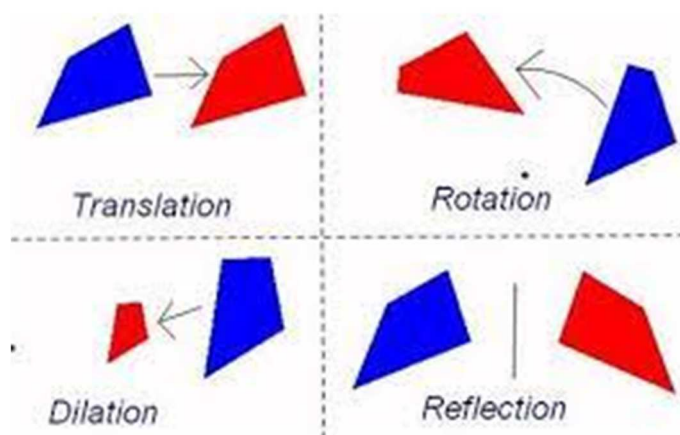




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο χώρο

Σπουδαστές: Τσαμπαρλής Γεώργιος (ΑΜ 8140)
Χάλαρος Αντώνιος (ΑΜ 8798)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (Μ.Εδ.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2022–2023

Ημερομηνία ανάθεσης: **01.12.2022**

Ημερομηνία κατάθεσης: **05.05.2023**

Ημερομηνία εξέτασης: **....05.2023**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

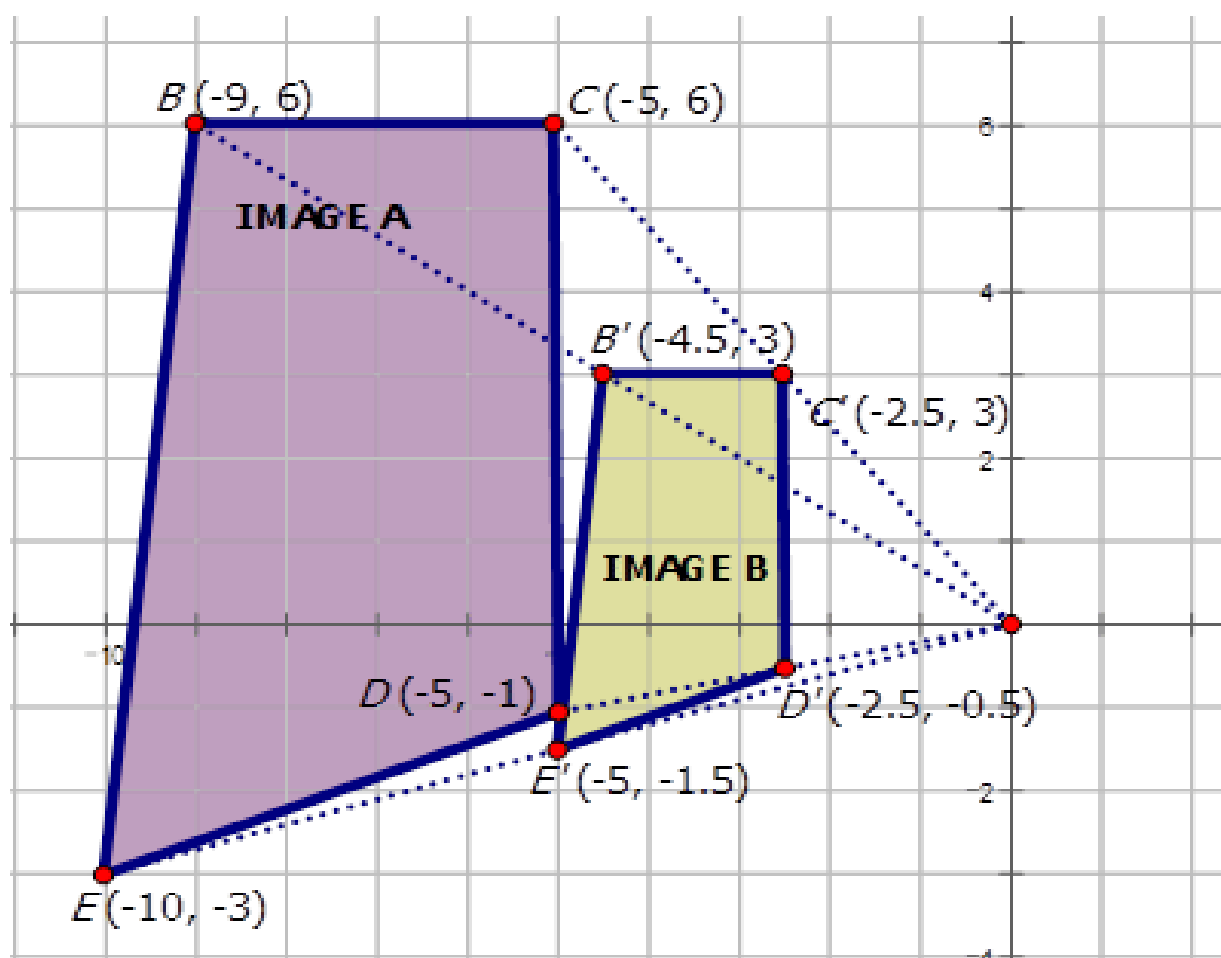
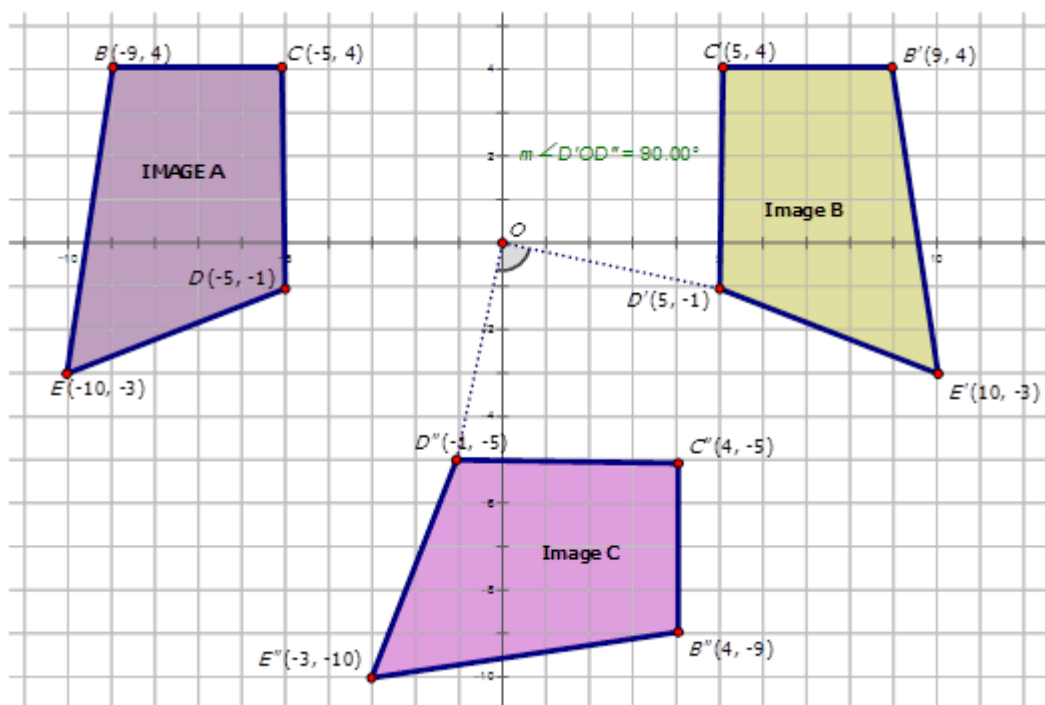
Λέξεις κλειδιά	2
Περίληψη	2
1. Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο χώρο	7
2. Πίνακες και μετασχηματισμοί	20
3. Ισομετρίες	24
4. Διαδοχικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί	26
5. Βασικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί	26
6. Συμμετρία ως προς τον άξονα xx'	27
7. Συμμετρία ως προς τον άξονα yy'	27
8. Συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$	27
9. Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων	28
10. Στροφή με κέντρο $O(0,0)$	29
11. Ομοιοθεσία	29
12. Μη γραμμικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί	31
Βιβλιογραφία	32

Λέξεις κλειδιά

Εικόνα σημείου, εικόνα ευθείας, εικόνα κύκλου, γραμμικός μετασχηματισμός πίνακα, στροφή πίνακα, μετατόπιση πίνακα, παράλληλη μεταφορά πίνακα, πίνακας στροφής, πίνακας μη γραμμικού μετασχηματισμού, ισομετρίες, ομοιοθεσία, συμμετρία ως προς άξονες, σημεία και ευθείες.

Περίληψη

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί είναι θεμελιώδεις για τα συστήματα γραφικών και αποτελούν τη βάση για πιο σύνθετες εργασίες όπως η σύνθετη κίνηση, η προβολή, ο φωτισμός. Παρουσιάζονται αρκετές ενδεικτικές περιπτώσεις απλών και διαδοχικών γεωμετρικών μετασχηματισμών στην ευθεία, στο επίπεδο και στο χώρο με τις ιδιότητες τους με χρήση πινάκων, οριζουσών και διανυσμάτων. Ακολουθούν περιπτώσεις συμμετρίας (ως προς άξονες, σημεία και ευθείες), ισομετρίες και ομοιοθεσία.



Name

Date



SPOT THE TRANSFORMATION SHEET 1

Circle the correct word which describes how the 1st shape has been transformed to the 2nd shape in just one transformation.

There is more than one correct answer for some of the transformations.

			enlarged reduced flipped rotated
			enlarged reduced flipped rotated
			enlarged reduced flipped rotated
			enlarged reduced flipped rotated
			enlarged reduced flipped rotated
			enlarged reduced flipped rotated
			enlarged reduced flipped rotated



2ND GRADE
MATH-SALAMANDERS.COM

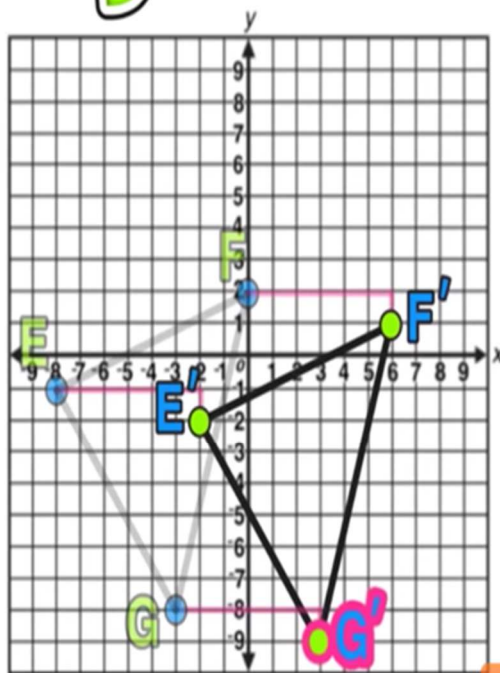
Translate a Figure

Construct the image of $\triangle EFG$ after the following transformation:

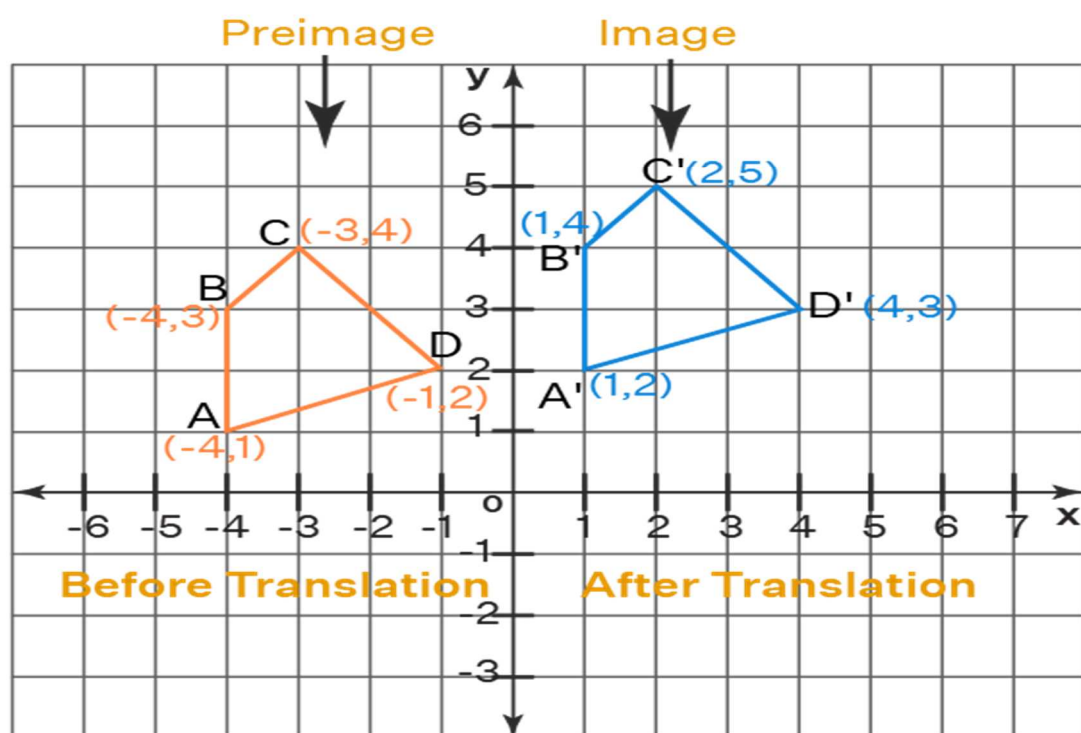
T
 $6, -1$

$E(-8, -1)$ $F(0, 2)$ $G(-3, -8)$
 $+6, -1$ $+6, -1$ $+6, -1$

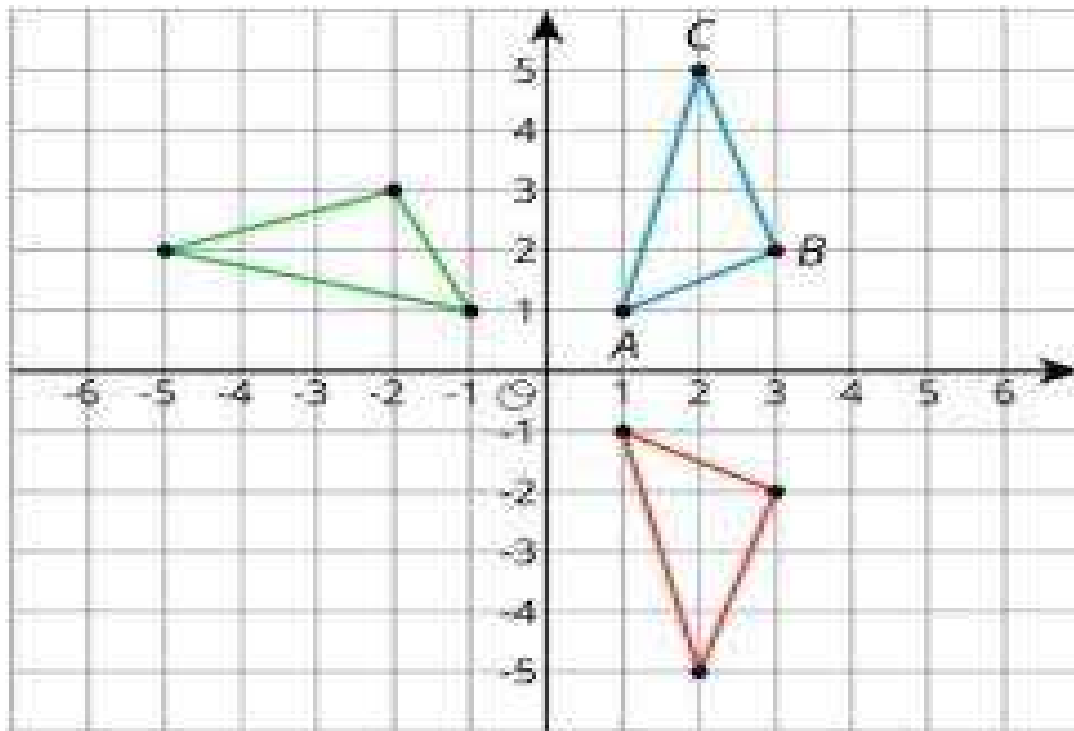
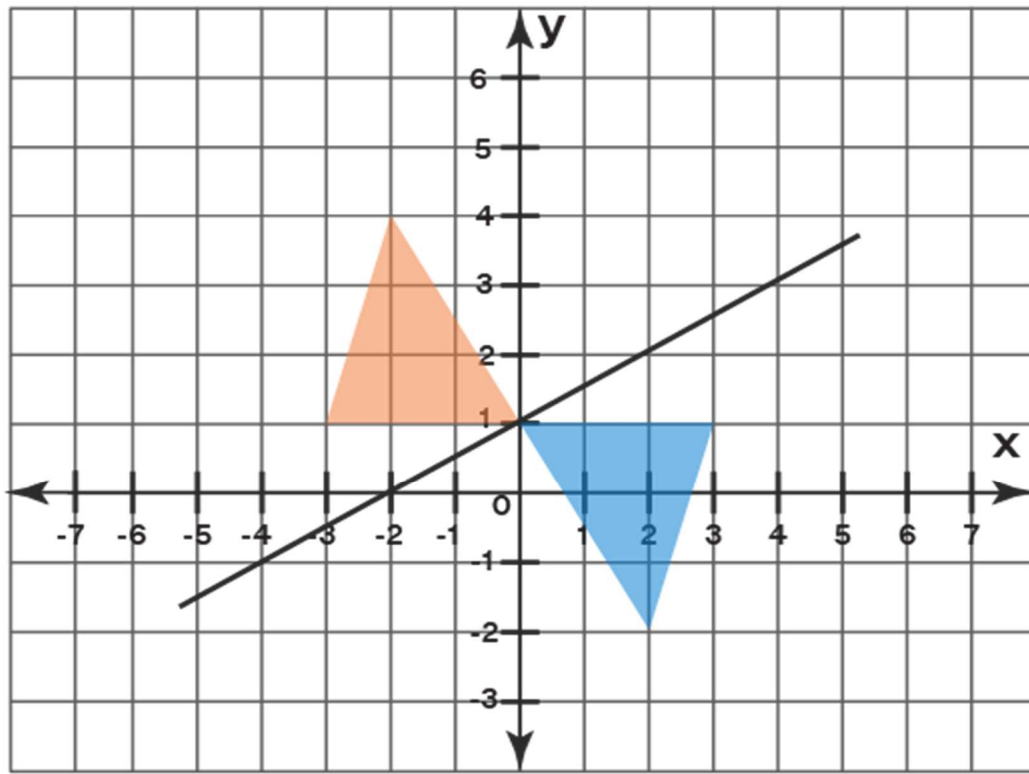
$E'(-2, -2)$ $F'(6, 1)$ $G'(3, -9)$



Preimage and Image



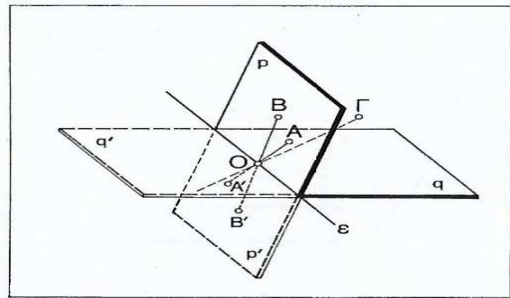
Transformation of Rotation



1. Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο χώρο

- Βρείτε το συμμετρικό μιας διέδρης γωνίας με κέντρο ένα σημείο της ακμής της.

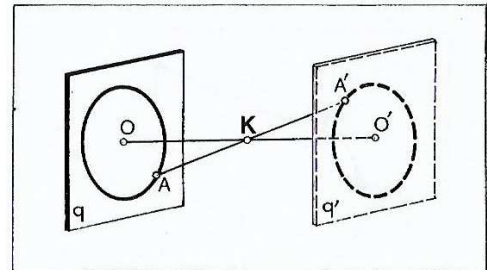
Λύση: Επειδή το κέντρο O βρίσκεται πάνω στην ακμή ε , το συμμετρικό κάθε σημείου A της έδρας q βρίσκεται στο αντικείμενο ημιεπίπεδο της q' . Επίσης, το συμμετρικό κάθε σημείου B της έδρας p βρίσκεται στο αντικείμενο ημιεπίπεδο της p' . Τέλος, αν πάρω ένα οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο Γ της διέδρης, το συμμετρικό του θα βρίσκεται στο εσωτερικό της διέδρης που σχηματίζουν τα ημιεπίπεδα p' και q' . Άρα, το συμμετρικό της διέδρης γωνίας είναι η διέδρη που έχει την ίδια ακμή και έδρες τα αντικείμενα ημιεπίπεδα των εδρών της.



Σχ. 3

- Βρείτε το συμμετρικό ενός κύκλου (O, ρ) ως προς σημείο K , όταν το K βρίσκεται έξω από το επίπεδο του κύκλου (O, ρ) .

Λύση: Αν q το επίπεδο του κύκλου (O, ρ) , το συμμετρικό του κύκλου βρίσκεται στο επίπεδο q' που είναι συμμετρικό του q ως προς το K . Το επίπεδο q' βρίσκεται αν πάρω σημείο O' τέτοιο ώστε $O'K = KO$ και φέρουμε από το O' επίπεδο παράλληλο προς το q . Ας πάρω τώρα ένα οποιοδήποτε σημείο A του κύκλου (O, ρ) . Το συμμετρικό του A είναι ένα σημείο A' του q' τέτοιο ώστε $O'A = OA$, δηλαδή το A' βρίσκεται στον κύκλο (O', ρ) του επιπέδου q' . Άρα, το συμμετρικό του κύκλου (O, ρ) είναι ο κύκλος (O', ρ) .

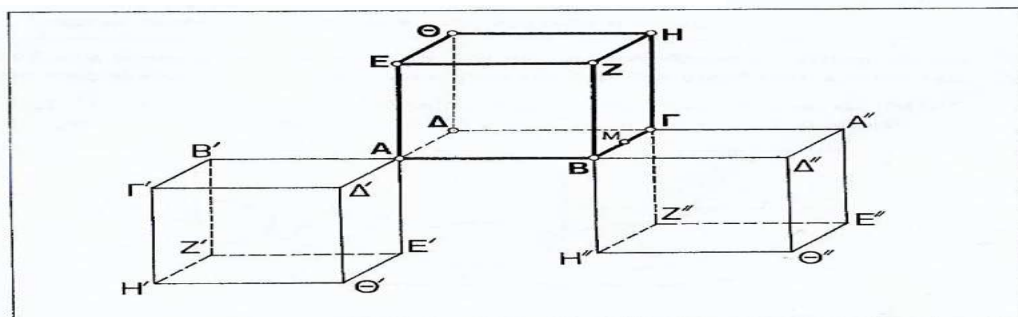
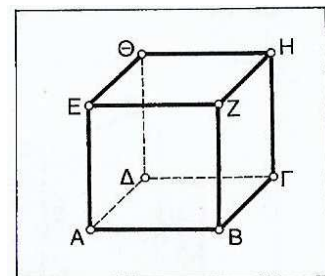


Σχ. 4

- Σχεδιάστε το συμμετρικό του απέναντι κύβου με κέντρο: α) την κορυφή του A , β) το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

Λύση: α) Βρίσκω τα συμμετρικά $A', B', \Gamma', \dots, \Theta'$ όλων των κορυφών του $A, B, \Gamma, \dots, \Theta$, ως προς το A (το A' συμπίπτει με το A) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

β) Βρίσκω τα συμμετρικά $A'', B'', \Gamma'', \dots, \Theta''$ όλων των κορυφών $A, B, \Gamma, \dots, \Theta$ του κύβου ως προς το μέσο M της $B\Gamma$ και όπως φαίνεται στο σχήμα είναι $B'' \equiv \Gamma$ και $\Gamma'' \equiv B$.



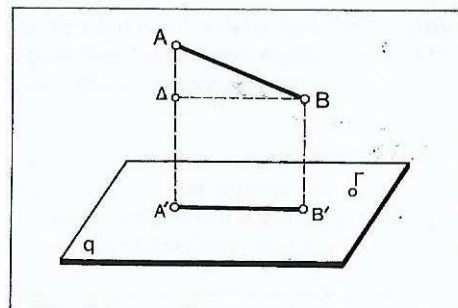
Σχ. 5α

- Παίρνω ένα ορισμένο επίπεδο q και σε κάθε σημείο A του χώρου αντιστοιχίζω την προβολή του A' στο επίπεδο q .

α) Εξηγήστε ότι με αυτό τον τρόπο ορίζω ένα σημειακό μετασχηματισμό του χώρου και βρείτε τα αμετάβλητα σημεία του μετασχηματισμού.

β) Αποδείξτε ότι η εικόνα ενός ευθύγραμμου τμήματος AB είναι ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$ μικρότερο ή ίσο με το AB . Τι έχετε να πείτε, όταν $AB \perp q$;

Λύση: α) Επειδή από ένα σημείο μπορώ να φέρω μία μόνο κάθετη προς το επίπεδο, σε κάθε σημείο A του χώρου αντιστοιχίζεται ένα μόνο σημείο (η προβολή του) και συνεπώς έχουμε ένα σημειακό μετασχηματισμό. Στο μετασχηματισμό αυτό αμετάβλητα σημεία είναι όλα τα σημεία του q , (αφού κάθε σημείο $\Gamma \in q$ συμπίπτει με την προβολή του)

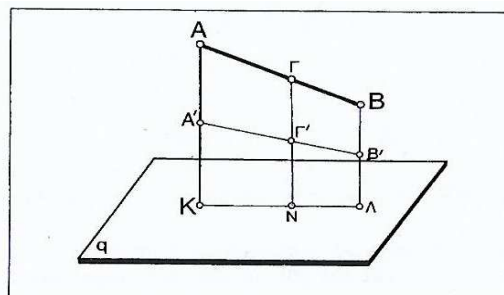


Σχ. 6

β) Έστω AB ένα ευθύγραμμο τμήμα, όχι παράλληλο προς το q , και $A'B'$ η προβολή του. Αν φέρω το $B\Delta \parallel A'B'$, το $B\Delta A'B$ είναι ορθογώνιο και συνεπώς έχω $A'B' = B\Delta$, οπότε είναι $A'B' < AB$ (αφού $B\Delta < AB$). Αν $AB \parallel q$, τότε το $ABB'A'$ είναι ορθογώνιο και έχουμε $A'B' = AB$. Γενικά $A'B' \leq AB$. Αν είναι $AB \perp q$, η προβολή του AB είναι σημείο.

• Δίνεται ένα επίπεδο q και από κάθε σημείο A του χώρου φέρνω την $AK \perp q$. Αν A' είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AK , εξηγήστε ότι η αντιστοιχία $A \rightarrow A'$ ορίζει ένα σημειακό μετασχηματισμό του χώρου. Βρείτε τα αμετάβλητα σημεία του και την εικόνα ενός ευθύγραμμου τμήματος AB .

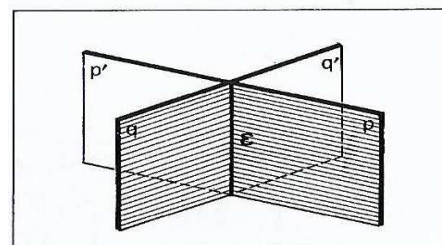
Λύση: Αφού σε κάθε σημείο A αντιστοιχίζεται ένα μόνο σημείο A' (διότι για κάθε σημείο A υπάρχει ένα μόνο κάθετο τμήμα AK και αυτό έχει ένα μέσο A') έχω ένα σημειακό μετασχηματισμό του χώρου. Στο μετασχηματισμό αυτό αμετάβλητα σημεία είναι μόνο τα σημεία του επιπέδου q . Για να βρω την εικόνα ενός τμήματος AB φέρνω από όλα τα σημεία του $A, \Gamma, \dots, B$ τα κάθετα τμήματα $AK, \Gamma N, \dots, B\Lambda$ στο επίπεδο q και παίρνουμε τα μέσα τους $A', \Gamma', \dots, B'$. Βλέπω ότι τα μέσα αυτά αποτελούν ένα ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$, αυτό που έχει άκρα τις εικόνες των άκρων του AB .



Σχ. 7

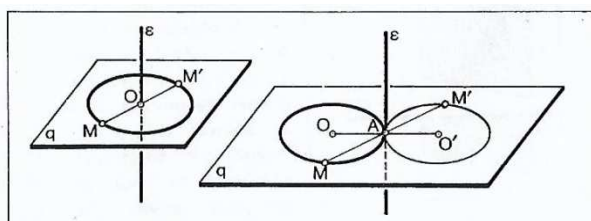
• Βρείτε το συμμετρικό μιας διέδρης γωνίας ως προς άξονα την ακμή της.

Λύση: Αν ϵ η ακμή της διέδρης, τα συμμετρικά των εδρών της p και q , ως προς τον άξονα ϵ είναι τα αντικείμενα ημιεπίπεδα τους p' και q' ενώ το συμμετρικό κάθε εσωτερικού σημείου της διέδρης γωνίας βρίσκεται στο εσωτερικό της διέδρης που έχει έδρες p' , q' . Το συμμετρικό μιας διέδρης ως προς την ακμή της ϵ είναι μια διέδρη, που έχει την ίδια ακμή και έδρες τα αντικείμενα ημιεπίπεδα των εδρών της αρχικής διέδρης.



Σχ. 8

• Βρείτε το συμμετρικό ενός κυκλικού δίσκου ως προς άξονα την ευθεία την κάθετη προς το επίπεδο του δίσκου στο



Σχ. 9

κέντρο του ή σε ένα σημείο του κύκλου του.

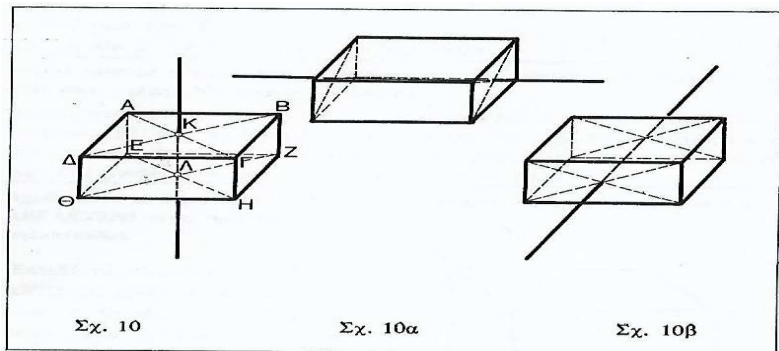
Λύση: **α)** Αν M είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του κυκλικού δίσκου και M' το συμμετρικό του ως προς το κέντρο O , το M' θα είναι συμμετρικό του M και ως προς άξονα ε , διότι $MM' \perp \varepsilon$. Έτσι αρκεί να βρω το συμμετρικό του κυκλικού δίσκου ως προς το κέντρο του O και αυτό είναι ο ίδιος ο κυκλικός δίσκος.

β) Αν ο άξονας είναι κάθετος στο επίπεδο q του κυκλικού δίσκου στο σημείο A , το συμμετρικό οποιουδήποτε σημείου M του κυκλικού δίσκου (η γενικότερα του σημείου q) ως προς το A είναι και συμμετρικό του M ως προς τον άξονα ε διότι $MM' \perp \varepsilon$. Έτσι αρκεί πάλι να βρω το συμμετρικό του κυκλικού δίσκου ως προς το A και αυτό είναι ο κυκλικός δίσκος (O', OA), όπου O' είναι το συμμετρικό του O .

• Εξετάστε αν το σχήμα που έχει ένα κουτί σπέρτα, έχει άξονες συμμετρίας και πόσους. Σχεδιάστε το γεωμετρικό αντίστοιχο σχήμα, που λέγεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, και τους άξονες συμμετρίας του.

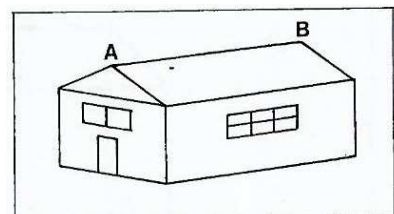
Λύση: Δύο οποιοσδήποτε απέναντι έδρες του, π.χ. οι $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ είναι ορθογώνια και η ευθεία $ΚΛ$ που ενώνει τα σημεία τομής των διαγωνίων τους, είναι κάθετη προς τις έδρες αυτές, διότι είναι παράλληλη προς την $ΑΕ$.

Έτσι τα συμμετρικά όλων των κορυφών ως προς την $ΚΛ$ είναι πάλι κορυφές του σχήματος και συνεπώς η $ΚΛ$ είναι άξονας συμμετρίας του. Επειδή το σχήμα αυτό έχει και άλλα 2 ζεύγη απέναντι εδρών, θα έχει συνολικά 3 άξονες συμμετρίας (Βλ. σχ. 10α και 10β).

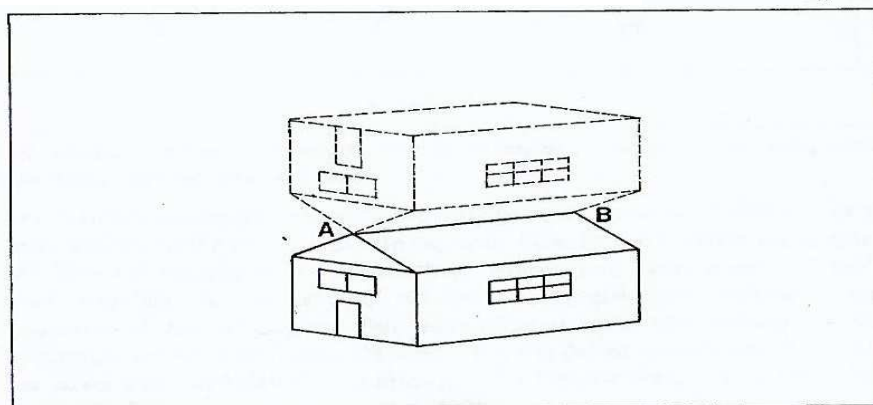


• Σχεδιάστε το συμμετρικό του σχήματος 11 ως προς άξονα την ευθεία AB .

Λύση: Παίρνοντας τα συμμετρικά των κορυφών του ως προς την ευθεία AB έχω το σχήμα 11α και βλέπω ότι το συμμετρικό σχήμα είναι ένα «ανάποδο σπιτάκι».



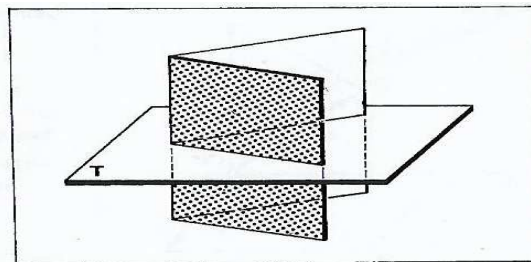
Σχ. 11



Σχ. 11α

- Βρείτε το συμμετρικό μίας διέδρης γωνίας ως προς το επίπεδο μίας κάθετης τομής της.

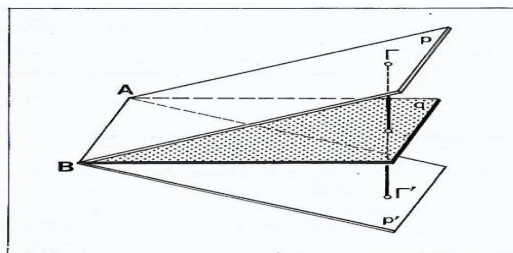
Λύση: Αφού οι έδρες της διέδρης είναι επίπεδα κάθετα προς το επίπεδο τ μιας κάθετης τομής της, το συμμετρικό κάθε έδρας ως προς το επίπεδο τ είναι η ίδια η έδρα. Συνεπώς, το συμμετρικό της διέδρης ως προς το επίπεδο τ μίας κάθετης τομής της είναι η ίδια η διέδρη.



Σχ. 12

- Ποιό είναι το συμμετρικό μιας διέδρης γωνίας ως προς το επίπεδο μίας έδρας της;

Λύση: Θεωρώ μια διέδρη γωνία που έχει έδρες q , p και ακμή AB . Για να βρω το συμμετρικό της ως προς το επίπεδο μίας έδρας, π.χ. της q , αρκεί να βρω το συμμετρικό ως προς το q' της έδρας p , (διότι το συμμετρικό της έδρας q είναι ο εαυτός της). Αν πάρω το συμμετρικό Γ' ενός σημείου Γ της έδρας p , το ημιεπίπεδο p' που ορίζεται από την AB και το Γ' είναι το συμμετρικό της έδρας p και έτσι η διέδρη που έχει έδρα q και p είναι η συμμετρική της αρχικής.



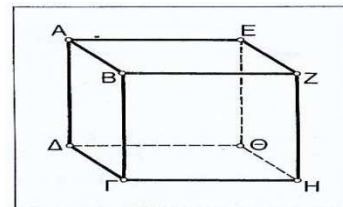
Σχ. 13

- Αναφέρατε μερικά φυσικά στερεά που τα αντίστοιχά τους γεωμετρικά στερεά έχουν επίπεδα συμμετρίας.

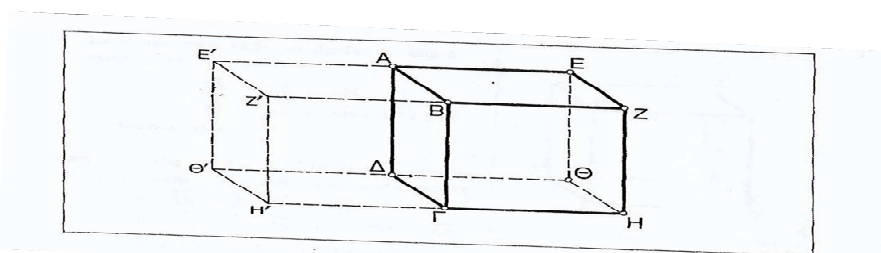
Λύση: Τέτοια στερεά είναι εκείνα που έχουν σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου όπως ένα κουτί σπίρτα, ένα ζάρι, ένα κιβώτιο και φυσικά στερεά με άλλο σχήμα που έχουν επίπεδο συμμετρίας όπως ένα κουτί γάλα, μία μπάλα ποδοσφαίρου.

- Σχεδιάστε το συμμετρικό του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου $AB\Gamma\Delta EZ\eta\Theta$ ως προς το επίπεδο $AB\Gamma\Delta$.

Λύση: Επειδή το συμμετρικό της έδρας $AB\Gamma\Delta$ ως προς το επίπεδό της είναι ο εαυτός της, βρίσκουμε μόνο τα συμμετρικά E' , Z' , η' , Θ' των κορυφών του E , Z , η , Θ αντιστοίχως (διπλασιάζοντας τα τμήματα EA , ZB , $\eta\Gamma$, $\Theta\Delta$) και έχω το σχήμα 14α.



Σχ. 14



Σχ. 14α

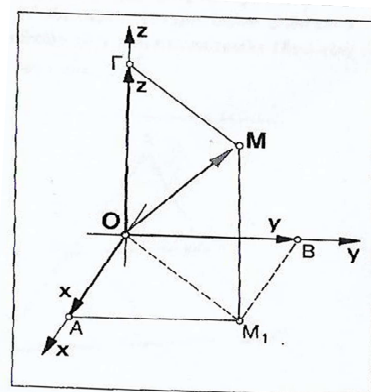
- Καθώς κοιτάζετε μέσα στον καθρέφτη τον εαυτό σας, ποιός γεωμετρικός μετασχηματισμός έρχεται στο νου σας;

Λύση: Αν θεωρήσω ως αντίστοιχο κάθε σημείου του χώρου το είδωλό του μέσα στον καθρέφτη, έχω συμμετρία ως προς το επίπεδο, με επίπεδο συμμετρίας τον ίδιο τον καθρέφτη. Το είδωλο του εαυτού μας μέσα στον καθρέφτη είναι ακριβώς το συμμετρικό, ως προς το επίπεδο του καθρέφτη, του πραγματικού εαυτού μας και όσο πλησιάζω προς τον καθρέφτη τόσο πλησιάζει και το είδωλό μας. Βλέπω ότι τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον

καθρέφτη συμπίπτουν με τα είδωλά τους (όπως διαπιστώνω αν βάλω πάνω στον καθρέφτη το δάχτυλό μου) διότι είναι τα αμετάβλητα σημεία του μετασχηματισμού.

• Αν Oz είναι άξονας κάθετος στο επίπεδο δύο ορθογώνιων αξόνων (Ox, Oy) στο O και M οποιοδήποτε σημείο του χώρου, δείξτε ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ δίνεται από τη σχέση $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (M_1 είναι η ορθή προβολή του M στο επίπεδο (Ox, Oy) , z η αλγεβρική τιμή του $\overline{M_1M}$, που λέγεται κατηγμένη του M , $x=OA$, $y=OB$).

Λύση: Από το ορθογώνιο τρίγωνο OM_1M έχουμε (αφού το $|\overrightarrow{OM}|$ είναι το μήκος του τμήματος OM), ότι $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{(OM_1)^2 + z^2}$. Επειδή το τμήμα OM_1 είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο OBM_1 , είναι $(OM_1)^2 = x^2 + y^2$ άρα $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



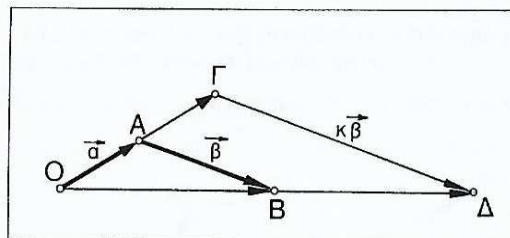
Σχ. 15

• Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{a}$ είναι δεδομένο διάνυσμα, δείξτε ότι $\kappa(\lambda\vec{a}) = (\kappa\lambda)\vec{a}$.

Λύση: Εξ' ορισμού τα δύο διανύσματα $\kappa(\lambda\vec{a})$ και $(\kappa\lambda)\vec{a}$ έχουν την ίδια διεύθυνση (τη διεύθυνση του $\vec{a}$) και το ίδιο μέτρο (ίσο με $|\kappa| \cdot |\lambda|$ φορές το μέτρο του $\vec{a}$). Επίσης έχουν την ίδια φορά, διότι είναι ομόρροπα με το $\vec{a}$, αν οι αριθμοί κ, λ είναι ομόσημοι, ή αντίρροπα με το $\vec{a}$ αν οι κ, λ είναι ετερόσημοι. Άρα, τα δύο διανύσματα $\kappa(\lambda\vec{a})$, $(\kappa\lambda)\vec{a}$ είναι ίσα, δηλαδή $\kappa(\lambda\vec{a}) = (\kappa\lambda)\vec{a}$.

• Αν $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι διανύσματα του χώρου, δείξτε ότι $\kappa(\vec{a} + \vec{\beta}) = \kappa\vec{a} + \kappa\vec{\beta}$.

Λύση: Έστω τα 2 διαδοχικά διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ και το άθροισμά τους $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{\beta}$. Αν πάρω στην OA το διάνυσμα $\overrightarrow{OG} = \kappa\vec{a}$ και στην OB το διάνυσμα $\overrightarrow{OD} = \kappa\overrightarrow{OB}$, έχω $\frac{OG}{OA} = \frac{OD}{OB}$ (διότι $\frac{OG}{OA} = \kappa$, $\frac{OD}{OB} = \kappa$) άρα οι ευθείες $\Gamma\Delta$, AB είναι παράλληλες.



Σχ. 16

Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ είναι όμοια με λόγο

ομοιότητας κ , οπότε $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \kappa$. Τότε είναι $\Gamma\Delta = \kappa \cdot AB$ ή $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \kappa \cdot \overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \vec{\beta}$. Έτσι, η

διανυσματική ισότητα $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ γράφεται $\kappa \cdot \overrightarrow{OB} = \kappa \cdot \overrightarrow{OA} + \kappa \cdot \overrightarrow{AB}$ ή $\kappa(\vec{a} + \vec{\beta}) = \kappa \cdot \vec{a} + \kappa \cdot \vec{\beta}$.

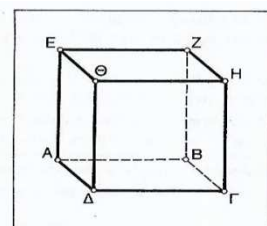
• Στον απέναντι κύβο βρείτε τα αθροίσματα των διανυσμάτων:

α) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{ZH}$, β) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma H}$. Τι παρατηρείτε;

Λύση: Οι προσθετέοι και στα δύο αθροίσματα είναι διαδοχικά διανύσματα, οπότε:

α) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{ZH} = \overrightarrow{AH}$, β) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma H} = \overrightarrow{AH}$.

Παρατηρώ ότι τα δύο αθροίσματα παριστάνουν το ίδιο διάνυσμα.



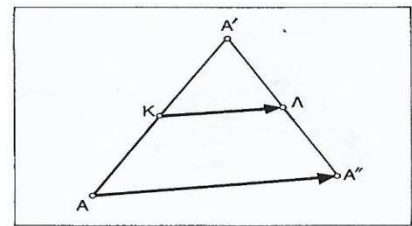
Σχ. 17

- Στο ίδιο σχήμα δείξτε ότι $(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.

Λύση: Παίρνοντας ξεχωριστά κάθε μέλος της ισότητας έχω:
 $(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EZ}) + \overrightarrow{ZH} = \overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZH} = \overrightarrow{AH}$
 $\overrightarrow{AE} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AE} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AH}$. Άρα, τα δύο μέλη είναι ίσα διότι παριστάνουν το ίδιο διάνυσμα.

- Αν A' είναι το συμμετρικό ενός σημείου A του χώρου ως προς το κέντρο δεδομένο σημείο K και A'' είναι συμμετρικό του A' ως προς κέντρο άλλο δεδομένο σημείο Λ , αποδείξτε ότι το αποτέλεσμα αυτών των δύο συμμετριών (δηλαδή η αντιστοιχία $A \rightarrow A''$) είναι μεταφορά κατά διάνυσμα $2\overrightarrow{KL}$.

Λύση: Επειδή είναι $AK=KA'$ και $A'\Lambda=\Lambda A''$, το τμήμα $K\Lambda$ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AA'A''$ άρα είναι παράλληλο προς την πλευρά AA'' και ίσο με το μισό της. Έχω πάντα $K\Lambda = \left| \frac{AA''}{2} \right|$, ή $AA'' = |2K\Lambda|$ (1).

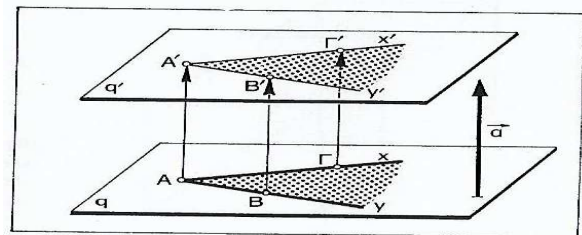


Σχ. 18

Αφού τα σημεία K και Λ είναι εντελώς ορισμένα (κέντρα συμμετρίας) το διάνυσμα $\overrightarrow{KL}$ είναι γνωστό. Από την (1) προκύπτει η διανυσματική ισότητα $\overrightarrow{AA''} = 2 \cdot \overrightarrow{KL}$ από την οποία καταλαβαίνω ότι η αντιστοιχία $A \rightarrow A''$ είναι μεταφορά κατά διάνυσμα $2\overrightarrow{KL}$.

- Βρείτε την εικόνα μίας γωνίας στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a}$ κάθετο προς το επίπεδό της.

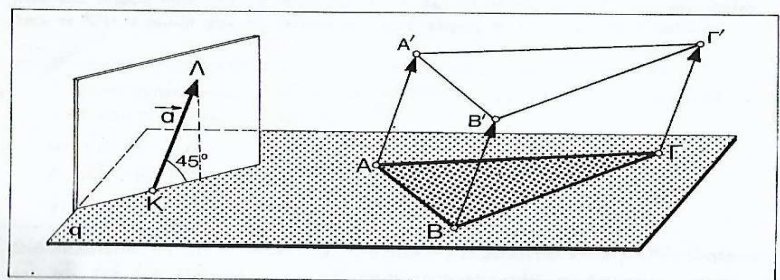
Λύση: Αρκεί να βρω την εικόνα A' της κορυφής A και την εικόνα ενός άλλου σημείου κάθε πλευράς. Επειδή οι εικόνες των πλευρών της γωνίας $\widehat{xAy}$ είναι ημιευθείες παράλληλες προς τις πλευρές της γωνίας, η εικόνα της $\widehat{xAy}$ στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a}$ θα βρίσκεται σε επίπεδο q' παράλληλο προς το q .



Σχ. 19

- Βρείτε την εικόνα ενός τριγώνου $AB\Gamma$ στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a}$, του οποίου η διεύθυνση έχει κλίση 45° προς το επίπεδο του τριγώνου.

Λύση: Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{KL} = \vec{a}$ που έχει την αρχή του στο



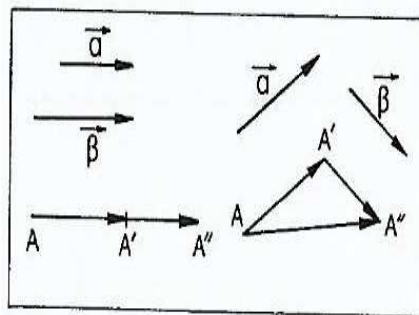
επίπεδο q του τριγώνου $AB\Gamma$, θα σχηματίζει με την προβολή του γωνία 45° , (δηλαδή θα είναι διάνυσμα ενός επιπέδου p κάθετου στο q και θα σχηματίζει με την τομή των p και q γωνία 45°). Αν φέρω διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$ ίσα με το $\overrightarrow{KL}$, τα σημεία A' , B' , Γ' είναι εικόνες των κορυφών A , B , Γ του τριγώνου στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a}$ και συνεπώς το $A'B'\Gamma'$ είναι η εικόνα του τριγώνου $AB\Gamma$. Είναι φανερό ότι το επίπεδο A' , B' , Γ' είναι παράλληλο προς το q .

• Βρείτε τη μεταφορά που προκύπτει μετά από δύο διαδοχικές μεταφορές (η μία ακολουθεί την άλλη) κατά διανύσματα αντιστοίχως $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, όταν:

α) τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση (δύο περιπτώσεις).

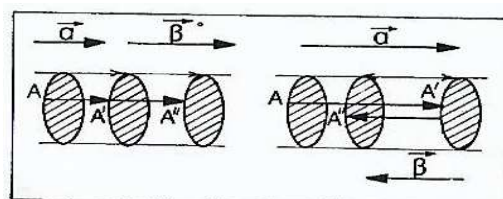
β) τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ έχουν κάθετες διευθύνσεις.

Λύση: Αν Α είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου, Α' η εικόνα του σε μια μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a}$ και Α'' η εικόνα του Α' σε μια μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\beta}$, ή αντίστοιχα $A \rightarrow A''$ είναι επίσης μια μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta} = \vec{a} + \vec{\beta}$ (διότι όπως δείχνει το σχήμα το διάνυσμα $\overline{AA''}$ είναι ίσο με το άθροισμα των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$). Ειδικότερα τώρα:



Σχ. 21

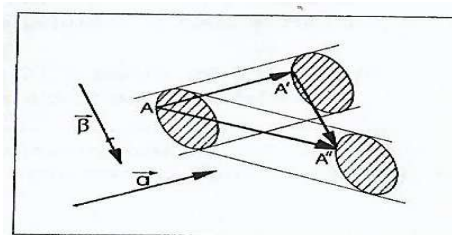
α) Αν τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση, η αντιστοιχία $A \rightarrow A''$ είναι μεταφορά κατά την ίδια διεύθυνση και το μέτρο του διανύσματος μεταφοράς είναι $|\vec{\delta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$, όταν τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα (σχ. 21α) ή $|\vec{\delta}| = ||\vec{a}| - |\vec{\beta}||$ όταν $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα (σχ. 21β).



Σχ. 21α

Σχ. 21β

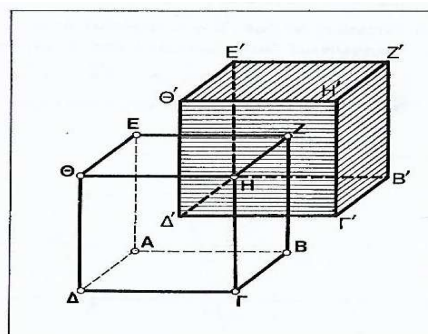
β) αν τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ έχουν κάθετες διευθύνσεις, η μεταφορά $A \rightarrow A''$ δεν έχει την ίδια διεύθυνση ούτε με τη μεταφορά κατά $\vec{a}$ ούτε με τη μεταφορά κατά $\vec{\beta}$, ενώ το μέτρο του διανύσματος μεταφοράς είναι τώρα (21γ) $|\vec{\delta}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Σχ. 21γ

• Να γίνει μεταφορά του κύβου ΑΒΓΔΕΖΗΘ διαδοχικά κατά τα διανύσματα $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$. Ποιό διάστημα παριστάνει τη μεταφορά που προκύπτει;

Λύση: Τα διαστήματα που ορίζουν τις τρεις διαδοχικές μεταφορές έχουν άθροισμα $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BG} + \overline{GH} = \overline{AH}$. Έτσι, η τελική εικόνα του κύβου μέσα από τις μεταφορές αυτές μπορεί να βρεθεί ως εικόνα του σε μια μοναδική μεταφορά κατά διάνυσμα $\overline{AH}$. Βρίσκω τις εικόνες όλων των κορυφών του κύβου στη μεταφορά αυτή και έχουμε ως εικόνα του κύβου τον κύβο ΗΔΓ'Β'Θ'Η'Ζ'Ε'.



• Αν ο κύβος παριστάνει το δωμάτιο σας, κάντε «το μαθηματικό πέταγμα» από την κορυφή Α στην απέναντι Η αντί να ακολουθήσετε το δρόμο κατά μήκος των ακμών $\overline{AB}$, $\overline{BZ}$, $\overline{ZH}$. Με τις μεταφορές κατά μήκος των ακμών του κύβου μπορείτε να πάτε από το Α στο Η χωρίς να περάσετε δύο φορές από το ίδιο σημείο χρησιμοποιώντας α) 3 ακμές β) 5 ακμές γ) 7 ακμές;

Λύση: Στον κύβο βλέπω ότι μπορώ να πάω από το Α στο Η χρησιμοποιώντας τη μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{AH}$, το οποίο είναι άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BZ}$, $\overrightarrow{ZH}$. **α)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{ZH}$ (3 ακμές), **β)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Theta} + \overrightarrow{\Theta H}$ (5 ακμές)
γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Theta} + \overrightarrow{\Theta E} + \overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{ZH}$ (7 ακμές).

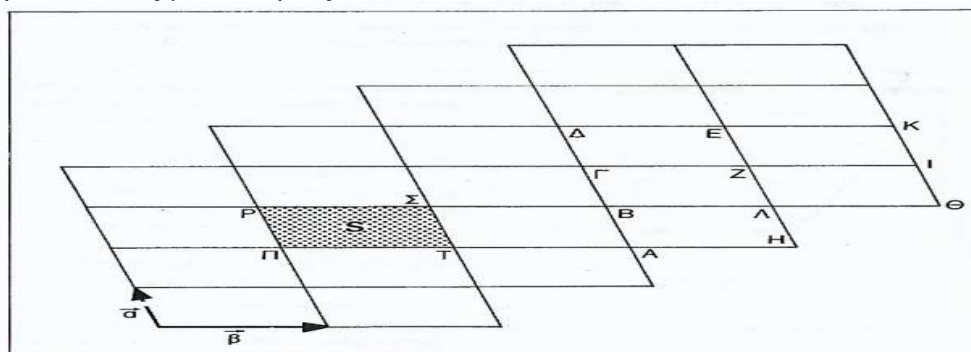
• Στο παρακάτω σχήμα το παραλληλόγραμμο S μεταφέρεται κατά τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta K}$, $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{\Pi Z}$, $\overrightarrow{ZI}$. Που θα βρίσκεται το S μετά από κάθε μεταφορά:

Λύση: **α)** Στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta K}$ πρέπει να φέρω από τις κορυφές του S διανύσματα ίσα με το $\overrightarrow{\Delta K}$. Τέτοια είναι τα $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{\Sigma\Lambda}$, $\overrightarrow{\Gamma H}$, $\overrightarrow{\Pi A}$. Έτσι εικόνα του S είναι το ABΛH, που βρίσκεται δύο «θέσεις» δεξιά.

β) Στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{B\Theta} + \overrightarrow{\Theta K}$ βρίσκω, αν σκεφτώ με ανάλογο τρόπο, ότι η εικόνα του S είναι ΓΔΕΖ, που βρίσκεται δύο «θέσεις» προς τα πάνω.

γ) Στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{\Pi Z} = \overrightarrow{\Pi H} + \overrightarrow{HZ}$, η εικόνα του S είναι το ΕΚΙΖ, διότι κάθε κορυφή του μεταφέρεται τρεις θέσεις προς τα δεξιά και δύο προς τα πάνω.

δ) Στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{ZI}$, η εικόνα του S είναι το ΣΒΑΤ, διότι κάθε κορυφή του μεταφέρεται απλώς μία θέση δεξιά.



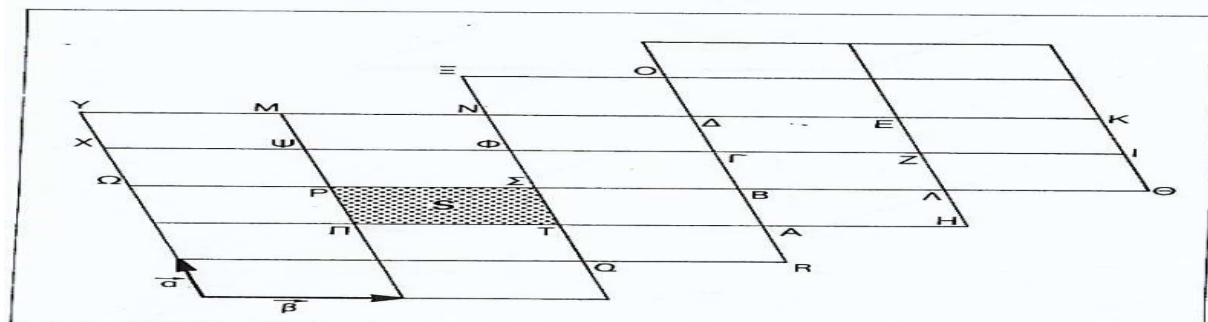
Σχ. 23

• Στο ίδιο σχήμα να ονομάσετε τα διανύσματα, κατά τα οποία γίνονται οι μεταφορές, όταν οι εικόνες του S είναι αντίστοιχα **α)** ΣΒΑΤ **β)** ΛΖΓΒ **γ)** ΖΙΚΕ **δ)** ΔΕΖΓ.

Λύση: **α)** Αφού το P μεταφέρθηκε στο Σ, το Σ στο Β, κ.τ.λ., διάνυσμα μεταφοράς θα είναι το $\overrightarrow{P\Sigma}$.

β) Αφού το P μεταφέρθηκε στο Γ, το Σ στο Ζ, κ.λπ., διάνυσμα μεταφοράς είναι το $\overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{B\Gamma}$.

γ) Αφού το P μεταφέρθηκε στο Ε, το Σ στο Κ, κ.λπ., διάνυσμα μεταφοράς είναι το $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{P\Lambda} + \overrightarrow{\Lambda E}$.



Σχ. 24

δ) Αφού το P μεταφέρθηκε στο Δ, το Σ στο Ε, κ.λπ., διάνυσμα μεταφοράς είναι το $\overrightarrow{P\Delta} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{B\Delta}$.

- Στο ίδιο σχήμα, αν μεταφέρεται το S κατά διάνυσμα $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, που θα βρίσκεται το S; Ποιά είναι η εικόνα του S στη μεταφορά κατά διάνυσμα: α) $3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ β) $2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ γ) $2\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$ δ) $\vec{\beta} + (-\vec{\alpha})$;

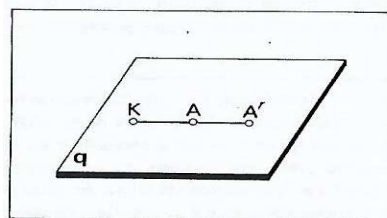
Λύση: Αρκεί να βρίσκω σε κάθε περίπτωση την εικόνα μιας κορυφής του S, π.χ. της Π, παρατηρώντας, ότι το $\vec{\alpha}$ παριστάνει μεταφορά κατά μία θέση προς τα πάνω και το $\vec{\beta}$ παριστάνει μεταφορά κατά μία θέση δεξιά. Στη μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB}$ η εικόνα του Π είναι το Β και η εικόνα του S είναι το ΓΖΛΒ. Αν σκεφτώ ανάλογα βρίσκω ότι:

α) Στη μεταφορά κατά διάνυσμα $3\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN}$ εικόνα του Π είναι το Ν, άρα εικόνα του S είναι το ΝΞΟΔ.

β) Στη μεταφορά κατά διάνυσμα $2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PT}$ εικόνα του Π είναι το Τ, άρα εικόνα του S είναι το ΓΔΕΖ.

γ) Στη μεταφορά κατά διάνυσμα $2\vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PX}$ εικόνα του Π είναι το Χ, άρα εικόνα του S είναι το ΧΥΜΨ.

δ) Στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\beta} + (-\vec{\alpha}) = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TQ} = \overrightarrow{PQ}$ εικόνα του Π είναι το Q, άρα εικόνα του S είναι το QΡΑΤ.



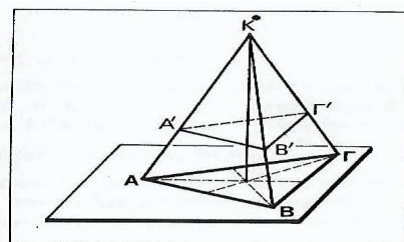
Σχ. 25

- Ποιο είναι το ομοιόθετο επίπεδο q, όταν αυτό διέρχεται από το κέντρο ομοιοθεσίας K και λόγος ομοιοθεσίας είναι οποιοσδήποτε θετικός λ;

Λύση: Αν ένα επίπεδο q διέρχεται από το κέντρο ομοιοθεσίας K, το ομοιόθετο A' κάθε σημείου A ∈ q βρίσκεται πάνω στο επίπεδο q (διότι το A' είναι πάνω στην ημιευθεία KA, η οποία βρίσκεται πάνω στο q). Άρα, το ομοιόθετο του q είναι ο εαυτός του.

- Σχεδιάστε το ομοιόθετο τρίγωνο ABΓ με κέντρο σημείο K, που βρίσκεται πάνω στην κάθετο προς το επίπεδό του στο κέντρο βάρους του και λόγο ομοιοθεσίας $\lambda = \frac{2}{3}$.

Λύση: Αν πάρω πάνω στην KA σημείο A' τέτοιο ώστε $KA' = \frac{2}{3}KA$, το A' είναι ομοιόθετο του A. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκω τα ομοιόθετα B' και Γ' των B και Γ. Έτσι το τρίγωνο A'B'Γ' είναι το ομοιόθετο του ABΓ.

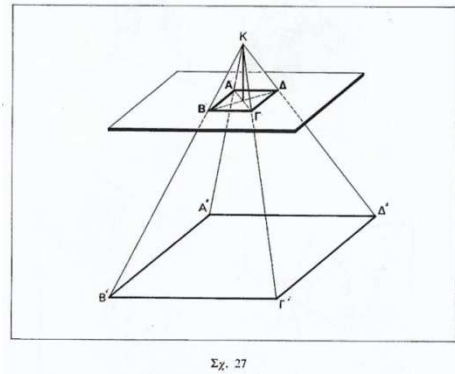


Σχ. 26

- Σχεδιάστε το ομοιόθετο τετράγωνο πλευράς 5 cm, με κέντρο το σημείο K, που βρίσκεται πάνω στην κάθετη ευθεία στο επίπεδο του και στο κέντρο συμμετρίας του και λόγο ομοιοθεσίας 4. Πόσο είναι το εμβαδό της εικόνας του τετραγώνου που δόθηκε;

Λύση: Αν πάρω στην KA τμήμα $KA' = 4KA$, το A' είναι ομοιόθετο του A. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και τα ομοιόθετα B', Γ', Δ' των άλλων κορυφών B, Γ, Δ, οπότε εικόνα του τετραγώνου ABΓΔ είναι το σχήμα A'B'Γ'Δ', που είναι επίσης τετράγωνο. Η πλευρά του A'B'Γ'Δ' Ε είναι τετραπλάσια από την πλευρά του τετραγώνου ABΓΔ (διότι $A'B' : AB = 4$). Έχω $(A'B') = 4 \cdot 5 = 20$ cm άρα το εμβαδόν του είναι $(A'B'Γ'Δ') = 20 \cdot 20 = 400$ cm². Στο ίδιο

αποτέλεσμα θα καταλήξω αν γράψω ότι ο λόγος των εμβαδών δύο τετραγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιοθεσίας (ομοιότητας), δηλαδή με $4^2 = 16$. Έχω $(AB\Gamma\Delta) = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$, $\frac{(A'B'\Gamma'\Delta')}{(AB\Gamma\Delta)} = 16$ ή $(A'B'\Gamma'\Delta) = 16(AB\Gamma\Delta) = 16 \cdot 25 = 400 \text{ cm}^2$.



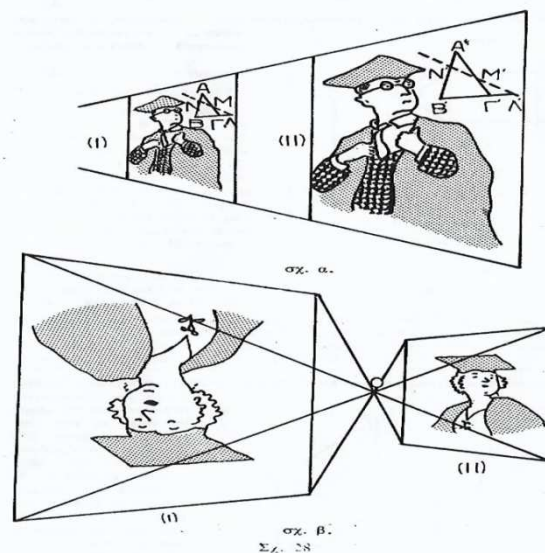
- Πως μεταβάλλεται το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και ο όγκος ενός κύβου, αν τριπλασιάσουμε την πλευρά του;

Λύση: Δύο οποιοδήποτε κύβοι είναι όμοια σχήματα με λόγο ομοιότητας το λόγο των πλευρών τους, που εδώ είναι ίσος με το 3. Αν ονομάσω E, V την επιφάνεια και τον όγκο του αρχικού κύβου και E_1, V_1 την επιφάνεια και τον όγκο του κύβου που έχει τριπλάσια πλευρά, έχω (αφού ο λόγος ομοιότητας είναι $\lambda=3$). $\frac{E_1}{E} = \lambda^2 = 9$, $\frac{V_1}{V} = \lambda^3 = 27$. Άρα, $E_1 = 9E$, $V_1 = 27V$, δηλαδή η επιφάνεια του κύβου γίνεται 9 φορές μεγαλύτερη και ο όγκος του γίνεται 27 φορές μεγαλύτερος.

- Στο σχήμα (α) δείχνω έναν δάσκαλο (εικόνα (i)) και τη μεγέθυνσή του (εικόνα (ii)). Από ποιο σημείο περνούν οι ευθείες, που ενώνουν δύο αντίστοιχα σημεία; Αν O είναι το σημείο αυτό, πάρτε οποιοδήποτε σημείο A στην εικόνα (i) και το αντίστοιχο του A' στη (ii). Μετρήστε με προσέγγιση ενός δεκάτου τις αποστάσεις OA, OA' και να υπολογίσετε το λόγο ομοιοθεσίας. Αν θεωρήσετε το (ii) ως αρχικό, ποιος είναι τότε ο λόγος ομοιοθεσίας; Κατά τι διαφέρει η ομοιοθεσία στα σχήματα (α) και (β);

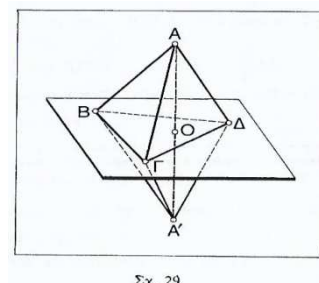
Λύση: Αν φέρω τις ευθείες $BB', MM', AA', \dots$ βλέπω ότι όλες περνούν από το ίδιο σημείο O . Από το σημείο αυτό, το οποίο είναι το κέντρο ομοιοθεσίας των δύο σχημάτων, περνά και οποιαδήποτε άλλη ευθεία που ενώνει αντίστοιχα σημεία.

Μετρώντας τις αποστάσεις OA, OA' βρίσκω $(OA') = 8,8 \text{ cm}$, $(OA) = 4,4 \text{ cm}$. Αν θεωρήσω αρχικό σχήμα το (i) και ονομάσω λ τον λόγο ομοιοθεσίας, έχουμε $(OA') = \lambda(OA)$ ή $8,8 = \lambda \cdot (4,4)$, δηλαδή $\lambda = 2$. Έτσι ο λόγος ομοιοθεσίας είναι $\lambda = 2$. Αν θεωρήσω ως αρχικό σχήμα το (ii) ο λόγος ομοιοθεσίας θα είναι $\frac{1}{2}$.



Η ομοιοθεσία στο σχήμα (α) είναι εξωτερική (αφού το κέντρο βρίσκεται έξω από το τμήμα AA'), ενώ στο σχήμα (β) είναι εσωτερική (αφού το κέντρο ομοιοθεσίας O βρίσκεται ανάμεσα στα ομοιόθετα σημεία).

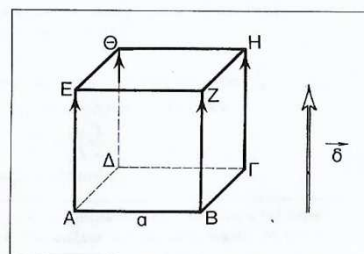
- Έστω σημεία A, B, Γ, Δ στο χώρο τέτοια ώστε το A να είναι έξω από το επίπεδο (B, Γ, Δ) των τριών άλλων. Σχεδιάστε το συμμετρικό του σχήματος $AB\Gamma\Delta$ ως προς το επίπεδο (B, Γ, Δ) .



Λύση: Βρίσκω το συμμετρικό του Α, φέρνοντας την κάθετο ΑΟ προς το επίπεδο (Β, Γ, Δ) και παίρνοντας στην προέκτασή της τμήμα ΟΑ' = ΟΑ. Επειδή τα συμμετρικά των Β, Γ, Δ είναι τα ίδια τα σημεία αυτά (αφού ανήκουν στο επίπεδο), το συμμετρικό ΑΒΓΔ θα είναι το Α'ΒΓΔ.

- Σχεδιάστε το στερεό που παράγεται, όταν ένα τετράγωνο πλευράς α μεταφέρεται κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$, που έχει διεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο του τετραγώνου και μέτρο α. Τι στερεό είναι αυτό;

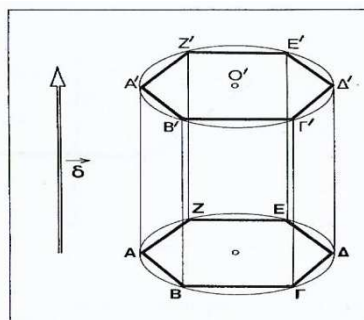
Λύση: Για να μεταφέρουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ κατά $\vec{\delta}$ φέρνουμε τα διανύσματα $\vec{AE}$, $\vec{BZ}$, $\vec{GH}$, $\vec{\Delta\Theta}$ ίσα με $\vec{\delta}$ και βρίσκουμε έτσι τις εικόνες Ε, Ζ, Η, Θ, των Α, Β, Γ, Δ αντιστοίχως. Επειδή είναι (ΑΕ) = (ΒΖ) = (ΓΗ) = (ΔΘ) = α και οι πλευρές του ΑΒΓΔ είναι επίσης α, το στερεό είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με όλες τις ακμές του ίσες, δηλαδή είναι κύβος.



Σχ. 30

- Σχεδιάστε τα στερεά που παράγονται, όταν ένας κύκλος και ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο μεταφέρονται κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$, του οποίου η διεύθυνση είναι κάθετη προς το επίπεδο του κύκλου.

Λύση: Παίρνοντας τα διανύσματα $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{\Gamma\Gamma'}$, $\vec{\Delta\Delta'}$, $\vec{EE'}$, $\vec{ZZ'}$ ίσα με $\vec{\delta}$ έχω τις εικόνες Α', Β', Γ',... των κορυφών Α, Β, Γ,... του εξαγώνου. Έτσι το σχήμα Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ' που είναι επίσης κανονικό εξάγωνο, είναι η εικόνα του ΑΒΓΔΕΖ, ενώ το στερεό που παράγεται κατά τη μεταφορά του εξαγώνου είναι ορθό κανονικό εξαγωνικό πρίσμα. Παίρνοντας και $\vec{OO'} = \vec{\delta}$, έχω την εικόνα του Ο στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$. Επειδή και το Α' είναι η εικόνα του Α, ο κύκλος (Ο', ΟΑ') είναι η εικόνα του κύκλου (Ο, ΟΑ) στην ίδια μεταφορά, ενώ το στερεό που παράγεται κατά τη μεταφορά του κύκλου είναι ορθός κύλινδρος περιγεγραμμένος στο κανονικό εξαγωνικό πρίσμα.

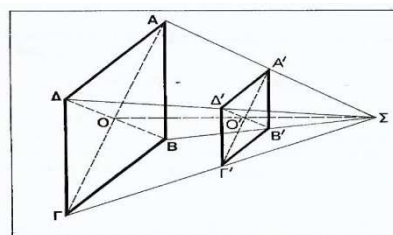


Σχ. 31

- Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Σ πάνω στην κάθετη προς το επίπεδο του τετραγώνου στο σημείο τομής Ο των διαγωνίων του. Από το μέσο του ΣΟ φέρω επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο του τετραγώνου. Αν Α', Β', Γ', Δ' είναι τα σημεία, στα οποία τέμνουν το επίπεδο αυτό τα ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' είναι ομοιόθετα με κέντρο το Σ και λόγο ομοιοθεσίας $\lambda = \frac{1}{2}$.

Λύση: Το επίπεδο ΑΣΟ τέμνει τα δύο παράλληλα επίπεδα κατά τις ευθείες ΑΟ και ΑΟ', οι οποίες είναι παράλληλες (ως τομές παράλληλων επιπέδων από τρίτο) και επειδή στο τρίγωνο ΑΣΟ το Ο' είναι μέσο της πλευράς ΟΣ, το Α' θα είναι μέσο της ΑΣ. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι τα σημεία Β', Γ', Δ' είναι μέσα των ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ αντιστοίχως, δηλαδή έχω $\Sigma A' = \frac{1}{2} \Sigma A$, $\Sigma B' = \frac{1}{2} \Sigma B$, $\Sigma \Gamma' = \frac{1}{2} \Sigma \Gamma$, $\Sigma \Delta' = \frac{1}{2} \Sigma \Delta$. Οι

ισότητες αυτές εκφράζουν ότι το Α'Β'Γ'Δ' είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ στην ομοιοθεσία με κέντρο Σ και λόγο $\frac{1}{2}$.



Σχ. 32

- Δύο ομόλογες ακμές δύο όμοιων στερεών έχουν μήκη 3 cm και 6 cm αντίστοιχα. Βρείτε τον λόγο των εμβαδών και τον λόγο των όγκων τους.

Λύση: Ο λόγος της ομοιότητας των δύο στερεών είναι ίσος με το λόγο των ομόλογων ακμών τους, δηλαδή $\lambda = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Έτσι αν E_1, E_2 είναι εμβαδά των επιφανειών τους και V_1, V_2 είναι

οι όγκοι τους, έχουμε: $\frac{E_1}{E_2} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $\frac{V_1}{V_2} = \lambda^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

- Ο όγκος ενός στερεού είναι 84 cm^3 και η ακμή του 7 cm. Βρείτε τον όγκο ομοίου στερεού με ομόλογη ακμή 14 cm.

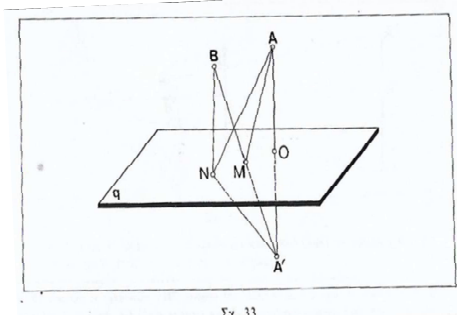
Λύση: Ο λόγος ομοιότητας των δύο στερεών είναι $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$. Έτσι, αν V είναι ο όγκος του

ομοίου στερεού, έχουμε $\frac{84}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Άρα, $V = 84 \cdot 8 = 672 \text{ cm}^3$.

- Δίνονται δύο σημεία A, A' συμμετρικά ως προς επίπεδο q και σημείο B στον ημίχωρο, που είναι το A . Δείξτε ότι για κάθε σημείο M του q έχουμε $MA + MB = MA' + MB$. Βρείτε ένα σημείο M του q τέτοιο ώστε $MA + MB < NA + NB$, όπου N οποιοδήποτε σημείο του q .

Λύση: α) Τα τμήματα MA και MA' είναι ίσα διότι είναι συμμετρικά προς το q (αφού το M συμπίπτει με το συμμετρικό του). Έτσι για κάθε $M \in q$ έχουμε $MA = MA'$ και αν προσθέσω στα δύο μέλη της ισότητας αυτής το MB , βρίσκω $MA + MB = MA' + MB$.

β) Η σχέση ισχύει και για οποιοδήποτε σημείο N του q , δηλαδή είναι $NA + NB = NA' + NB$. Επειδή ζητώ ένα ορισμένο σημείο M του q τέτοιο, ώστε το άθροισμα $MA + MB$ να είναι πάντα μεγαλύτερο από το $MA' + MB$, αρκεί να βρω ένα σημείο M του q για το οποίο το άθροισμα $NA' + NB$ να είναι πάντα μεγαλύτερο από το $MA' + MB$. Το άθροισμα όμως $NA' + NB$ είναι πάντα μεγαλύτερο από το ευθύγραμμο τμήμα $A'B$. Έτσι, αν πάρω για M το σημείο τομής της $A'B$ με το q θα έχουμε: $A'B < A'N + NB$ ή $A'M + MB < A'N + NB$ ή $AM + MB < AN + NB$.



Σχ. 33

- Δίνοντας 2 ευθείες ε και ε_1 που τέμνονται στο σημείο O . Εξηγήστε ότι:

α) Το επίπεδο των δύο ευθειών $\varepsilon, \varepsilon_1$ είναι επίπεδο συμμετρίας του σχήματος $\varepsilon \cup \varepsilon_1$.

β) Τα επίπεδα p και q που είναι κάθετα στο επίπεδο των ευθειών και περιέχουν τις διχοτόμους των γωνιών των $\varepsilon, \varepsilon_1$ είναι επίπεδα συμμετρίας του σχήματος $\varepsilon \cup \varepsilon_1$.

γ) Οι ευθείες των διχοτόμων αυτών είναι άξονες συμμετρίας και το O είναι κέντρο συμμετρίας του σχήματος $\varepsilon \cup \varepsilon_1$.

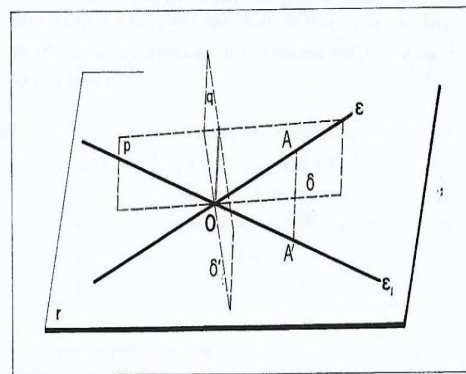
Λύση: Οι εξηγήσεις για τις περιπτώσεις α και γ είναι απλές. Πραγματικά αν r είναι το επίπεδο των $\varepsilon, \varepsilon_1$ βλέπω ότι:

α) Κάθε σχήμα του r συμπίπτει με το συμμετρικό του ως προς το r (αφού τα σημεία του r είναι αμετάβλητα στην συμμετρία ως προς το r). Έτσι το συμμετρικό του σχήματος $\varepsilon \cup \varepsilon_1$ συμπίπτει με το ίδιο το σχήμα $\varepsilon \cup \varepsilon_1$ και συνεπώς το r είναι επίπεδο συμμετρίας του.

γ) Αφού η διχοτόμος μιας γωνίας είναι άξονας συμμετρίας της, το συμμετρικό κάθε σημείου A της ε (ή της ε_1) θα ανήκει στην άλλη ευθεία, δηλαδή θα ανήκει στο σχήμα $\varepsilon \cup \varepsilon_1$. Έτσι οι διχοτόμοι δ και δ' είναι άξονες συμμετρίας. Επίσης το O είναι κέντρο συμμετρίας του $\varepsilon \cup \varepsilon_1$ διότι το συμμετρικό οποιουδήποτε σημείου της ε (ή της ε_1) ως προς το O ανήκει στην ίδια την ευθεία, δηλαδή ανήκει στο $\varepsilon \cup \varepsilon_1$.

β) Για να δείξω ότι κάθε ένα από τα επίπεδα p, q είναι επίπεδο συμμετρίας του $\varepsilon \cup \varepsilon_1$ αρκεί να δείξω ότι το συμμετρικό οποιουδήποτε σημείου της ε ή της ε_1 , ως προς το p και ως προς το q , ανήκει στο σχήμα $\varepsilon \cup \varepsilon_1$. Ας βρω π.χ. το συμμετρικό ενός σημείου A της ε ως προς το p .

Επειδή το A είναι σημείο του Γ , η κάθετος από το A στο επίπεδο p θα περιέχεται στο Γ και θα είναι κάθετη στην τομή δ των επιπέδων p και Γ (αφού τα p και Γ είναι κάθετα). Έτσι, το συμμετρικό του A ως προς το p συμπίπτει με το συμμετρικό A' του A ως προς τη διχοτόμο δ , το οποίο είναι πάνω στην ευθεία ε . Δηλαδή, το συμμετρικό του A (ή οποιουδήποτε άλλου σημείου του σχήματος $\varepsilon \cup \varepsilon_1$) ως προς το p

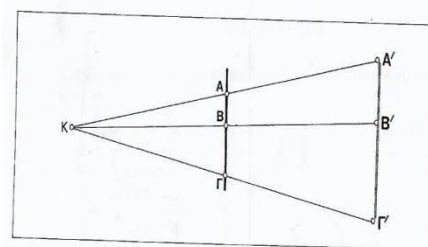


Σχ. 34

ανήκει στο σχήμα $\varepsilon \cup \varepsilon_1$. Ομοίως δείχνω ότι το συμμετρικό του A (ή οποιουδήποτε άλλου σημείου) ως προς το q ανήκει στο σχήμα $\varepsilon \cup \varepsilon_1$. Έτσι τα επίπεδα p και q είναι επίπεδα συμμετρίας του $\varepsilon \cup \varepsilon_1$.

- Δύο στερεά (σ) και (σ') είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ . Δείξτε ότι, αν 3 σημεία A, B, Γ του (σ) είναι πάνω σε μια ευθεία, τότε και τα ομόλογά τους A', B', Γ' σημεία του (σ') είναι πάνω σε μια ευθεία.

Λύση: Αφού τα στερεά (σ) και (σ') είναι όμοια, θα είναι (ή θα γίνονται) ομοιόθετα σε μια ομοιοθεσία με λόγο λ και στην ομοιοθεσία αυτή τα A', B', Γ' θα είναι εικόνες των A, B, Γ . Αφού όμως το Γ ανήκει στην ευθεία AB , η εικόνα του Γ' θα ανήκει στο ομοιόθετο της AB , δηλαδή σε ευθεία $A'B' \parallel AB$. Έτσι τα A', B', Γ' ανήκουν σε μια ευθεία.



Σχ. 35

- Η κορυφή A τριγώνου $AB\Gamma$ γράφει ένα κύκλο (K, R) προς το επίπεδο του οποίου η πλευρά AB είναι κάθετη και έχει σταθερό μήκος, ενώ η πλευρά $A\Gamma$ έχει σταθερό μήκος και σταθερή διεύθυνση. Εξετάστε αν:

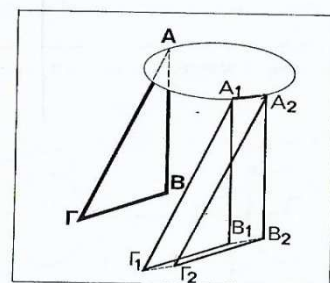
α) Το $AB\Gamma$ μετακινείται παράλληλα προς το εαυτό του.

β) Δύο θέσεις του, $A_1B_1\Gamma_1$ και $A_2B_2\Gamma_2$ μπορεί να θεωρηθούν αντίστοιχες σε μεταφορά.

γ) Η $B\Gamma$ έχει ορισμένο μήκος.

Λύση: **α)** Αν $A_1B_1\Gamma_1$ είναι μία οποιαδήποτε άλλη θέση του $AB\Gamma$,

τότε έχουμε $AB \parallel A_1B_1$ και $A\Gamma \parallel A_1\Gamma_1$, δηλαδή το επίπεδο του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ είναι παράλληλο προς το επίπεδο του $AB\Gamma$. Άρα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ κινείται παράλληλα προς τον εαυτό του.



Σχ. 36

β) Αν $A_1B_1\Gamma_1$ και $A_2B_2\Gamma_2$ είναι δύο θέσεις του τριγώνου $AB\Gamma$ έχω $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (διότι και οι δύο είναι παράλληλες και ίσες προς την AB) και $A_1\Gamma_1 \parallel A_2\Gamma_2$ (διότι και οι δύο είναι παράλληλες και ίσες προς την $A\Gamma$). Έτσι, τα σχήματα $A_1B_1B_2A_2$ και $A_1\Gamma_1\Gamma_2A_2$ είναι παραλληλόγραμμα άρα $\Gamma_1\Gamma_2 = A_1A_2 = B_1B_2$. Λέμε ότι το $A_2B_2\Gamma_2$ είναι εικόνα του $A_1B_1\Gamma_1$ σε μια μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_2}$.

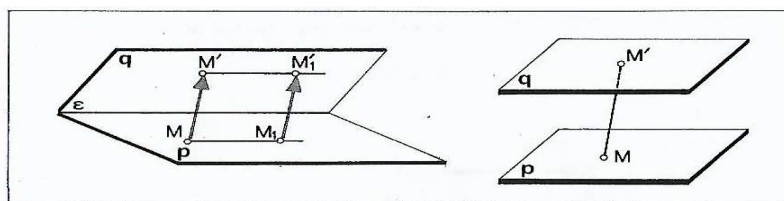
γ) Αρκεί να δείξω ότι σε μια οποιαδήποτε άλλη θέση του $AB\Gamma$, π.χ. την $A_1B_1\Gamma_1$ έχω $B_1\Gamma_1 \parallel B\Gamma$. Αλλά το κάθε τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ μπορεί να θεωρηθεί ως εικόνα του $AB\Gamma$ σε μια μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{AA_1}$ και σε κάθε μεταφορά όπως ξέρω το τμήμα $B\Gamma$ παραμένει παράλληλο και ίσο προς τον εαυτό του.

• Δίνονται δύο επίπεδα p, q , ένα σημείο M του p και ένα σημείο M' του q . Βρείτε τι σχήματα γράφουν τα σημεία M, M' όταν κινούνται στα επίπεδα τους έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{MM'}$ να είναι ίσο με δεδομένο διάνυσμα $\vec{a}$.

Λύση: Αν M_1, M'_1 είναι οποιεσδήποτε άλλες θέσεις των M, M' αντιστοίχως έχω πάντα $\overrightarrow{MM'} \parallel \overrightarrow{M_1M'_1}$ (αφού $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M_1M'_1} = \vec{a}$) άρα το $MM_1M'_1M'$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M'M'_1}$. Έτσι το $\overrightarrow{M_1M'_1}$ μπορεί να θεωρηθεί εικόνα του $\overrightarrow{MM'}$ σε μια μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{MM_1}$.

Παρατηρώ ότι:

α) Όταν τα q, p τέμνονται (σχ.α), οι παράλληλες ευθείες $MM_1, M'M'_1$ θα είναι παράλληλες



Σχ. 37

και προς το την τομή ε των δύο επιπέδων (αφού τα επίπεδα διέρχονται απ' αυτές). Έτσι τα διανύσματα μεταφοράς, έχει πάντα την ίδια διεύθυνση (παράλληλο προς την ορισμένη ευθεία ε) άρα τα M, M' θα γράφουν ευθείες παράλληλες προς την ε .

β) Όταν τα p, q είναι παράλληλα (σχ.β) το διάνυσμα μεταφοράς $\overrightarrow{MM_1}$ μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση, άρα το M μπορεί να γράψει οποιαδήποτε γραμμή του επιπέδου p (οπότε το M θα γράφει μια αντίστοιχη γραμμή στο q).

2. Πίνακες και μετασχηματισμοί

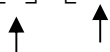
Έστω σημείο $M(1,2)$ και πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Αν γράψω τις

συντεταγμένες του M στη μορφή πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, τότε το

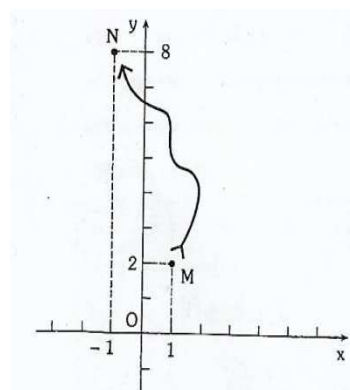
γινόμενο $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι ένας πίνακας στήλη που μπορώ να

θεωρήσω πως παριστάνει τις συντεταγμένες ενός άλλου

σημείου N , δηλαδή $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$.



Συντεταγμένες του M Συντεταγμένες του N



Βλέπω ότι χρησιμοποιώντας τον πίνακα A μπορώ να αντιστοιχίσω ένα μόνο σημείο N. Το ίδιο μπορώ να κάνω και για οποιοδήποτε άλλο σημείο M. Έτσι το σημείο $M(x, y)$ αντιστοιχίζεται χρησιμοποιώντας τον πίνακα A σε ένα μόνο σημείο $N(x', y')$ μέσω της σχέσης $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Αν γνωρίζω το σημείο (x, y) τότε μπορώ να βρω το σημείο (x', y') .

- Αν $M(2, -3)$ τότε οι συντεταγμένες του N είναι $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ δηλαδή $N(5, -5)$.

Γενικά μέσω της σχέσης $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ κάθε σημείο $M(x, y)$ αντιστοιχίζεται ένα μόνο σημείο $N(x', y')$. Ονομάζω την αντιστοιχία αυτή **γραμμικό μετασχηματισμό** και τον πίνακα $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ του γραμμικού μετασχηματισμού. Το σημείο M ονομάζεται **πρότυπο** ή **αρχέτυπο** ενώ το σημείο N ονομάζεται **εικόνα** του M. Είναι φανερό ότι η σχέση που καθορίζει την εικόνα όταν είναι γνωστό το πρότυπο γράφεται $x' = \alpha x + \beta y$, $y' = \gamma x + \delta y$.

- Βρείτε τις εικόνες των σημείων $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ μέσω γραμμικού μετασχηματισμού με τον πίνακα $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Έστω $A'(x_1, y_1)$, $B'(x_2, y_2)$ οι εικόνες των A, B αντίστοιχα. Τότε $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}$ άρα τα A' , B' έχουν συντεταγμένες $A'(\alpha, \gamma)$, $B'(\beta, \delta)$.

Παρατήρηση. Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει ότι η 1^η στήλη του πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού δείχνει τις συντεταγμένες της εικόνας του $A(1, 0)$ ενώ η 2^η στήλη δείχνει τις συντεταγμένες της εικόνας του $B(0, 1)$. Δηλαδή σχηματικά έχω

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{εικόνα του } A(1, 0) \quad \text{εικόνα του } B(0, 1) \end{array}$$

Άρα, αν γνωρίζω τις εικόνες των σημείων $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού τότε μπορώ να γράψω τον πίνακα του μετασχηματισμού αυτού.

- Βρείτε την εικόνα του σημείου A (2,3) και το πρότυπο του σημείου B' (1,4) μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού με πίνακα $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Έστω $A'(x', y')$ η εικόνα του A. Τότε

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 22 \end{bmatrix}, \text{ δηλαδή η εικόνα του A είναι σημείο του } A'(17, 22). \text{ Έστω B(x, y)}$$

το πρότυπο του σημείου B'. Τότε $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος

και έχει αντίστροφο τον $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τα δύο μέλη της

τελευταίας σχέσης με τον αντίστροφο προκύπτει:

$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Άρα, πρότυπο του B' είναι το B (-8,11).

• Δείξτε ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ απεικονίζει τα σημεία του επιπέδου σε σημεία της ευθείας $y = x$. Έστω A (x, y) τυχαίο σημείο του επιπέδου. Τότε από την εικόνα του A' (x', y') ισχύει $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix}$. Δηλαδή $x' = x + y$, $y' = x + y$. Άρα, για τις συντεταγμένες του A' ισχύει $y' = x'$, δηλαδή το A' ανήκει στην ευθεία $y = x$ όποιο και αν είναι το πρότυπο. Άρα, ο γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ απεικονίζει όλα τα σημεία του επιπέδου σε σημεία της ευθείας $y = x$.

• Βρείτε τις εικόνες των σημείων $M_1(3,1)$, $M_2(3,3)$, $M_3(6,3)$, $M_4(6,1)$ μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού με πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Σχεδιάστε γραφική παράσταση και

περιγράψτε το αποτέλεσμα του γραμμικού μετασχηματισμού.

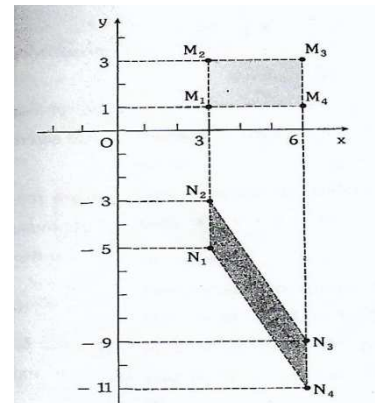
Έστω $N_1(x_1, y_1)$, $N_2(x_2, y_2)$, $N_3(x_3, y_3)$, $N_4(x_4, y_4)$ οι εικόνες των M_1 , M_2 , M_3 , M_4 αντίστοιχα. Είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -11 \end{bmatrix}. \text{ Δηλαδή } N_1$$

(3,-5), $N_2(3,-3)$, $N_3(6,-9)$, $N_4(6,-11)$. Αυτός ο γραμμικός μετασχηματισμός μετατοπίζει και παραμορφώνει το ορθογώνιο $M_1M_2M_3M_4$ μετατρέποντάς το στο παραλληλόγραμμο $N_1N_2N_3N_4$. Όλοι οι γραμμικοί μετασχηματισμοί έχουν ως

αποτέλεσμα παρόμοιες μετατοπίσεις και παραμορφώσεις σχημάτων του επιπέδου. Αποδεικνύεται πως αν ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού αντιστρέφεται, τότε μέσω του μετασχηματισμού αυτού κάθε ευθεία αντιστοιχίζεται σε ευθεία, κάθε ευθύγραμμο τμήμα αντιστοιχίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τις εικόνες των άκρων και κάθε πολύγωνο αντιστοιχίζεται σε πολύγωνο με κορυφές τις εικόνες των κορυφών.



• Βρείτε την εικόνα της ευθείας $\varepsilon: y = x - 5$ μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού με πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$ άρα αντιστρέφεται.

Άρα, η εικόνα της ευθείας είναι ευθεία. Για να την προσδιορίσω μπορώ να εργαστώ με δύο τρόπους.

Α' τρόπος. Έστω (x, y) τυχαίο σημείο της ευθείας ε και (x', y') η εικόνα του. Τότε

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Παρατηρώ ότι ο πίνακας } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ έχει αντίστροφο τον } \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και τα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης με τον αντίστροφο προκύπτει:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2x' + y' \\ x' + 2y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{2x'}{3} + \frac{y'}{3} \quad \& \quad y = \frac{x'}{3} + \frac{2y'}{3}$$

Όμως ξέρω ότι οι συντεταγμένες του (x, y) ικανοποιούν την εξίσωση $y = x - 5$, άρα

$$y = x - 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - 5 \Leftrightarrow x' + 2y' = 2x' + y' - 15 \Leftrightarrow y' = x' - 15 \quad \text{δηλαδή}$$

το σημείο (x', y') ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 5$. Άρα, η εικόνα της ευθείας (ε) : $y = x - 5$ είναι η ευθεία (ε') : $y = x - 15$.

Β' τρόπος. Θεωρώ δύο τυχαία σημεία A, B της ε , π.χ. τα A(0, -5), B(1, -4), τότε η εικόνα της ευθείας ε είναι η ευθεία A'B', όπου A'B' είναι οι εικόνες των A, B αντίστοιχα. Προσδιορίζω τώρα τα A', B'. Αν A'(x₁, y₁), B'(x₂, y₂) τότε:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \end{bmatrix}. \text{ Δηλαδή } A'(5, -10), B'(6, -9). \text{ Ο}$$

συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας A'B' είναι: $\frac{-9 - (-10)}{6 - 5} = \frac{1}{1} = 1$ και συνεπώς η εξίσωση

της ευθείας A'B' είναι η $y - (-10) = x - 5 \Leftrightarrow y = x - 15$. Άρα, η εικόνα της ευθείας (ε) : $y = x - 5$ είναι η ευθεία (ε') : $y = x - 15$. Γενικά αν ξέρω την εξίσωση μιας γραμμής c τότε για να βρω την εικόνα της c' μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού εφαρμόζω τα εξής βήματα:

➤ Εκφράζω τις συντεταγμένες (x, y) του τυχαίου σημείου της c συναρτήσει των συντεταγμένων της εικόνας (x', y') .

➤ Αντικαθιστώ τα x, y στην εξίσωση της c με τις εκφράσεις που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα. Προκύπτει έτσι μια εξίσωση που περιέχει μόνο x', y' . Αυτή είναι η εξίσωση της c' . Συχνά στο πρώτο από τα παραπάνω βήματα διευκολύνει η χρήση του αντίστροφου (εφόσον υπάρχει) του πίνακα γραμμικού μετασχηματισμού.

• **Βρείτε την εικόνα του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού με**

πίνακα $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$. Έστω (x_1, y_1) η εικόνα του σημείου (x, y) . Θα εκφράσω τις συντεταγμένες

x, y του προτύπου συναρτήσει των συντεταγμένων x_1, y_1 της εικόνας. Είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ 9y \end{bmatrix} \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{cases} x_1 = 4x \\ y_1 = 9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1}{4} \\ y = \frac{y_1}{9} \end{cases}. \text{ Όμως οι συντεταγμένες } x, y \text{ του}$$

προτύπου ικανοποιούν την $x^2 + y^2 = 1$. Άρα $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{81} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{81} = 1$ δηλαδή

η εικόνα (x_1, y_1) του (x, y) ανήκει στην έλλειψη $\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{81} = 1$. Άρα, ισχύει και το

αντίστροφο, δηλαδή αν το σημείο (x_1, y_1) ανήκει στην έλλειψη $\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{81} = 1$ τότε το σημείο (x, y) ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$. Άρα, η εικόνα του $x^2 + y^2 = 1$ είναι η $\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{81} = 1$.

• Βρείτε γραμμικό μετασχηματισμό ώστε οι εικόνες των σημείων $A(2, 3)$, $B(-1, 1)$ να είναι τα σημεία $A'(13, -5)$, $B'(1, 5)$. Έστω $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ο πίνακας του γραμμικού

μετασχηματισμού. Τότε

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 13 \\ 2\gamma + 3\delta = -5 \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 1 \\ -\gamma + \delta = 5 \end{cases}$$

Από $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 13 \\ -\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2\gamma + 3\delta = -5 \\ -\gamma + \delta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -4 \\ \delta = 1 \end{cases}$. Άρα, ο πίνακας του

γραμμικού μετασχηματισμού είναι ο $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

• Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Βρείτε τα α, β ώστε η ευθεία $y = \beta x + \alpha$ να έχει εικόνα τον εαυτό της μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού.

Έστω $y = \beta x + \alpha$ ευθεία που έχει ως εικόνα τον εαυτό της. Η εικόνα (x', y') του τυχαίου σημείου (x, y) της ευθείας αυτής είναι $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x \end{bmatrix}$ δηλαδή $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x \end{cases}$

άρα $x = \frac{y'}{3}, y = x' - \frac{2y'}{3}$. Όμως το σημείο (x, y) ανήκει στην ευθεία $y = \beta x + \alpha$ άρα,

$$y = \beta x + \alpha \Leftrightarrow x' - \frac{2y'}{3} = \beta \frac{y'}{3} + \alpha \Leftrightarrow \frac{\beta + 2}{3} y' = x' - \alpha.$$

➤ Αν $\beta = -2$ τότε $x' - \alpha = 0 \Leftrightarrow x' = \alpha$, άρα η εικόνα της $y = \beta x + \alpha$ είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = \alpha$. Άρα, η ευθεία $y = \beta x + \alpha$ δεν έχει εικόνα τον εαυτό της.

➤ Αν $\beta \neq -2$ τότε $y' = \frac{3x'}{\beta + 2} - \frac{3\alpha}{\beta + 2}$ δηλαδή η εικόνα της $y = \beta x + \alpha$ είναι η $y = \frac{3x}{\beta + 2} - \frac{3\alpha}{\beta + 2}$. Όμως η ευθεία $y = \beta x + \alpha$ έχει εικόνα τον εαυτό της άρα οι ευθείες $y = \beta x + \alpha, y = \frac{3x}{\beta + 2} - \frac{3\alpha}{\beta + 2}$ ταυτίζονται. Άρα, $\beta = \frac{3}{\beta + 2}, \alpha = \frac{-3\alpha}{\beta + 2}$ άρα $\beta = 1, \alpha = 0$ ή $\beta = -3, \alpha = 0$ άρα, οι ευθείες που έχουν εικόνα τον εαυτό τους είναι οι $y = x, y = -3x$.

3. Ισομετρίες

Ένας 2×1 πίνακας (πίνακας – στήλη) παριστάνει ένα σημείο στο επίπεδο. Π.χ. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ παριστάνει το σημείο $A(1, 2)$. Όμοια ένας πίνακας με 3 στήλες παριστάνει ένα τρίγωνο

στο επίπεδο. Π.χ. ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ παριστάνει το τρίγωνο με κορυφές A (1, 2), B (0, 3),

γ (-1, 1). Ομοίως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πίνακες 2×4 για να παραστήσουμε τετράπλευρα και γενικότερα πίνακες $2 \times n$ για να παραστήσουμε πολύγωνα με n πλευρές. Δηλαδή για να βρω την εικόνα ενός τριγώνου πολλαπλασιάζουμε τον αντίστοιχο πίνακα με τον πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού. Το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε πολύγωνα.

• Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

α) Βρείτε την εικόνα A'B' του ευθύγραμμου τμήματος AB με A (2, 3), B (-1, 4). Τι παρατηρείτε σχετικά με τα μήκη του προτύπου AB και της εικόνας A'B';

β) Βρείτε την εικόνα M'N' του ευθύγραμμου τμήματος MN με M (x₁, y₁), N (x₂, y₂). Τι παρατηρείτε σχετικά με τα μήκη του προτύπου MN και της εικόνας M'N';

Ξέρω ότι η εικόνα του τριγώνου $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού με

πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ είναι επίσης τρίγωνο, αφού ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Άρα,

η εικόνα αυτή μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα 2×3 ο οποίος προκύπτει ως εξής:

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 7 & 6 & -1 \end{bmatrix}$. Ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ άρα είναι

αντιστρέψιμος, οπότε η εικόνα κάθε ευθύγραμμου τμήματος μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού είναι επίσης ευθύγραμμο τμήμα.

α) Παριστάνω το ευθύγραμμο τμήμα AB με τον πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ του οποίου κάθε στήλη

σηματίζεται από τις συντεταγμένες ενός άκρου του τμήματος. Για να βρω την εικόνα του AB πολλαπλασιάζω τον πίνακα αυτό με τον πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού. Είναι:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ δηλαδή η εικόνα του τμήματος AB είναι το τμήμα A'B' με

A'(2, -3), B'(-1, -4). Είναι $\left\{ \begin{array}{l} AB = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{10} \\ A'B' = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - (-4))^2} = \sqrt{10} \end{array} \right\}$ δηλαδή $AB = A'B'$.

β) Για να βρω την εικόνα MN πολλαπλασιάζω το πίνακα $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ με τον πίνακα του

γραμμικού μετασχηματισμού. Είναι: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -y_1 & -y_2 \end{bmatrix}$ δηλαδή η εικόνα του

τμήματος MN είναι το τμήμα M'N' με M'(x₁, -y₁) N'(x₂, -y₂).

Είναι $\left\{ \begin{array}{l} MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ M'N' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + ((-y_1) - (-y_2))^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{array} \right\}$ δηλαδή $MN = M'N'$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνω ότι η εικόνα κάθε ευθύγραμμου τμήματος έχει μήκος ίσο με το μήκος του προτύπου της, δηλαδή ότι ο συγκεκριμένος γραμμικός μετασχηματισμός διατηρεί τις αποστάσεις. Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός που διατηρεί τις αποστάσεις ονομάζεται **ισομετρία**.

- Εξετάστε αν ο γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ισομετρία.

Παρατηρώ ότι η εικόνα του $O(0, 0)$ είναι ο εαυτός του ενώ η εικόνα του $A(1, 0)$ είναι το $A'(1, -1)$. Άρα, η εικόνα του ευθύγραμμου τμήματος OA είναι το ευθύγραμμο τμήμα OA' και $OA = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2} = 1$, $OA' = \sqrt{(0-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}$ δηλαδή $OA \neq OA'$. Άρα, ο γραμμικός μετασχηματισμός δεν είναι ισομετρία.

4. Διαδοχικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί

- Έστω οι γραμμικοί μετασχηματισμοί T_1, T_2 με πίνακες $M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

αντίστοιχα και το σημείο $A(x, y)$. α) Ποια είναι η εικόνα A' του A μέσω του T_1 ;

β) Ποια είναι η εικόνα του A'' του A' μέσω του T_2 ;

γ) Ποιός είναι ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού με πρότυπο A και εικόνα A'' ;

α) Έστω $A'(x', y')$. Τότε $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ δηλαδή $x' = 3x + 2y$, $y' = x - y$

β) Έστω $A''(x'', y'')$. Τότε $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ δηλαδή $x'' = x' + 4y'$, $y'' = 2x'$

γ) Είναι $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ δηλαδή ο πίνακας του

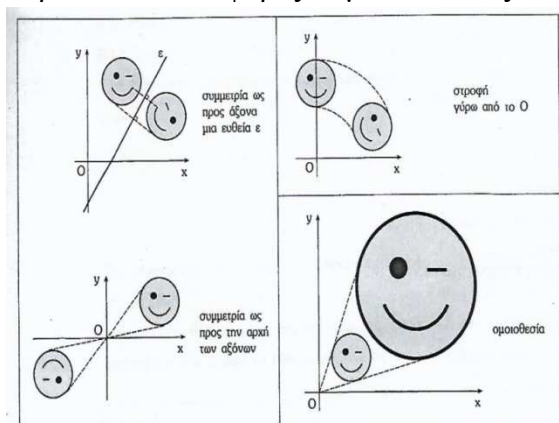
γραμμικού μετασχηματισμού με πρότυπο A και εικόνα A'' είναι ο $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = M_2 M_1$. Από το

παράδειγμα αυτό συμπεραίνω ότι αν T_1, T_2 είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί με πίνακες M_1, M_2 αντίστοιχα, τότε η διαδοχική εφαρμογή των T_1, T_2 (με αυτή τη σειρά) έχει ως αποτέλεσμα γραμμικό μετασχηματισμό με πίνακα $M_1 \cdot M_2$. Συχνά συμβολίζω το μετασχηματισμό αυτό $T_2 \cdot T_1$ (εννοώντας ότι πρώτα εφαρμόζεται ο T_1 και μετά ο T_2). Έτσι, ο πίνακας του $T_2 \cdot T_1$ είναι ο $M_2 M_1$ ενώ ο πίνακας του $T_1 \cdot T_2$ είναι ο $M_1 M_2$. Παρατηρείστε ότι παίζει ρόλο η σειρά εφαρμογής των δύο γραμμικών μετασχηματισμών T_1, T_2 αφού οι πίνακες $M_1 M_2$ και $M_2 M_1$ γενικά δεν είναι ίσοι.

5. Βασικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός παραμορφώνει στα σχήματα του επιπέδου. Οι πιο σημαντικές απ' αυτές περιγράφονται σχηματικά στο διπλανό διάγραμμα. Καθένας από αυτούς τους γραμμικούς μετασχηματισμούς έχει το δικό του πίνακα γραμμικού μετασχηματισμού και για να τον προσδιορίσω λαμβάνω υπόψη ότι η πρώτη στήλη του είναι η εικόνα του σημείου $A(1, 0)$ ενώ η δεύτερη στήλη του είναι η εικόνα του σημείου $B(0, 1)$. Στη συνέχεια παρουσιάζω τους πίνακες μερικών βασικών γραμμικών μετασχηματισμών.

προκαλεί διάφορες μετατοπίσεις ή



6. Συμμετρία ως προς τον άξονα xx'

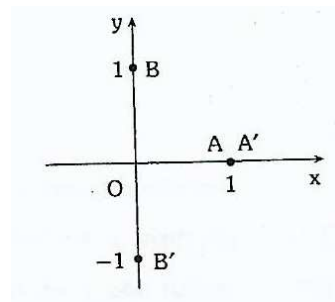
Έστω T_1 γραμμικός μετασχηματισμός της συμμετρίας ως προς τον άξονα $x'x$. Προφανώς το συμμετρικό του $A(1, 0)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το ίδιο το A , ενώ το συμμετρικό του $B(0, 1)$ είναι το $B'(0, -1)$. Άρα ο πίνακας

του γραμμικού μετασχηματισμού T_1 είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

εικόνα του A εικόνα του B

Τον πίνακα αυτό μπορώ να τον προσδιορίσω και ως εξής: Ξέρω ότι δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ έχουν ίδιο x και αντίθετο y . Άρα, αν $M'(x', y')$ είναι συμμετρικό του $M(x, y)$ ως προς τον άξονα $x'x$ τότε

$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ άρα ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού.



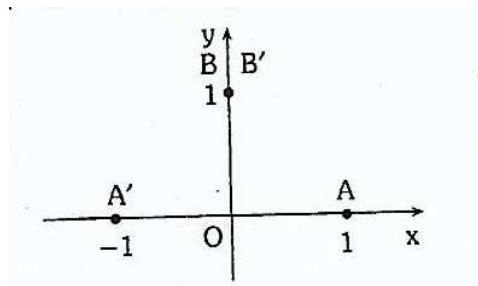
7. Συμμετρία ως προς τον άξονα yy'

Έστω T_2 ο γραμμικός μετασχηματισμός της συμμετρίας ως προς τον yy' . Το συμμετρικό του $A(1, 0)$ ως προς τον yy' είναι το $A'(-1, 0)$, ενώ το συμμετρικό του $B(0, 1)$ είναι το ίδιο το B . Άρα ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού είναι ο

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

εικόνα του A εικόνα του B

Σημεία συμμετρικά ως προς τον yy' έχουν αντίθετα x και ίδιο y .



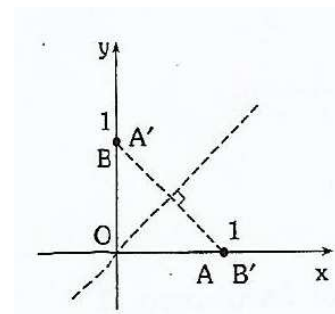
8. Συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$

Έστω T_3 ο γραμμικός μετασχηματισμός της συμμετρίας ως προς την ευθεία $y=x$. Βλέπω ότι τα σημεία $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$, δηλαδή η εικόνα του A είναι το B και η εικόνα του B είναι το A . Άρα, ο πίνακας του

γραμμικού μετασχηματισμού T_3 είναι ο $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

εικόνα του A εικόνα του B

Αν δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$ τότε το x καθενός απ' τα δύο σημεία είναι ίσο με το y του άλλου.



• Δίνεται το τετράπλευρο $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. Εφαρμόζοντας κατάλληλο γραμμικό

μετασχηματισμό προσδιορίστε το συμμετρικό του τετραπλεύρου ως προς

α) τον άξονα xx' β) τον άξονα yy' γ) την ευθεία $y=x$.

α) Ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού της συμμετρίας ως προς τον xx' είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Άρα, συμμετρικό του τετραπλεύρου ως προς τον xx' είναι το

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

β) Ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού της συμμετρίας ως προς τον άξονα yy' είναι ο $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα το συμμετρικό του τετραπλεύρου ως προς τον άξονα yy' είναι το

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

γ) Ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού της συμμετρίας ως προς την ευθεία $y = x$ είναι ο $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Άρα το συμμετρικό του τετραπλεύρου ως προς την ευθεία $y = x$ είναι

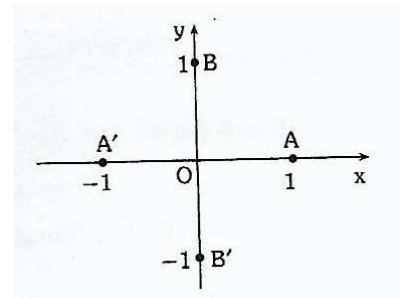
$$\text{το } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

9. Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων

Έστω T_4 ο γραμμικός μετασχηματισμός της συμμετρίας ως προς την αρχή των αξόνων. Το συμμετρικό του A (1, 0) ως προς την αρχή των αξόνων είναι το A' (-1, 0), ενώ το συμμετρικό του B (0, 1) είναι το B' (0, -1). Άρα, ο πίνακας

του γραμμικού μετασχηματισμού T_4 είναι ο $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

εικόνα του A εικόνα του B



• Θεωρώ τους γραμμικούς μετασχηματισμούς T_1 : συμμετρία ως προς τον άξονα xx' , T_2 : συμμετρία ως προς τον άξονα yy' . Προσδιορίστε τους πίνακες των γραμμικών μετασχηματισμών $T_1 \circ T_2$, $T_2 \circ T_1$. Τι παρατηρείτε; Πως ερμηνεύετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα αυτό;

Ξέρω ότι οι πίνακες T_1 , T_2 είναι οι

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ αντίστοιχα. Άρα,}$$

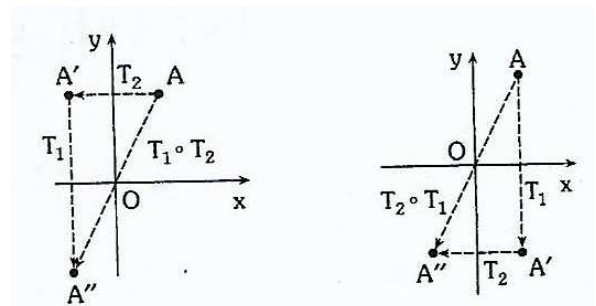
ο πίνακας του $T_1 \circ T_2$ είναι ο

$$M_1 M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ενώ ο}$$

πίνακας του $T_2 \circ T_1$ είναι ο

$$M_2 M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Παρατηρώ ότι οι μετασχηματισμοί } T_1 \circ T_2, T_2 \circ T_1$$

ταυτίζονται και οι δύο με τη συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων (που έχει πίνακα $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$).



10. Στροφή με κέντρο O (0,0)

Τα σημεία A (1, 0), B (0, 1) ανήκουν σε κύκλο με κέντρο O (0, 0) και ακτίνα 1. Κάθε σημείο του κύκλου αυτού έχει συντεταγμένες της μορφής $x = \sin\theta$, $y = \eta\mu\theta$. Π.χ. είναι $A (1, 0) = (\sin 0, \eta\mu 0)$, $B (0, 1) = (\sin \frac{\pi}{2}, \eta\mu \frac{\pi}{2})$. Θεωρώ το γραμμικό μετασχηματισμό

T_5 αφού A, B κατά γωνία θ (κατά τη θετική φορά) γύρω απ' το O. Προφανώς η εικόνα του A ($\sin 0, \eta\mu 0$) είναι το σημείο A ($\sin(0+\theta), \eta\mu(0+\theta)$) = ($\sin\theta, \eta\mu\theta$)

Ενώ η εικόνα του B ($\sin \frac{\pi}{2}, \eta\mu \frac{\pi}{2}$) είναι το σημείο

$B \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right), \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right) = (-\eta\mu\theta, \sin\theta)$. Άρα, ο πίνακας του γραμμικού

μετασχηματισμού T_5 είναι ο $\begin{bmatrix} \sin\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$.

$\uparrow$ εικόνα του A $\uparrow$ εικόνα του B

• α) Γράψτε τον πίνακα της στροφής κατά γωνία $\pi/4$ με κέντρο το O.

β) Βρείτε την εικόνα της ευθείας $x = 1$ μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού και να παραστήσετε γραφικά το αποτέλεσμα.

α) Ο πίνακας της στροφής κατά γωνία θ είναι $\begin{bmatrix} \sin\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$. Άρα, αν $\theta = \frac{\pi}{4}$ τότε ο πίνακας

γίνεται:

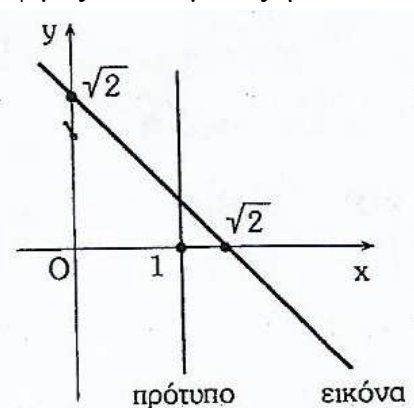
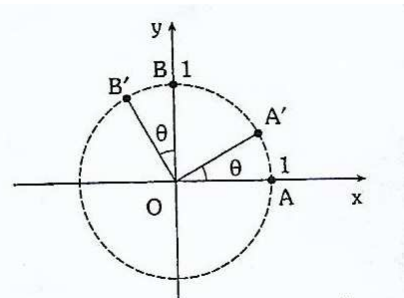
$$\begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{4} & -\eta\mu \frac{\pi}{4} \\ \eta\mu \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

β) Ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού είναι αντιστρέψιμος και επομένως η εικόνα της ευθείας $x = 1$ είναι ευθεία. Έστω A (1, y) τυχαίο σημείο της ευθείας $x = 1$ και B (x' , y') η εικόνα του. Τότε

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \text{ δηλαδή } \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} y = x' \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} y = y' \end{cases}.$$

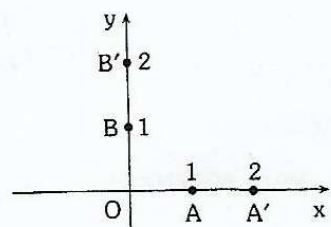
Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις αυτές βρίσκω

$\sqrt{2} = x' + y' \Leftrightarrow y' = -x' + \sqrt{2}$, δηλαδή η εικόνα της ευθείας $x = 1$ είναι η ευθεία $y = -x + \sqrt{2}$



11. Ομοιοθεσία

Θεωρώ το γραμμικό μετασχηματισμό με τον οποίο διπλασιάζονται οι συντεταγμένες κάθε σημείου. Η εικόνα του σημείου A (1, 0) μέσω του μετασχηματισμού αυτού



είναι το σημείο $A'(2, 0)$ ενώ η εικόνα του $B(0, 1)$ είναι το σημείο $B'(0, 2)$. Άρα ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού είναι ο $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

↑ ↑
εικόνα του A εικόνα του B

Ο μετασχηματισμός αυτός ονομάζεται **ομοιοθεσία με λόγο 2**. Τα μήκη OA' , OB' , $A'B'$ είναι διπλάσια του OA , OB , AB αντίστοιχα, δηλαδή η ομοιοθεσία με λόγο 2 διπλασιάζει τα μήκη.

Όμοια ορίζεται η **ομοιοθεσία με λόγο λ** ($\lambda \neq 0$) η οποία έχει πίνακα $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, άρα η

ομοιοθεσία με λόγο $\lambda = 1$ έχει πίνακα τον μοναδιαίο $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και απεικονίζει κάθε σημείο

του επιπέδου στον εαυτό του. Στην περίπτωση αυτή ο γραμμικός μετασχηματισμός ονομάζεται **ταυτοτικός**.

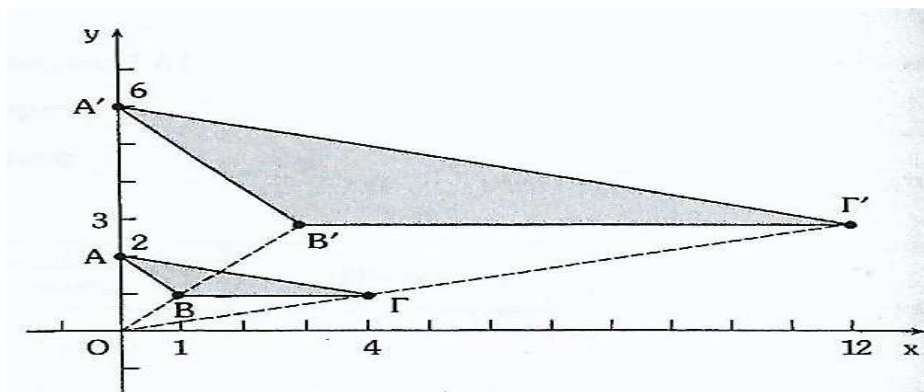
- Δίνεται το τρίγωνο $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Βρείτε την εικόνα του μέσω της ομοιοθεσίας με λόγο α) 3,

β) -2. Παραστήστε γραφικά τα πρότυπα και τις εικόνες.

α) Η ομοιοθεσία με λόγο 3 έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας αυτός είναι αντιστρέψιμος

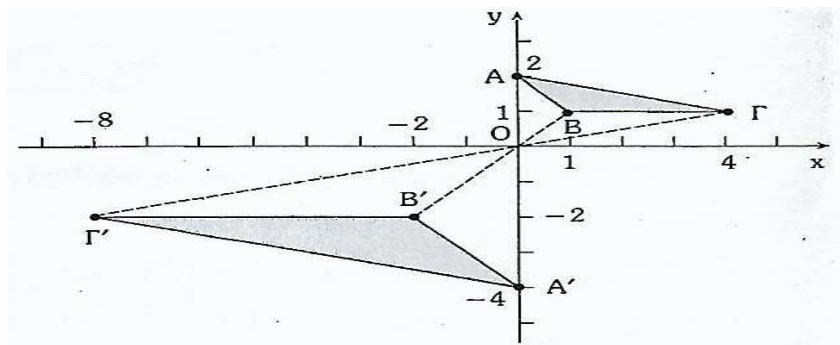
άρα η εικόνα του τριγώνου είναι το τρίγωνο $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 12 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. Η εικόνα του

$A'B'G'$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι τρίγωνο όμοιο με το $AB\Gamma$ με λόγο ομοιότητας $\lambda = 3$.



β) Η ομοιοθεσία με λόγο -2 έχει πίνακα $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος,

άρα η εικόνα του τριγώνου είναι το τρίγωνο $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -8 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.



Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνω ότι η εικόνα ενός πολυγώνου μέσω της ομοιοθεσίας με λόγο λ , είναι πολύγωνο όμοιο προς το αρχικό με λόγο ομοιότητας $|\lambda|$. Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζω τους βασικούς γραμμικούς μετασχηματισμούς. Όλοι αυτοί μετασχηματισμοί εκτός από την ομοιοθεσία είναι ισομετρίες.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ					
Ονομασία μετασχηματισμού	Γεωμετρική παράσταση	Πίνακας	Ονομασία μετασχηματισμού	Γεωμετρική παράσταση	Πίνακας
Συμμετρία ως προς τον άξονα x'		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Στροφή γύρω από το O κατά γωνία θ		$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	Ομοιοθεσία με λόγο λ		$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

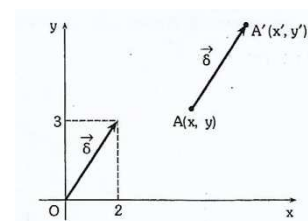
12. Μη γραμμικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Οι παραπάνω γραμμικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί αποτελούν μια ειδική περίπτωση γεωμετρικών μετασχηματισμών. Γενικά λέμε ότι **γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι κάθε διαδικασία με την οποία σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχίζεται μόνο ένα σημείο του επιπέδου**. Έστω διαδικασία με την οποία σε κάθε σημείο (x, y) του επιπέδου αντιστοιχίζεται το σημείο (x', y') είναι γεωμετρικός μετασχηματισμός, αλλά όχι γραμμικός αφού το πρότυπο και η εικόνα δεν είναι δυνατό να συνδεθούν με μια σχέση της μορφής $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

• Δίνεται ο μετασχηματισμός T: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

α) Είναι ο μετασχηματισμός αυτός γραμμικός;

β) Αν $A'(x', y')$ είναι η εικόνα του σημείου A (x, y) μέσω του



μετασχηματισμού T τότε να δείξετε ότι $\overline{AA'} = (2, 3)$. Στη συνέχεια περιγράψτε γεωμετρικά πια επίδραση έχει η εφαρμογή του μετασχηματισμού T .

α) Ο μετασχηματισμός T δεν είναι γραμμικός αφού δεν περιγράφεται από τη σχέση της μορφής $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

β) Είναι

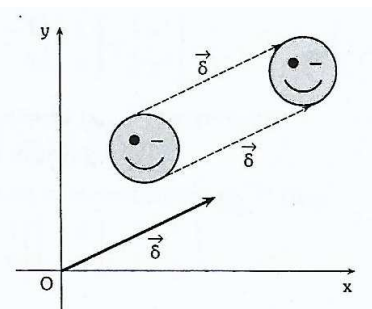
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 \\ y+3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 2 \\ y' - y = 3 \end{cases}$$

Επειδή $A(x, y)$, $A'(x', y')$ συμπεραίνω ότι $\overline{AA'} = (x' - x, y' - y)$.

Όμως $x' - x = 2$, $y' - y = 3$ άρα, $\overline{AA'} = (2, 3)$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός T μετατοπίζει κάθε σημείο A παράλληλα προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (2, 3)$ και κατά διάστημα ίσο με το μέτρο του $\vec{\delta}$. Γενικά, ο μη γραμμικός μετασχηματισμός

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$
 μετατοπίζει κάθε σημείο $A(x, y)$

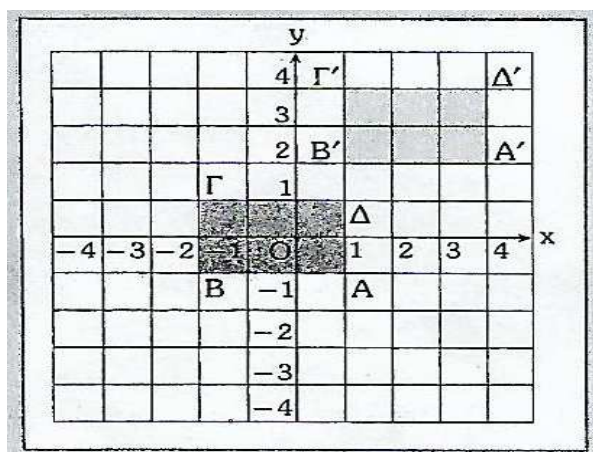
παράλληλα προς το $\vec{\delta}(\delta_1, \delta_2)$ άρα, διάστημα ίσο με το μέτρο του $\vec{\delta}$. Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται **παράλληλη μεταφορά**.



• Βρείτε το γεωμετρικό μετασχηματισμό T μέσω του οποίου η εικόνα του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$.

Παρατηρώ ότι το $A'B'\Gamma'\Delta'$ προκύπτει από τη μετατόπιση του $AB\Gamma\Delta$ παράλληλα προς το $\vec{\delta} = \overline{AA'} = (4 - 1, 2 - (-1)) = (3, 3)$ κατά διάστημα ίσο με $|\overline{AA'}|$. Άρα, ο μετασχηματισμός T

είναι η παράλληλη μεταφορά $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.



Βιβλιογραφία

- Κούτρας, Μ. et al. (2010). «Μαθηματικά πλοιάρχων & μηχανικών», Αθήνα: Ίδρυμα Ευγενίδου.
- Παυλόπουλος, Θ. (1999). «Άλγεβρα γ' λυκείου θετικής κατεύθυνσης», Αθήνα: Μαντάς.