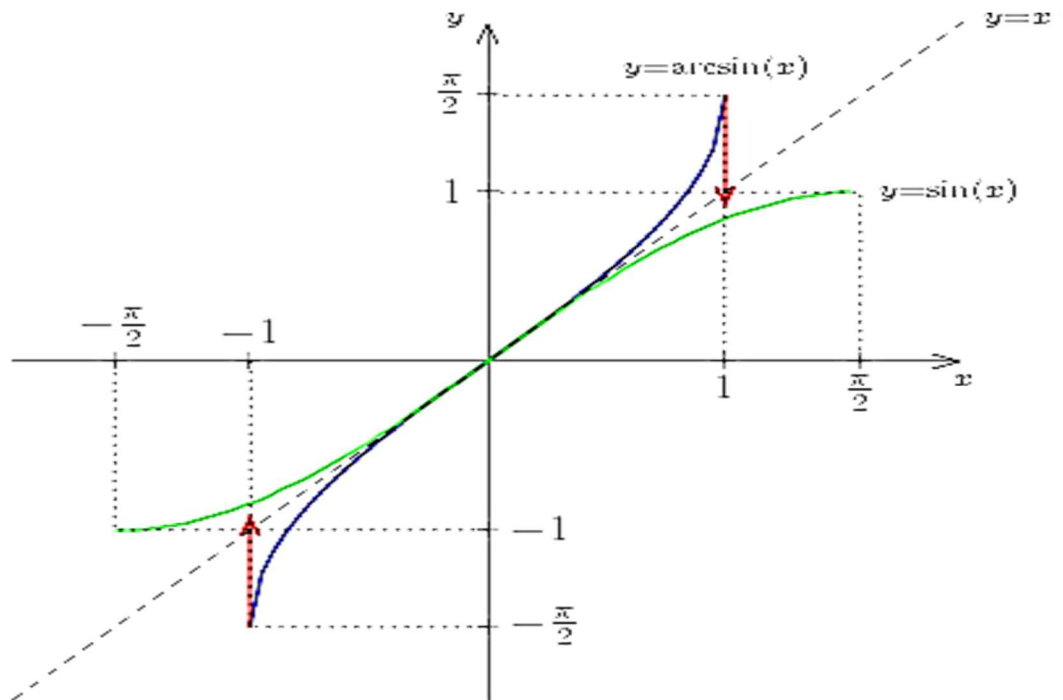




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις & οι αντίστροφές τους

Σπουδαστής: Νταλλάρης Εμμανουήλ (ΑΜ 8571)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2022–2023

Ημερομηνία ανάθεσης: **19.01.2021**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **27.06.2023**
 Ημερομηνία εξέτασης: **...07.2023**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Η συνάρτηση $y=\cos x$	4
2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες της $y=\cos x$	4
3. Βασικό πρόβλημα για την $y=\cos x$	5
4. Η περιοδικότητα της $y=\cos x$	5
5. Γραφική παράσταση της $y=\cos x$	5
6. Η συνάρτηση $y=\sin x$	6
7. Χαρακτηριστικές ιδιότητες της $y=\sin x$	6
8. Βασικό πρόβλημα δια την $y=\sin x$	7
9. Η περιοδικότητα της $y=\sin x$	7
10. Γραφική παράσταση της $y=\sin x$	8
11. Η συνάρτηση $y=\epsilon\phi x$	8
12. Χαρακτηριστικές ιδιότητες της $y=\epsilon\phi x$	9
13. Βασικό πρόβλημα για την $y=\epsilon\phi x$	9
14. Η περιοδικότητα της $y=\epsilon\phi x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$	9
15. Γραφική παράσταση της $y=\epsilon\phi x$	9
16. Η συνάρτηση $y=\sigma\phi x$	10
17. Χαρακτηριστικές ιδιότητες της $y=\sigma\phi x$	10
18. Βασικό πρόβλημα για την $y=\sigma\phi x$	11
19. Η περιοδικότητα της $y=\sigma\phi x$	11
20. Γραφική παράσταση της $y=\sigma\phi x$	11
21. Τέμνουσα – συντέμνουσα	11
22. Σχέσεις μεταξύ των κυκλικών συναρτήσεων του αυτού τόξου	12
23. Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο	13
24. Τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων 30° , 45° , 60°	16
25. Εφαρμογές	17
26. Αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις	18
26.1 Η αντίστροφη της $y=\sin x$	18
26.2 Η αντίστροφη της $y=\cos x$	19
26.3 Η αντίστροφη της $y=\epsilon\phi x$	20
26.4 Η αντίστροφη της $y=\sigma\phi x$	21
27. Γραφική παράσταση των αντίστροφων κυκλικών συναρτήσεων	22
28. Βασικές ταυτότητες στις αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις	23

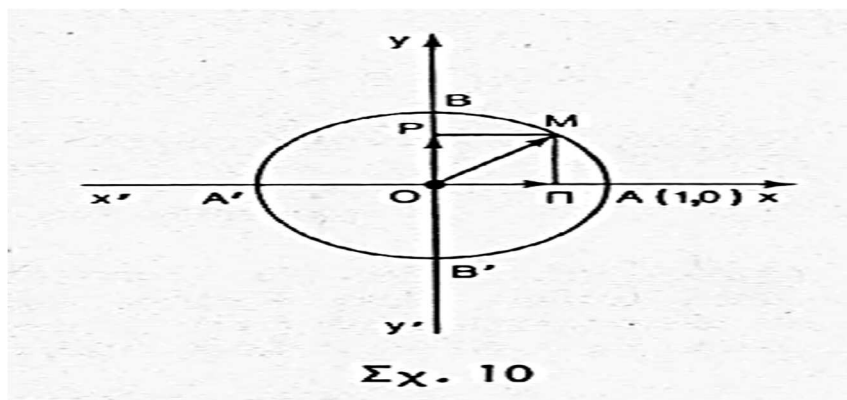
1. Η συνάρτηση $y=\cos x$

Επί του τριγωνομετρικού κύκλου (Σχ. 10) θεωρώ το τριγωνομετρικό τόξο $\widehat{AM}$. Αν τ το μέτρο του πρώτου μη αρνητικού τόξου AM γνωρίζω ότι το μέτρο x του τυχόντος τόξου AM δίνεται από τον τύπο $x = 2k\pi + \tau$, με $k \in \mathbb{Z}$. Ονομάζω συνημίτονο¹ του τόξου x το σχετικό μέτρο του διανύσματος $\vec{OP}$ και συμβολίζω:

$(\vec{OP}) = \cos x$ όπου $((\vec{OP}) = \text{σχετικό μέτρο της ορθής προβολής της τελικής διανυσματικής ακτίνας } \vec{OM} \text{ επί του άξονα } x'Ox \text{ ή } (\vec{OP}) = \text{τετμημένη του σημείου } M)$.

Από τώρα και μετά ο άξονας $x'Ox$ θα ονομάζεται «άξονας των συνημιτόνων». Η ανωτέρω διαδικασία ορίζει τη συνάρτηση του τύπου $y = \cos x$. Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς μπορώ να πω ότι πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$ και σημειώνω: $y = \cos x | \mathbb{R}$

Το πεδίο τιμών της συνάρτησης θα βρεθεί αν παρατηρήσω ότι $(OA)' \leq (OP) \leq (OA)$ ή $-1 \leq \cos x \leq 1$ δηλαδή κάθε τιμή της συνάρτησης κείται εις το διάστημα $[-1, +1]$. Εξ άλλου αν $\lambda \in [-1, +1]$ θα υπάρχει ένα μόνο σημείο Π επί του άξονα των x τέτοιο ώστε $(OP) = \lambda$ και επειδή $-1 \leq \lambda \leq 1$ θα είναι ότι $(OA)' \leq (OP) \leq (OA)$ οπότε αν εκ του Π φέρω παράλληλη προς τον άξονα Oy θα λάβω σημεία επί του κύκλου τα οποία θα είναι πέρατα τόξων των οποίων το συνημίτονο θα είναι λ . Συνεπώς, το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι το $[-1, +1]$.



2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες της $y=\cos x$

(i) Το συνημίτονο τόξου είναι θετικό αν και μόνο αν το τόξο λήγει στο το πρώτο ή στο τέταρτο τεταρτημόριο δηλ. $\cos x > 0 \Leftrightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

(ii) Το συνημίτονο τόξου είναι αρνητικό αν και μόνο αν το τόξο λήγει στο δεύτερο ή τρίτο τεταρτημόριο δηλ. $\cos x < 0 \Leftrightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

(iii) Το συνημίτονο είναι μηδέν τότε και μόνο τότε αν το τόξο λήγει εις τα σημεία B και B' δηλ. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

(iv) Τα τόξα των οποίων τα μέτρα είναι x και $-x$ έχουν άθροισμα μηδέν, άρα έχουν πέρατα συμμετρικά ως προς τον άξονα τον διερχόμενο από την κοινή τους αρχή,

¹ Οι απεικονίσεις φ, σ μας εξασφαλίζουν μια μονοσήμαντη απεικόνιση f του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών επί του συνόλου των σημείων του τριγωνομετρικού κύκλου. Έτσι αν $x \in \mathbb{R}$, η εικόνα του x μέσω της f θα είναι ένα και μόνο σημείο M επί του τριγωνομετρικού κύκλου. Ονομάζουμε συνημίτονο (ημίτονο) του x την τετμημένη (τεταγμένη) του σημείου M ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy .

συνεπώς τα συνημίτονα των είναι ίσα δηλ. $\sin x = \sin(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ άρα η συνάρτηση $y = \sin x$ είναι άρτια².

(v) Η συνάρτηση $y = \sin x$ $\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα³ στα διαστήματα $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ και γνησίως αύξουσα⁴ στα διαστήματα $[2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Τούτο διότι $\forall x_1, x_2 \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \sin x_1 > \sin x_2$ και

$\forall x_1, x_2 \in [2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \sin x_1 < \sin x_2$

(vi) Η συνάρτηση λαμβάνει μέγιστη τιμή το 1 και $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

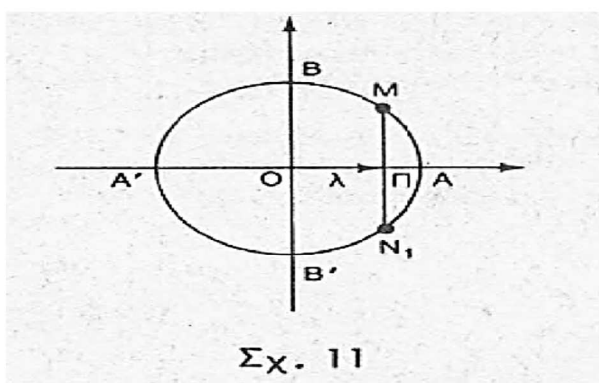
(vii) Η συνάρτηση λαμβάνει ελάχιστη τιμή το -1 και $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3. Βασικό πρόβλημα για την $y = \cos x$

Βρείτε τα τόξα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\sin x = \lambda \in \mathbb{R}$ (1)

(i) Αν $|\lambda| > 1$ από τον ορισμό του συνημιτόνου έπεται ότι δεν υπάρχουν τόξα x τα οποία επαληθεύουν την (i).

(ii) Αν $\lambda \leq 1$ τότε, από τον ορισμό του συνημιτόνου, έπεται ότι υπάρχει ένα και μόνο τόξο $\tau \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε $\sin \tau = \lambda$ (2). Την ανωτέρω λύση τ ονομάζω «αρχική λύση» της (1) και την συμβολίζω με το σύμβολο $\tau_{\text{ox}} \text{ συν} \lambda$. Εκ των (1), (2) λαμβάνω $\sin x = \sin \tau$. Τα τόξα όμως τα οποία



έχουν το αυτό συνημίτονο με το $\tau = \left(\overset{+}{\curvearrowright}_{AM} \right)$ είναι τα $x = 2k\pi + \tau$ και τα $x = 2k\pi - \tau$,
 ώστε: $\sin x = \sin \tau \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \tau$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Η περιοδικότητα της $y = \cos x$

Η $y = \sin x$ είναι περιοδική⁵ με περίοδο 2π διότι εκ της σχέσεως $\sin(x + \theta) = \sin x$ λαμβάνω $x + \theta = 2k\pi + x$, $k \in \mathbb{Z}$ (1)

$$x + \theta = 2k\pi - x, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Από τη (2) δεν προκύπτει θ το οποίο να ανταποκρίνεται στην ιδιότητα, ενώ η (1) επαληθεύεται $\forall x \in \mathbb{R}$ αρκεί το θ να εκλεγεί ίσο προς το $2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Η μικρότερη θετική τιμή του θ είναι το 2π συνεπώς η πρωτεύουσα περίοδος της συνάρτησης είναι το 2π .

5. Γραφική παράσταση της $y = \cos x$

Για τη γραφική παράσταση της $y = \sin x$ λαμβάνουμε υπ' όψη όλες τις μέχρι τώρα γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης. Επειδή η συνάρτηση είναι περιοδική με

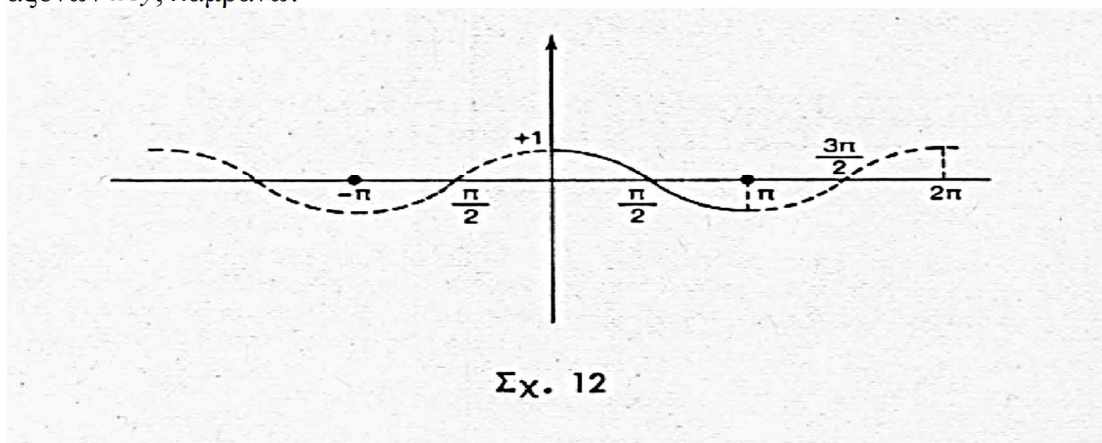
² Μια συνάρτηση του τύπου $y = f(x)$ λέγεται **άρτια** αν και μόνο αν $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D(f)$.

³ Η συνάρτηση του τύπου $y = f(x)$ λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο $[a, b] \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $\forall x \in D(f)$

⁴ Η συνάρτηση του τύπου $y = f(x)$ λέγεται **γνησίως αύξουσα** στο $[a, b] \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

⁵ Η συνάρτηση $y = f(x)$ / A λέγεται **περιοδική** στο A , αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\theta \neq 0$ ανεξάρτητο του x και $x + \theta \in A$, τέτοιο ώστε $f(x + \theta) = f(x)$. Κάθε τέτοιο θ ονομάζεται περίοδος της συνάρτησης. Η μικρότερη θετική τιμή του θ λέγεται **πρωτεύουσα περίοδος** ή απλώς περίοδος.

περίοδο 2π αρκεί η γραφική της παράσταση να γίνει σε διάστημα πλάτους 2π και ως τέτοιο εκλέγω το $[-\pi, \pi]$. Επειδή η συνάρτηση είναι άρτια, δηλαδή $\sin x = \sin(-x)$, η γραφική παράσταση της θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'Oy$, άρα αρκεί να περιοριστώ στο διάστημα $[0, \pi]$. Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Επί πλέον $\sin 0 = 1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \pi = -1$ οπότε στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy , λαμβάνω:



6. Η συνάρτηση $y = \sin x$

Επί του τριγωνομετρικού κύκλου (Σχ. 10) θεωρώ το τριγωνομετρικό τόξο $\widehat{AM}$.

Αν τ το μέτρο του πρώτου μη αρνητικού τόξου $\widehat{AM}$ γνωρίζω ότι το μέτρο x του τυχόντος τόξου $\widehat{AM}$ δίνεται από τον τύπο $x = 2k\pi + \tau$ με $k \in \mathbb{Z}$. Ονομάζω ημίτονο του τόξου x το σχετικό μέτρο του διανύσματος $\vec{OP}$ και συμβολίζω $(\vec{OP}) \stackrel{op}{=} \eta\mu x$ ($(\vec{OP})$ = σχετικό μέτρο της ορθής προβολής της τελικής διανυσματικής ακτίνας $\vec{OM}$ επί του άξονα $y'Oy$ ή $(\vec{OP})$ = τεταγμένη του σημείου M). Στο εξής ο άξονας $y'Oy$ θα λέγεται «άξονας των ημιτόνων».

Η ανωτέρω διαδικασία ορίζει τη συνάρτηση του τύπου $y = \eta\mu x$. Η συνάρτηση όπως είδαμε ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς μπορώ να λέω ότι πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$ και να σημειώνω: $y = \eta\mu x \mid \mathbb{R}$. Το πεδίο τιμών της συνάρτησης θα βρεθεί αν παρατηρήσω ότι $(\vec{OB})' \leq (\vec{OP}) \leq (\vec{OB})$ ή $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ δηλαδή κάθε τιμή της συνάρτησης κείται στο διάστημα $[-1, +1]$. Εξ άλλου αν $\lambda \in [-1, +1]$ θα υπάρχει ένα μόνο σημείο P επί του άξονα των y τέτοιο ώστε $(\vec{OP}) = \lambda$ και επειδή $-1 \leq \lambda \leq 1$ θα είναι $(\vec{OB})' \leq (\vec{OP}) \leq (\vec{OB})$ οπότε αν από το P φέρω παράλληλη προς τον άξονα $\vec{Ox}$ θα λάβω σημεία επί του κύκλου τα οποία θα είναι πέρατα τόξων, των οποίων το ημίτονο θα είναι λ . Συνεπώς το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι το $[-1, +1]$.

7. Χαρακτηριστικές ιδιότητες της $y = \sin x$

(i) Το ημίτονο τόξου είναι θετικό αν και μόνο αν το τόξο λήγει στο πρώτο ή δεύτερο τεταρτημόριο δηλαδή $\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(ii) Το ημίτονο τόξου είναι αρνητικό αν και μόνο αν το τόξο λήγει στο τρίτο ή τέταρτο τεταρτημόριο δηλαδή $\eta\mu x < 0 \Leftrightarrow (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(iii) Το ημίτονο είναι μηδέν αν και μόνο αν το τόξο λήγει στα σημεία A' ή A , συνεπώς: $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(iv) Η συνάρτηση $y = \eta\mu x$ λαμβάνει μέγιστη τιμή το $+1$ αν και μόνο αν $x = 2k\pi + \pi/2$ δηλαδή $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

(v) Η συνάρτηση $y = \eta\mu x$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή το -1 αν και μόνο τότε αν $x = 2k\pi - \pi/2$ δηλαδή $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(vi) Αν δύο τόξα έχουν μέτρα x και $-x$, το άθροισμά τους είναι μηδέν, άρα τα πέρατά τους είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα το διερχόμενο από την κοινή τους αρχή, συνεπώς έχουν αντίθετα ημίτονα, δηλαδή $\eta\mu x = -\eta\mu(-x)$. Η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει τη συνάρτηση $y = \eta\mu x$ ως περιττή⁶.

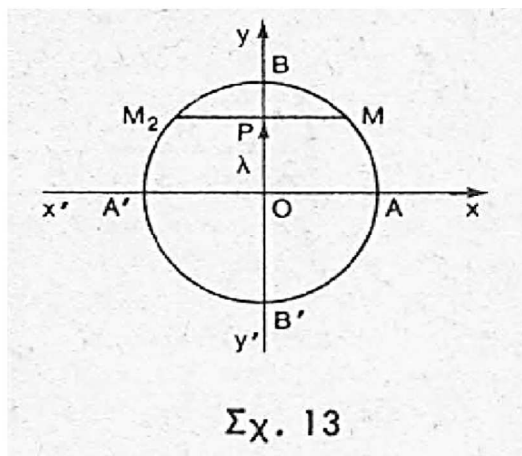
(vii) Η συνάρτηση $y = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z}$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z}$. Τούτο διότι $\forall x_1, x_2 \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$ και $\forall x_1, x_2 \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \eta\mu x_1 > \eta\mu x_2$.

8. Βασικό πρόβλημα δια την $y = \sin x$

Να βρεθούν όλα τα τόξα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\eta\mu x = \lambda \in \mathbb{R}$ (1).

(i) Αν $|\lambda| > 1$ από τον ορισμό του ημιτόνου έπεται ότι δεν υπάρχουν τόξα x , τα οποία επαληθεύουν την (1).

(ii) Αν $|\lambda| \leq 1$ τότε, από τον ορισμό του ημιτόνου, έπεται ότι υπάρχει αν και μόνο τόξο $\tau \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $\eta\mu \tau = \lambda$ (2). Την ανωτέρω λύση της (1) ονομάζω «αρχική λύση» και την συμβολίζω με $\tau_{\eta\mu \lambda}$. Εκ των (1), (2) λαμβάνω $\eta\mu x = \eta\mu \tau$. Τα τόξα όμως τα οποία έχουν το αυτό ημίτονο με το τ είναι τα $x = 2k\pi + \tau, x = (2k+1)\pi - \tau, k \in \mathbb{Z}$ ώστε:



$$\eta\mu x = \eta\mu \tau \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \tau \\ x = (2k+1)\pi - \tau \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi + (-1)^k \tau \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

9. Η περιοδικότητα της $y = \sin x$

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $y = \eta\mu x$ θα είναι περιοδική, όταν υπάρχει θ τέτοιο ώστε $\eta\mu(x + \theta) = \eta\mu x$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η (1) όμως είναι ισοδύναμος προς τις

$$x + \theta = 2k\pi + x \quad (i)$$

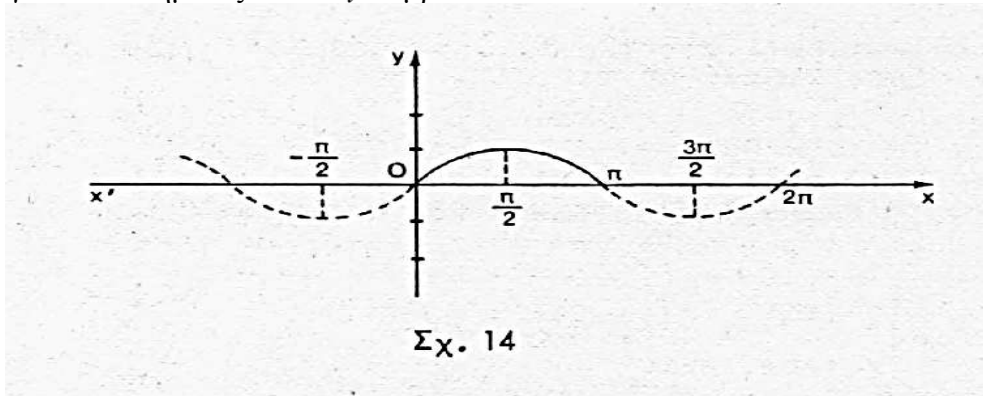
$$x + \theta = (2k+1)\pi - x \quad (ii)$$

Εκ της (ii) δεν προκύπτει θ το οποίο να ανταποκρίνεται στο πρόβλημα ενώ η (i) αν $\theta = 2k\pi$, επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς και η (1) επαληθεύεται $\forall x \in \mathbb{R}$ όταν $\theta = 2k\pi$, άρα η $y = \eta\mu x$ είναι περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο τη μικρότερη θετική τιμή του θ , δηλαδή το 2π .

⁶ Μια συνάρτηση του τύπου $y = f(x)$ λέγεται **περιττή** αν και μόνον αν $f(-x) = -f(x), \forall x \in D(f)$.

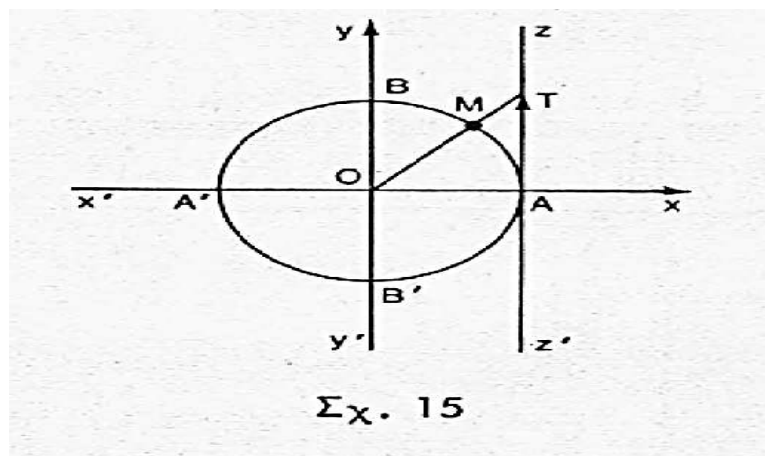
10. Γραφική παράσταση της $y=\sin x$

Η συνάρτηση $y = \eta\mu x$ έχειδειχθεί ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π , άρα η γραφική της παράσταση αρκεί να γίνει σε διάστημα πλάτους 2π , ως τέτοιο διάστημα εκλέγω το $[-\pi, \pi]$. Επειδή η συνάρτηση είναι περιττή, η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, συνεπώς αρκεί να περιοριστώ στο διάστημα $[0, \pi]$. Στο διάστημα αυτό, η συνάρτηση είναι μη αρνητική με $\eta\mu 0 = \eta\mu \pi = 0$, $\eta\mu \pi/2 = 1$ και $\eta\mu \uparrow$ εις το $[0, \pi/2]$, $\eta\mu \downarrow$ εις το $[\pi/2, \pi]$. Για μεγαλύτερη ακρίβεια της γραφικής παράστασης μπορώ να σχηματίσω πίνακα τιμών της $y = \eta\mu x$ για τις χαρακτηριστικές τιμές του $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy λαμβάνω:



11. Η συνάρτηση $y=\epsilon\phi x$

Στον τριγωνομετρικό κύκλο (Σχ. 15) θεωρούμε το τριγωνομετρικό τόξο $\overset{\curvearrowright}{AM}$. Αν τ το μέτρο του πρώτου μη αρνητικού τόξου $\overset{\curvearrowright}{AM}$ γνωρίζω ότι το μέτρο x του τυχόντος τόξου $\overset{\curvearrowright}{AM}$ δίνεται από τον τύπο $x = 2k\pi + \tau$ με $k \in \mathbb{Z}$. Θεωρώ τον άξονα zz' εφαπτόμενο του κύκλου στην αρχή A . Από τώρα ο άξονας zz' θα λέγεται άξονας των εφαπτομένων.



Ονομάζω εφαπτομένη του τόξου x το σχετικό μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AT}$ το οποίο έχει αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας το σημείο εις το οποίο η τελική διανυσματική ακτίνα του τόξου τέμνει τον άξονα των εφαπτομένων και σημειώνω: $(\overrightarrow{AT})_{\text{ορ}} = \epsilon\phi x$. Η ανωτέρω διαδικασία ορίζει τη συνάρτηση του τύπου $y = \epsilon\phi x$. Η συνάρτηση ορίζεται κατά τον προηγούμενο τρόπο για κάθε τόξο $\overset{\curvearrowright}{AM}$ αρκεί το M να μη λήγει στο B ή στο B' δηλαδή η συνάρτηση ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Για $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση δεν ορίζεται, ειδικότερα στα σημεία αυτά έχω

$$\lim_{x \rightarrow \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^+} \epsilon\phi x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} \epsilon\phi x = +\infty. \text{ Δηλαδή αν το τόξο } x \text{ τείνει σε}$$

ένα εκ των $k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ εκ μεγαλύτερων⁷ τιμών τότε η συνάρτηση τείνει στο $-\infty$, ενώ εάν το x τείνει εις εν των ανωτέρω σημείων εκ μικρότερων τιμών τότε η συνάρτηση τείνει εις το $+\infty$. Το πεδίο τιμών της συνάρτησης $y = \varepsilon\varphi x$ θα βρεθεί αν παρατηρήσω ότι $-\infty < (\overrightarrow{AT}) < +\infty$ ή $-\infty < \varepsilon\varphi x < +\infty$ δηλαδή κάθε τιμή της συνάρτησης κείται στο $(-\infty, +\infty)$, αλλά και αντιστρόφως αν $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ θα υπάρχει ένα και μόνο σημείο T επί του άξονα zz' τέτοιο ώστε $(\overrightarrow{AT}) = \lambda$. Συνεπώς, το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$.

12. Χαρακτηριστικές ιδιότητες της $y = \varepsilon\varphi x$

(i) Η εφαπτομένη είναι θετική αν και μόνο αν το τόξο λήγει στο πρώτο ή τρίτο τεταρτημόριο, δηλαδή $\varepsilon\varphi x > 0 \Leftrightarrow k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Η εφαπτομένη είναι αρνητική αν και μόνο αν το τόξο λήγει στο δεύτερο ή εις το τέταρτο τεταρτημόριο δηλαδή $\varepsilon\varphi x < 0 \Leftrightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$

(iii) Η εφαπτομένη είναι μηδέν αν και μόνο αν το τόξο λήγει εις το A' ή A .
 $\varepsilon\varphi x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(iv) Εάν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y = \varepsilon\varphi x$ θεωρηθεί ως ένωση των διαστημάτων $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$ τότε εις έκαστον τοιούτον διάστημα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα δηλαδή
 $\forall x_1, x_2 \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \varepsilon\varphi x_1 < \varepsilon\varphi x_2$

(v) Η συνάρτηση $y = \varepsilon\varphi x$ είναι περιττή διότι $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi(-x)$

13. Βασικό πρόβλημα για την $y = \varepsilon\varphi x$

Να βρεθούν όλα τα τόξα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\varepsilon\varphi x = \lambda \in \mathbb{R}$ (1)

Το λ ως τιμή εφαπτομένης θα είναι το σχετικό μέτρο διανύσματος $\overrightarrow{AT}$ επί του άξονα των εφαπτομένων. Αν το T συνδεθεί με το κέντρο O , θα προσδιορίζω ένα και μόνο ένα τόξο $\tau \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε $\varepsilon\varphi \tau = \lambda$ (2). Το τ αυτό ονομάζεται «αρχική λύση»

τα (1) και συμβολίζεται με $\tau = \text{τοξ}_{\varepsilon\varphi \lambda}$. Εκ των (1), (2) λαμβάνω $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \tau$. Τα τόξα τα οποία έχουν την αυτήν εφαπτομένη με το τ είναι τα $x = k\pi + \tau$ και τα $x = (2k + 1)\pi + \tau$ με $k \in \mathbb{Z}$ ώστε: $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \tau \Leftrightarrow x = k\pi + \tau, k \in \mathbb{Z}$

14. Η περιοδικότητα της $y = \varepsilon\varphi x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Για να διαπιστώσω την περιοδικότητα της συνάρτησης διαμορφώνω τη σχέση $\varepsilon\varphi(x + \theta) = \varepsilon\varphi x$ (1) οπότε αν υπάρχει $x \neq 0$ ώστε η (1) να επαληθεύεται για κάθε x για το οποίο έχει έννοια η συνάρτηση, θα είναι περιοδική. Από το προηγούμενο πρόβλημα έχω ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την $x + \theta = k\pi + x, k \in \mathbb{Z}$ η οποία επαληθεύεται για κάθε x , αρκεί $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ άρα η συνάρτηση είναι περιοδική. Επειδή η μικρότερη θετική τιμή του θ είναι το π , η πρωτεύουσα περίοδος της συνάρτησης θα είναι το π .

15. Γραφική παράσταση της $y = \varepsilon\varphi x$

Επειδή η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο π , για τη γραφική παράσταση αυτής, αρκεί να περιοριστώ σε διάστημα πλάτους π . Ως τέτοιο διάστημα εκλέγω το

⁷ Υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός $x \rightarrow \alpha^+$ δηλώνει ότι το x τείνει εις το α από τιμές μεγαλύτερας του α και ο συμβολισμός $x \rightarrow \alpha^-$ δηλώνει ότι το x τείνει εις το α από τιμές μικρότερας του α .

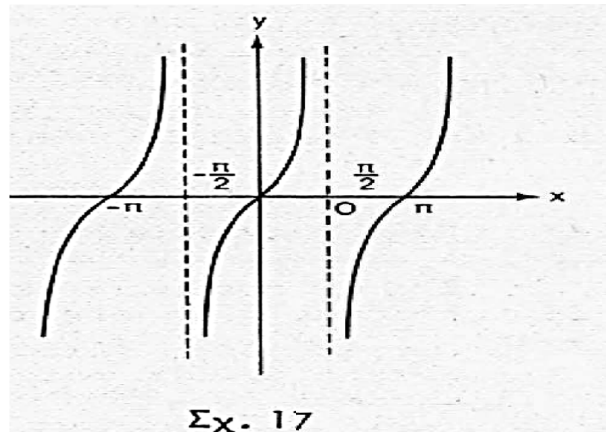
$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Η συνάρτηση $y = \varepsilon\varphi x$ είναι περιττή, άρα η γραφική της παράσταση θα

είναι συμμετρική ως προς τη αρχή του ορθοκανονικού συστήματος των αξόνων, συνεπώς αρκεί να περιοριστώ στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$.

Επιπλέον έχω $\varepsilon\varphi 0 = 0$ και $\varepsilon\varphi x \rightarrow +\infty$ όταν $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$. Η συνάρτηση $y = \varepsilon\varphi x$

στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$ είναι γνησίως αύξουσα. Για μεγαλύτερη ακρίβεια της γραφικής παράστασης μπορώ να σχηματίσω πίνακα τιμών της $y = \varepsilon\varphi x$ για τις χαρακτηριστικές τιμές του $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{3}$.

Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy λαμβάνω:



Σχ. 17

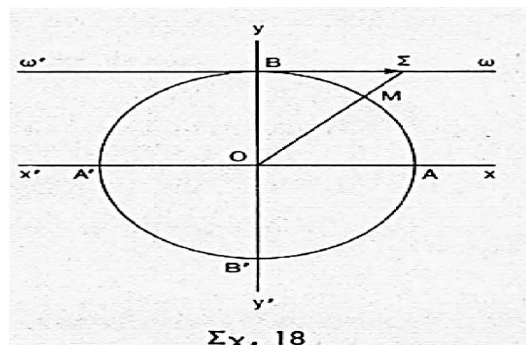
16. Η συνάρτηση $y = \sigma\varphi x$

Θεωρώ τριγωνομετρικό κύκλο (σχ.18) και τον άξονα $\omega'\omega$ εφαπτόμενο του κύκλου στο πέρας B του πρώτου τεταρτημορίου. Στο εξής ο άξονας $\omega'\omega$ θα ονομάζεται άξονας των συνεφαπτομένων. Αν $(\widehat{AM}^+) = \tau$ τότε το μέτρο x του τυχόντος τόξου $\widehat{AM}$ δίνεται από τον τύπο $x = 2k\pi + \tau, k \in \mathbb{Z}$. Ονομάζω συνεφαπτομένη του τόξου x το σχετικό μέτρο του διανύσματος $\vec{B\Sigma}$ το οποίο έχει αρχή το πέρας του πρώτου τεταρτημορίου και πέρας το σημείο τομής της τελικής διανυσματικής ακτίνας του τόξου μετά του άξονος των συνεφαπτομένων και σημειώνω: $(\vec{B\Sigma})^{op} = \sigma\varphi x$

Η ανωτέρω διαδικασία ορίζει τη συνάρτηση του τύπου $y = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση ορίζεται για τον προηγούμενο τρόπο για κάθε τόξο $\widehat{AM}$ αρκεί το M να μην είναι εν των σημείων A ή A', δηλαδή το $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ωστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Στα σημεία όπου η συνάρτηση δεν ορίζεται έχω για την οριακή τιμή αυτής την εξής συμπεριφορά.

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} \sigma\varphi x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} \sigma\varphi x = -\infty$$

Δηλαδή αν το x τείνει σε ένα εκ των σημείων $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ από μεγαλύτερες τιμές, τότε η συνάρτηση τείνει στο $+\infty$, ενώ αν το x τείνει σε ένα εκ των ανωτέρω σημείων από μικρότερες τιμές, τότε η συνάρτηση τείνει εις το $-\infty$. Το πεδίο τιμών της συνάρτησης $y = \sigma\varphi x$ βρίσκεται όπως και για τη συνάρτηση $y = \varepsilon\varphi x$ και είναι το $\mathbb{R}$.



Σχ. 18

17. Χαρακτηριστικές ιδιότητες της $y = \sigma\varphi x$

(i) Η συνεφαπτομένη είναι θετική αν και μόνο αν το τόξο λήγει στο πρώτο ή τρίτο τεταρτημόριο, δηλαδή: $\sigma\varphi x > 0 \Leftrightarrow k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(ii) Η συνεφαπτομένη είναι αρνητική αν και μόνο αν το τόξο λήγει στο δεύτερο ή τέταρτο τεταρτημόριο δηλαδή: $\sigma\varphi x < 0 \Leftrightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$

(iii) Η συνεφαπτομένη είναι μηδέν αν και μόνο αν το τόξο λήγει εις το B ή B' δηλαδή $\sigma\varphi x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

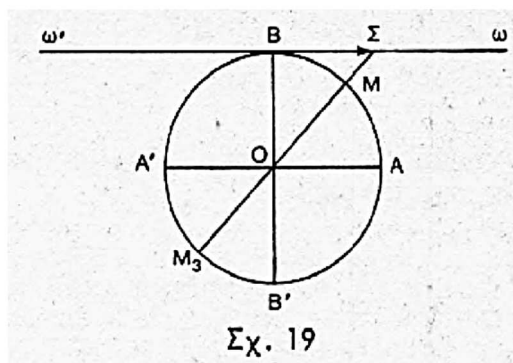
(iv) Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θεωρηθεί ως ένωση των διαστημάτων $(k\pi, k\pi + \pi), k \in \mathbb{Z}$ τότε σε κάθε τέτοιο διάστημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή: $\forall x_1, x_2 \in (k\pi, k\pi + \pi) \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \sigma\varphi x_1 > \sigma\varphi x_2$

(v) Η συνάρτηση $y = \sigma\varphi x$ είναι περιττή διότι $\sigma\varphi x = -\sigma\varphi(-x)$.

18. Βασικό πρόβλημα για την $y = \sigma\varphi x$

Να βρεθούν όλα τα τόξα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία: $\sigma\varphi x = \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$.

Το λ ως τιμή συνεφαπτομένης είναι το σχετικό μέτρο διανύσματος $\vec{B\Sigma}$ επί του άξονα των συνεφαπτομένων. Αν το Σ συνδεθεί με το κέντρο O θα προκύψει ένα και μόνο τόξο $\tau \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $\sigma\varphi \tau = \lambda$ (2). Το τόξο αυτό τ ονομάζεται «αρχική λύση» της (1) και συμβολίζεται ως $\tau = \tau_0 \sigma\varphi \lambda$. Από (1), (2) λαμβάνω $\sigma\varphi x = \sigma\varphi \tau$. Τα τόξα που έχουν την ίδια συνεφαπτομένη με το τ είναι τα $\widehat{AM}$ και $\widehat{AM}_3$ δηλαδή τα $x = 2k\pi + \tau$ και τα $x = (2k+1)\pi + \tau$ δηλαδή με έναν τύπον τα $x = k\pi + \tau$ ώστε: $\sigma\varphi x = \sigma\varphi \tau \Leftrightarrow x = k\pi + \tau, k \in \mathbb{Z}$

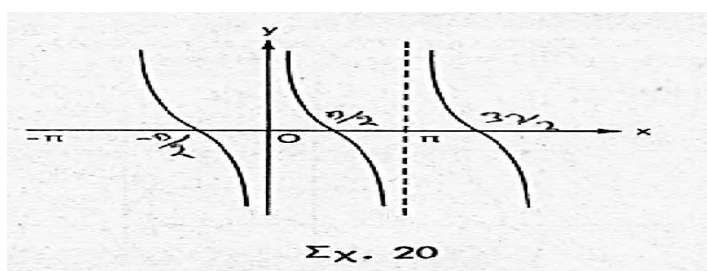


19. Η περιοδικότητα της $y = \sigma\varphi x$

Διαμορφώνω τη σχέση $\sigma\varphi(x + \theta) = \sigma\varphi x$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $x + \theta = k\pi + x, k \in \mathbb{Z}$, η τελευταία σχέση επαληθεύεται για κάθε x αρκεί $\theta = k\pi$ συνεπώς και η αρχική επαληθεύεται για κάθε x για το οποίο έχει έννοια όταν $\theta = k\pi$. Άρα, η συνάρτηση είναι περιοδική και επειδή η μικρότερη θετική τιμή του θ είναι το π έπεται ότι η πρωτεύουσα περίοδος της συνάρτησης είναι το π .

20. Γραφική παράσταση της $y = \sigma\varphi x$

Επειδή η $y = \sigma\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο π , η γραφική παράσταση της αρκεί να γίνει στο διάστημα πλάτους π . Ως τέτοιο διάστημα εκλέγω το $(0, \pi)$ και λαμβάνω υπόψη ότι



$\sigma\varphi \frac{\pi}{2} = 0, \sigma\varphi x \rightarrow \infty$ όταν $x \rightarrow 0^+$ και $\sigma\varphi x \rightarrow -\infty$ όταν $x \rightarrow \pi^-$. Επιπλέον γνωρίζω ότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο $(0, \pi)$, θετική εις το $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και αρνητική εις το $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

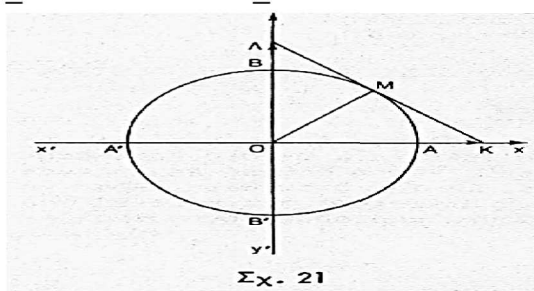
21. Τέμνουσα – συντέμνουσα

Στον τριγωνομετρικό κύκλο (Σχ. 21) θεωρώ το τόξο $\widehat{AM}$. Στο πέρας M του τόξου φέρνω εφαπτομένη του κύκλου η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο K και το $y'y$ στο Λ. Αν x το μέτρο του τυχόντος τόξου $\widehat{AM}$ ονομάζω τέμνουσα του τόξου x το

σχετικό μέτρο του διανύσματος $\vec{OK}$, συντέμνουσα του x ονομάζω το σχετικό μέτρο του διανύσματος $\vec{OL}$ και σημειώνω: $(\vec{OK}) \stackrel{op}{=} \tau\epsilon\mu x$ και $(\vec{OL}) \stackrel{op}{=} \sigma\tau\epsilon\mu x$

Η $\tau\epsilon\mu x$ ορίζεται για κάθε τόξο $\widehat{AM}$ εκτός από τα τόξα τα οποία λήγουν στα B και B' άρα $y = \tau\epsilon\mu x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Η

$\sigma\tau\epsilon\mu x$ ορίζεται για κάθε τόξο $\widehat{AM}$ εκτός από τα τόξα τα οποία λήγουν στα A και A' άρα: $y = \sigma\tau\epsilon\mu x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Επειδή $(\vec{OK}) \geq 1$ ή $(\vec{OK}) \leq -1$ έπεται ότι $|\tau\epsilon\mu x| \geq 1$. Ομοίως $(\vec{OL}) \geq 1$ ή $(\vec{OL}) \leq -1$ άρα $|\sigma\tau\epsilon\mu x| \geq 1$.



22. Σχέσεις μεταξύ των κυκλικών συναρτήσεων του αυτού τόξου

Έστω x το μέτρο του τυχόντος τόξου $\widehat{AM}$ (σχ. 22). Έχω $(\vec{OP}) = \sigma\upsilon\nu x$, $(\vec{PM}) = \eta\mu x$, $(\vec{AT}) = \epsilon\phi x$, $(\vec{B\Sigma}) = \sigma\phi x$. Εκ του ορθογωνίου τριγώνου ΟΠΜ λαμβάνω:

$|\vec{OP}|^2 + |\vec{PM}|^2 = |\vec{OM}|^2$ ⁸ είναι όμως $|\vec{OP}|^2 = (\vec{OP})^2$ άρα $(\sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x)^2 = 1$ ή

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

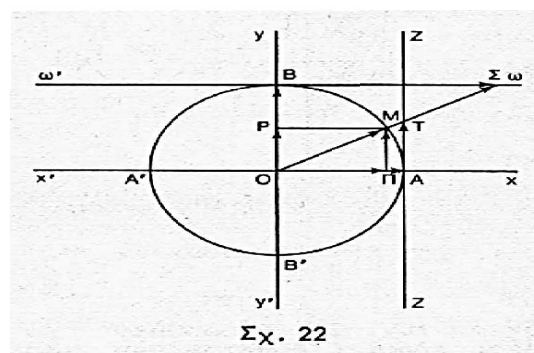
(1). Τα τρίγωνα ΟΠΜ και ΟΑΤ είναι όμοια και ομοίως προσανατολισμένα άρα:

$$\frac{(\vec{AT})}{(\vec{OA})} = \frac{(\vec{PM})}{(\vec{OP})} \Rightarrow \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ άρα: $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Τα τρίγωνα ΟΡΜ,

ΟΒΣ είναι όμοια και ομοίως προσανατολισμένα άρα: $\frac{(\vec{B\Sigma})}{(\vec{OB})} = \frac{(\vec{PM})}{(\vec{OP})} \Rightarrow \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ για κάθε πραγματικό $x \neq k\pi$ συνεπώς

$$\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (3).$$



Παρατηρήσεις. Οι σχέσεις (1), (2) και (3) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, κάθε άλλη σχέση η οποία θα συνδέει τις τέσσερις αυτές κυκλικές συναρτήσεις του αυτού τόξου $\widehat{AM}$ θα προκύπτει εκ των (1), (2), (3). Πράγματι αν υποθέσω ότι υπήρχε $f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\phi x, \sigma\phi x) = 0$ ανεξάρτητη των (1), (2), (3), τότε αυτή μετά των (1), (2), (3) αποτελούν σύστημα 4 εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους, από τη λύση του οποίου θα προέκυπταν σταθερές τιμές για κάθε άγνωστο ανεξαρτήτως των τιμών του τόξου x .

Τούτο όμως είναι άτοπο διότι μεταβαλλόμενου του τόξου x μεταβάλλονται και οι τιμές των κυκλικών συναρτήσεων αυτού. Υπάρχουν ορισμένες χαρακτηριστικές σχέσεις που προκύπτουν από τις (1), (2) και (3) τις οποίες πρέπει να συγκρατήσω ως τύπους. Πολλαπλασιάζοντας τις (2) και (3) κατά μέλη λαμβάνω:

⁸ Δια του συμβόλου $|\vec{OP}|$ σημειώνω το μήκος του διανύσματος $\vec{OP}$. Το μήκος διανύσματος λέγεται και απόλυτο μέτρο αυτού.

$$\varepsilon\varphi x \sigma\varphi x = 1 \left| x \neq k\pi, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right. \quad (4)$$

Εκ της (1) εάν διαιρέσω για $\sigma\nu^2 x$ λαμβάνω $\varepsilon\varphi^2 x + 1 = \frac{1}{\sigma\nu^2 x}$ ή

$$\sigma\nu^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} \Leftrightarrow \sigma\nu x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2 x}} \left| x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right. \quad (5)$$

Έχω επιπλέον $\frac{\eta\mu x}{\sigma\nu x} = \varepsilon\varphi x \Rightarrow \eta\mu x = \sigma\nu x \varepsilon\varphi x \Rightarrow$

$$\eta\mu x = \frac{\varepsilon\varphi x}{\pm \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2 x}} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} \left| x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right. \quad (6)$$

Εκ της (1) αν διαιρέσω για $\eta\mu^2 x$ λαμβάνω $1 + \frac{\sigma\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x} \Rightarrow 1 + \sigma\varphi^2 x = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$ ή

$$\eta\mu^2 x = \frac{1}{1 + \sigma\varphi^2 x} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \sigma\varphi^2 x}} \left| x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right. \quad (7)$$

Εκ των (3),(7) λαμβάνω $\sigma\nu x = \frac{\sigma\varphi x}{\pm \sqrt{1 + \sigma\varphi^2 x}} \Leftrightarrow \sigma\nu^2 x = \frac{\sigma\varphi^2 x}{1 + \sigma\varphi^2 x} \left| x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right. \quad (8)$

Εκ του ορθογωνίου ΟΜΚ λαμβάνω $(\overrightarrow{OM})^2 = (\overrightarrow{OK})(\overrightarrow{OP})$ άρα:

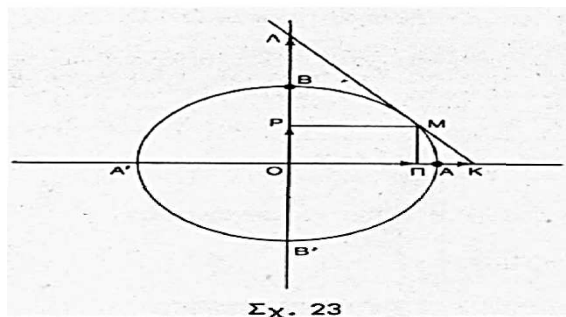
$$\tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\sigma\nu x} \left| x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right. \quad (9)$$

Εκ του ορθογωνίου τριγώνου ΟΜΛ λαμβάνω $(\overrightarrow{OM})^2 = (\overrightarrow{OL})(\overrightarrow{OP})$ άρα

$$\sigma\tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\eta\mu x} \left| x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right. \quad (10)$$

Παρατηρήσεις. Οι (1), (2), (3), (9), (10) είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες σχέσεις οι οποίες συνδέουν τις συναρτήσεις $y = \eta\mu x$, $y = \sigma\nu x$, $y = \varepsilon\varphi x$, $y = \sigma\varphi x$, $y = \tau\epsilon\mu x$, $y = \sigma\tau\epsilon\mu x$ ενός και του αυτού τόξου x . Η σχέση (5) επειδή $\tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\sigma\nu x}$ γράφεται:

$$\tau\epsilon\mu^2 x = 1 + \varepsilon\varphi^2 x \left| x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right. \quad (11)$$



Η σχέση (7) επειδή $\sigma\tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\eta\mu x}$ γράφεται $\sigma\tau\epsilon\mu^2 x = 1 + \sigma\varphi^2 x \left| x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right. \quad (12)$

23. Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

Δίνεται ένα τόξο x και ζητούνται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί⁹ αυτού. Είναι δυνατό ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών του x να αναχθεί εις υπολογισμό τριγωνομετρικών αριθμών τόξου $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Τότε λέω ότι έχει γίνει αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο. Αρχικά κάθε τόξο $x \in \mathbb{R}$ (το x εις ακτίνια) γνωρίζω ότι λαμβάνει την μορφή: $x = 2k\pi + \tau$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq \tau \leq 2\pi$.

Επιπλέον

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu x = \eta\mu(2k\pi + \tau) = \eta\mu\tau \\ \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(2k\pi + \tau) = \sigma\upsilon\nu\tau \\ \epsilon\varphi x = \epsilon\varphi(2k\pi + \tau) = \epsilon\varphi\tau \mid \tau \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \sigma\varphi x = \sigma\varphi(2k\pi + \tau) = \sigma\varphi\tau \mid \tau \neq 0, \pi \end{array} \right.$$

(1). Ωστε ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών του x ανάγεται στον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών του $\tau \in [0, 2\pi)$.

(i) Αν $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε η αναγωγή εις το πρώτο τεταρτημόριο είναι γεγονός.

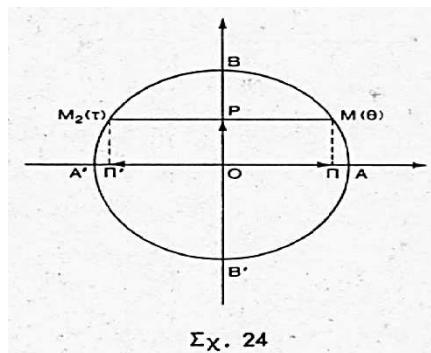
(ii) Αν $\tau \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, τότε υπάρχει $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\tau = \pi - \theta$ οπότε εκ του (σχ. 24)

λαμβάνω:

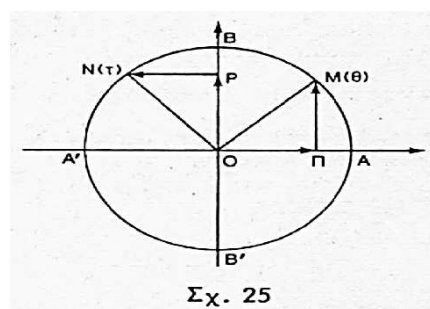
$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\tau = \eta\mu(\pi - \theta) = \eta\mu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\tau = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta \\ \epsilon\varphi\tau = \epsilon\varphi(\pi - \theta) = -\epsilon\varphi\theta \\ \sigma\varphi\tau = \sigma\varphi(\pi - \theta) = -\sigma\varphi\theta \end{array} \right. \quad (2). \text{ Τα τόξα } \tau, \theta \text{ λέγονται παραπληρωματικά.}$$

Επιπλέον παρατηρώ ότι αν $\tau \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, υπάρχει $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\tau = \frac{\pi}{2} + \theta$. Από το σχήμα 25 λαμβάνω $(\vec{OP}) = (\vec{ON})$, $(\vec{PN}) = -(\vec{PM})$ άρα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\tau = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\tau = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\eta\mu\theta \\ \epsilon\varphi\tau = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sigma\varphi\theta \\ \sigma\varphi\tau = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\epsilon\varphi\theta \end{array} \right. \quad (3)$$



Σχ. 24

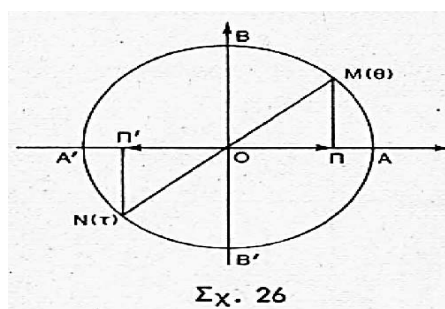


Σχ. 25

Τα τόξα τ και θ λέω ότι διαφέρουν κατά τέταρτο της περιφέρειας.

(iii) Αν $\tau = \pi$ δεν ορίζεται η $\sigma\varphi\tau$ κατά τα άλλα ισχύουν οι σχέσεις (3) με $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(iv) Αν $\tau \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, τότε υπάρχει $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\tau = \pi + \theta$ τότε $(\vec{OP'}) = -(\vec{OP})$, $(\vec{P'N}) = -(\vec{PM})$ άρα



Σχ. 26

⁹ Οι τιμές των κυκλικών συναρτήσεων για $x \in \mathbb{R}$.

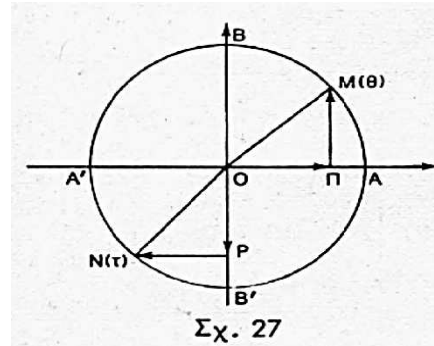
$$\left| \begin{array}{l} \eta\mu\tau = \eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\tau = \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta \\ \varepsilon\varphi\tau = \varepsilon\varphi(\pi + \theta) = \varepsilon\varphi\theta \\ \sigma\varphi\tau = \sigma\varphi(\pi + \theta) = \sigma\varphi\theta \end{array} \right| \quad (4)$$

Τα τόξα τα, θ λέμε ότι διαφέρουν κατά ημιπεριφέρεια.

Αν $\tau \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι δυνατό να βρεθεί $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\tau = \frac{3\pi}{2} - \theta$ τότε (σχ. 27)

έχω: $(\vec{OP}) = -(\vec{OM})$, $(\vec{PN}) = -(\vec{PM})$ άρα

$$\left| \begin{array}{l} \eta\mu\tau = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\tau = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\eta\mu\theta \\ \varepsilon\varphi\tau = \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\varphi\theta \\ \sigma\varphi\tau = \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \varepsilon\varphi\theta \end{array} \right| \quad (5)$$



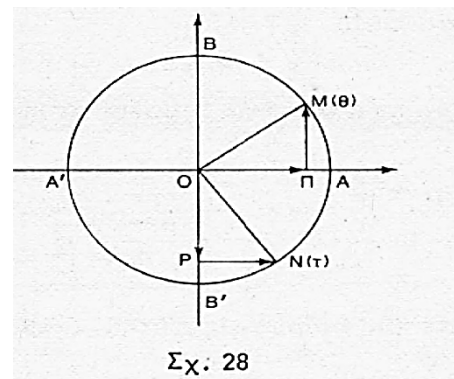
Σχ. 27

(v) Αν $\tau = \frac{3\pi}{2}$ δεν ορίζεται η $\varepsilon\varphi\tau$ κατά τα άλλα ισχύουν οι προηγούμενες σχέσεις με $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(vi) Αν $\tau \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ τότε υπάρχει $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\tau = \frac{3\pi}{2} + \theta$ και

$(\vec{OP}) = -(\vec{OM})$,
 $(\vec{PN}) = (\vec{PM})$ άρα:

$$\left| \begin{array}{l} \eta\mu\tau = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\tau = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\theta \\ \varepsilon\varphi\tau = \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\sigma\varphi\theta \\ \sigma\varphi\tau = \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\varepsilon\varphi\theta \end{array} \right| \quad (6)$$

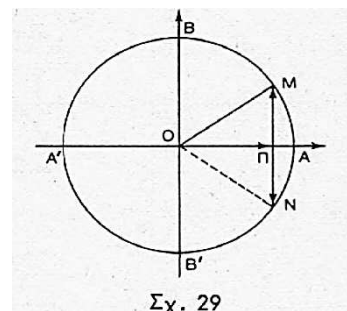


Σχ. 28

Αν $\tau \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ είναι δυνατό να θεωρηθεί ως

$\tau = 2\pi - \theta$ όπου $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε

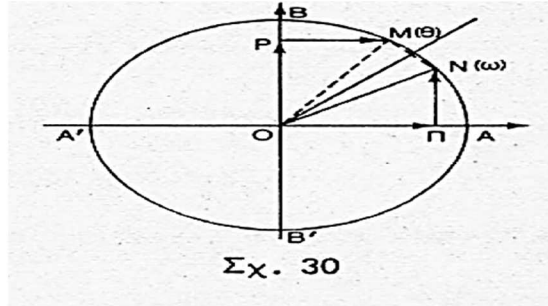
$$\left| \begin{array}{l} \eta\mu\tau = \eta\mu(2\pi - \theta) = -\eta\mu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\tau = \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta \\ \varepsilon\varphi\tau = \varepsilon\varphi(2\pi - \theta) = -\varepsilon\varphi\theta \\ \sigma\varphi\tau = \sigma\varphi(2\pi - \theta) = -\sigma\varphi\theta \end{array} \right| \quad (7)$$



Σχ. 29

Στις σχέσεις (2), (3), (4), (5), (6), (7) το θ θεωρήθηκε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Αν $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ μπορώ να θεωρήσω τόξο $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ τέτοιο ώστε $\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$ οπότε (σχ. 30) λαμβάνουμε $(\vec{OP}) = (\vec{ON})$, $(\vec{PM}) = (\vec{PN})$ άρα:

$$\left| \begin{array}{l} \eta\mu\theta = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega \\ \epsilon\varphi\theta = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\omega \\ \sigma\varphi\theta = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \epsilon\varphi\omega \end{array} \right| \quad (8)$$



Τα τόξα θ και ω λέγονται συμπληρωματικά. Οι σχέσεις (2), (4), (7) ή οι (3), (5), (6) σε συνδυασμό με τις σχέσεις (1) ανάγουν τον υπολογισμό τριγωνομετρικού αριθμού τυχόντος τόξου x στον υπολογισμό τριγωνομετρικού αριθμού τόξου θ του πρώτου τεταρτημορίου. Οι σχέσεις (8) σε συνδυασμό με τις (1), (2), (4), (7) ανάγουν τον υπολογισμό τριγωνομετρικού αριθμού τυχόντος τόξου x στον υπολογισμό τριγωνομετρικού αριθμού τόξου $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

24. Τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων 30° , 45° , 60°

Αν $0 < \alpha < 90^\circ$ έχουμε $\eta\mu\alpha > 0$ και $\eta\mu\alpha = (\vec{PM}) = |\vec{PM}| = \frac{1}{2} |\vec{M}_1 M|$ ώστε:

$$\eta\mu\alpha = \frac{1}{2} \text{χορδής τόξου } 2\alpha$$

Και με εφαρμογή αυτού λαμβάνω:

$\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \text{χορδής τόξου } 60^\circ$. Η χορδή τόξου

60° είναι η πλευρά του κανονικού εξαγώνου του εγγεγραμμένου στον κύκλο και ως γνωστόν ισούται με την ακτίνα και επειδή ο τριγωνομετρικός κύκλος $R=1$ άρα:

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \sqrt{1 - \eta\mu^2 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\varphi 30^\circ = \frac{\eta\mu 30^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sigma\varphi 30^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu 30^\circ}{\eta\mu 30^\circ} = \sqrt{3}$$

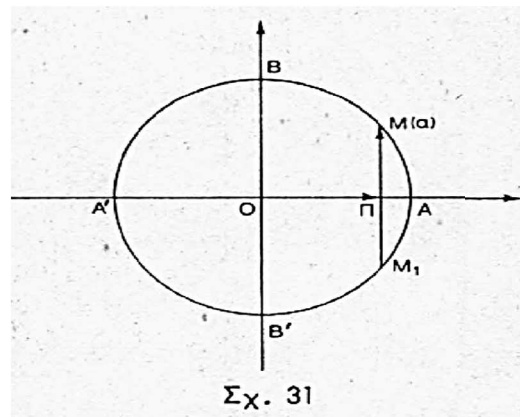
$\eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \text{χορδής τόξου } 120^\circ = \frac{1}{2} R \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($R\sqrt{3}$ πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου εις τον κύκλο και εν προκειμένω $R=1$).

$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 60^\circ} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon\varphi 60^\circ = \frac{\eta\mu 60^\circ}{\sigma\upsilon\nu 60^\circ} = \sqrt{3}, \quad \sigma\varphi 60^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu 60^\circ}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\eta\mu 45^\circ = \frac{1}{2} \text{χορδής τόξου } 90^\circ = \frac{1}{2} R \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

($R\sqrt{2}$ πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου εις κύκλον ακτίνας R εδώ $R=1$).



$$\sin 45^\circ = \sqrt{1 - \eta\mu^2 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon\varphi 45^\circ = 1, \quad \sigma\varphi 45^\circ = 1$$

25. Εφαρμογές

- Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξου α αν είναι γνωστό το $\eta\mu\alpha$.

Εκ του τύπου $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$ λαμβάνω:

$$(1) \quad \boxed{\sigma\upsilon\nu\alpha = \pm \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha}} \Rightarrow (2) \quad \boxed{\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\pm \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha}} \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(3) \quad \boxed{\sigma\varphi\alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha}}{\eta\mu\alpha} \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}} \quad (4) \quad \boxed{\tau\epsilon\mu\alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha}} \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(5) \quad \boxed{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha = \frac{1}{\eta\mu\alpha} \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

Παρατηρήσεις. Το διπλό πρόσημο των τύπων δικαιολογείται από το γεγονός ότι, εάν $\eta\mu\alpha = \lambda$, τα τόξα τα οποία έχουν ημίτονο το λ είναι τα $\overset{\sim}{AM}$ και $\overset{\sim}{AM}_2$ όπου M και M_2 συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

- Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξου α εάν είναι γνωστό το $\sigma\upsilon\nu\alpha$.

Εκ του τύπου $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$ λαμβάνω:

$$(1) \quad \boxed{\eta\mu\alpha = \pm \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(3) \quad \boxed{\sigma\varphi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\pm \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}} \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}} \quad (4) \quad \boxed{\tau\epsilon\mu\alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(5) \quad \boxed{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}} \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

Παρατηρήσεις. Το διπλό πρόσημο των τύπων δικαιολογείται από το γεγονός ότι τόξα α τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu\alpha = \lambda$ είναι τα $\overset{\sim}{AM}$ και $\overset{\sim}{AM}_1$ όπου M, M_1 συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

- Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξου α αν είναι γνωστή η $\varepsilon\varphi\alpha$.

Είναι

$$(1) \quad \boxed{\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}} \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}} \quad (2) \quad \boxed{\eta\mu\alpha = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\pm \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}} \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(3) \quad \boxed{\sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} \mid \alpha \neq k\pi, \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

άρα

$$\boxed{\tau\epsilon\mu\alpha = \pm \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha} \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}} \quad \boxed{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha = \frac{\pm \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha} \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

Παρατηρήσεις. Το διπλό πρόσημο των τύπων δικαιολογείται από το γεγονός ότι τόξα α τέτοια ώστε $\varepsilon\varphi\alpha = \lambda$ είναι τα $\widehat{AM}$ και $\widehat{AM}_3$ όπου M, M_3 συμμετρικά ως προς το κέντρο του κύκλου.

- Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξου α εάν είναι γνωστή η $\sigma\varphi\alpha$. Είναι

$$(1) \quad \eta\mu\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2\alpha}} \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (2) \quad \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sigma\varphi\alpha}{\pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2\alpha}} \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \quad \sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} \mid \begin{array}{l} \alpha \neq k\pi, \\ \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \quad (4) \quad \tau\epsilon\mu\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2\alpha}}{\sigma\varphi\alpha} \mid \begin{array}{l} \alpha \neq k\pi, \\ \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$(5) \quad \sigma\tau\epsilon\mu\alpha = \pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2\alpha} \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Τα διπλά πρόσημα των τύπων δικαιολογούνται όπως στο προηγούμενο πρόβλημα.

26. Αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις

26.1 Η αντίστροφη της $y=\sin x$

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση του τύπου $y=\eta\mu x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι το πεδίο τιμών της είναι το διάστημα $[-1, +1]$. Από τον ορισμό της συνάρτησης έπεται ότι σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα $y \in [-1, +1]$, ενώ το αντίστροφο δεν είναι αληθές διότι αν π.χ. $y=1/2$ τότε η $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ δίνει ως αντίστοιχα x τα $x=k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$. Το παράδειγμα μας εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τον τύπο $y=\eta\mu x$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, άρα αν ως πεδίο ορισμού της συνάρτησης θεωρήσω το $\mathbb{R}$, δε μπορώ να ορίσω την αντίστροφο της.

Αν όμως θεωρήσω τη συνάρτηση $y=\eta\mu x$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε για κάθε $y \in [-1, +1]$ λαμβάνω ένα και μόνο $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Δηλαδή η εξίσωση $\eta\mu x = y$ έχει μία μόνο λύση στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ή ακριβέστερα ο τύπος $y=\eta\mu x$ ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ επί του $[-1, +1]$ κατά συνέπεια υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της $y=\eta\mu x \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και ορίζεται ως κάτωθι:

Ορισμός.

Ορίζω ως αντίστροφη συνάρτηση της $y=\eta\mu x \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ την μονοσήμαντη απεικόνιση $[-1, +1] \ni y \xrightarrow{\eta\mu^{-1}} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ όπου το x είναι το μοναδικό τόξο του

διαστήματος $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με ημίτονο του το y . Συμβολίζω την αντίστροφη αυτή συνάρτηση δια του κάτωθι τύπου. $x = \text{τοξ}_{\theta} \eta \mu y \llbracket -1, +1 \rrbracket$ (1)

Η δια του τύπου (1) οριζόμενη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\llbracket -1, +1 \rrbracket$ και πεδίο τιμών το $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή συνήθως δια του y παριστάνω την εξαρτημένη μεταβλητή και δια του x την ανεξάρτητη μεταβλητή γράφω: $y = \text{τοξ}_{\theta} \eta \mu x \llbracket -1, +1 \rrbracket$

Όπως ορίσθηκε η αντίστροφος της συνάρτησης $y = \eta \mu x$ στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ μπορώ να ορίσω την αντίστροφη της συνάρτησης σε κάθε των διαστημάτων $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] k \in \mathbb{Z}$, διότι σε κάθε διάστημα $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση $y = \eta \mu x$ είναι γνησίως μονότονη συνεπώς αμφιμονοσήμαντη¹⁰ άρα αντιστρέφεται ή διαφορετικά σε κάθε διάστημα η εξίσωση $\eta \mu x = y$ δίνει μία και μόνο λύσιν η οποία είναι το τόξο x του διαστήματος $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ του οποίου το ημίτονο είναι το y και γράφω: $x = \text{τοξ}_k \eta \mu y \llbracket -1, +1 \rrbracket$

Για κάθε ακέραιη τιμή του k έχω το αντίστοιχο διάστημα εις τον οποίο έγινε η αντιστροφή. Ούτω δια $k=0$ λαμβάνω $x = \text{τοξ}_{\theta} \eta \mu y \llbracket -1, +1 \rrbracket$ και το αντίστοιχο διάστημα στο ο οποίο θεωρήθηκε ορισμένη η $y = \eta \mu x$ είναι το $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ο τύπος (1) για κάθε τιμή του $y \in \llbracket -1, +1 \rrbracket$ δίνει μια και μόνο τιμή του $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ η οποία ονομάζεται πρωτεύουσα τιμή. Ο τύπος $x = \text{τοξ}_{\theta} \eta \mu y \llbracket -1, +1 \rrbracket$ ονομάζεται πρωτεύων κλάδος της συνάρτησης $x = \text{τοξ}_{\theta} \eta \mu y$.

Παρατηρήσεις

(i) Από τον ορισμό της συνάρτησης $y = \text{τοξ}_k \eta \mu x$ έπεται ότι:
 $\eta \mu(\text{τοξ}_k \eta \mu x) = x \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ και } \forall x \in \llbracket -1, +1 \rrbracket$

(ii) Η τιμή στον τυχόντα κλάδο της $\text{τοξ}_k \eta \mu x$ συνδέεται με την αντίστοιχη του πρωτεύοντος κλάδου από τη σχέση $\text{τοξ}_k \eta \mu x = k\pi + (-1)^k \text{τοξ}_{\theta} \eta \mu x, k \in \mathbb{Z}$

$$(iii) \text{ Ισχύει η ισοδυναμία } \left\{ \begin{array}{l} y = \text{τοξ}_{\theta} \eta \mu x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \eta \mu y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

26.2 Η αντίστροφη της $y = \cos x$

Η συνάρτηση του τύπου $y = \sigma \nu x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι πεδίο τιμών αυτής είναι το διάστημα $\llbracket -1, +1 \rrbracket$. Από τον ορισμό της συνάρτησης έπεται ότι σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί ένα και μόνο $y \in \llbracket -1, +1 \rrbracket$, τέτοιο ώστε $\sigma \nu x = y$, ενώ το αντίστροφο δεν είναι αληθές διότι αν π.χ. $y = \sqrt{2}/2$ τότε η $\sigma \nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ δίνει ως αντίστοιχα $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. Το παράδειγμα δείχνει ότι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τον τύπο $y = \sigma \nu x$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη άρα, αν ως πεδίο ορισμού αυτής θεωρήσω το $\mathbb{R}$, δε μπορώ να ορίσω την αντίστροφη της. Αν όμως θεωρήσω τη συνάρτηση $y = \sigma \nu x \mid [0, \pi]$ τότε για κάθε $y \in \llbracket -1, +1 \rrbracket$ λαμβάνω ένα και μόνο $x \in [0, \pi]$ δηλαδή

¹⁰ Διότι αν $x_1 \neq x_2$ και έστω $x_1 < x_2$ λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$ δηλ. $f(x_1) \neq f(x_2)$.

η εξίσωση $\sin x = y$ έχει μία και μόνο λύση στο διάστημα $[0, \pi]$ ή ακριβέστερα ο τύπος $y = \sin x$ ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $[0, \pi]$ επί του $[-1, +1]$ συνεπώς υπάρχει η αντίστροφος συνάρτηση της $y = \sin x \mid [0, \pi]$ και ορίζεται ως εξής:

Ορισμός

Ορίζω ως αντίστροφη συνάρτηση της $y = \sin x \mid [0, \pi]$ την απεικόνιση:

$[-1, +1] \ni y \xrightarrow{\sin^{-1}} x \in [0, \pi]$ (1), όπου το x είναι το μοναδικό τόξο του διαστήματος $[0, \pi]$ του οποίου το συνημίτονο είναι y . Την δια της απεικόνισης (1) οριζόμενη συνάρτηση συμβολίζω ως εξής: $x = \operatorname{τοξ}_0 \sin y \mid [-1, +1]$ (2)

Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1, +1]$ και πεδίο τιμών το διάστημα $[0, \pi]$. Επειδή συνήθως δια του y παριστάνω την εξαρτημένη μεταβλητή και δια του x την ανεξάρτητη μεταβλητή μπορώ να γράφω $y = \operatorname{τοξ}_0 \sin x \mid [-1, +1]$

Ομοίως ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης $y = \sin x \mid [k\pi, k\pi + \pi], k \in \mathbb{Z}$ διότι σε κάθε διάστημα $[k\pi, k\pi + \pi], k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση $y = \sin x$ είναι γνησίως μονότονη συνεπώς αμφιμονοσήμαντη, άρα αντιστρέφεται ή άλλως σε κάθε τέτοιο διάστημα η εξίσωση $\sin x = y$ δίνει μία μόνο λύση η οποία είναι το τόξο x του διαστήματος $[k\pi, k\pi + \pi]$ του οποίου το συνημίτονο είναι το y και γράφω $x = \operatorname{τοξ}_k \sin y \mid [-1, +1]$. Για κάθε ακέραιη τιμή του k έχω το αντίστοιχο διάστημα στο οποίο έγινε η αντιστροφή. Έτσι για $k=0$ λαμβάνω το διάστημα $[0, \pi]$ και τον πρωτεύοντα κλάδο $x = \operatorname{τοξ}_0 \sin y \mid [-1, +1]$

Παρατηρήσεις

(i) Από τον ορισμό της συνάρτησης $y = \operatorname{τοξ}_k \sin x$ έπεται ότι:

$$\sin(\operatorname{τοξ}_k \sin x) = x \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ και } \forall x \in [-1, +1]$$

(ii) Η τιμή στον τυχόντα κλάδο της $\operatorname{τοξ}_k \sin x$ συνδέεται με την αντίστοιχη τιμή του πρωτεύοντος κλάδου μέσω της σχέσης: $\operatorname{τοξ}_k \sin x = 2k\pi + (-1)^k \operatorname{τοξ}_0 \sin x$

$$(iii) \text{ Ισχύει η ισοδυναμία } \begin{cases} y = \operatorname{τοξ}_0 \sin x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

26.3 Η αντίστροφη της $y = \exp x$

Η συνάρτηση του τύπου $y = \exp x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ και έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Από τον ορισμό της συνάρτησης έπεται ότι για κάθε x από το πεδίο ορισμού της λαμβάνω ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$ ενώ το αντίστροφο δεν είναι αληθές, διότι αν π.χ. $y=1$ τότε η $\exp x = 1$ δίνει $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Το παράδειγμα δείχνει ότι η συνάρτηση του τύπου $y = \exp x \mid \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, άρα δεν αντιστρέφεται. Αν όμως θεωρήσω τη συνάρτηση $y = \exp x \mid \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ τότε για κάθε $y \in \mathbb{R}$ λαμβάνω ένα και μόνο $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ τέτοιο ώστε $y = \exp x$, δηλαδή η εξίσωση $\exp x = y$ έχει μία και μόνο λύση ως προς x εις το διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ ή ακριβέστερα ο τύπος $y = \exp x$ ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ επί του $\mathbb{R}$, κατά συνέπεια υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της $y = \exp x \mid \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ και ορίζεται ως εξής:

Ορισμός

Ορίζω ως αντίστροφη συνάρτηση της $y = \varepsilon\varphi x \mid \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τη μονοσήμαντη απεικόνιση $\mathbb{R} \ni y \xrightarrow{\varepsilon\varphi^{-1}} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ όπου το x είναι το μοναδικό τόξο του διαστήματος $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ του οποίου η εφαπτομένη είναι το y . Τη μέσω της απεικόνισης (1) οριζόμενη συνάρτηση συμβολίζω ως εξής: $x = \tau o \xi_0 \varepsilon\varphi y \mid \mathbb{R}$. Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμό το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Μπορώ και εδώ να γράφω: $y = \tau o \xi_0 \varepsilon\varphi x \mid \mathbb{R}$. Κατά τον αυτόν τρόπον ορίζεται η αντίστροφη της $y = \varepsilon\varphi x \mid \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$ διότι σε κάθε διάστημα $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση $y = \varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα συνεπώς αμφιμονοσήμαντη, άρα υπάρχει η αντίστροφη ή άλλως σε κάθε τέτοιο διάστημα η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = y$ δίνει μία μόνο λύση ως προς x η οποία είναι το τόξο εκείνο του διαστήματος $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ του οποίου η εφαπτομένη είναι το y και γράφω: $x = \tau o \xi_k \varepsilon\varphi y \mid \mathbb{R}$. Για κάθε ακραία τιμή του k έχω το αντίστοιχο διάστημα στο οποίο έγινε η αντιστροφή. Έτσι για $k=0$ λαμβάνω το διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και τον πρωτεύοντα κλάδο, $x = \tau o \xi_0 \varepsilon\varphi y \mid \mathbb{R}$

Παρατηρήσεις

(i) Από τον ορισμό της $y = \tau o \xi_k \varepsilon\varphi x$ έπεται ότι: $\varepsilon\varphi(\tau o \xi_k \varepsilon\varphi x) = x \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ και } \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) Η τιμή της $\tau o \xi_k \varepsilon\varphi x$ στον τυχόντα κλάδο συνδέεται με την αντίστοιχη τιμή του πρωτεύοντος κλάδου μέσω της σχέσης $\tau o \xi_k \varepsilon\varphi x = k\pi + \tau o \xi_0 \varepsilon\varphi x$

(iii) Ισχύει η ισοδυναμία $\left\{ \begin{array}{l} y = \tau o \xi_0 \varepsilon\varphi x \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$

26.4 Η αντίστροφη της $y = \sigma\varphi x$

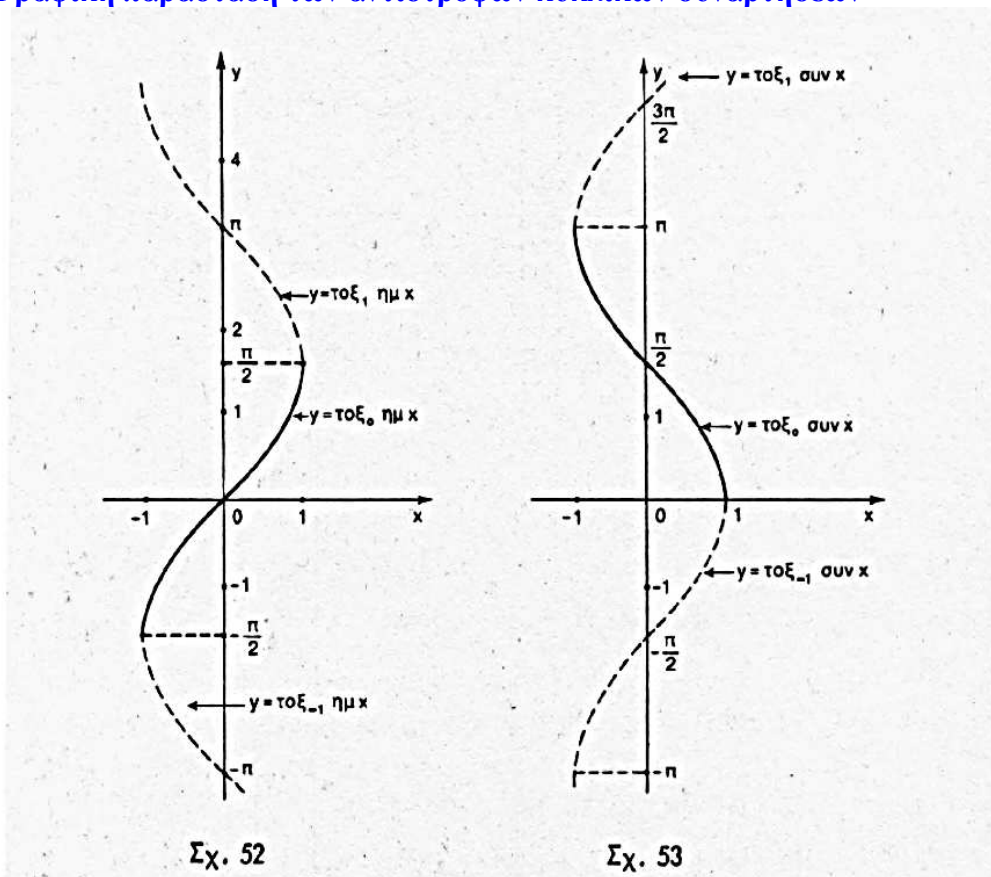
Η συνάρτηση του τύπου $y = \sigma\varphi x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$ και έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Η αντίστροφος της όπως στην περίπτωση της $y = \varepsilon\varphi x$ ότι υπάρχει σε κάθε διάστημα $(k\pi, k\pi + \pi)$ και συμβολίζω $x = \tau o \xi_k \sigma\varphi y \mid \mathbb{R}$. Ειδικά για $k=0$ έχω τον πρωτεύοντα κλάδο $x = \tau o \xi_0 \sigma\varphi y \mid \mathbb{R}$ με αντίστοιχο πρωτεύον διάστημα αντιστροφής το $(0, \pi)$. Όπως και για τις άλλες αντιστροφές ισχύουν τα κάτωθι:

(i) $\sigma\varphi(\tau o \xi_k \sigma\varphi x) = x \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ και } \forall x \in \mathbb{R}$

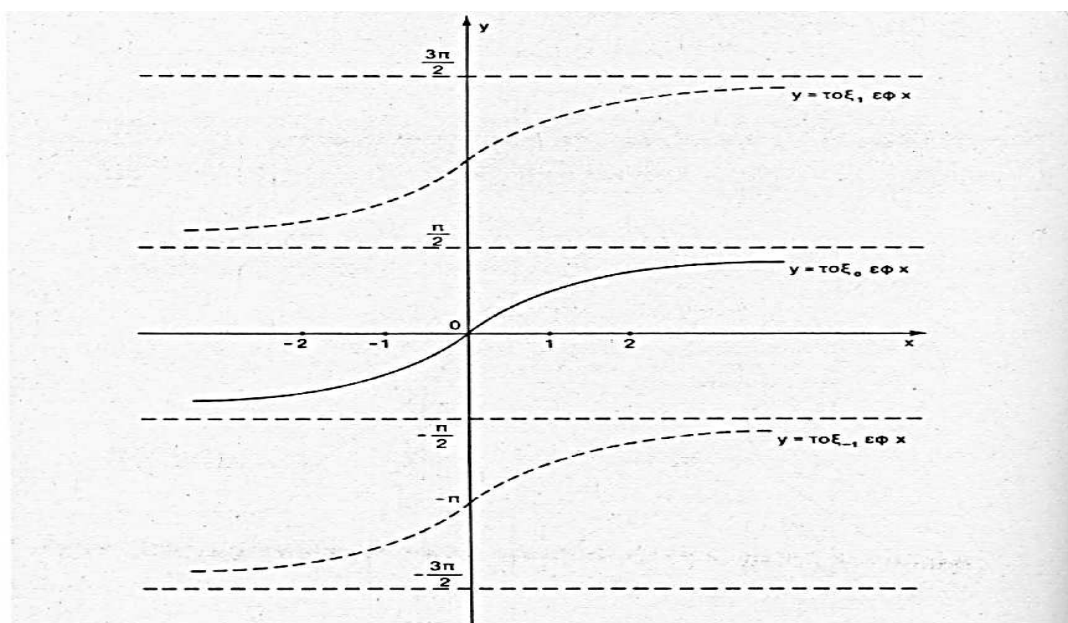
(ii) $\tau o \xi_k \sigma\varphi x = k\pi + \tau o \xi_0 \sigma\varphi x$

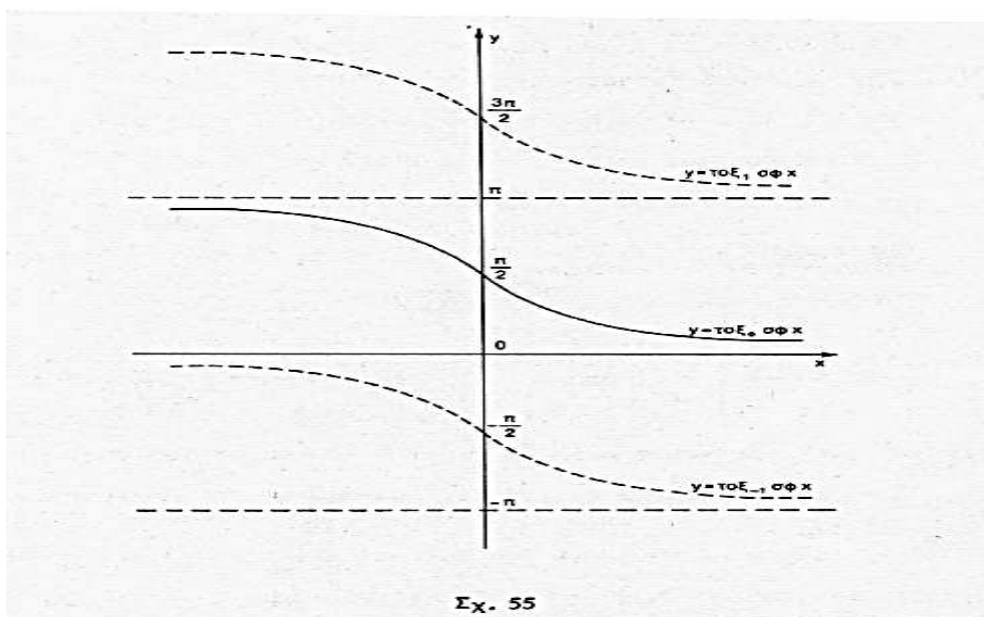
(iii) $\left\{ \begin{array}{l} \tau o \xi_0 \sigma\varphi x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\varphi y = x \\ 0 < y < \pi \end{array} \right\}$

27. Γραφική παράσταση των αντίστροφων κυκλικών συναρτήσεων



Στα ανωτέρω σχήματα δίδονται τα διαγράμματα των αντιστρόφων κυκλικών συναρτήσεων $y = \text{τοξ}_k \eta\mu x \mid [-1, +1]$, $y = \text{τοξ}_k \sigma\upsilon\nu x \mid [-1, +1]$. Εξ άλλου στα κάτωθι σχήματα δίδονται τα διαγράμματα των $y = \text{τοξ}_k \epsilon\phi x \mid \mathbb{R}$, $y = \text{τοξ}_k \sigma\phi x \mid \mathbb{R}$. Προς τούτο ελήφθη υπόψη ότι τα διαγράμματα μιας συνάρτησης f και της αντιστροφού αυτής f^{-1} είναι συμμετρικά ως προς την πρώτη διχοτόμο ενός ορθογωνίου συστήματος αξόνων.





28. Βασικές ταυτότητες στις αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις

$$1. \operatorname{τοξ}_0 \eta \mu(-x) = -\operatorname{τοξ}_0 \eta \mu x \quad \forall x \in [-1, +1]$$

$$2. \operatorname{τοξ}_0 \sigma \nu(-x) = \pi - \operatorname{τοξ}_0 \sigma \nu x \quad \forall x \in [-1, +1]$$

$$3. \operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi(-x) = -\operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4. \operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi(-x) = \pi - \operatorname{τοξ}_0 \sigma \varphi x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$5. \operatorname{τοξ}_0 \eta \mu x + \operatorname{τοξ}_0 \sigma \nu x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, +1]$$

$$6. \operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi x + \operatorname{τοξ}_0 \sigma \varphi x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$7. \operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi x = \operatorname{τοξ}_0 \sigma \varphi \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$8. \operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi x = \operatorname{τοξ}_0 \sigma \varphi \frac{1}{x} - \pi \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

$$9. \operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi x + \operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$10. \operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi x + \operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

$$11. \operatorname{τοξ}_0 \epsilon \varphi x + \operatorname{τοξ}_0 \sigma \varphi \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$12. \operatorname{τοξ}_0 \sigma \varphi x + \operatorname{τοξ}_0 \sigma \varphi \frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$