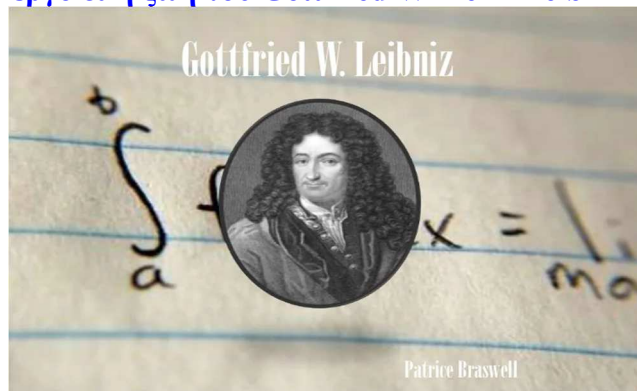




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπρούργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Το έργο & η ζωή του Gottfried Wilhelm Leibniz



Σπουδαστής: Βοϊδής Παναγιώτης Ταξιάρχης (AM 9140)
Καλαντζής Αριστείδης (AM 8636)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

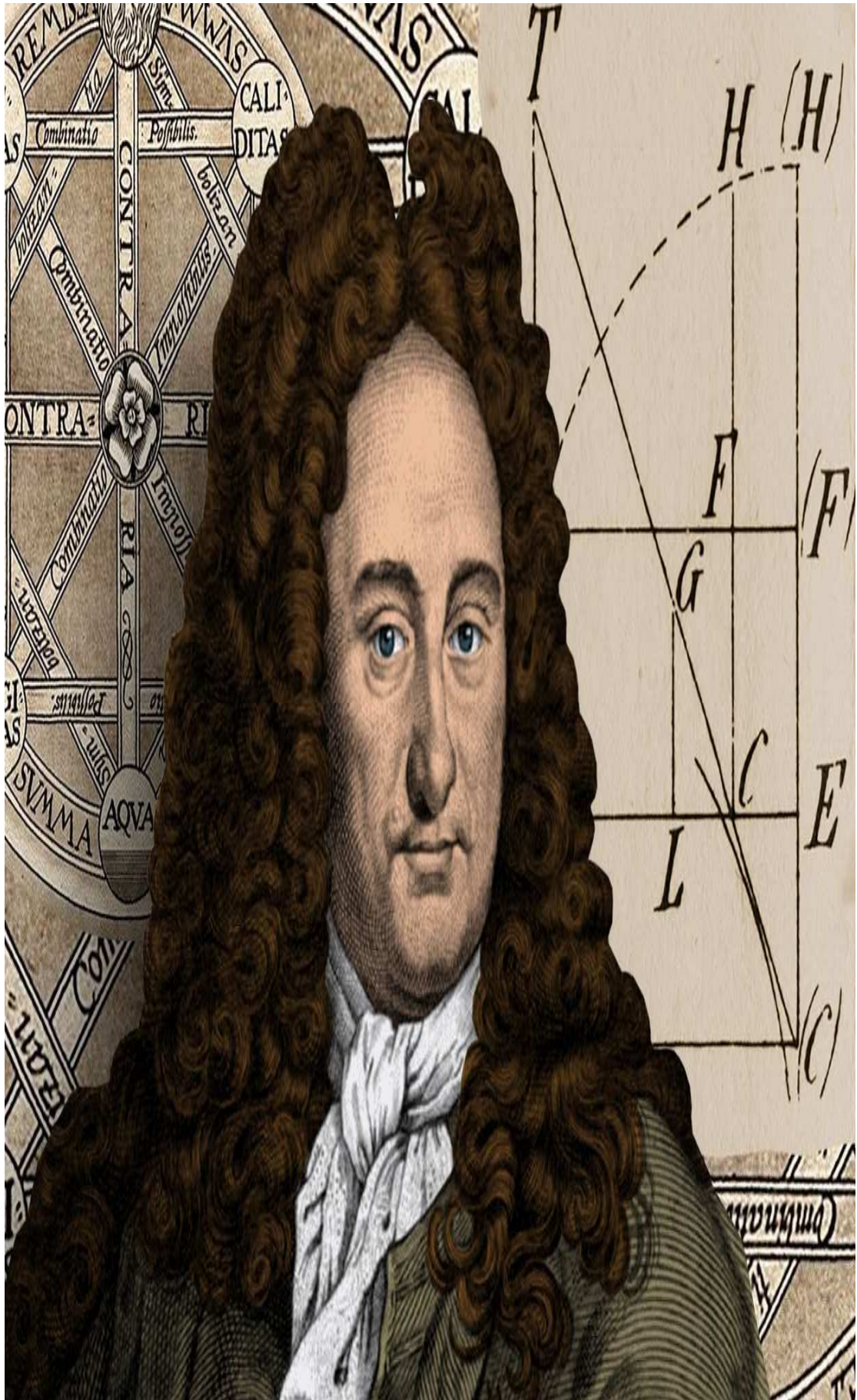
Ακαδημαϊκό έτος: 2022–2023

Ημερομηνία ανάθεσης: **23.11.2021**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **...02.2023**
 Ημερομηνία εξέτασης: **...02.2023**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Περίληψη	13
1. Το έργο και η ζωή του Gottfried Wilhelm Leibniz.....	15
2. Το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz	30
3. Σύγκριση των έργων των Leibniz και Newton	32
4. Κριτική του έργου των Leibniz και Newton.....	33
Βιβλιογραφία	41













106745688
Luigi Petro | Dreamstime.com

Download from
Dreamstime.com
This watermarked comp image is for previewing purposes only.



LEIBNIZ
After an engraving by Ficquet

Leibniz Wolfen 10 Feb 1712
Summis potentiarum

Vir celeberrime Taster &
 Amice Humilissimus

Gratias ago quod de Libro .c. illius frontis de Herbergen
 ad me destinato significas in occasione ad In. Abbatem
Summorum vel alium Helmshtadium ^{ab Brunsrigum} Mittend. Ede, nos
 Dubito quoniam rite rede ad me reverent

Nuper Summis potentiarum considerans sequentia facile
 providetur observo Numeri naturales 0, 1, 2, 3, 4, etc
 sint n potentia exponens sit e. Summa potentiarum
 Exponentis superioris ab unitate summis inferioris pendet
 op. hujus theorematiz

$$\frac{1}{e+1} n^{e+1} = \frac{1}{1} \int n^e + \frac{e}{1.2} \int n^{e-1} + \frac{e \cdot e-1}{1.2.3} \int n^{e-2} + \frac{e \cdot e-1 \cdot e-2}{1.2.3.4} \int n^{e-3} + \dots$$

Quia autem e est numerus rationalis integer, tunc semper
 est finita, et descendendo pervenitur ad terminos evanescentes
 invenit et tale in equationem independentem a summis
 inferioribus, sed tamen inter numeros constantis pnt
 in quocumque summa, semel calculando supponentes

$$\frac{1}{e+1} n^{e+1} = \int n^e + A \int n^{e-1} + B \int n^{e-2} + C \int n^{e-3} + \dots$$

$$\text{ubi } A = \frac{1}{1.2} \quad B = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2} A \quad C = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3} A + \frac{1}{1.2} B \quad \text{et}$$

$$= \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.4} A + \frac{1}{1.2.3} B + \frac{1}{1.2} C \quad \text{Et ita porro pro } n^e \text{ etc}$$

AUTOGRAPH LETTER OF LEIBNIZ

First page of a letter to Christian Wolf, dated February 10, 1712

De monumentum non aude non vult
Vobis tamen libens si Tibi quid videbitur

17^{mo} Domini Comiti gratias ago jam
hinc, vix ut literas adpunctas ad eum curae
Titulus Epist. vobis non satis exploratus est, ~~neque~~ neque
d'epistolationis metu sic posito committitur
~~per~~ auctorem. sed in faule operantibus populo
piscis neque in Bi redditus putat, et si contentis
non repondeat. quod superest vale & fave
Lebanum Hannoveris 10 Feb. 1712

P S morte
Rum de morte illustri
viri (hinc in Thoma)
percrebuit, sed cum falsum
esse gaudeo cum multa
ab eo profuturum aut
expletum.

Leibniz
Godefridus Godefridus
& Sibmity

AUTOGRAPH LETTER OF LEIBNIZ

Second page of the letter shown on page 420

I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS *).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, x, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $\overline{dax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuius ordinatae respondentis curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam Additio et Subtractio: si sit $z - y + w + x$ aequ. v, erit $dz - y + w + x$ seu dv aequ. $dz - dy + dw + dx$. Multiplicatio: $\overline{dxv}$ aequ. $x dv + v dx$, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. $x dv + v dx$. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi.

Porro Divisio: $d \frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm v dy \mp y dv}{yy}$.

Quoad Signa hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro - z scribi - dz, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

Περίληψη

1. Dates

Born: Leipzig, 1 Jul 1646

Died: Hannover, 14 Nov 1716

Dateinfo: Dates Certain

Lifespan: 70

2. Father

Occupation: Lawyer, Academic

His father was Friedrich Leibnütz (1597-1652), notary, jurist, and professor of moral philosophy at the University of Leipzig.

No information on financial status.

3. Nationality

Birth: Leipzig, Germany

Career: France; Hannover, Germany

Death: Hannover, Germany

4. Education

Schooling: Leipzig, M.A.; Jena; Altdorf, L.D.

1653-1661, Nicolai school, Leipzig. After the death of his father in 1652, he had had free access to his father's library where he read voraciously and taught himself Latin.

1661-1666, University of Leipzig. Received a B.A. (1663), M.A. (1664), and J.B. (1665).

Summer 1663, University of Jena.

1666/7, University of Altdorf. Received his J.D. (1667)

5. Religion

Affiliation: Lutheran

6. Scientific Disciplines

Primary: Mathematics, Natural Philosophy, Mechanics

Subordinate: Alchemy, Geology

7. Means of Support

Primary: Patronage, Government

Secondary: Law

1667, he was offered a chair at Altdorf, but declined it.

1667, he became secretary to the Rosicrucian society in Nuremberg, receiving a modest salary.

1667-1673, he entered the service of elector Johann Philipp von Schoenborn, working on general legal problems, developing a program for legal reform in the Holy Roman Empire, and writing (anonymously) a number of position papers. He was successively secretary, librarian, legal counselor in the College of Appeals at Mainz, and diplomat at large.

1672, he accompanied J.C. von Boyneburg on a diplomatic mission to France, where he stayed, except for a short diplomatic trip to England, until 1676. Von Schoenborn died in 1673, ending Leibniz's salary except for a small pension. Leibniz stayed in Paris, hoping to establish a sufficient reputation to obtain a paid position at

the Académie, supporting himself by tutoring Boyneburg's son for a short time and then establishing a Parisian law practice which prospered.

1676, he entered the service of Johann Friedrich, Duke of Brunswick-Lueneburg, in Hannover. He was initially a member of the Duke's personal staff, acting as adviser and librarian, as well as consulting on various engineering projects. He was soon formally appointed councillor (1677), judge (1678), and he superintended the mint (1679). When Johann Friedrich died in 1679, his brother Ernst August kept him on, and in 1685 commissioned him to write a genealogy of the house of Brunswick, *Annales imperii occidentes Brunsvicensis*, to support the imperial and dynastic claims of the family. In the same year he was appointed councillor for life. He labored on this project for the rest of his life. Initially, his research took him to Munich (1687), Vienna (1688), Rome, Florence, Bologna, and Modena (1690-1). (While there he arranged a marriage between Rinaldo d'Este of Modena and Princess Charlotte Felicitas of Brunswick-Lueneburg. Leibniz's efforts were influential in the elevation of Hannover to electoral status (1692). In recognition of this achievement, Ernst August appointed him Privy Councillor (1692), and the Wolfenbuettel branch of the Hannoverians appointed him Director of the Augusta Library (1691). When Ernst August died in 1698, his successor Georg Ludwig, while urging Leibniz to complete the family history, declined his other services.

He was now supported by the patronage of Sophia Charlotte, daughter of Ernst August and Sophia (who had been Leibniz's philosophical confidante), Electress of Brandenburg. Elector Frederick of Brandenburg appointed him privy councillor (1700). In the same year, he travelled to Berlin to oversee the founding of the Brandenburg Society of Science (later the Berlin Academy), which had been established on his recommendation. He frequently visited Berlin between 1700 and 1711. **1713-1714**, he served as the imperial privy councillor in Vienna (he was appointed 1713 effective retroactively to 1712). When Sophie Charlotte died (1714), Georg Ludwig suspended his salary until he returned to court. Leibniz returned to Hannover only days after Georg had left for England as King George I. Leibniz petitioned for a position in London as court historian, but was refused until he had completed the history of the house of Brunswick. He died, still working on the project, in 1716.

8. Patronage

Types: Aristocrat, Court Official

It was through the former chancellor J.C. von Boyneburg, who dabbled in alchemy, that Leibniz met Johann Philipp von Schoenberg. Leibniz accompanied Boyneburg on his trip to France and collaborated on the diplomatic plans there. Elector Johann Philipp of Schoenberg was Leibniz's first major patron. Leibniz came to his attention by dedicating his *Nova methodus discenda docendaeque iurisprudentiae* (1668) to him. Johann Friedrich of Brunswick-Lueneburg was Leibniz's most enthusiastic patron in the Hannoverian house. As early as 1673 he had offered Leibniz a position as a councillor at the small salary of 400 taler. In 1676, he offered him the position of librarian at a salary of 1200 taler, which Leibniz accepted. This patronage was passed on to his brother Ernst August of Hesse-Rheinfels. Ernst's successor, Georg Ludwig, supported Leibniz after a fashion, but was clearly his least enthusiastic patron. Sophie Charlotte, Electress of Brandenburg, whom Leibniz tutored, was an important patron.

Leibniz fished for a position with the Emperor from as early as 1680, when he applied for the post of imperial librarian and historian. His public call for support for

the Emperor when Vienna was under siege by the Turks in 1683 strengthened his position, and he was warmly received by Leopold I, but was not offered a position.

Charles VI became Emperor in 1711. On the recommendation of Anton Ulrich, Duke of Wolfenbuttel, he raised Leibniz to the rank of Baron of the Empire and named him imperial court councillor (the highest honor accorded to a Protestant). *Principles of Nature and Grace* (1714) was written for Prince Eugene of Saxony, a supporter of Leibniz's plans for a scientific society in Vienna. Peter the Great of Russia, met Leibniz in 1697. He summoned Leibniz to Torgau, Saxony, in 1711 and again to Carlsbad, Bohemia, in 1712. There, Peter appointed him Privy Councilor of Justice with a small pension.

9. Technological Involvement

Types: Applied Mathematics, Hydraulics

He designed a calculating machine, a model of which was built in 1672. 1679-1685, among the engineering projects he undertook for Johann Friedrich of Brunswick-Lueneburg was a scheme to increase the yield of the Harz silver mines by employing windmill-powered pumps and pipes filled with compressed air to drain it. He considered this a great demonstration of the practical utility of science, though the project was ultimately a failure. Leibniz also planned the water displays of the great Herrenhausen gardens in the 1680s.

10. Scientific Societies

Memberships: Académie Royal des Sciences, Berlin Academy, Royal Society

1667, secretary to the Rosicrucian Society, Nuremberg.

1673, member of the Royal Society.

1674, he declined membership in the Académie when it required religious conversion. He became a corresponding member of the Académie in 1699.

Around 1688, member of the Accademia Fisicomatematica.

1700, founded the Brandenburg Society of Sciences (later the Berlin Academy), and became its president for life before any other members were chosen. He similarly founded the academies at Dresden (1704) and Vienna (1713).

Sources

Heinrich Schepers, *Neue deutsche Biographie*, ?, 121b-31a.

Ronald Calinger, *Gottfried Wilhelm Leibniz* (Troy, New York: Rensselaer Polytechnic Institute, 1976). [B2597.C27]

Not Available and Not Consulted

1. E.J. Aiton, *Leibniz: A Biography* (Bristol: Hilger, 1985).

2. [B2597.A67]

3. Hans Poser and Albert Heinekamp, eds. *Leibniz in Berlin: Symposium der Leibniz-Gesellschaft und des Instituts für Philosophie, Wissenschaftstheorie, Wissenschafts- und Technikgeschichte der Technischen Universität Berlin* (Studia Leibnitiana, Sonderheft 16), Stuttgart, 1990).

Compiled by: Richard S. Westfall

Department of History and Philosophy of Science Indiana University

1. Το έργο και η ζωή του Gottfried Wilhelm Leibniz

«Έχω πολλές ιδέες που μπορεί να αξιοποιηθούν εν καιρώ, αν άλλοι με διεισδυτικότερο πνεύμα από το δικό μου εντρυφήσουν σε αυτές, ενώνοντας την ποιότητα του μυαλού τους με την εργασία του δικού μου».

Γερμανός βαρόνος, φιλόσοφος, μαθηματικός, διπλωμάτης, νομικός, ιστορικός, φιλόλογος, και πρωτοπόρος γεωλόγος (01.07.1646–14.11.1716). Εκτέλεσε σημαντικό έργο στη λογική, τη μηχανική, την οπτική, τα μαθηματικά, την υδροστατική, τη μηχανική των αερίων, την επιστήμη της ναυσιπλοΐας και τις υπολογιστικές μηχανές. Παρ' όλο που το επάγγελμά του ήταν η νομική επιστήμη, το έργο του στα μαθηματικά και τη φιλοσοφία συγκαταλέγεται στο σημαντικότερο που έχει παραγάγει η ανθρωπότητα. Κάθε μια από τις διάφορες συνεισφορές του θα ήταν αρκετή να του εξασφαλίσει φήμη και ιστορική μνήμη. Γεννήθηκε στη Λειψία την 01.07.1646, ήταν κατά 4 χρόνια νεώτερος του Νεύτωνα και πέθανε στο Ανόβερο στις 04.11.1716, αφού έζησε μόνο 70 χρόνια σε σχέση με τα 85 του Νεύτωνα. Γιος καθηγητή της ηθικής στο πανεπιστήμιο της Λειψίας, του Friedrich Leibnuetz (1597–1652), προερχόταν από μία καλή οικογένεια που είχε προσφέρει τις υπηρεσίες της στην κυβέρνηση της Σαξονίας επί 3 γενιές. Δεν υπάρχουν πληροφορίες για την οικονομική κατάσταση της οικογενείας του. Στα 6 του έχασε τον πατέρα του, αλλά όχι πριν πάρει το πάθος του για την ιστορία.

Αν και παρακολουθούσε μαθήματα στο σχολείο της Λειψίας ήταν σε μεγάλο βαθμό αυτοδίδακτος, διαβάζοντας ακατάπαυστα στη βιβλιοθήκη του πατέρα του. Από το 1653 έως το 1661, φοίτησε στο Nicolai school της Λειψίας. Ήταν λουθηριανός στο θρήσκευμα. Στα 8 ξεκίνησε να μελετά λατινικά και μέχρι τα 12 του, τα είχε κατακτήσει σε βαθμό που να γράφει αξιόλογους στίχους σε αυτά. Από τα λατινικά, πέρασε στα Ελληνικά, τα οποία έμαθε βασιζόμενος κυρίως στις δικές του προσπάθειες. Παρουσίασε πρώιμη πνευματική καλλιέργεια και γράφτηκε στο πανεπιστήμιο της Λειψίας σε ηλικία 15 ετών, ως φοιτητής της νομικής. Στα δύο πρώτα χρόνια των σπουδών του διάβασε πολύ φιλοσοφία και για πρώτη φορά πληροφορήθηκε για το νέο κόσμο που ανακάλυψαν οι μοντέρνοι ή «φυσικοί» φιλόσοφοι Kepler, Descartes (31.03.1596-11.02.1650), Γαλιλαίος. Βλέποντας πως αυτή η νεώτερη φιλοσοφία μπορούσε να γίνει κατανοητή μόνο από εκείνους που είχαν γνώση των μαθηματικών, πέρασε το καλοκαίρι του 1663 στο πανεπιστήμιο της Ιένας, όπου παρακολούθησε τις διαλέξεις στα μαθηματικά του Erhard Weigel, ο οποίος έχαιρε αξιόλογης εκτίμησης στην περιοχή, αλλά που δύσκολα θα μπορούσε να θεωρηθεί μαθηματικός. Επιστρέφοντας στη Λειψία, συγκεντρώθηκε στα μαθηματικά. Μετά 3 χρόνια πήρε το πτυχίο του, σε ηλικία 17 ετών, γράφοντας ένα εξαιρετικό δοκίμιο, προανάκρουσμα μίας από τις βασικές θέσεις της ώριμης φιλοσοφίας του. Το 1666, στην ηλικία των 20 ετών, ήταν καθ' όλα έτοιμος για την ανακήρυξη του σε διδάκτορα των νομικών. Η σχολή της Λειψίας, από ζήλια του αρνήθηκε τον τίτλο του διδάκτορα, με επίσημη πρόφαση το νεαρό της ηλικίας του, στην πραγματικότητα όμως επειδή εκείνος ήξερε περισσότερα από όσα όλοι αυτοί μαζί. Αηδιασμένος από τη μικρότητα της σχολής της Λειψίας, άφησε τη γενέτειρά του και πήγε στη Νυρεμβέργη όπου στις 05.11.1666, στο συνεργαζόμενο Πανεπιστήμιο του Altdorf, όχι μόνο του απονεμήθηκε ο τίτλος του διδάκτορα για τη διατριβή του *De Arte Combinatoria*,¹ πάνω σε μία νέα μέθοδο διδασκαλίας των νομικών και την προτεινόμενη επανακωδικοποίηση τους, αλλά του ζήτησαν θερμά να δεχθεί θέση καθηγητή των νομικών στο Πανεπιστήμιο. Η διατριβή του αυτή, συνετέθη κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του από τη Λειψία στη Νυρεμβέργη. Αυτό το παράδειγμα δείχνει ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα του Leibniz, την ικανότητα του να δουλεύει

¹ Published 1690= Die philosophische Schriften, 4, 27–102

οπουδήποτε και οποτεδήποτε, κάτω από τις πιο διαφορετικές συνθήκες. Διάβαζε, έγραφε και σκεφτόταν χωρίς σταμάτημα. Το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής του δημιουργίας – για να μην αναφερθούμε στα παντοειδή άλλα – γράφτηκε μέσα σε παλιάμαξες που κάθε τόσο τραντάζονταν στους άθλιους δρόμους της Ευρώπης του 17^{ου} αιώνα, καθώς έτρεχε από εδώ και από εκεί υπακούοντας στις ιδιόρρυθμες απαιτήσεις των εργοδοτών του. Η συγκομιδή όλης αυτής της ασίγαστης δραστηριότητας ήταν μια μεγάλη μάζα από χαρτιά κάθε μεγέθους και ποιότητας που δεν έχει ταξινομηθεί διεξοδικά και πολύ λιγότερο δημοσιευθεί. Σήμερα, το μεγαλύτερο μέρος αυτής της παραγωγής βρίσκεται στη [βασίλική βιβλιοθήκη του Ανοβέρου](#), περιμένοντας την υπομονετική εργασία μίας στρατιάς μελετητών για να χωρίσουν το σιτάρι από το άχυρο. Φαίνεται απίστευτο να είναι ένα κεφάλι υπεύθυνο για όλες τις σκέψεις, δημοσιευμένες και μη, που ο Leibniz αποτύπωσε στο χαρτί. Είναι ελεγχόμενη αξιοπιστία το ότι ανοίχθηκε και μετρήθηκε το κρανίο του Leibniz και βρέθηκε σημαντικά μικρότερο από το συνηθισμένο μέγεθος για έναν ενήλικα. Ίσως αυτό να σημαίνει κάτι, καθώς πολλοί από εμάς έχουν δει ηλίθιους με ευγενικά μέτωπα σε κεφάλια μεγάλα σαν καζάνια.

Όμως, όπως είχε συμβεί και με τον Descartes που αρνήθηκε την προσφορά της αντιστρατηγίας επειδή ήξερε τι ήθελε από τη ζωή, ο Leibniz αποποιήθηκε την προσφορά της καθηγητικής έδρας, λέγοντας πως είχε πολύ διαφορετικές φιλοδοξίες. Το ποιες ήταν αυτές δεν το αποκάλυψε. Η τραγωδία του Leibniz ήταν πως συνάντησε τους δικηγόρους πριν από τους επιστήμονες. Το δοκίμιο του για μια νέα μέθοδο διδασκαλίας των νομικών υπήρξε η αιτία της καταστροφής του. Το δοκίμιο αυτό τράβηξε την προσοχή του πολιτικού άνδρα που ήταν το δεξί χέρι του εκλέκτορα, ο οποίος παρότρυνε τον Leibniz να το τυπώσει και να δοθεί ένα αντίγραφο στον εκλέκτορα. Έτσι και έγινε και μετά από μία προσωπική συνέντευξη του ανετέθη η αναθεώρηση του νομικού κώδικα. Πριν περάσει πολύς χρόνος του ανετέθησαν σημαντικές αποστολές που απαιτούσαν εξαιρετική λεπτότητα χειρισμών και παρασκηνιακές διεργασίες. Έγινε διπλωμάτης πρώτης τάξης, πάντα ανοικτός και κινητικός, πάντοτε ευχάριστος αλλά ποτέ σχολαστικά έντιμος ούτε και όταν κοιμόταν!

Ο διπλωμάτης με τη μεσολάβηση του οποίου ο αρχιεπίσκοπος εκλέκτωρ του Mainz τον διόρισε νομικό του σύμβουλο, ήταν ο διπλωμάτης J.C. Von Boyneburg. Έτσι μπήκε στη διπλωματική υπηρεσία, την οποία συνέχισε σε όλο το βίο του. Κατά τα έτη [1670](#) και [1671](#) ο Leibniz έγραψε τις πρώτες εργασίες του στη μηχανική, και από το 1671, είχε παρουσιάσει την υπολογιστική μηχανή του. Ο Leibniz εργάστηκε για τη γεφύρωση του χάσματος μεταξύ προτεστάντων και καθολικών και την εξομάλυνση των γαλλογερμανικών σχέσεων. Η τελευταία αυτή προσπάθεια τον έπεισε για την αναγκαιότητα να στρέψει τη γαλλική επιθετικότητα προς άλλες κατευθύνσεις και για το σκοπό αυτό πήγε στο Παρίσι, όπου έμεινε από το [1672](#) ως το [1676](#) προσπαθώντας να πείσει τους Γάλλους να επιτεθούν κατά της Αιγύπτου. Και από την άποψη της καθαρά κυνικής εξυπνάδας, θα ήταν δύσκολο ακόμη και σήμερα να ξεπεραστεί το μεγάλο του όραμα για έναν ιερό πόλεμο με σκοπό την κατάκτηση και τον εκπολιτισμό της Αιγύπτου. Ο Μέγας Ναπολέων είχε στεναχωρηθεί αρκετά όταν διαπίστωσε πως ο Leibniz τον είχε προλάβει σε αυτό.

Στο Παρίσι συνδέθηκε με τους [Μαλμπράνς](#) και [Αρνό](#) και πλούτισε τις μαθηματικές του γνώσεις τόσο, ώστε να επινοήσει και υπολογιστική μηχανή, ικανή να κάνει πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις και να βγάζει ρίζες κατά πολύ ανώτερη εκείνης του Pascal που έκανε μόνο προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Το 1673 επισκέφθηκε το Λονδίνο ως ακόλουθος του εκλέκτορα, παρακολούθησε διάφορες συναντήσεις των μελών της βασιλικής εταιρείας όπου εξέθεσε την υπολογιστική του μηχανή. Για αυτήν και για την υπόλοιπη δουλειά του, έγινε μέλος της βασιλικής εταιρείας, πριν από την επιστροφή του στο Παρίσι, τον Μάρτιο του 1673. Αυτός και ο Νεύτωνας έγιναν στη συνέχεια (1700) τα πρώτα αλλοδαπά μέλη της γαλλικής Ακαδημίας επιστημών. Συνάντησε Άγγλους μαθηματικούς και τους έδειξε μέρος της δουλειάς του, για να μάθει ότι τους ήταν ήδη γνωστή. Οι Άγγλοι φίλοι του, του είπαν για τον τετραγωνισμό της υπερβολής από τον Mercator, ένα από τα κλειδιά που χρησιμοποίησε ο Νεύτωνας για να οδηγηθεί στην επινόηση του λογισμού. Αυτή εισήγαγε τον Leibniz στη μέθοδο των απειροσειρών την οποία επεξέτεινε. Μία από τις ανακαλύψεις του (μερικές φορές αποδίδεται στο Σκωτσέζο μαθηματικό James Gregory (1638–1675) μπορεί να δοθεί εδώ.

Αν π είναι ο λόγος της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρο του, τότε $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \dots$

Και η σειρά συνεχίζεται με αυτό τον τρόπο στο άπειρο. Αυτό το αποτέλεσμα δε δίνει έναν πρακτικό τρόπο υπολογισμού της αριθμητικής τιμής του π (3,1415926...), η απλή σχέση όμως ανάμεσα στο π και σε όλους τους περιττούς αριθμούς είναι κάτι το εντυπωσιακό. Το 1675 ο Leibniz πέτυχε τη σπουδαιότερη επιστημονική του ανακάλυψη, τον ολοκληρωτικό και διαφορικό λογισμό. Το γεγονός προκάλεσε μεγάλη διαμάχη, η οποία συνεχίστηκε ως το θάνατο του. Ο Νεύτων είχε ανακαλύψει παρόμοια μέθοδο, αλλά δεν τη δημοσίευσε και πολλοί έλεγαν ότι ο Leibniz την είχε υποκλέψει. Φαίνεται όμως ότι και οι δύο κατέληξαν στα ίδια συμπεράσματα από διαφορετικούς δρόμους.

Ο θάνατος του Von Schoenborn, εκλέκτορα του Mainz το 1673 έγινε αφορμή να μείνει ο Leibniz άνεργος. Το 1676, έγινε βιβλιοθηκάριος και σύμβουλος του δούκα Johann Friedrich του Brunswick- Luenenburg, στο Ανόβερο, θέση στην οποία παρέμεινε ως το θάνατο του. Ο Leibniz δημοσίευσε εργασίες στο λογισμό από το 1684 και μετά. Πάντως, πολλά από τα αποτελέσματά του, όπως και η ανάπτυξη των ιδεών του, περιέχονται σε εκατοντάδες σελίδες σημειώσεων που γράφηκαν από το 1673 και έπειτα, αλλά ποτέ δε δημοσιεύθηκαν από τον ίδιο. Αυτές οι σημειώσεις, όπως κάποιος θα ανέμενε, περνούν απότομα από το ένα θέμα στο άλλο και περιέχουν μεταβαλλόμενο συμβολισμό καθώς αναπτύσσονταν η σκέψη του Leibniz. Μερικές είναι απλώς ιδέες που συνέλαβε ενόσω διάβαζε βιβλία ή άρθρα του Gregory St. Vincent, του Fermat, του Pascal, του Descartes και του Barrow, ή προσπαθούσε να εκφράσει τις σκέψεις τους με το δικό του τρόπο προσέγγισης του λογισμού. Το 1714 ο Leibniz έγραψε το *Historia et Origo Calculi Differentialis*, στο οποίο δίνει μια περιγραφή της εξέλιξης των δικών του σκέψεων. Μολαταύτα, αυτό γράφηκε πολλά χρόνια αφότου είχε ήδη εκτελέσει το έργο του και ενόψει των αδυναμιών της ανθρώπινης μνήμης και της μεγαλύτερης επίγνωσης που είχε αποκτήσει ως τότε, η ιστορία του μπορεί να μην είναι ακριβής. Αφού ο σκοπός του ήταν να υπερασπισθεί τον εαυτό του έναντι της κατηγορίας της λογοκλοπής, ίσως να διαστρέβλωσε ασυνείδητα την περιγραφή του για τις απαρχές των ιδεών του.

Παρά τη συγκεκριμένη κατάσταση των σημειώσεων του Leibniz, θα εξετάσουμε ένα μέρος, διότι αποκαλύπτουν πώς μια από τις μεγαλύτερες διάνοιες αγωνίστηκε να κατανοήσει και να δημιουργήσει. Από το 1673 γνώριζε το σημαντικό ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα της εύρεσης εφαπτομένων σε καμπύλες. Ήταν επίσης πολύ σίγουρος ότι η αντίστροφη μέθοδος ήταν ισοδύναμη με την εύρεση εμβαδών και όγκων μέσω αθροίσεων. Η κατά κάποιο τρόπο συστηματική εξέλιξη των ιδεών

του ξεκινά με τις σημειώσεις του 1675. Παρά ταύτα, φαίνεται χρήσιμο, για να κατανοήσουμε το σκεπτικό του, να σημειώσουμε ότι στο *De Arte Combinatoria* είχε εξετάσει ακολουθίες αριθμών, πρώτες διαφορές, δεύτερες διαφορές, και ανώτερης τάξης διαφορές. Έτσι για την ακολουθία των τετραγώνων

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36,$$

οι πρώτες διαφορές είναι

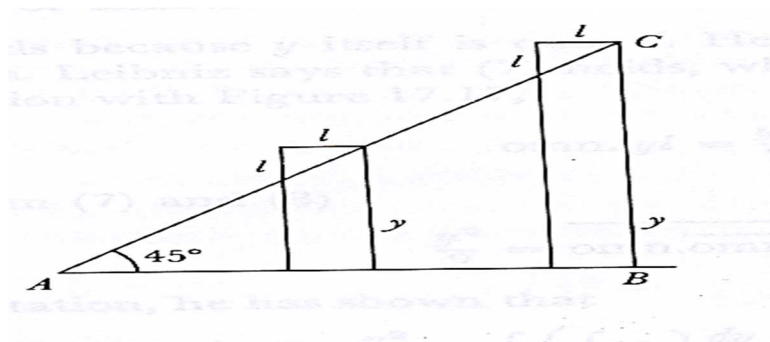
$$1, 3, 5, 7, 9, 11$$

και οι δεύτερες διαφορές είναι

$$2, 2, 2, 2, 2, 2.$$

Ο Leibniz παρατήρησε το μηδενισμό των δευτέρων διαφορών για την ακολουθία των φυσικών αριθμών, των τρίτων διαφορών για την ακολουθία των τετραγώνων, κοκ.

Σχήμα 1



Επίσης παρατήρησε, φυσικά, ότι αν η αρχική ακολουθία ξεκινά από το 0, το άθροισμα των πρώτων διαφορών είναι ο τελευταίος όρος της ακολουθίας.

Για να συσχετίσει αυτά τα στοιχεία με το λογισμό έπρεπε να θεωρήσει την ακολουθία των αριθμών ως τις y -τιμές μιας συνάρτησης και τη διαφορά οποιωνδήποτε δύο ως τη διαφορά δύο γειτονικών y -τιμών. Αρχικά θεώρησε ότι το x παριστάνει την τάξη του όρου στην ακολουθία και το y την τιμή αυτού του όρου. Το μέγεθος dx , το οποίο συχνά το γράφει α , είναι τότε 1 διότι είναι η διαφορά των τάξεων δύο διαδοχικών όρων, ενώ το dy είναι η πραγματική διαφορά των τιμών δύο διαδοχικών όρων. Κατόπιν χρησιμοποιώντας το omn ως συντομογραφία της λατινικής λέξης *omnia*, για να συμβολίσει το άθροισμα, και χρησιμοποιώντας το l για το dy , ο Leibniz συμπεραίνει ότι $omn.l=y$, διότι το $omn.l$ είναι το άθροισμα των πρώτων διαφορών μιας ακολουθίας της οποίας οι όροι ξεκινούν με το 0 και έτσι δίνει τον τελευταίο όρο. Παρά ταύτα, το $omn.y/l$ παρουσιάζει ένα νέο πρόβλημα. Ο Leibniz φθάνει στο αποτέλεσμα ότι το $omn.y/l$ είναι $y^2/2$ σκεπτόμενος σε σχέση με τη συνάρτηση $y=x$. Έτσι, όπως δείχνει το Σχήμα 1, το εμβαδόν του τριγώνου ABC είναι το άθροισμα των y/l (για «μικρά» l) και είναι επίσης $y^2/2$. Ο Leibniz λέει, «Ευθείες γραμμές που αυξάνουν από το μηδέν καθεμία πολλαπλασιαζόμενη με το αντίστοιχό της στοιχείο αύξησης σχηματίζουν ένα τρίγωνο». Αυτά τα λίγα στοιχεία εμφανίζονται ήδη, μαζί με περισσότερα πιο πολύπλοκα, στις εργασίες του 1673.

Στο επόμενο στάδιο πάλεψε με πολλές δυσκολίες. Έπρεπε να κάνει τη μετάβαση από μια διακριτή σειρά τιμών στην περίπτωση όπου τα dy και dx είναι αυξήσεις μιας αυθαίρετης συνάρτησης y του x . Εφόσον εξακολουθούσε να είναι προσκολλημένος στις ακολουθίες, όπου το x αποτελεί την τάξη του όρου, το α του ή το dx ήταν 1. Οπότε εισήγαγε και παρέλειπε το α κατά βούληση. Όταν έκανε τη μετάβαση στο dy και το dx οποιασδήποτε συνάρτησης, αυτό το α δεν ήταν πλέον 1. Πάντως, ενώ εξακολουθούσε να αγωνίζεται με την έννοια της άθροισης αγνοούσε

αυτό το γεγονός. Έτσι σε ένα χειρόγραφο της [29.10.1675](#), ο Leibniz ξεκινά με τη σχέση

$$(1) \quad \text{omn.}yl = \overline{\overline{\text{omn.}l}} \frac{l}{a},$$

η οποία ισχύει επειδή το ίδιο το y είναι $\text{omn.}l$. Εδώ διαιρεί το l δια του a για να διατηρήσει τις διαστάσεις. Ο Leibniz λέει ότι η (7) ισχύει, οποιοδήποτε κι αν είναι το l . Αλλά, όπως είδαμε σε σύνδεση με το [σχήμα 1](#),

$$(2) \quad \text{omn.}yl = \frac{y^2}{2}. \quad \text{Οπότε, από τις (1) και (2) είναι}$$

$$(3) \quad \frac{y^2}{2} = \overline{\overline{\text{omn.}l}} \frac{l}{a}. \quad \text{Σε δικό μας συμβολισμό, έχει}$$

αποδεικνύει ότι $\frac{y^2}{2} = \int \left\{ \int dy \right\} \frac{dy}{dx} = \int y \frac{dy}{dx}$. Ο Leibniz λέει ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι αξιοθαύμαστο. Ένα άλλο θεώρημα του ίδιου είδους, το οποίο ο Leibniz συνήγαγε από ένα γεωμετρικό επιχείρημα, είναι το

$$(4) \quad \text{omn.}xl = x\text{omn.}l - \text{omn.}l, \quad \text{όπου } l \text{ είναι η διαφορά των τιμών δύο διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας και } x \text{ είναι ο αριθμός του όρου. Για μας αυτή η εξίσωση είναι } \int xdy = xy - \int ydx. \text{ Τώρα ο Leibniz αφήνει το ίδιο το } l \text{ στη (4) να γίνει } x, \text{ και βρίσκει } \text{omn.}x^2 = x\text{omn.}x - \text{omn.}l. \text{ Αλλά το } \text{omn.}x, \text{ λέει, είναι } x^2/2 \text{ (έχει δείξει ότι } \text{omn.}yl = \frac{y^2}{2}). \text{ Άρα } \text{omn.}x^2 = x \frac{x^2}{2} - \text{omn.} \frac{x^2}{2}.$$

Μεταθέτοντας τον τελευταίο όρο λαμβάνει $\text{omn.}x^2 = \frac{x^3}{3}$. Σε αυτό το χειρόγραφο της [29.10.1675](#), ο

Leibniz αποφάσισε να γράψει $\int$ αντί του omn. , οπότε $\int l = \text{omn.}l$ και $\int x = \frac{x^2}{2}$.

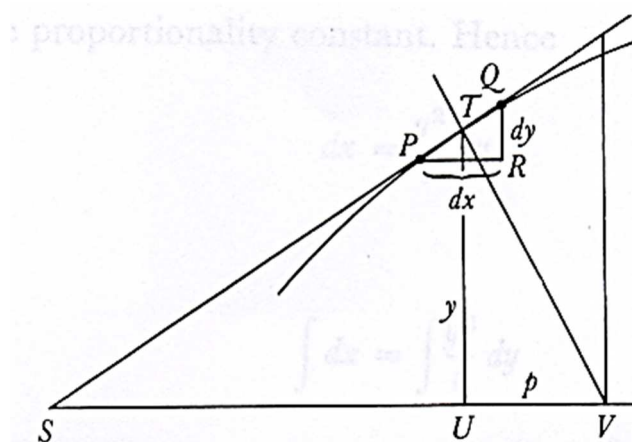
Το σύμβολο $\int$ είναι ένα επιμηκυμένο S για το «sum». Ο Leibniz αντελήφθη μάλλον νωρίς, πιθανώς μέσα από τη μελέτη του έργου του Barrow, ότι η διαφορίση και η ολοκλήρωση ως άθροιση πρέπει να αποτελούν αντίστροφες διαδικασίες. Οπότε το εμβαδόν, όταν διαφοριστεί, πρέπει να δώσει ένα μήκος. Έτσι, στο ίδιο κείμενο της [29^{ης} Οκτωβρίου του 1675](#), ο Leibniz λέει, «Δοθέντος του l και της σχέσης του με το x , να βρεθεί το $\int l$ ». Κατόπιν, λέει, «Ας υποθέσουμε ότι $\int l = ya$. Έστω ότι $l = ya/d$. [Εδώ τοποθετεί το d στον παρονομαστή. Θα σήμαινε περισσότερα για μας αν έγραφε $l = d(ya)$.] Τότε όπως ακριβώς θα αυξάνει το $\int$, το d θα μειώνει τις διαστάσεις. Αλλά το $\int$ σημαίνει ένα άθροισμα, και το d μια διαφορά. Από το δεδομένο y μπορούμε πάντοτε να βρούμε το y/d ή l , δηλαδή, τη διαφορά των y . Οπότε η μια εξίσωση μπορεί να μετασχηματιστεί στην άλλη. Όπως ακριβώς από την εξίσωση

$$\int c \int \overline{l^2} = \frac{c \int \overline{l^3}}{3a^3}, \text{ μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση } c \int \overline{l^2} = \frac{c \int \overline{l^3}}{3a^3 d}.$$

Σ' αυτή την πρώιμη εργασία ο Leibniz φαίνεται να εξερευνά τις [πράξεις](#) $\int$ και d και διαπιστώνει ότι είναι αντίστροφες. Τελικά αντιλαμβάνεται ότι το $\int$ είναι στην πραγματικότητα μια άθροιση ορθογωνίων και επομένως ένα άθροισμα εμβαδών. Έτσι αναγνωρίζει ότι, για να επιστρέψει στο dy από το y , πρέπει να σχηματίσει τη διαφορά

των y ή να πάρει το διαφορικό του y . Κατόπιν λέει, «Αλλά το $\int$ σημαίνει ένα άθροισμα και το d μια διαφορά». Αυτό μπορεί να ήταν μια μεταγενέστερη καταχώριση. Οπότε μερικές εβδομάδες αργότερα, για να μεταβεί από το y στο dy , αλλάζει από τη διαίρεση δια d στη λήψη του διαφορικού του y , και γράφει dy .

Μέχρι αυτό το σημείο ο Leibniz θεωρούσε τις y -τιμές ως τιμές των όρων μιας ακολουθίας και το x συνήθως ως την τάξη αυτών των όρων, αλλά τώρα, σ' αυτή την εργασία, λέει, «Όλα αυτά τα θεωρήματα αληθεύουν για σειρές στις οποίες οι διαφορές των όρων έχουν προς τους ίδιους τους όρους ένα λόγο που είναι μικρότερος από οποιοδήποτε μετρήσιμο μέγεθος». Δηλαδή, το dy/y μπορεί να είναι μικρότερο από οποιοδήποτε μετρήσιμο μέγεθος. Σε ένα χειρόγραφο με ημερομηνία 11.11.1675, με τίτλο «Παραδείγματα της αντίστροφης μεθόδου των εφαπτομένων», ο Leibniz χρησιμοποιεί το $\int$ για το άθροισμα και το x/d για τη διαφορά. Λέει κατόπιν ότι το x/d είναι το dx , η διαφορά δύο διαδοχικών x -τιμών, αλλά προφανώς εδώ το dx είναι μια σταθερά και ίσο με τη μονάδα. Από μόλις καταληπτά επιχειρήματα όπως τα παραπάνω, ο Leibniz ισχυρίστηκε το γεγονός ότι η ολοκλήρωση ως διαδικασία άθροισης είναι η αντίστροφη της διαφορίσης. Αυτή η ιδέα βρίσκεται στο έργο του Barrow και του Newton, οι οποίοι έβρισκαν εμβαδά μέσω αντι-διαφορίσης, αλλά εκφράζεται για πρώτη φορά ως σχέση μεταξύ της άθροισης και της διαφορίσης από τον Leibniz. Παρά τον απερίφραστο αυτό ισχυρισμό, δεν ήταν καθόλου σαφής ως προς το πώς μπορεί να βρεθεί ένα εμβαδόν από κάτι που κάποιος θα μπορούσε χαλαρά να γράψει ως $\sum ydx$ - δηλαδή, πώς μπορεί να βρεθεί ένα εμβαδόν κάτω από μια καμπύλη από ένα σύνολο ορθογωνίων. Φυσικά αυτή η δυσκολία βασάνισε όλους τους μαθηματικούς του 17^{ου} αιώνα. Μη διαθέτοντας μια σαφή έννοια του ορίου, ή έστω σαφείς έννοιες για το εμβαδόν, ο Leibniz θεωρούσε το τελευταίο άλλοτε ως ένα άθροισμα ορθογωνίων τόσο μικρών και τόσο πολλών ώστε η διαφορά μεταξύ αυτού του αθροίσματος και του πραγματικού εμβαδού κάτω από την καμπύλη θα μπορούσε να θεωρηθεί αμελητέα, και άλλοτε ως ένα άθροισμα τεταγμένων ή y -τιμών. Αυτή η τελευταία έννοια του εμβαδού ήταν συνήθης, ιδιαίτερα μεταξύ των οπαδών των αδιαιρέτων, που θεωρούσαν ότι η έσχατη μονάδα εμβαδού και η y -τιμή είναι ένα και το αυτό.



Σχήμα 2

Αναφορικά με τη διαφορίση, ακόμη και μετά την αντίληψη του ότι τα dy και dx μπορούν να είναι αυθαίρετα μικρά μεγέθη, ο Leibniz έπρεπε ακόμη να υπερβεί τη θεμελιώδη δυσκολία ότι ο λόγος dy/dx δεν είναι ακριβώς η παράγωγος υπό τη δική μας έννοια. Βάσισε το επιχειρήμά του στο χαρακτηριστικό τρίγωνο, το οποίο είχε

επίσης χρησιμοποιήσει ο Pascal και ο Barrow. Αυτό το τρίγωνο (σχήμα 2) αποτελείται από τα dy , dx και τη χορδή PQ , την οποία ο Leibniz θεωρούσε ως την καμπύλη μεταξύ των P και Q και μέρος της εφαπτομένης στο T . Παρ' όλο που αναφέρει αυτό το τρίγωνο ως απεριόριστα μικρό, υποστηρίζει ότι είναι όμοιο με ένα καθορισμένο τρίγωνο, συγκεκριμένα, το τρίγωνο STU που σχηματίζεται από την υποεφαπτομένη SU , την τεταγμένη στο T και το μήκος της εφαπτομένης ST . Άρα τα dy και dx είναι έσχατα στοιχεία και ο λόγος τους έχει ένα καθορισμένο νόημα. Μάλιστα, χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι, από τα όμοια τρίγωνα PRQ και STU είναι $dy/dx = TU/SU$. Στο χειρόγραφο της 11.11.1675, ο Leibniz παρουσιάζει πώς μπορεί να επιλύσει ένα ορισμένο πρόβλημα. Αναζητά την καμπύλη της οποίας η υποκάθετος είναι αντιστρόφως ανάλογη της τεταγμένης. Στο σχήμα 2, η κάθετη (normal) είναι TV και η υποκάθετη p είναι UV . Από την ομοιότητα των τριγώνων PRQ και TUV , έχει $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$ ή $pdx = ydy$. Αλλά η καμπύλη έχει τη δοθείσα ιδιότητα $p = \frac{b}{y}$, όπου

το b είναι η σταθερά της αναλογίας. Οπότε, $dx = \frac{y^2}{b} dy$. Τότε $\int dx = \int \frac{y^2}{b} dy$ ή

$x = \frac{y^3}{3b}$. Ο Leibniz έλυσε επίσης άλλα προβλήματα αντίστροφης εφαπτομένης.

Σε μια εργασία της 26.06.1676, αντιλαμβάνεται ότι η καλύτερη μέθοδος εύρεσης εφαπτομένων είναι να βρεθεί το dy/dx , όπου τα dy και dx είναι διαφορές και το dy/dx είναι το πηλίκο. Αγνοεί το $dx \cdot dx$ και τις ανώτερες δυνάμεις του dx . Από το Νοέμβριο του 1676 είναι σε θέση να δώσει τους γενικούς κανόνες $dx^n = nx^{n-1}dx$ για ακέραιο και κλασματικό n και $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ και λέει, «Η συλλογιστική είναι γενική, και δεν εξαρτάται από το ποιες μπορεί να είναι οι πρόοδοι των x ». Εδώ το x εξακολουθεί να σημαίνει την τάξη των όρων μιας ακολουθίας. Σε αυτό το χειρόγραφο λέει επίσης ότι για να διαφορίσουμε το $\sqrt{a+bz+cz^2}$, θέτουμε $a+bz+cz^2 = x$, διαφορίζουμε το $\sqrt{x}$ και πολλαπλασιάζουμε επί το dx/dz .

Αυτός είναι ο κανόνας της αλυσίδας. Από τις 11.07.1677 ο Leibniz μπορούσε να δώσει τους σωστούς κανόνες για το διαφορικό του αθροίσματος, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου δύο συναρτήσεων καθώς και για δυνάμεις και ρίζες, αλλά όχι και τις αποδείξεις τους.

Στο χειρόγραφο της 11.11.1675, είχε ασχοληθεί με τα $d(uv)$ και $d(u/v)$, και σκέφτηκε ότι $d(uv)=du \cdot dv$. Το 1680 το dx έχει καταστεί η διαφορά των τετμημένων και το dy η διαφορά των τεταγμένων. Ο ίδιος λέει, «...τώρα αυτά τα dx και dy λαμβάνονται απείρως μικρά, ή τα δύο σημεία πάνω στην καμπύλη νοούνται ως ότι απέχουν απόσταση μικρότερη από οποιοδήποτε δοθέν μήκος...». Αποκαλεί το dy «στιγμιαία αύξηση» του y καθώς η τεταγμένη κινείται κατά μήκος του x -άξονα.

Αλλά το PQ στο σχήμα 2 εξακολουθεί να θεωρείται τμήμα μιας ευθείας. Είναι ένα «στοιχείο της καμπύλης ή μια πλευρά του πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών το οποίο παριστάνει την καμπύλη...». Συνεχίζει να χρησιμοποιεί τη συνήθη μορφή

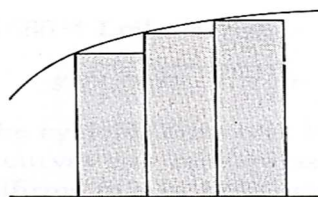
διαφορικού. Έτσι, αν $y = \frac{a^2}{x}$, τότε $dy = -\frac{a^2}{x^2} dx$. Επίσης λέει ότι οι διαφορές είναι

το αντίθετο των αθροισμάτων. Κατόπιν, για να βρει το εμβαδόν κάτω από μια καμπύλη (Σχήμα 3), παίρνει το άθροισμα των ορθογωνίων και λέει ότι μπορούμε να παραλείψουμε τα εναπομένοντα «τρίγωνα, εφόσον είναι απείρως μικρά σε σύγκριση

με τα ορθογώνια... οπότε παριστάνω στο λογισμό μου το εμβαδόν του σχήματος με $\int y dx \dots$ ». Επίσης δίνει, για το στοιχείο του τόξου, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

και για τον όγκο ενός στερεού εκ περιστροφής που παράγεται από την περιστροφή μιας καμπύλης περί τον x -άξονα,

$$V = \pi \int y^2 dx.$$



Σχήμα 3

Παρά τις πρότερες δηλώσεις ότι τα dx και dy είναι μικρές διαφορές, εξακολουθεί να συζητά για ακολουθίες. Λέει, «Οι διαφορές και τα αθροίσματα είναι αντίστροφα το ένα του άλλου, δηλαδή, το άθροισμα των διαφορών μιας σειράς [ακολουθίας] είναι ένας όρος της σειράς, και η διαφορά των αθροισμάτων μιας σειράς είναι ένας όρος της σειράς, κι έτσι συμβολίζω το πρώτο ως $\int dx = x$, και το τελευταίο ως $d \int x = dx$ ». Μάλιστα, σε ένα χειρόγραφο που γράφηκε μετά το 1684, ο

Leibniz λέει ότι η μέθοδός του των απειροστών έχει γίνει ευρέως γνωστή ως λογισμός των διαφορών. Η πρώτη δημοσίευση του Leibniz για το λογισμό είναι στο *Acta Eruditorum* του 1684.² Σ' αυτή την εργασία το νόημα των dy και dx παραμένει ασαφές. Λέει σε κάποιο σημείο, έστω ότι το dx είναι οποιοδήποτε αυθαίρετο μέγεθος, και το dy ορίζεται από τη σχέση (βλ. σχήμα 2) $dy:dx=y$: υποεφαπτομένη.

Τούτος ο ορισμός του dy προϋποθέτει κάποια έκφραση για την υποεφαπτομένη. Οπότε ο ορισμός δεν είναι πλήρης. Επιπλέον, ο ορισμός του Leibniz για την εφαπτομένη ως γραμμή που συνδέει δύο σημεία που βρίσκονται απείρως κοντά δεν είναι ικανοποιητικός. Επίσης δίνει στην εν λόγω εργασία τους κανόνες που είχε συναγάγει το 1677 για το διαφορικό του αθροίσματος, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου δύο συναρτήσεων καθώς και τον κανόνα για την εύρεση του $d(x^n)$. Σε αυτή την τελευταία περίπτωση σκιαγραφεί την απόδειξη για θετικό ακέραιο n αλλά λέει ότι ο κανόνας αληθεύει για όλα τα n . Για τους άλλους κανόνες δε δίνει αποδείξεις. Κάνει εφαρμογές στην εύρεση εφαπτομένων, μεγίστων και ελαχίστων και σημείων καμπής. Αυτή η εργασία, που έχει έκταση έξι σελίδων, είναι τόσο ασαφής που οι αδελφοί Bernoulli την αποκάλεσαν «ένα αίνιγμα μάλλον παρά μια εξήγηση».³

Σε μια εργασία του 1686⁴ ο Leibniz δίνει την $y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$ ως

την εξίσωση της κυκλοειδούς. Ο στόχος του εδώ είναι να καταδείξει ότι μέσω των μεθόδων του και του συμβολισμού του, κάποιες καμπύλες μπορούν να εκφραστούν ως εξισώσεις οι οποίες δε μπορούν να προκύψουν με άλλους τρόπους. Αυτό το επαναβεβαιώνει στην *Historia* του όπου λέει ότι τα dx , ddx (δεύτερη διαφορά) του και τα αθροίσματα που είναι τα αντίστροφα αυτών των διαφορών μπορούν να εφαρμοσθούν σε όλες τις συναρτήσεις του x , χωρίς να εξαιρεί τις μηχανικές καμπύλες του Vieta και του Descartes, για τις οποίες ο Descartes είχε πει ότι δεν έχουν

² Acta Erud., 3, 1684, 467–473 = Math. Schriften, 5, 220–226

³ Leibniz : Math. Schriften, 3, Part 1, 5

⁴ Acta Erud., 5, 1686, 292–300 = Math. Schriften, 5, 226–233

εξισώσεις. Ο Leibniz λέει επίσης ότι μπορεί να περιλάβει καμπύλες τις οποίες ο Newton δε μπορούσε να χειριστεί ακόμη και με τη μέθοδο των σειρών του.

Στην εργασία του 1686 όπως και σε επόμενες εργασίες,⁵ ο Leibniz έδωσε τα διαφορικά των λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων και αναγνώρισε τις εκθετικές συναρτήσεις ως μια κλάση. Μελέτησε επίσης την καμπυλότητα, τον εφαπτόμενο κύκλο και τη θεωρία των περιβαλλουσών. Σε μια επιστολή του 1697 προς τον Johann Bernoulli, διαφόριζε μέσα στο σύμβολο του ολοκληρώματος ως προς μια παράμετρο. Επίσης είχε την ιδέα ότι πολλά αόριστα ολοκληρώματα μπορούσαν να υπολογιστούν με αναγωγή τους σε γνωστές μορφές και συζητά την κατασκευή πινάκων για τέτοιες αναγωγές— με άλλες λέξεις, για έναν πίνακα ολοκληρωμάτων. Προσπάθησε να ορίσει τα διαφορικά ανώτερης τάξης όπως το ddy (d^2y) και ddy (d^3y), αλλά οι ορισμοί δεν υπήρξαν ικανοποιητικοί. Αν και δεν πέτυχε, προσπάθησε επίσης να βρει ένα νόημα για το d^ny όπου το n είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Σε σχέση με το συμβολισμό, ο Leibniz εργάστηκε επιμελώς για να επιτύχει το βέλτιστο. Τα dx , dy και dy/dx του εξακολουθούν, φυσικά, να είναι τυπικά. Εισήγαγε το συμβολισμό $\log x$, d^n για το n -οστό διαφορικό και ακόμη τα d^{-1} και d^{-n} για το $\int$ και τη n -οστή επανάληψη άθροισης, αντιστοίχως.

Εν γένει το έργο του Leibniz, αν και πλήρες ιδεών και προτάσεων και εμβριθές, υπήρξε τόσο ατελές και αποσπασματικό που ήταν μετά βίας καταληπτό. Ευτυχώς, οι αδελφοί Bernoulli, James και Johann, που είχαν εξαιρετικά εντυπωσιαστεί και κεντριστεί από τις ιδέες του Leibniz, επεξεργάστηκαν τις πρόχειρες εργασίες του και συνεισέφεραν ένα τεράστιο πλήθος από νέες εξελίξεις τις οποίες θα συζητήσουμε στη συνέχεια. Ο Leibniz συμφώνησε ότι ο λογισμός οφείλονταν σ' αυτούς τόσο όσο και σ' αυτόν. Το 1700 ο Εκλέκτορας του Βρανδεμβούργου πρότεινε στο Leibniz να εργασθεί γι' αυτόν στο Βερολίνο. Ενόσω εμπλέκονταν σε όλων των ειδών τις πολιτικές διαδικασίες, συμπεριλαμβανομένης και της διαδοχής του George Ludwig του Ανοβέρου στον αγγλικό θρόνο, ο Leibniz εργάζονταν σε πολλούς τομείς και οι παράπλευρες δραστηριότητές του κάλυπταν ένα τεράστιο φάσμα. Πηγαίνοντας στο Ανόβερο έμεινε επί ένα χρόνο στο Άμστερνταμ, όπου γνωρίστηκε με τον εβραίο Benedict de Spinoza (1632–1677) και μηχανεύτηκε μία από τις σκοτεινότερες συναλλαγές σε όλη του την μακρά καριέρα ως φιλοσόφου διπλωμάτη. Η ιστορία του πάρε-δώσε του Leibniz με το «μεθυσμένο με το θεό» Σπινόζα, μπορεί να μην είναι πλήρης, αλλά όπως τουλάχιστον πιστεύεται σήμερα, φαίνεται ότι ο Leibniz φέρθηκε για μία φορά πολύ ανήθικα σε σχέση με ένα θέμα ηθικής, δηλαδή ένα θέμα που πιάνει τα πάντα. Πήρε μαζί του άφθονα αποσπάσματα από το αδημοσίευτο αριστούργημα του Σπινόζα *Ethica* (*Ordina Geometrica Demonstrata*), μια διατριβή στην ηθική, ανεπτυγμένη κατά τον τρόπο της γεωμετρίας του Ευκλείδη.

Όταν πέθανε ο Σπινόζα τον επόμενο χρόνο, ο Leibniz φαίνεται πως βρήκε βολικό να χάσει τα αναμνηστικά που έφερε από την επίσκεψη του στο Άμστερνταμ. Οι μελετητές αυτών των θεμάτων φαίνεται να συμφωνούν πως η φιλοσοφία του Leibniz, όπου έρχεται σε επαφή με την ηθική, είναι παρμένη από τον Σπινόζα χωρίς την οφειλόμενη αναγνώριση. Στο Ανόβερο αναγκάστηκε να παραμερίσει την προσωπική του εργασία, διότι του είχε ανατεθεί η συγγραφή της ιστορίας του οίκου της Βρουνεσβίκης. Οι έρευνες του για την πραγματοποίηση του έργου τον οδήγησαν στην Αυστρία και στην Ιταλία (1687–1689) όπου εργάστηκε στα αρχεία και συγκέντρωσε για προσωπική του

⁵ Acta Erud., 1692, 168–171 = Math. Schriften, 5, 266–269 ; Acta Erud., 1694 = Math. Schriften, 5, 301–306

χρήση πολύ υλικό. Μέρος του υλικού αυτού δημοσιεύθηκε όταν ζούσε ο Leibniz, αλλά η ίδια η «ιστορία» του δε δημοσιεύθηκε παρά το 1843, δηλαδή 150 περίπου έτη από τον θάνατο του. Η πρώτη δημοσίευση έγινε στις 11.07.1677, έντεκα χρόνια μετά από την αδημοσίευτη ανακάλυψη του Νεύτωνα, η οποία δε δημοσιεύθηκε από το Νεύτωνα παρά μόνο αφού είχε εμφανισθεί η εργασία του Leibniz.

Στο διάστημα ανάμεσα στο 1677 και στο 1704 ο λογισμός του Leibniz είχε αναπτυχθεί στην ηπειρωτική Ευρώπη ως ισχυρό εργαλείο και εύκολο στην εφαρμογή του, κυρίως χάρις στις προσπάθειες των Ελβετών Bernoulli, του Jacob και του αδελφού του Johann. Στην Αγγλία αντιθέτως, εξ' αιτίας της απροθυμίας του Νεύτωνα να μοιραστεί ελεύθερα με άλλους τις μαθηματικές του ανακαλύψεις, ο λογισμός δεν είχε ακόμη δοκιμαστεί αρκετά. Ένα μικρό δείγμα από τα πράγματα που κόστισαν στον Leibniz (και πιθανόν και στον Νεύτωνα) πολλή σκέψη και προσπάθεια μέχρι να βρεθεί ο σωστός τρόπος—ενώ σήμερα είναι κάτι το απλό για τους αρχάριους στον λογισμό—μπορεί να δώσει μία ιδέα για το δρόμο που καλύψανε τα μαθηματικά από το 1675. Αντί για τα απειροστά του Leibniz θα χρησιμοποιήσουμε τους ρυθμούς (ταχύτητες) μεταβολής. Αν u, v είναι συναρτήσεις του x , πως μπορεί να εκφρασθεί η ταχύτητα μεταβολής της uv ως προς το x με τη βοήθεια των αντίστοιχων ταχυτήτων μεταβολής των u, v ως προς x ;

Με τα σύμβολα πως είναι το $d(uv)/dx$ συναρτήσει των du/dx και dv/dx ;

Στον Leibniz φάνηκε πως θα έπρεπε να είναι $du/dx \cdot dv/dx$ το οποίο δεν έχει καμία σχέση με το σωστό $d(uv)/dx = u \cdot dv/dx + v \cdot du/dx$. Η αντιδικία άρχισε στα σοβαρά όταν ο Leibniz, διπλωματικά καλυμμένος πίσω από την εκδοτική παντογνωσία και ανωνυμία, έκανε μία αυστηρή κριτική επισκοπώντας το έργο του Νεύτωνα στο *Acta Eruditorum*, που είχε ο ίδιος ο Leibniz συστήσει το 1682 και του οποίου ήταν υπεύθυνος έκδοσης. Υπήρξε εκείνος που πρότεινε, το 1669, την ίδρυση μιας Γερμανικής Ακαδημίας Επιστημών. Τελικά η Ακαδημία του Βερολίνου οργανώθηκε το 1700. Η αρχική του εισήγηση ήταν για μια εταιρεία που θα κάνει εφευρέσεις στη μηχανική και ανακαλύψεις στη χημεία και τη φυσιολογία που θα ήταν ωφέλιμες για την ανθρωπότητα. Ο Leibniz ήθελε να εφαρμόζεται η γνώση. Αποκαλούσε τα πανεπιστήμια «καλογερίστিকা» και τα κατηγορήσε ότι κατείχαν μάθηση αλλά όχι κρίση και απορροφούνταν σε μικροπράγματα. Αντ' αυτού παρότρυνε την αναζήτηση της πραγματικής γνώσης—των μαθηματικών, της φυσικής, της γεωγραφίας, της χημείας, της ανατομίας, της βοτανολογίας, της ζωολογίας και της ιστορίας. Για τον Leibniz οι ικανότητες του τεχνίτη και του πρακτικού ήταν πιο πολύτιμες από τις σπουδασμένες λεπτολογίες των επαγγελματιών λογίων. Ευνοούσε τη γερμανική γλώσσα έναντι της λατινικής επειδή η λατινική ήταν σύμμαχη προς την παλαιότερη, άχρηστη διάνοηση.

Οι άνθρωποι καλύπτουν την άγνοιά τους, έλεγε, χρησιμοποιώντας τη λατινική γλώσσα για να εντυπωσιάζουν του άλλους. Τα γερμανικά, από την άλλη πλευρά, ήταν κατανοητά από τους κοινούς ανθρώπους και μπορούσαν να αναπτυχθούν για να βοηθήσουν τη σαφήνεια της σκέψης και την οξύνοια των συλλογισμών. Στα τέλη του αιώνα ο Leibniz διορίστηκε σε σπουδαία διπλωματική θέση ως μυστικοσύμβουλος εκτός των εκλεκτόρων του Ανοβέρου και του Βρανδεμβούργου και του Μεγάλου Πέτρου καθώς και ο πρώτος πρόεδρος της βασιλικής ακαδημίας του Βερολίνου (1700), αλλά δεν μπόρεσε να πράξει το ίδιο στην Πετρούπολη, Βιέννη και Δρέσδη, αν και το επεδίωξε. Μετά τον θάνατο του όμως τέθηκαν σε εφαρμογή τα σχέδια για την Ακαδημία Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης, που είχε καταστρώσει για λογαριασμό του

Μεγάλου Πέτρου. Η προσπάθεια ίδρυσης μίας βιεννέζικης Ακαδημίας εμποδίστηκε από τους Ιησουΐτες όταν ο Leibniz επισκέφθηκε την Αυστρία για τελευταία φορά το 1714. Το ότι οι Ιησουΐτες τα κατάφεραν απέναντι στον μαστρο της διπλωματίας σε ένα ζήτημα ακαδημαϊκής πολιτικής, δείχνει πόσο άσχημα άρχισε να ξεπέφτει ο Leibniz στην ηλικία των 68 ετών. Δεν ήταν πια ο ίδιος και πραγματικά τα τελευταία του χρόνια δεν ήταν παρά η μακρινή σκιά του περασμένου μεγαλείου του. Έχοντας υπηρετήσει πρίγκιπες σε όλη του τη ζωή, λάβαινε τώρα το αντίτιμο αυτής της υπηρεσίας.

Άρρωστος, γέρος και καταπονημένος από αντιδικίες, πετάχτηκε στο περιθώριο. Συνολικά υπηρέτησε επί 40 χρόνια 3 κυρίους ως βιβλιοθηκάριος, ιστορικός και γενικά ως εγκέφαλος της οικογένειας των Brunswick. Είχε μεγάλη σημασία για μία τέτοια οικογένεια να γνωρίζει ακριβώς την ιστορία όλων των σχέσεων της με άλλες οικογένειες εξ' ίσου ευνοούμενες των ουρανών. Ο Leibniz δεν ήταν απλά ο υπεύθυνος για τους καταλόγους των βιβλίων στην οικογενειακή βιβλιοθήκη, αλλά ένας καταρτισμένος γενεαλόγος και ερευνητής των μουχλιασμένων αρχείων, του οποίου αποστολή ήταν να επιβεβαιώσει το δίκαιο των διεκδικήσεων των εργοδοτών του στους μισούς θρόνους της Ευρώπης και σε περίπτωση που δεν μπορούσε να επιβεβαιώσει κάτι τέτοιο, να το μεθοδεύσει με προσεκτική απόκρυψη στοιχείων.

Οι ανάγκες των ιστορικών του ερευνών τον οδήγησαν από τη μία άκρη της Γερμανίας στην άλλη και από εκεί στην Αυστρία και την Ιταλία στα χρόνια 1687–1690. Στη διάρκεια της παραμονής του στην Ιταλία επισκέφθηκε την Ρώμη και εκεί ο Πάπας τον παρότρυνε να δεχθεί τη θέση του βιβλιοθηκάριου στο Βατικανό. Καθώς όμως προϋπόθεση για να γίνει κάτι τέτοιο ήταν να ασπασθεί τον καθολικισμό, αρνήθηκε. Ήταν όμως έτσι; Η απροθυμία του να αφήσει ένα καλό πόστο για ένα άλλο ίσως να τον οδήγησε στην επόμενη εφαρμογή του «καθολικού του χαρακτηριστικού», του πλέον φιλόδοξου από όλα τα καθολικά του οράματα. Αν το πετύχαινε αυτό, θα μπορούσε να μπει στο Βατικανό χωρίς να χάσει την αξιοπρέπεια του.

Το μεγαλεπήβολο σχέδιο του ήταν ούτε λίγο ούτε πολύ η επανένωση των 2 Εκκλησιών, της καθολικής και της προτεστάντικής όμως το μόνο που κατάφερε ήταν να κάνει πολλούς εξαιρετικούς ανθρώπους πιο πεισματάρηδες από πριν και οξύτερους στις μεταξύ τους επιθέσεις. Ήταν τότε που στράφηκε στην φιλοσοφία για να βρει παρηγοριά. Οι φιλοσοφίες κατέλαβαν το υπόλοιπο της ζωής του, συνολικά ένα τέταρτο του αιώνα. Το Σεπτέμβριο του 1714 επέστρεψε στο Brunswick. Τότε ο εργοδότης του, ο εκλέκτορας Γεώργιος Λουδοβίκος του Ανοβέρου έγινε ο πρώτος Γερμανός βασιλιάς της Αγγλίας- «ο έντιμος χοντροκέφαλος» όπως είναι γνωστός στην αγγλική ιστορία-, αλλά ο Leibniz πήρε διαταγή να μην τον ακολουθήσει, αλλά να παραμείνει στο Ανόβερο για να συνεχίσει την «ιστορία» του. Τίποτα δε θα ευχαριστούσε τον Leibniz περισσότερο, από το να ακολουθήσει τον Γεώργιο στην Αγγλία, αν και οι εχθροί του στη βασιλική εταιρεία ήταν πολυάριθμοι και γεμάτοι μίσος λόγω της διένεξης του με το Νεύτωνα. Στα τελευταία του χρόνια μάλιστα εγκαταλείφθηκε από όλους και μόνο ο Φοντενέλ εξεφώνισε εγκωμιαστικό λόγο στη Γαλλική Ακαδημία για την προσωπικότητα του.

Όταν ύστερα από 2 έτη (Σάββατο, 14.11.1716, ώρα 10 p.m.) πέθανε, αυτή η «ιστορία» του, διπλωματικά εξωραϊσμένη, δεν είχε ακόμη ολοκληρωθεί. Παρά τη σκληρή δουλειά του, δεν είχε καταφέρει να προχωρήσει πέραν του έτους 1005, έχοντας καλύψει διάστημα μικρότερο των 300 ετών. Η οικογένεια ήταν τόσο μπερδεμένη στις γαμήλιες περιπέτειες της, που ακόμα και ο Leibniz δε

μπορούσε να τους ξεκληλιδώσει όλους. Οι Brunswickers έδειξαν την εκτίμηση τους για αυτή την τεράστια εργασία με το να ξεχάσουν τα πάντα γύρω από αυτή μέχρι το 1843 που δημοσιεύθηκε. Όμως το κατά πόσο δημοσιεύθηκε πλήρης ή αποκαθαρμένη θα παραμείνει άγνωστο. Το φιλοσοφικό του σύστημα ήταν ασφαλώς το τελευταίο και το πιο πολύπλοκο από τα μεγάλα φιλοσοφικά συστήματα του 17^{ου} αιώνα. Το σύστημα αυτό ήταν ανάλυση της ουσίας. Με το σύστημα του επιχείρησε να οικοδομήσει απαγωγική μέθοδο, η οποία βασιζόταν σε γενικές αρχές αυταπόδεικτα αληθινές, οι οποίες μπορούσαν να αναγάγουν το όλο πεδίο του επιστητού σε λογική τάξη. Το σύστημα του αποτέλεσε το κίνητρο για τις ανακαλύψεις του στη σφαίρα της λογικής και των μαθηματικών. Μετά από τον Αριστοτέλη μπορεί να αποκληθεί επίσης ο δημιουργός της λογικής και ιδιαίτερα του σύγχρονου λογικού λογικισμού.

Προσπάθησε να συμβιβάσει τη θρησκεία με τη φιλοσοφία. Στο βάθος της ύπαρξης των όντων υπάρχουν δύο δυνάμεις. Η νόηση και η δύναμη. Ο θεός είναι άπειρος σε νόηση και δύναμη. Όσο τα δύο αυτά στοιχεία αδυνατίζουν, τόσο μεγαλύτερη και η κατάπτωση των όντων. Πρωτοτυπία παρουσιάζει η θεωρία του περί «μονάδων». Ο κόσμος δεν είναι παρά ένα σύνολο μονάδων, διαφορετικής αξίας και στυλπνότητας. Υπέρτατη μονάδα είναι ο θεός. Αξιοσημείωτη επίσης είναι η αισιοδοξία του για τον κόσμο. Έλεγε ότι «ο κόσμος μας είναι ο καλύτερος από όλους τους κόσμους, που θα μπορούσαν να γίνουν», αντίληψη που σατίρισε ο Βολτέρος στον «Αγαθούλη» του.

Για πολλούς μελετητές ο Leibniz είναι ο περισσότερο σύγχρονος από τους κλασσικούς φιλοσόφους των νέων χρόνων. Βασική του θεωρία είναι εκείνη της γνώσης. Το κέντρο των θεωριών αυτών βρίσκεται στη διάκριση μεταξύ αληθειών του λόγου και αληθειών των πραγμάτων. Κάθε συλλογισμός βασίζεται σε μια από τις δύο αρχές, είτε των λογικών κανόνων της ταυτότητας και της αντίθεσης, είτε σε εκείνες της αρχής του «αποχρώντος λόγου». Η αρχή του «αποχρώντος λόγου» είναι πολύπλοκη. Επιφανειακά σημαίνει απλώς ότι συσχετισμοί ή αιτιώδεις σχέσεις μπορούν να βρίσκονται μεταξύ των γεγονότων. Στην πραγματικότητα όμως οδηγούν σε σειρά συλλογισμών, από τους οποίους συνάγονται τα επιδιωκόμενα συμπεράσματα. Η μεταφυσική του φιλοσόφου εξ άλλου, η οποία ουσιαστικά πηγάζει από τον Αριστοτέλη, μπορεί να χαρακτηριστεί και ως πολυαρχικός ιδεαλισμός αν και όχι φυσικά στην κυριολεξία. Η μεταφυσική του Leibniz φθάνει στο αποκορύφωμα της με την ορθολογική του θεολογία. Στο Θεό αποδίδεται η δημιουργία απείρων ουσιών, ενώ η δημιουργία δεν είναι δύναμη, η οποία ανήκει στην ουσία. Λέμε ότι υπάρχει, αλλά η ύπαρξη του είναι αναγκαία περισσότερο παρά τυχαία. Για την ύπαρξη του υπάρχει μία απόδειξη *a priori* και μία *a posteriori*.

Η πρώτη είναι επανάληψη της οντολογικής απόδειξης και η δεύτερη υποστηρίζει ότι η τελειότητα του θεού μπορεί να αποδειχθεί από την τάξη και την αρμονία της φύσης. Ο Leibniz επιδιώκει να αποδείξει ότι η μεταφυσική τελειότητα του θεού εξυπονοεί ηθική τελειότητα και αρμονία της φύσης. Παρά το πέρασμα του χρόνου οι φιλοσοφικές θεωρίες του Leibniz εξακολουθούν να αποτελούν το επίκεντρο συζητήσεων και η σχετική με τις απόψεις του βιβλιογραφία είναι τεράστια. Γενικά η φιλοσοφία του άσκησε γόνιμη επίδραση στον ευρωπαϊκό φιλοσοφικό στοχασμό και μελετήθηκε όσο λίγες των τελευταίων αιώνων. Έργα του «Μοναδολογία», «Θεοδικία», «Περί μεταφυσικής», κ. α. Σήμερα, περίπου 300 χρόνια από τον θάνατο του, η εκτίμηση για τον Leibniz ως μαθηματικό είναι μεγαλύτερη από όση του είχαν για πολλά χρόνια από τότε που ο γραμματέας του παρακολούθησε την κηδεία του και συνεχίζει

να μεγαλώνει. Ως διπλωμάτης και δημόσιος άνδρας, ήταν ισάξιος με την αντίστοιχη αφρόκρεμα κάθε εποχής και τόπου και ευφυέστερος από όλους τους άλλους μαζί. Δεν υπάρχει παρά ένα μόνο επάγγελμα στον κόσμο αρχαιότερο από το δικό του και μέχρι αυτό να γίνει παραδεκτό θα ήταν πρόωρο να δικάσουμε κάποιον γιατί διάλεξε τη διπλωματία για βιοπορισμό.

«Καθολική μεγαλοφυΐα» είναι ο όρος που ταιριάζει στον Leibniz χωρίς υπερβολή, κάτι που δε συμβαίνει με τον Νεύτωνα, τον ανταγωνιστή του στα μαθηματικά αλλά ασύγκριτο του στη φυσική φιλοσοφία. Ακόμα και στα μαθηματικά η καθολικότητα του Leibniz αντιδιαστέλλεται από την απαρέγκλιτη προσήλωση του Νεύτωνα σε ένα μοναδικό στόχο, εκείνον της εφαρμογής του μαθηματικού συλλογισμού στα φαινόμενα του φυσικού σύμπαντος: Ο Νεύτωνας συνέλαβε ένα πράγμα πρώτου μεγέθους στα μαθηματικά, ο Leibniz δύο.

Το πρώτο από αυτά ήταν ο λογισμός, το δεύτερο η συνδυαστική ανάλυση. Ο λογισμός είναι η φυσική γλώσσα του συνεχούς. Η συνδυαστική ανάλυση επιτυγχάνει για το διακριτό, ότι ο Leibniz για το συνεχές. Στη συνδυαστική ανάλυση έχουμε να κάνουμε με μία συλλογή διακεκριμένων πραγμάτων, που το καθένα έχει τη δική του ατομικότητα και μας ζητείται—στη γενικότερη περίπτωση—να διατυπώσουμε τις σχέσεις που υφίστανται (αν υφίστανται) ανάμεσα σε αυτά τα πλήρως ετερογενή πράγματα. Εδώ δεν εξετάζουμε τις επιβαλλόμενες από εμάς ομοιότητες ανάμεσα στα μαθηματικά αντικείμενα αλλά οτιδήποτε τα ξεχωριστά αντικείμενα, ως ξεχωριστά αντικείμενα, έχουν κοινό—προφανώς όχι πολλά πράγματα. Στην πραγματικότητα φαίνεται πως, στο τέλος, όλα όσα μπορούμε να πούμε με συνδυαστική γλώσσα, καταλήγουν στο να μετρήσουμε με διαφόρους τρόπους τα ξεχωριστά αντικείμενα και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Το ότι αυτή η φαινομενικά αφηρημένη και άγονη διαδικασία θα οδηγούσε σε κάτι σημαντικό, φαίνεται σα θάυμα, αποτελεί όμως γεγονός. Ο Leibniz υπήρξε πρωτοπόρος σε αυτό το πεδίο και ήταν από τους πρώτους που αντιλήφθηκε πως η ανατομία της λογικής—«οι νόμοι της σκέψης» είναι θέμα συνδυαστικής ανάλυσης.

Στις μέρες μας, ολόκληρο το αντικείμενο έχει αριθμοποιηθεί. Με τον Νεύτωνα, το μαθηματικό πνεύμα της εποχής του απέκτησε ολοκληρωμένη μορφή και υπόσταση. Ήταν αναπόφευκτο πως μετά το έργο του Cavalieri (1598–1647), του Fermat (1601–1665), του Wallis (1616–1703), του Barrow (1630–1677) και άλλων, ο λογισμός σύντομα θα οργανωνόταν ως αυτόνομη γνωστική περιοχή. Σαν ένας κρύσταλλος ριγμένος σε κεκορεσμένο διάλυμα την κρίσιμη στιγμή, ο Νεύτωνας στερεοποίησε τις αιωρούμενες ιδέες της εποχής του και μορφοποίησε τον λογισμό. Κάθε πρώτης τάξεως μυαλό θα μπορούσε εξ' ίσου καλά να παίξει το ρόλο του κρυστάλλου. Ο Leibniz ήταν το άλλο πρώτης τάξης μυαλό της εποχής και αποκρυστάλλωσε επίσης το λογισμό. Όμως υπήρξε κάτι περισσότερο από ένας καταλύτης για την έκφραση του πνεύματος του καιρού του, κάτι που δε συνέβαινε στα μαθηματικά με τον Νεύτωνα.

Οραματιζόμενος ένα «καθολικό χαρακτηριστικό», ο Leibniz βρισκόταν περισσότερο από δύο αιώνες μπροστά από την εποχή του και περιοριζόμαστε μόνο στα μαθηματικά και τη λογική. Όπως έχει δείξει μέχρι τώρα η ιστορική έρευνα, ήταν μόνος του στο δεύτερο μεγάλο μαθηματικό όραμα του. Ο συνδυασμός σε ένα μυαλό εξαιρετικών ικανοτήτων σε δύο πλατιά, αντιθετικά πεδία μαθηματικής σκέψης, το αναλυτικό και το διακριτό, δεν είχε ξανασυμβεί πριν από τον Leibniz, αλλά ούτε και μετά από αυτόν. Είναι η μοναδική περίπτωση ανθρώπου στην ιστορία των μαθηματικών που διέθετε και τις δύο

ποιότητες σκέψης σε υπερθετικό βαθμό. Η συνδυαστική του κατεύθυνση αντανakλάται στο έργο των γερμανών διαδόχων του, κυρίως σε τετριμμένα πράγματα. Μόνο στον 20^ο αιώνα με το έργο των [Whitehead](#) και [Russell](#), που συνέχισαν εκείνο του [Boole](#) στον 19^ο, πραγματοποιήθηκε μερικώς το όραμα του Leibniz για έναν καθολικό συμβολικό λογισμό, ώστε η μέγιστη σημασία για ολόκληρη τη μαθηματική και επιστημονική σκέψη της συνδυαστικής πλευράς των μαθηματικών να αναδειχθεί στο βαθμό που ο Leibniz είχε προβλέψει.

Σήμερα η συνδυαστική μέθοδος του Leibniz, όπως αναπτύχθηκε στη συμβολική λογική και στις επεκτάσεις της, είναι τόσο σημαντική για την ανάλυση- που μαζί με το Νεύτωνα την ώθησαν προς τη σημερινή της πολυπλοκότητα- όσο η ίδια η ανάλυση, διότι η συμβολική μέθοδος προσφέρει τη μόνη ορατή δυνατότητα απαλλαγής της μαθηματικής ανάλυσης από τα παράδοξα και τις αντινομίες που έχουν μολύνει τα θεμέλια της από τα χρόνια του [Ζήνωνα](#). Ο Leibniz δεν επεξεργάστηκε ο ίδιος το μεγάλο του σχέδιο της αναγωγής όλου του ακριβούς λογισμού σε μία συμβολική τεχνική. Όμως το συνέλαβε ολόκληρο και έκανε ένα σημαντικό ξεκίνημα. Οι υπηρεσίες προς τους πριγκιπούληδες του καιρού του, που του απέφεραν ανάξιες λόγου τιμές και περισσότερα πράγματα από όσα χρειαζόταν, η καθολικότητα του μυαλού του και οι εξαντλητικές αντιπαραθέσεις κατά τη διάρκεια των τελευταίων του χρόνων, όλα συνέτειναν στο να μην καταφέρει ο Leibniz να δημιουργήσει ένα αριστούργημα ανάλογο με το Principia του Νεύτωνα.

Σε μια σύντομη περίληψη όσων πέτυχε ο Leibniz, των πολυποίκιλων δραστηριοτήτων του και της ακοίμητης περιέργειας του, θα ξαναδούμε να επανεμφανίζεται η τραγωδία του κοινωνικά ανικανοποίητου που πρόωρα ανέκοψε τη δημιουργική πορεία σε περισσότερα από ένα μαθηματικά ταλέντα υψίστου επιπέδου. Την είδαμε στην περίπτωση του Νεύτωνα, ο οποίος επεδίωκε τη λαϊκή εκτίμηση που δεν άξιζε ούτε το φτύσιμο του και θα την δούμε στον [Gauss](#), που η ανάγκη του να πετύχει την αναγνώριση ανθρώπων διανοητικά κατώτερων του τον απομάκρυνε από το μεγαλύτερο του έργο. Μόνο ο [Αρχιμήδης](#) ανάμεσα στους μέγιστους μαθηματικούς κράτησε διαφορετική στάση.

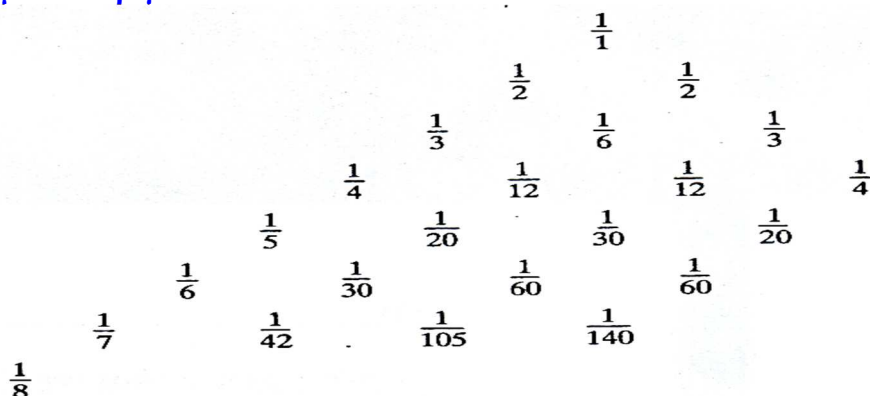
Μόνο αυτός γεννήθηκε μέσα στην κοινωνική τάξη της οποίας οι άλλοι επεδίωκαν να γίνουν μέλη. Ο [Νεύτωνας](#) το έκανε με τρόπο ωμό και άμεσο. Ο [Gauss](#) έμμεσα και χωρίς αμφιβολία υποσυνείδητα, με το να αναζητήσει την επιδοκimasία ανθρώπων με εδραιωμένη φήμη και αναγνωρισμένη κοινωνική θέση, μολονότι ο ίδιος ήταν ο πιο απλός ανάμεσα στους απλούς. Και έτσι μπορεί να ειπωθεί για την αριστοκρατία: το να είσαι αριστοκράτης από γεννησιμιού σου, ή το να κατέχεις κάποια κοινωνική διάκριση, είναι το μόνο πράγμα που θα σου δείξει το μέγεθος της ασημαντότητας της.

Στην περίπτωση του Leibniz, η απληστία του για χρήματα, που του μεταδόθηκε από τους αριστοκράτες εργοδότες του, συνέβαλε στη διανοητική του απραξία: μία ζωή καταπιανόταν με το να ξεμπερδεύει τα γενεαλογικά δέντρα των μισοβασιλικών μπαστάρδων- οι απόγονοι των οποίων του πλήρωναν μεγάλους μισθούς- και με το να αποδεικνύει, βασισμένος στην αξεπέραστη νομική γνώση του, τα κληρονομικά τους δικαιώματα σε δουκάτα, κάτι που οι «je m'en fou» πρόγονοι τους είχαν αμελήσει να ξεκαθαρίσουν. Αλλά ακόμη πιο καταστροφικό για αυτόν από την επιθυμία του για τα χρήματα, ήταν το καθολικό του μυαλό και η ικανότητα του να κινείται σε πολλά επίπεδα, κάτι για το οποίο χρειαζόταν χίλια χρόνια ζωής και όχι εβδομήντα μόνο.

Σύμφωνα με τις επικρίσεις του [Gauss](#), ο Leibniz σπατάλησε το λαμπρό του μαθηματικό ταλέντο σε μία πληθυσμική γνωστικών αντικειμένων, τέτοιων που

κανένα ανθρώπινο πλάσμα δε θα μπορούσε να ελπίζει ότι θα πετύχαινε εξαιρετικά αποτελέσματα, ενώ –κατά τον Gauss– στα μαθηματικά είχε όντως έμφυτες εξαιρετικές ικανότητες. Όμως γιατί να τον κατακρίνουμε; Ήταν ότι ήταν και είτε το ήθελε είτε όχι, έπρεπε να υποταχθεί σε αυτό και να δεχθεί τις συνέπειες της ιδιαιτερότητας του. Ακριβώς η διάχυση της μεγαλοφυΐας του ήταν που τον κατέστησε ικανό του οράματος του «καθολικού χαρακτηριστικού», κάτι που δε μπόρεσαν να συλλάβουν οι Αρχιμήδης, Νεύτωνα και Gauss. Μπορεί να χρειάστηκαν άλλοι για να υλοποιηθεί, ο Leibniz έκανε τη δουλειά του με το να δει το εφικτό και τη σημασία του.

2. Το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz



Σχήμα 3. Ένα κομμάτι από το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz

Οι ιδιότητες του είναι «ανάλογες λόγω αντίθεσης» προς αυτές του τριγώνου Pascal. Το τελευταίο περιλαμβάνει ακεραίους, ενώ το τρίγωνο του Leibniz περιέχει αντίστροφους των ακεραίων. Στο τρίγωνο του Pascal, ο κάθε αριθμός είναι το άθροισμα του βορειοδυτικού και βορειοανατολικού γείτονα του. Στο τρίγωνο του Leibniz ο κάθε αριθμός ισούται με το άθροισμα του νοτιοδυτικού και του νοτιοανατολικού γείτονα του. Για παράδειγμα:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

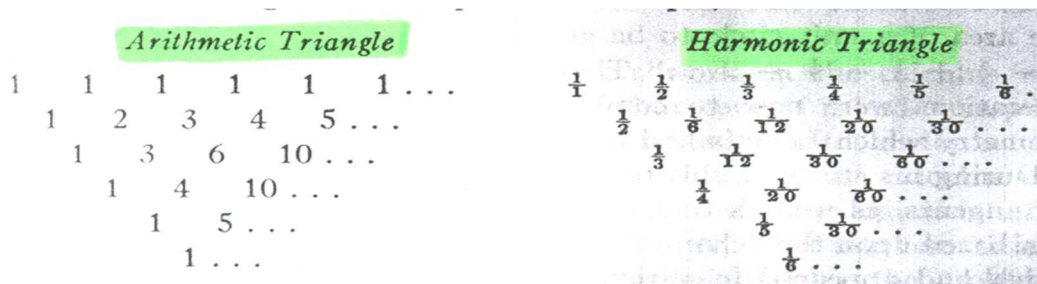
το οποίο αποτελεί και τον αναδρομικό τύπο του τριγώνου του Leibniz. Υπάρχει επίσης και η εξής συνοριακή συνθήκη του τριγώνου: Οι αριθμοί που ανήκουν στη βορειοδυτική μεθόριο (τη «μηδενική λεωφόρο») είναι οι αντίστροφοι των διαδοχικών ακεραίων, $1/1$, $1/2$, $1/3$, Ξεκινώντας από τις συνοριακές τιμές που είναι γνωστές, παίρνουμε τους υπόλοιπους αριθμούς μέσω πρόσθεσης στην περίπτωση του τριγώνου Pascal, αλλά μέσω αφαίρεσης στο παρόν τρίγωνο. Στο παραπάνω σχήμα υπάρχουν μερικά κενά τα οποία μπορούν αμέσως να συμπληρωθούν με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου, λόγου χάρη,

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \quad \text{και} \quad \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}.$$

Αριθμητικό τρίγωνο	Αρμονικό τρίγωνο
1 1 1 1 1 1 1 ...	$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$...
1 2 3 4 5 6 ...	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{30}$...
1 3 6 10 15 ...	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{60}$...
1 4 10 20 ...	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{60}$...
1 5 15 ...	$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{30}$...
1 6 ...	$\frac{1}{6}$...
1 ...	

Στο αριθμητικό τρίγωνο κάθε στοιχείο (εκτός αυτών της πρώτης στήλης) ισούται με τη διαφορά των δύο όρων ακριβώς από κάτω του και προς τα αριστερά. Στο αρμονικό τρίγωνο κάθε όρος (εκτός αυτών της πρώτης γραμμής) ισούται με τη διαφορά των δύο όρων ακριβώς από πάνω του και προς τα δεξιά. Επιπλέον, στο αριθμητικό τρίγωνο κάθε στοιχείο (εκτός αυτών της πρώτης στήλης ή γραμμής) ισούται με το άθροισμα όλων των όρων στην από πάνω γραμμή και προς τα αριστερά. Στο αρμονικό τρίγωνο κάθε στοιχείο ισούται με το άθροισμα όλων των όρων στην από κάτω γραμμή και προς τα δεξιά. Ο αριθμός των όρων στην τελευταία περίπτωση είναι άπειρος και έτσι ο Leibniz εξασκήθηκε αρκετά στην άθροιση των απειροσειρών. Η σειρά στην πρώτη γραμμή είναι η αρμονική σειρά, η οποία αποκλίνει. Σε όλες τις υπόλοιπες σειρές η σειρά συγκλίνει. Οι αριθμοί στη 2^η σειρά ισούται με το ήμισυ των αντιστρόφων των τριγώνων αριθμών και ο Leibniz γνώριζε ότι το άθροισμα αυτής της σειράς είναι 1. Οι αριθμοί στην 3^η σειρά ισούται με το $\frac{1}{3}$ των αντιστρόφων των πυραμιδικών αριθμών $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) / 1 \cdot 2 \cdot 3$ και το αρμονικό τρίγωνο δείχνει ότι το άθροισμα αυτής της σειράς είναι $\frac{1}{2}$. Οι αριθμοί στην 4^η σειρά είναι το ένα τέταρτο των αντιστρόφων των πολυγωνικών αριθμών που αντιστοιχούν στο τετραδιάστατο ανάλογο του τετραέδρου και το άθροισμα τους είναι $\frac{1}{3}$. Στο αρμονικό τρίγωνο και στο αριθμητικό τρίγωνο του Pascal, υπάρχουν εκπληκτικές σχέσεις.

Λόγου χάρη, στο αριθμητικό τρίγωνο κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα όλων των όρων στη γραμμή που βρίσκεται πάνω και προς τα αριστερά από αυτό, και είναι επίσης η διαφορά μεταξύ των δύο όρων ακριβώς κάτω από αυτό. Ομοίως, στο αρμονικό τρίγωνο κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των όρων της γραμμής που βρίσκεται κάτω και προς τα δεξιά από αυτό και είναι επίσης η διαφορά μεταξύ των δύο όρων που βρίσκονται ακριβώς πάνω από αυτό. Δηλαδή, στο αριθμητικό τρίγωνο του Pascal, αν συμβολίσουμε με x τους αριθμούς σε οποιαδήποτε γραμμή, οι αριθμοί της πρώτης γραμμής που βρίσκεται από κάτω θα είναι το άθροισμα όλων των x ως εκείνο το σημείο, από αριστερά προς τα δεξιά. Εκείνοι της δεύτερης γραμμής προς τα κάτω θα είναι το άθροισμα των αθροισμάτων όλων των x , κοκ. Αντιστρόφως, οι γραμμές προς τα επάνω αντιπροσωπεύουν τις διαφορές, τις διαφορές των διαφορών, κοκ.



του εμβადού και του όγκου σκεπτόμενος αποκλειστικά σε σχέση με το ρυθμό μεταβολής. Γι' αυτόν η διαφόριση ήταν βασική. Αυτή η διαδικασία και η αντίστροφή της, έλυναν όλα τα προβλήματα του λογισμού και μάλιστα η χρήση της άθροισης για τον υπολογισμό ενός εμβადού, όγκου ή κέντρου βάρους, εμφανίζεται πολύ σπάνια στο έργο του. Ο [Leibniz](#), από την άλλη πλευρά, σκέφθηκε αρχικά σε σχέση με την άθροιση, παρ' όλο που, φυσικά, αυτά τα αθροίσματα υπολογίζονταν μέσω της αντιδιαφόρισης. Μια τρίτη διάκριση μεταξύ των έργων των δύο ανδρών, έγκειται στην ελεύθερη χρήση των σειρών για την αναπαράσταση συναρτήσεων, από τον Newton. Ο Leibniz, προτιμούσε την κλειστή μορφή. Σε μια επιστολή του [1676](#) προς τον Leibniz, ο Newton εξήρε τη χρήση των σειρών, ακόμη και για την λύση απλών διαφορικών εξισώσεων. Αν και ο Leibniz χρησιμοποίησε άπειρες σειρές, απάντησε ότι ο πραγματικός σκοπός θα έπρεπε να είναι η εξαγωγή αποτελεσμάτων σε πεπερασμένους όρους, με τη χρήση των τριγωνομετρικών και λογαριθμικών συναρτήσεων, όπου οι αλγεβρικές συναρτήσεις δε θα εξυπηρετούσαν. Υπενθύμισε στον Newton τον ισχυρισμό του [James Gregory](#), ότι η ευθείοποίηση της έλλειψης και της υπερβολής μπορούσε να αναχθεί στις κυκλικές και λογαριθμικές συναρτήσεις και προκάλεσε τον Newton να προσδιορίσει με τη χρήση σειρών, αν ο Gregory είχε δίκιο.

Ο Newton απάντησε ότι, με τη χρήση των σειρών μπορούσε να αποφασίσει αν κάποιες ολοκληρώσεις μπορούσαν να επιτευχθούν σε πεπερασμένους όρους, αλλά δεν έδωσε κανένα κριτήριο. Και πάλι, σε μια επιστολή του [1712](#) προς τον [Johann Bernoulli](#), ο Leibniz αντιτάχθηκε στα αναπτύγματα συναρτήσεων σε σειρές και δήλωσε ότι ο λογισμός θα έπρεπε να απασχολείται με την αναγωγή των αποτελεσμάτων του σε τετραγωνισμούς (ολοκληρώσεις) και, όπου ήταν απαραίτητο, σε τετραγωνισμούς που περιλάμβαναν υπερβατικές συναρτήσεις. Υπάρχουν διαφορές στον τρόπο εργασίας τους. Ο Newton υπήρξε εμπειρικός, σαφής και επιφυλακτικός, ενώ ο Leibniz ήταν θεωρητικός, επιδιδόμενος σε γενικεύσεις και τολμηρός. Ο Leibniz ασχολούνταν περισσότερο με λειτουργικούς τύπους για να παραγάγει ένα λογισμό με την ευρεία έννοια. Λόγου χάρη, κανόνες για το διαφορικό ενός γινομένου ή πηλίκου συναρτήσεων, τον κανόνα του για το $d^n(uv)$ (όπου u και v είναι συναρτήσεις του x), και έναν πίνακα ολοκληρωμάτων. Ο Leibniz ήταν εκείνος που έθεσε τους νομοκανόνες του λογισμού, το σύστημα των κανόνων και των τύπων. Ο Newton δεν ασχολήθηκε με τη διατύπωση κανόνων, παρ' όλο που μπορούσε εύκολα να έχει γενικεύσει τα σαφή του αποτελέσματα. Γνώριζε ότι αν $z=uv$, τότε $\dot{z} = u\dot{v} + v\dot{u}$, αλλά δεν τόνισε αυτό το γενικό αποτέλεσμα. Αν και ο Newton εγκαινίασε πολλές μεθόδους, δεν τις τόνισε. Οι εκπληκτικές του εφαρμογές του λογισμού όχι μόνο επέδειξαν την αξία του αλλά, πολύ περισσότερο από ό,τι το έργο του Leibniz, καθόρισαν τη συνολική κατεύθυνση της ανάλυσης του 18^{ου} αιώνα. Ο Newton και ο Leibniz διέφεραν επίσης και στο ενδιαφέρον τους για το συμβολισμό. Ο Newton δεν απέδωσε καμιά σημασία στο εν λόγω ζήτημα, ενώ ο Leibniz δαπανούσε μέρες για την επιλογή κατάλληλου συμβολισμού.

4. Κριτική του έργου των Leibniz και Newton

Οι θεμελιωτές του λογισμού είχαν διατυπώσει σαφώς τους κανόνες των πράξεων που έπρεπε να προσεχθούν και η εκπληκτική επιτυχία αυτών των κανόνων όταν εφαρμόζονταν σε προβλήματα μαθηματικών και φυσικής από τους [Euler](#), [Lagrange](#), [Laplace](#) και πλήθος άλλους, οδήγησε κάποιους στο να παραβλέψουν σε κάποιο βαθμό την ιδιαίτερα μη ικανοποιητική κατάσταση της λογικής και της φιλοσοφίας του θέματος. Ολόκληρο τον 18^ο αιώνα υπήρχε γενική αμφιβολία ως προς τη φύση των θεμελίων της μεθόδου των ροών και του διαφορικού λογισμού. Στην

Αγγλία η έλλειψη σαφήνειας του Newton και η ασυνέπειά του στο συμβολισμό ακολουθήθηκε από μια σύγχυση των ροών με τις στιγμές. Στην Ήπειρο, ο μεταφυσικός ρασιοναλισμός του Leibniz παραμελήθηκε από τους οπαδούς του, οι οποίοι ελεύθερα επιχειρούσαν να ερμηνεύσουν τα διαφορικά ως πραγματικά απειροστά ή ακόμη ως μηδενικά και οι οποίοι επέκριναν τον Leibniz για τη διστακτικότητά του σ' αυτό το ζήτημα. Μια τέτοια κατάσταση δε μπορούσε να συνεχιστεί επί μακρόν χωρίς αμφισβήτηση. Ο Nieuwentijdt είχε νωρίτερα αμφισβητήσει την εγκυρότητα των διαφορικών ανώτερων τάξεων. Ο Gassendi είχε αναφερθεί στη ματαιότητα των μαθηματικών αποδείξεων που βασίζονταν σε μεθόδους απειροστών⁷ και ο Bayle είχε χρησιμοποιήσει τις δυσκολίες του απείρου για να υπηρετήσει ένα γενικό σκεπτικισμό.⁸ Εν τούτοις, η πιο γενική και σημαντική επίθεση εναντίον της δομής της νέας ανάλυσης εξαπολύθηκε το 1734 από το φιλόσοφο και κληρικό George Berkeley (1685–1753), σε ένα φυλλάδιο με τίτλο *The Analyst*.⁹ Ο Berkeley είχε προηγουμένως επιτεθεί στην κοσμολογία του Newton στην εργασία του *Essay towards a New Theory of Vision*, αλλά το κίνητρο που υποκινούσε τις επικρίσεις του στο *The Analyst* ήταν τόσο εκείνο της παροχής μιας απολογίας για τη θεολογία, όσο και εκείνο του να καταφέρει μια σοβαρή επίπληξη στους συνηγόρους του νέου λογισμού για τα ασθενή θεμέλια του θέματος. Αυτά τα συνάγουμε από τον υπότιτλο του φυλλαδίου: *Or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* (Η μια ομιλία που απευθύνεται σε έναν άπιστο μαθηματικό). [αυτό αναφέρονταν στο φίλο του Newton, Edmund Halley.]

Wherein It Is Examined Whether the Object, Principles, and Inferences of the Modern Analysis Are More Distinctly Conceived, or More Evidently Deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith. “First Cast the Beam Out of Thine Own Eye; and Then Shalt Thou See Clearly to Cast Out The Mote Out of Thy Brother’s Eye.”

(Στην οποία εξετάζεται το αν ο σκοπός, οι αρχές και τα συμπεράσματα της σύγχρονης ανάλυσης έχουν συλληφθεί ευκρινέστερα, ή έχουν συμπερανθεί πιο προφανώς, από τα θρησκευτικά μυστήρια ή τα ζητήματα πίστης. «Πρώτα βγάλε το δοκάρι από το δικό σου μάτι και έπειτα θα δεις καθαρά για να βγάλεις την ακίδα από το μάτι του αδελφού σου.») Ο Berkeley σε αυτό το έργο δεν αρνήθηκε τη χρησιμότητα των νέων επινοημάτων, ούτε την εγκυρότητα των προκυπτόντων αποτελεσμάτων. Απλώς ισχυρίζονταν, με μια επίδειξη δικαιοκρισίας, ότι οι μαθηματικοί δεν είχαν δώσει κανένα δικαιολογημένο επιχείρημα για την τεχνική τους, έχοντας χρησιμοποιήσει επαγωγικό αντί παραγωγικό συλλογισμό.¹⁰ Οι ενστάσεις του δεν ήταν προς τον μαθηματικό ως καλλιτέχνη και υπολογιστή, αλλά ως «άνθρωπο της επιστήμης και της απόδειξης». Αφού έδωσε μια περιγραφή της μεθόδου των ροών του Newton ή οποία είναι εξαιρετικά δίκαια, εκτός από τον άσχετο εμπαιγμό των διαδοχικών ροών, ο Berkeley υπέδειξε τις συγκεκριμένες ενστάσεις του. Εφόσον ο Newton δε μετέβαλε καθόλου την άποψή του, ο Berkeley δίκαια εκμεταλλεύθηκε το γεγονός για να ασκήσει κριτική σε μια απόδειξη στο *Principia* στην οποία ο συγγραφέας είχε χρησιμοποιήσει τα απείρως μικρά μεγέθη για να προσδιορίσει τη στιγμή ενός γινομένου.¹¹ Ο Newton είχε βρει την στιγμή του ορθογωνίου AB δίνοντας στα A και B τις μειώσεις και τις αυξήσεις $\frac{1}{2}a$ και $\frac{1}{2}b$, και αφαιρώντας κατόπιν το ελαττωμένο ορθογώνιο από το αυξημένο. Ο Berkeley

⁷ Βλέπε Bayle, *Dictionnaire historique et critique*, XV, 63

⁸ Cohn, *Geschichte des Unendlichkeits problems*, pp. 193–197

⁹ *The Works of George Berkeley*, Vol. III

¹⁰ Cf. *ibid.*, p. 30

¹¹ *ibid.*, pp. 22–23

αντέταξε ότι πρέπει να πάρουμε ολόκληρα τα ποσά a και b ως αυξήσεις και μειώσεις για να βρούμε την στιγμή του AB , και στην περίπτωση αυτή θα έπρεπε να παραλείψουμε από τον τελικό υπολογισμό το απείρως μικρό μέγεθος ab . Ο Berkeley με κάθε δικαίωμα επέκρινε την παράλειψη του απείρως μικρού μεγέθους ab , αν το αποτέλεσμα πρέπει να είναι αυστηρά ορθό και παρέθετε ένα χωρίο από το *De Quadratura*, στο οποίο ο Newton ισχυριζόνταν ότι δεν αγνοούσε τίποτε, όσο μικρό και αν ήταν αυτό.

Ο Newton δεν είχε προχωρήσει σε αιτιολόγηση της απόδειξής του, αλλά είχε υποδείξει ότι αυτή θα μπορούσε να βρεθεί στην μέθοδο των πρώτων και εσχάτων λόγων. Συνεπώς, ο Berkeley επιτέθηκε σ' αυτού του είδους τον συλλογισμό, όπως εφαρμόζονταν από τον Newton σε μια από τις κυριότερες αποδείξεις του: εκείνη της εύρεσης της ροής του x^n στο *De Quadratura*, στην οποία ο Newton προσπάθησε να αποφύγει το απείρως μικρό.¹² Εδώ ο Newton είχε δώσει στο x μια αύξηση o , είχε αναπτύξει το $(x+o)^n$ μέσω του διωνυμικού θεωρήματος, είχε αφαιρέσει το x^n για να

βρει την αύξηση του x^n , είχε διαιρέσει δια o για να βρει το λόγο των αυξήσεων των x^n και x και κατόπιν είχε αφήσει το o να αφανιστεί, προσδιορίζοντας έτσι τον έσχατο λόγο των αυξήσεων (ή των ροών). Ο Berkeley βέβαιος ότι ο Newton εδώ αγνηφούσε το νόμο της αντίφασης, καθώς υπέθετε πρώτα ότι το x δέχεται μια αύξηση και κατόπιν, με σκοπό να φθάσει στο αποτέλεσμα, επέτρεπε στην εν λόγω αύξηση να γίνει μηδενική, δηλαδή, υπέθετε ότι δεν υπήρξε καμιά αύξηση. Ο Berkeley υποστήριξε πως η υπόθεση ότι οι αυξήσεις μηδενίζονται καταστρέφει την υπόθεση ότι υπήρξαν αυξήσεις. Μια τέτοια ερμηνεία του νοήματος του Newton, η οποία

φυσικά προκύπτει από τη θεώρηση του λόγου $\frac{0}{0}$, δεν είναι αδικαιολόγητη, αφού ο

Newton δεν εξήγησε επαρκώς τους όρους «αφανιζόμενο μέγεθος» και «πρώτος και έσχατος λόγος», στους οποίους στηρίζεται η συλλογιστική. Η σύγχρονη ερμηνεία σε σχέση με τα όρια, βεβαίως, θεωρεί την άπειρη ακολουθία που σχηματίζεται από τους λόγους καθώς η αύξηση πλησιάζει το μηδέν και αυτή δεν έχει τελευταίο όρο, παρ' όλο που ορίζεται ως έχουσα όριο. Η έκφραση «έσχατος λόγος», του Newton, είναι τουλάχιστον παραπλανητική και σε κάθε περίπτωση φανερώνει έλλειψη εκτίμησης των λεπτών δυσκολιών που υπεισέρχονται στις έννοιες του απείρου, της συνέχειας, και του πραγματικού αριθμού, δυσκολίες που δεν ξεπεράστηκαν μέχρι το δεύτερο ήμισυ του δεκάτου ενάτου αιώνα. Αν και τα επιχειρήματα του Berkeley κατευθύνονταν πρωτίστως εναντίον της βρετανικής μεθόδου των ροών, η μέθοδος των διαφορικών, όπως χρησιμοποιούνταν στην Ήπειρο από τον *L'Hospital* και άλλους, κατέστη επίσης αντικείμενο κριτικής.¹³ Εξηγούσε ότι κατά την εύρεση της εφαπτομένης μέσω των διαφορικών, κάποιος υποθέτει αρχικά αυξήσεις, οι οποίες όμως προσδιορίζουν την τέμνουσα και όχι την εφαπτομένη. Εν τούτοις, επανορθώνει το σφάλμα αυτό με την αγνόηση των διαφορικών ανώτερης τάξης και συνεπώς «μέσω ενός διπλού σφάλματος φθάνει κανείς, αν και όχι επιστημονικά, πάντως, στο αληθές». Αυτή την ερμηνεία της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων του λογισμού,¹⁴ θα την συναντήσουμε και πάλι, πιο εξελιγμένη, από τους *Euler*, *Lagrange*, και *Carnot*, συνηγόρους της μεθόδου των διαφορικών που επιθυμούσαν να διασαφηνίσουν τις βάσεις της. Η κριτική του Berkeley για τις προτάσεις του Newton έγινε καλά αποδεκτή από μαθηματικής άποψης και η ένστασή του στις συλλήψεις των

¹² *ibid.*, III, 24–25

¹³ *ibid.*, III, 20, 29

¹⁴ *ibid.*, III, 32

απειροστών από τον Newton, με το επιχείρημα ότι ήταν αυτοαναιρούμενες, ήταν πολύ εύστοχη. Από την άλλη πλευρά, οι ενστάσεις του για κάποια από τα μεγέθη του Newton –όπως οι ροές, οι γεννώμενες και αφανιζόμενες αυξήσεις, οι στιγμές ως αυξήσεις *in statu nascenti*, οι πρώτοι και έσχατοι λόγοι, τα απειροστά, οι έσχατες μορφές των αφανιζομένων τριγώνων– επί τη βάση του θεωρούμενου ακατανόητου ή ασύλληπτου χαρακτήρα τους, παρ’ όλο που ήταν δικαιολογημένες, καθοδηγήθηκαν σε λάθος κατεύθυνση. Υποθέτοντας ότι τα εμπλεκόμενα σύμβολα έχουν οριστεί σαφώς και λογικά (εκτός από τα πρωταρχικά μη οριζόμενα στοιχεία του θέματος), δεν υπάρχουν συνέπειες από μαθηματικής άποψης στον αν κανείς μπορεί να τα συλλάβει με κάποιον τρόπο που αντιστοιχεί στη φυσική αντίληψη. Έτσι, ο [Berkeley](#) ισχυρίστηκε ότι η έννοια της ταχύτητας εξαρτάται από το χώρο και τα χρονικά διαστήματα και ότι συνεπώς είναι αδύνατο να συλληφθεί μια στιγμιαία ταχύτητα, δηλαδή, μια ταχύτητα στην οποία αυτά τα διαστήματα είναι μηδενικά.¹⁵ Το επιχείρημά του είναι φυσικά απολύτως έγκυρο καθώς δείχνει ότι η στιγμιαία ταχύτητα δεν έχει φυσική πραγματικότητα, αλλά αυτός δεν είναι λόγος, αν οριστεί κατάλληλα ή ληφθεί ως μη ορισμένη έννοια, για να μην γίνει δεκτή ως μια μαθηματική αφαίρεση. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι όπως ακριβώς ο καθαρά υλιστής [Hobbes](#), μη μπορώντας να συλλάβει τις γραμμές χωρίς πάχος, τις αρνήθηκε στη γεωμετρία, έτσι και ο [Berkeley](#), ο υπέρμετρα ιδεαλιστής, ήθελε να εξαιρέσει από τα μαθηματικά την «ασύλληπτη» ιδέα της στιγμιαίας ταχύτητας. Τούτο είναι σύμφωνο με την πρώιμη αισθησιαρχία του Berkeley, που τον οδήγησε στο να θεωρεί τη γεωμετρία ως μια εφαρμοσμένη επιστήμη η οποία ασχολείται με πεπερασμένα μεγέθη που συντίθενται από αδιαίρετα «*minima sensibilia*».¹⁶

Σε σύνδεση με αυτή την ιδέα, ο [Berkeley](#) ισχυρίστηκε ότι θα ήταν καλύτερο στο λογισμό να θεωρούνται αυξήσεις παρά ταχύτητες. Σε κάθε περίπτωση, προειδοποιούσε, οι αυξήσεις και οι ταχύτητες δεν πρέπει να συγχέονται όπως γίνονταν συχνά από τον Newton.¹⁷ Αποδέχονταν τα αδιαίρετα του [Cavalieri](#), αλλά επέμενε ότι ήταν πεπερασμένα σε πλήθος, λέγοντας ότι η έπ’ άπειρον διαιρετότητα αποτελεί μόνο δημιούργημα της φαντασίας και ότι τα απείρως μικρά μεγέθη είναι ασύλληπτα, διότι συνεπάγονται την ύπαρξη επέκτασης χωρίς αντίληψή της από το νου μέσω των αισθήσεων. Ο [Berkeley](#) δεν ήταν σε θέση να εκτιμήσει ότι τα μαθηματικά δεν ασχολούνταν με έναν κόσμο «πραγματικών» εντυπώσεων μέσω των αισθήσεων. Με τον ίδιο σχεδόν τρόπο κάποιοι σύγχρονοι φιλόσοφοι επικρίνουν τις μαθηματικές ιδέες του απείρου και του συνεχούς, καθώς δεν καταφέρνουν να αντιληφθούν ότι, αφού τα μαθηματικά ασχολούνται με σχέσεις μάλλον παρά με την φυσική ύπαρξη, το κριτήριό τους για την αλήθεια είναι μάλλον η εσωτερική συνέπεια παρά η αληθοφάνεια, υπό το φως της αισθητηριακής αντίληψης ή της διαίσθησης.

Αν και εκείνα τα επιχειρήματα του Berkeley που βασίζονται στο χαρακτήρα του ασύλληπτου των εμπλεκόμενων εννοιών χάνουν την ισχύ τους εν όψει της σύγχρονης άποψης για τη φύση των μαθηματικών, είναι σαφές ότι υπήρχε μια εμφανής ανάγκη για λογική διασαφήνιση πολλών από τους όρους που είχε χρησιμοποιήσει ο Newton. Οι επικρίσεις του Berkeley, παρ’ όλο που ήταν παρατηρήσεις ενός μη μαθηματικού, υπήρξαν επιτυχείς στο να κάνουν αυτό το γεγονός να εκτιμηθεί. Ως αποτέλεσμα, εμφανίστηκαν μέσα στα επόμενα επτά χρόνια περίπου τριάντα φυλλάδια και άρθρα που επιχειρούσαν να διορθώσουν την κατάσταση. Το πρώτο εμφανίστηκε το 1734, προέρχονταν από τον [James Jurin](#) και είχε τον τίτλο *Geometry No Friend to Infidelity: or, A Defence of Sir Isaac Newton*

¹⁵ *ibid.*, III, 19

¹⁶ Johnston, *The Development of Berkeley's Philosophy*, pp. 82–86

¹⁷ *The Works of George Berkeley*, Vol. III, 46–47

and the British Mathematicians, in a Letter Addressed to the Author of the Analyst by Philaethes Cantabrigiensis. Αυτή η υπεράσπιση είναι ασθενική στο έπακρον.

Ο Jurin υποστήριζε κατηγορηματικά ότι οι ροές είναι σαφείς για εκείνους που είναι έμπειροι στη γεωμετρία. Αναφορικά με τη συγκεκριμένη κριτική του Berkeley για τον προσδιορισμό της στιγμής του AB από το Newton, ο Jurin έδινε δύο απαντήσεις: η στιγμή ab στην εξήγηση του Berkeley ήταν κατ' αυτόν σαν κεφάλι καρφίτσας μπροστά στην υδρόγειο σφαίρα ή τον ήλιο ή τη σφαίρα των σταθερών άστρων. Παρά ταύτα, την τεχνική του Newton την υπερασπίστηκε ισχυριζόμενος ότι η στιγμή είναι ο αριθμητικός μέσος της αύξησης και της μείωσης! Σε απάντηση στις ενστάσεις του Berkeley για τον προσδιορισμό της ροής του x'' , όπως αυτός δίνονταν από τον Newton στο *De Quadratura*, ο Jurin έλεγε αφελώς ότι δεν πρέπει κάποιος να αφήσει την αύξηση να μηδενιστεί, αλλά να την αφήσει να «καταστεί αφανιζόμενη» ή «να βρίσκεται στο σημείο αφανισμού», επιβεβαιώνοντας ότι «υπάρχει μια τελευταία αναλογία αφανιζομένων αυξήσεων».¹⁸ Η απάντηση του Jurin δείχνει ότι ο ίδιος δε διέθετε επαρκή εκτίμηση ούτε των επιχειρημάτων του Berkeley ούτε της φύσης της έννοιας του ορίου. Ο Berkeley απάντησε στον Jurin το 1735, στο *A Defence Of Freethinking in Mathematics*,¹⁹ και δίκαια ισχυρίστηκε ότι ο τελευταίος επιχειρούσε να υπερασπιστεί κάτι που δεν κατανοούσε.²⁰ Σε αυτό το έργο ο Berkeley επικαλούνταν και πάλι τη διαίρεση των απόψεων του Newton (όπως παρουσιάζονταν στο *De Analysisi*, το *Principia* και το *De Quadratura*) για να καταδείξει μια έλλειψη σαφήνειας στις ιδέες των στιγμών, των ροών και των ορίων. Η απάντηση του Jurin τον ίδιο χρόνο, στο *The Minute Mathematician*, ήταν και πάλι αοριστολογικά ταυτολογική. Εξηγούσε ότι «Μια γεννώμενη αύξηση είναι μια αύξηση που μόλις αρχίζει να υπάρχει από το μηδέν, ή μόλις αρχίζει να παράγεται, αλλά δεν έχει ακόμη φθάσει σε κάποιο μετρήσιμο μέγεθος οσοδήποτε μικρό».²¹ Τον έσχατο λόγο του Newton τον κατανοούσε κατά κυριολεξία ως «το λόγο τους τη στιγμή που μηδενίζονται».²² Αντί να εξηγήσει το λήμμα του Newton για τη στιγμή ενός γινομένου σε σχέση με τα όρια, ο Jurin επέτρεψε στον εαυτό του να εμπλακεί στη δύνη των απειροστών και αναγκάστηκε να προσφύγει στην ιδέα των μη μετρήσιμων του Leibniz, λέγοντας ότι το μέγεθος μιας στιγμής δεν είναι κάτι σταθερό ή οριστικό, αλλά είναι «ένα μέγεθος αενάως προσωρινό και μεταβαλλόμενο μέχρι να μηδενιστεί. Εν ολίγοις, είναι εξ ολοκλήρου μη μετρήσιμο».²³ Ο Berkeley, του οποίου το *The Analyst* «σηματοδοτεί μια καμπή στην ιστορία της μαθηματικής σκέψης στη Μεγάλη Βρετανία»,²⁴ αποσύρθηκε από τη διαμάχη,²⁵ αλλά η μη ικανοποιητική φύση των επιχειρημάτων του Jurin τονίστηκε από τον Benjamin Robins στο *A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Methods of Fluxions and of Prime and Ultimate Ratios*, καθώς και σε άρθρα σε περιοδικά της εποχής.²⁶ Όπως υποδεικνύεται από τον τίτλο του βιβλίου του, ο Robins δε διέκρινε τρεις απόψεις στο έργο του Newton, αλλά δύο: εκείνη των ροών και εκείνη των πρώτων και εσχάτων

¹⁸ Βλέπε *Geometry No Friend to Infidelity*, pp. 35, 52 ff.: *The Minute Mathematician*, p. 74

¹⁹ Works, III, 61 ff

²⁰ *ibid.*, III, 78

²¹ Βλέπε *The Minute Mathematician*, p. 19

²² *ibid.*, p. 30; cf. also p. 56

²³ *ibid.*, p. 56

²⁴ Cajori, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions*, p. 89

²⁵ He had also answered the track, *A Vindication of Sir Isaac Newton's Principles of Fluxions Against the Objections Contained in the Analyst*, by J. Walston, but neither the Vindication— a tautological paraphrase of Newton— nor Berkeley's answer contains any significantly new views. See *The Works of George Berkeley*, III, 107

²⁶ See Robins, *Mathematical Tracts*, Vol. II

λόγων. Θεώρησε την πρώτη ως την πλέον αυστηρή, λέγοντας ότι ο Newton χρησιμοποιούσε τη δεύτερη μόνο για να διευκολύνει τις αποδείξεις.²⁷ Πρόσθετε ότι η μέθοδος των ροών εδραιώνεται δίχως προσφυγή στην μέθοδο των ορίων.²⁸

Ο Robins παραδέχθηκε ότι η χρήση των στιγμών από τον Newton στο λήμμα του δεύτερου βιβλίου του *Principia* ήταν τέτοια ώστε να επιτρέψει ερμηνείες που μοιάζουν με τη γλώσσα των απειροστών. Αλλά έλεγε ότι ο Newton θεώρησε αρκετό το να υποδείξει άπαξ και δια παντός ότι τούτο μπορεί να προσαρμοστεί στη μέθοδο των πρώτων και εσχάτων λόγων, όπως παρουσιάζεται στα λήμματα του πρώτου βιβλίου.²⁹ Αν και ο Jurin είχε αρνηθεί τη δυνατότητα ύπαρξης απείρως μικρών σταθερών, είχε κάπως ασαφώς ενστερνιστεί τις απείρως μικρές μεταβλητές, ή τα μηδενιζόμενα μεγέθη. Ο Robins υπήρξε περισσότερο emphatic στην αποκήρυξη των απειροστών κάθε είδους και έλεγε ότι οι διατυπώσεις του Newton που περιείχαν στιγμές πρέπει να ερμηνεύονται σε σχέση με τους πρώτους και έσχατους λόγους. Λόγου χάρη, ενώ ο Jurin είχε πει ότι το $Ab + Ba$ είναι ίσο με το $Ab + Ba + ab$ όταν τα a και b διωχτούν, ο Robins έλεγε ότι το $Ab + Ba$ αποτελούσε τέτοια αύξηση του AB όση ήταν απαραίτητη για την έκφραση του έσχατου λόγου. Αυτό υποδεικνύει ότι ο Robins αντιλαμβάνονταν σαφέστερα ότι η λογική βάση πρέπει να αναζητηθεί στη μέθοδο των ορίων, αν και δεν υπήρξε πολύ σαφής, εφόσον το γινόμενο AB περιλαμβάνει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, ως προς το πώς ακριβώς έπρεπε να εφαρμοστεί στην δεδομένη περίπτωση. Η ιδέα του Robins για το όριο, αντιπροσωπεύει μια διατύπωση ιδεών που οι Valerio και Tacquet είχαν εκφράσει κάπως ασαφώς έναν αιώνα νωρίτερα, ιδέες στις οποίες είχε αναφερθεί ο Robins.³⁰ Υποδεικνύει, επίσης, την εξάρτηση αυτής της έννοιας, στη δική του σκέψη, από τη γεωμετρική διαίσθηση, διότι ο Robins δε μιλούσε μόνο για τα όρια «λόγων μηδενιζομένων μεγεθών» αλλά και για τα όρια των «μορφών μεταβαλλόμενων σχημάτων», δίνοντας ως παράδειγμα τον κύκλο ως το όριο του εγγεγραμμένου σε αυτόν κανονικού πολυγώνου, καθώς το πλήθος των πλευρών του αυξάνεται απεριόριστα.³¹ Αυτή η σύγχυση του αριθμητικού με το γεωμετρικό ήταν υπεύθυνη για μεγάλο μέρος της ασάφειας στο έργο του Newton και του Leibniz και επρόκειτο να παραμείνει κατά τη διάρκεια του επόμενου αιώνα.

Ωστόσο, ο Robins αντελήφθη σαφέστερα από τον Jurin τη φύση της έννοιας του ορίου. Αναγνώρισε ότι η φράση «ο έσχατος λόγος των μηδενιζομένων μεγεθών» ήταν μεταφορική έκφραση, που αναφέρονταν, όχι σε κάποιον τελευταίο λόγο, αλλά σε ένα «σταθερό μέγεθος το οποίο κάποιο μεταβαλλόμενο μέγεθος, μέσω συνεχούς αυξήσεως ή ελαττώσεως θα πλησιάζει αενάως... αρκεί το μεταβαλλόμενο μέγεθος να μπορεί, κατά την προσέγγισή του στο άλλο, να διαφέρει από αυτό κατά λιγότερο από οποιοδήποτε μέγεθος οσοδήποτε μικρό, το οποίο μπορεί να μετρηθεί»,³² ... «αν και δεν μπορεί ποτέ να γίνει απολύτως ίσο με αυτό».³³

Ο Robins αντελήφθη, ενώ ο Jurin όχι, ότι το μεταβαλλόμενο μέγεθος δεν πρέπει να θεωρηθεί ως ότι τελικά φθάνει το σταθερό μέγεθος ως μια τελική τιμή του, παρ' όλο που το τελευταίο «θεωρείται ως το μέγεθος με το οποίο το μεταβαλλόμενο μέγεθος τελικά γίνεται ίσο».³⁴ Στη διαμάχη μεταξύ των Robins και Jurin, το ζήτημα

²⁷ *Mathematical Tracts*, Vol. II, 86

²⁸ See Gibson, 'Berkeley's Analyst', pp. 67–69

²⁹ Cf. *Mathematical Tracts*, Vol. II, 68 ff

³⁰ *ibid.*, II, 58

³¹ *ibid.*, II, 54

³² *Mathematical Tracts*, Vol. II, 49

³³ *ibid.*, II, 54

³⁴ *ibid.*

του αν μια μεταβλητή έπρεπε να θεωρείται ότι φθάνει απαραίτητα το όριο της διαδραμάτισε μείζονα ρόλο. Ο Robins υποστήριζε την αρνητική πλευρά. Ο Jurin επέμενε ότι υπάρχουν μεταβλητές οι οποίες φθάνουν τα όριά τους και κατηγορήσε έντονα τον αντίπαλό του ότι παρερμήνευε το πραγματικό νόημα του Newton. Είναι δύσκολο να κρίνουμε από τα λόγια του Newton τι ακριβώς εννοούσε. Η φράση «έσχατος λόγος» σίγουρα ευνοεί την ερμηνεία του Jurin, αλλά για να αποφευχθούν οι εγγενείς λογικές δυσκολίες των ζητημάτων που αφορούσαν τα απειροστά και το νόημα του $\frac{0}{0}$, ήταν απαραίτητο προς στιγμή να γίνει αποδεκτή η πιο γενική άποψη

του Robins ότι η μεταβλητή δεν είναι απαραίτητο να φθάνει το όριό της.

Ο Robins επικρίθηκε πρόσφατα³⁵ για το ότι όρισε το όριό του με τέτοιο τρόπο ώστε η μεταβλητή ποτέ δε φθάνει το όριό της, επί την βάση του ότι αν και αυτό έχει ορισμένα παιδαγωγικά πλεονεκτήματα, περιλαμβάνει μια λιγότερο γενική αντίληψη του ορίου από εκείνη του Jurin και ότι υπό αυτή την αντίληψη για το όριο ο Αχιλλέας δε θα μπορούσε να ξεπεράσει τη χελώνα. Αυτή η κριτική ακολουθήθηκε από τον ισχυρισμό ότι κάποιος μπορεί να υποθέσει ένα χρονικό ρυθμό του διπλασιασμού του πλήθους των πλευρών ενός πολυγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε έναν κύκλο, τέτοιο ώστε η περιφέρεια (το όριο) να επιτυγχάνεται από το πολύγωνο (τη μεταβλητή). Ένα τέτοιο επιχείρημα είναι εντελώς εκτός θέματος. Εκτός από το ότι συγχέει την αριθμητική έννοια του ορίου με μια γεωμετρική αναπαράσταση, αντικαθιστά απλώς τη σειρά των αποστάσεων του *Ζήνωνα* με μια άπειρη χρονική σειρά. Αυτό το κάνει, προφανώς, υπό την υπόθεση ότι τούτο είναι διαισθητικά περισσότερο παρακινητικό, λόγω της ασαφούς ιδέας για τη διαρκή ροή του χρόνου, η οποία στην περίπτωση του *Αχιλλέα* είναι υπεξούσια της στατικής ιδέας της απόστασης. Το ζήτημα του αν η μεταβλητή S_n φθάνει το όριο S είναι περαιτέρω εντελώς άσχετο και αμφιλεγόμενο, εκτός και γνωρίζουμε τι εννοούμε όταν λέμε *φθάνει* μια τιμή και πώς οι όροι «όριο» και «αριθμός» ορίζονται ανεξάρτητα από την ιδέα του *φθάνω*.

Οι ορισμοί του αριθμού, όπως δόθηκαν από πολλούς μεταγενέστερους μαθηματικούς, καθιστούν το όριο μιας άπειρης ακολουθίας ταυτίσιμο με την ίδια την ακολουθία. Υπό αυτή την άποψη, το ζήτημα του αν η μεταβλητή φθάνει το όριό της δεν έχει λογικό νόημα. Συνεπώς, η άπειρη ακολουθία $.9, .99, .999, .999...,$ είναι ο αριθμός ένα και το ερώτημα, «*Φθάνει ποτέ τη μονάδα;*» είναι μια προσπάθεια να δοθεί ένα μεταφυσικό επιχείρημα που θα ικανοποιήσει τη διαίσθηση. Ο Robins δε θα μπορούσε να διαθέτει μια τόσο εκλεπτυσμένη άποψη για το θέμα, αλλά προφανώς αντελήφθη, κάτι που ο Jurin δε φαίνεται να έκανε,³⁶ ότι κάθε προσπάθεια να αφηθεί μια μεταβλητή να «φθάσει» ένα όριο θα ενέπλεκε κάποιον στη συζήτηση για την φύση του $\frac{0}{0}$. Συνεπώς δεν πρέπει να επικριθεί για τον περιορισμό του.

Θα διαπιστώσουμε ότι το ζήτημα του αν μια μεταβλητή φθάνει ή όχι το όριό της δεν έχει καμιά σημασία, εν όψει των σύγχρονων ορισμών. Εκείνη την εποχή, όμως, ήταν σημαντικό ως ένδειξη του ότι οι μαθηματικοί εξακολουθούσαν να αισθάνονται ότι ο λογισμός έπρεπε να ερμηνευθεί σε σχέση με τα όσα ήταν διαισθητικά λογικά μάλλον, παρά με τα όσα ήταν λογικά συνεπή. Αυτός φαίνεται ότι ήταν ο λόγος για τον οποίο ο Robins θεώρησε τη μέθοδο των ροών περισσότερο ικανοποιητική από εκείνη των πρώτων και εσχάτων λόγων. Όλοι υπέθεταν ότι είχε

³⁵ Cajori, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions*, Chap. IV

³⁶ See Jurin, 'Considerations upon Some Passages of Dissertation Concerning the Doctrine of Fluxions Published by Mr. Robins', pp. 68 ff

μια σαφή ιδέα της στιγμιαίας ταχύτητας, παρ' όλο που λογικά αυτή ορίζεται, όπως ο Robins δεν κατάφερε να αντιληφθεί, σε σχέση με τα ακριβώς ισοδύναμα εκείνων που απαιτούνται για να καταστεί αυστηρή η ιδέα των πρώτων και εσχάτων λόγων.

Το ότι το έργο του Robins δεν εκτιμήθηκε πλήρως στην Αγγλία φαίνεται από το γεγονός ότι αν και το *The Analyst* του Berkeley συζητιόνταν συχνά στην πληθώρα κειμένων για τις ροές που εμφανίστηκαν το 1736 και το 1737, η διαμάχη Jurin – Robins δεν αναφέρονταν.³⁷ Οι μαθηματικοί εξακολουθούσαν να μην είναι ικανοποιημένοι με τη μέθοδο των ορίων και, παρ' όλο που η συζήτηση για τα απειροστά μπορεί να είχε αποθαρρύνει την χρήση της ιδέας των στιγμών, δεν τις εκδίωξε. Το 1771 το άρθρο για τις ροές στην εγκυκλοπαίδεια *Britannica* έγραφε: «Η ροή οποιουδήποτε μεγέθους σε οποιοδήποτε δοθέν σημείο είναι η αύξηση την οποία αυτό θα λάμβανε σε οποιονδήποτε χρόνο, με την υπόθεση ότι αυξάνεται ομοιόμορφα από εκείνο το σημείο. Και καθώς το μέτρο θα είναι το ίδιο, όποιος κι αν είναι ο χρόνος, έχουμε την ελευθερία να υποθέσουμε ότι είναι μικρότερο από οποιονδήποτε μετρήσιμο χρόνο».³⁸ Η παλιά σύγχυση μεταξύ ροών και στιγμών δεν είχε ακόμη χαθεί και η διασαφήνιση της μεθόδου των πρώτων και εσχάτων λόγων του Newton από τον Robins δεν ήταν αρκετή για να την καθιερώσει ως βάση μέχρι αφότου οι ηπειρωτικές επιδράσεις, στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, είχαν επιφέρει μια καμπή στα βρετανικά μαθηματικά. Στο μεταξύ πάντως, πολλές προσπάθειες, άλλες αξιοπρόσεκτες και άλλες ασήμαντες, έγιναν για να βρεθούν νέες και πιο ικανοποιητικές μορφές και επιχειρήματα με τα οποία θα μπορούσε να παρουσιαστεί η μέθοδος του Newton. Η πλέον αξιότατη και διάσημη προσπάθεια υπήρξε εκείνη του Colin Maclaurin. Στην *Treatise of Fluxions* του, το 1742, είχε σκοπό, όχι να μεταβάλει τις ιδέες που περιλαμβάνονταν στις ροές του Newton, αλλά να αποδείξει την εγκυρότητα της μεθόδου του μέσω των αυστηρών τεχνικών των αρχαίων³⁹ - να συναγάγει τη νέα ανάλυση από λίγες «κοινές αρχές».⁴⁰

Ο Maclaurin δήλωνε στον πρόλογο του έργου του ότι η διαμάχη του *The Analyst* είχε δώσει την αφορμή για την πραγματεία του. Γι' αυτό προχώρησε με άκρα περίσκεψη, παραλείποντας το συμβολισμό των ροών μέχρι πριν το τέλος της μακροσκελούς δίτομης πραγματείας του. Όπως και ο Robins, εκδίωξε το απείρως μικρό ως ασύλληπτο και ως «πολύ τολμηρό αξίωμα για μια επιστήμη όπως η γεωμετρία».⁴¹ Πάντως, δεν είχε καμιά αντίρρηση για την εισαγωγή της ιδέας μιας στιγμιαίας ταχύτητας στη γεωμετρία, διότι αισθάνθηκε ότι δεν μπορεί να υπάρξει καμιά δυσκολία στη σύλληψη της ταχύτητας οπουδήποτε υπάρχει κίνηση.⁴² Μάλιστα, έλεγε ότι οι μαθηματικές επιστήμες περιλάμβαναν την κίνηση και την ταχύτητα, όπως και τις ιδιότητες των σχημάτων.⁴³ Το χρόνο τον αντιλαμβάνονταν, όπως και ο Barrow, ως να ρέει σε ομαλή πορεία που εξυπηρετεί τη μέτρηση των μεταβολών όλων των πραγμάτων.⁴⁴ Ο Barrow, εν τούτοις, είχε ορίσει την ταχύτητα ως τη δύναμη μέσω της οποίας ένα ορισμένο διάστημα μπορεί να διαγραφεί σε ορισμένο χρόνο,⁴⁵ περίπου όπως ο Αριστοτέλης είχε θεωρήσει την κίνηση ως εκδήλωση μιας δυναμικότητας. Ο Maclaurin, από την άλλη πλευρά, προσπάθησε να ορίσει τη στιγμιαία ταχύτητα με τρόπο που θυμίζει την προσπάθεια του Oresme: «Η ταχύτητα

³⁷ Cajori, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions*, p. 179

³⁸ *ibid.*, p. 240

³⁹ *A Treatise of Fluxions*, I, 51 ff

⁴⁰ *ibid.*, I, Preface.

⁴¹ *ibid.*, I, iv

⁴² *ibid.*, I, iii

⁴³ *ibid.*, I, 51

⁴⁴ *ibid.*, I, 53

⁴⁵ *ibid.*, I, 54

μιας μεταβλητής κίνησης σε οποιαδήποτε χρονική περίοδο δεν πρέπει να μετράται μέσω του διαστήματος που έχει διαγραφεί μετά τη συγκεκριμένη περίοδο σε κάποιο δεδομένο χρόνο, αλλά μέσω του διαστήματος που θα είχε διαγραφεί αν η κίνηση είχε συνεχιστεί ομαλά μετά από εκείνη την περίοδο».⁴⁶ Ο Maclaurin αντελήφθη ότι αν μια στιγμιαία ταχύτητα είναι «επιδεκτική μετρήσεως, τότε είναι υπό αυτήν την έννοια και μόνο».⁴⁷ Αναγνώρισε δηλαδή, ότι η φυσική ασχολείται μόνο με πραγματικά διαστήματα, αλλά δεν κατάφερε να αντιληφθεί ότι ως μαθηματική ιδέα η στιγμιαία ταχύτητα μπορούσε να οριστεί με προεκβολή πέρα από τις αισθητηριακές εντυπώσεις, μέσω του ορίου ενός μέσου ρυθμού μεταβολής καθώς τα διαστήματα πλησιάζουν το μηδέν.

Αν και ο Maclaurin θεωρούσε την εξήγησή του για τις ροές ως μια κριτική της μεθόδου των διαφορικών, η ερμηνεία του για τις ροές, σε σχέση με τα διαστήματα που θα παράγονταν αν η κίνηση επρόκειτο να συνεχιστεί ομαλά, άφησε το δρόμο ανοικτό για μια εξήγηση των τεχνικών του Newton με τις ροές σε σχέση με πεπερασμένες διαφορές και όρια, μέσω των οποίων επρόκειτο να εξηγηθεί και ο διαφορικός λογισμός του Leibniz. Ο Brook Taylor είχε αναγνωρίσει τη σημασία αυτού του είδους έκθεσης και είχε λίγα χρόνια νωρίτερα συνθέσει ένα βιβλίο για το θέμα –το *Methodus incrementorum directa et inversa*. Ενώ ο Robins και ο Maclaurin τόνισαν στο έργο του Newton τις ερμηνείες σε σχέση με τις ροές, ο Taylor είπε ότι ο Newton είχε θεμελιώσει τη μέθοδό του στους πρώτους και έσχατους λόγους.⁴⁸ Ο Newton είχε αναγνωρίσει ότι το όριο του λόγου των στιγμών ήταν το ίδιο με το λόγο των αντίστοιχων ροών ή ταχυτήτων. Ενώ ο Robins και ο Maclaurin είχαν υποθέσει ότι όλοι διέθεταν μια σαφή ιδέα της στιγμιαίας ταχύτητας, ο Taylor θεώρησε ότι ήταν ευκολότερο να συλλάβει κάποιος τις στιγμές και να βρει τους λόγους των ροών από αυτές.⁴⁹ Από αυτή την άποψη, πάντως, το έργο του σε κάποια σημεία προσέγγιζε έναν ασαφή χειρισμό μηδενικών, που μοιάζει με τις κατοπινές τεχνικές του Euler. Ο Taylor έλεγε ότι η σχέση των ροών έπρεπε να προκύψει από εκείνη που περιέχει πεπερασμένες διαφορές. Από αυτήν τη σκοπιά η άποψή του μοιάζει με εκείνη των σύγχρονων μαθηματικών, παρ' όλο που ο Leibniz έλεγε εκείνη την εποχή ότι «τοποθετούσε το κάρο μπροστά από το άλογο».⁵⁰

Εν τούτοις, ο Taylor, όπως και ο Leibniz, δεν υπήρξε σαφής όσον αφορά τη μετάβαση από τις πεπερασμένες διαφορές στις ροές, διότι υποστήριζε ότι για να το επιτύχει κανείς αυτό απλά θα έθετε το μηδέν στη θέση των «αφανιζόμενων αυξήσεων». Κατά την άποψή του, οι έσχατοι λόγοι είναι εκείνοι στους οποίους τα μεγέθη έχουν ήδη αφανιστεί και έχουν γίνει μηδενικά,⁵¹ μια άποψη που επρόκειτο να εμφανιστεί στην Ήπειρο στο έργο του Euler.

Βιβλιογραφία

- Αναπολιτάνος Α. Διονύσιος, Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Εκδόσεις Νεφέλη, Δ' έκδοση, Αθήνα, 1985.
- Αρτεμιάδης Κ. Νικόλαος, Η ζωή και το έργο του Ισαάκ Newton, Πρακτικά Ακαδημίας Αθηνών, τόμος 63, τεύχος 2, σελίδες 320–336, 1988.

⁴⁶ *ibid.*, I, 55

⁴⁷ *ibid*

⁴⁸ Taylor, *Methodus incrementorum directa et inversa*, Preface

⁴⁹ *ibid.*

⁵⁰ *Mathematische Schriften*, III (Part 2), 963

⁵¹ *Methodus incrementorum directa et inversa*, Preface, and p. 3

- Γιαννακούλιας Ευστάθιος, Σημειώσεις στη Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού, Αθήνα, 2002.
- Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός λογισμός, τ.Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999.
- Γ. Παντελίδης–Δ. Κραββαρίτης, Λεξικό Μαθηματικών, Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, 1997 .
- E. Bell, Οι Μαθηματικοί, τόμος 1, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 3^η έκδοση, Ηράκλειο, 2000.
- Karl B. Boyer–Uta C. Merzbach, Η ιστορία των μαθηματικών, Εκδόσεις Πνευματικού, 2^η έκδοση, Αθήνα, 1968.
- D. Davis, Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2001.
- H. Evans, Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών μετά το 1650, τόμος 2, Εκδόσεις τροχαλία, Αθήνα, 1990.
- G. Loria, Ιστορία των μαθηματικών τόμος 3^A, Εκδόσεις Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα.
- R. Mankiewicz, Η ιστορία των μαθηματικών, Εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα, 2002.
- E. Maor, Τριγωνομετρικά λουκούμια, Εκδόσεις κάτοπτρο, Αθήνα, 2002.
- G. Polya, Η μαθηματική ανακάλυψη, τ. 1, Εκδόσεις κάτοπτρο, Αθήνα, 2001.
- D. Smith, History of Mathematics, Volume 1, Dover Publications, INC, New York, 1951.
- D. Struik, Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, β' έκδοση, Εκδόσεις Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα, 1980.
- V. Tikhomirov, Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα, Εκδόσεις κάτοπτρο, 1^η έκδοση, Αθήνα, 1999.
- R. Westfall, Η ζωή του Ισαάκ Νεύτωνα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1999.