



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Το έργο και η ζωή του Αρχιμήδη



Σπουδαστές:
Δρόσος Μάρκος (AM 8619)
Ηλίας Κωνσταντίνος (AM 8624)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2022–2023

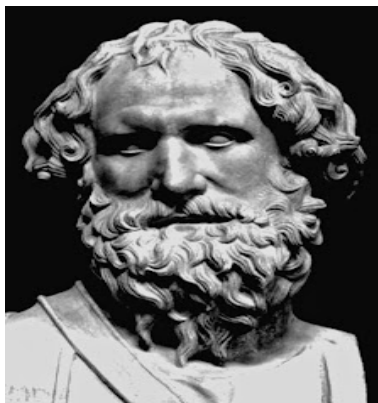
Ημερομηνία ανάθεσης: **23.11. 2021**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **.....02.2023**
 Ημερομηνία εξέτασης: **.....02.2023**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Βιογραφία του Αρχιμήδη	1
2. Το έργο του Αρχιμήδη	5
2.1. Τα έργα που έχουν διασωθεί	5
2.2. Το περιεχόμενο των έργων.....	6
2.3. Παρουσίαση των έργων του Αρχιμήδη που έχουν διασωθεί.....	9
2.3.1. «Περί επίπεδων ισορροπιών» ή «Κέντρα βαρών επιπέδων» ή «Μηχανικά», δύο βιβλία, α' και β'	9
2.3.2. «Τετραγωνισμός της παραβολής»	10
2.3.3. «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», δύο βιβλία, α' και β'	10
2.3.4. «Περί ελίκων»	11
2.3.5. «Περί κωνοειδών και σφαιροειδών».....	12
2.3.6. «Περί οχουμένων» ή «Περί των επιπλεόντων σωμάτων» ή «Περί των ύδατι επισταμένων», δύο βιβλία, α' και β'	13
2.3.7. «Κύκλου μέτρησις»	13
2.3.8. «Ψαμμίτης».....	14
2.3.9. «Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος (μέθοδος)»	14
2.3.10. «Βιβλίο Λημμάτων»	15
2.3.11. «Βοεικόν πρόβλημα».....	15
2.3.12. «Στομάχιον» ή «Οστομάχιον».....	17
2.3.13. «Εγγραφή σε κύκλο κανονικού επταγώνου» ή	17
«Κατασκευή της πλευράς του εις κύκλον εγγεγραμμένου κανονικού επταγώνου»	17
2.3.14. «Ωρολόγιον υδραυλικόν» ή «Ωρολόγιον Αρχιμήδους».....	18
2.3.15. «Περί κύκλων εφαπτομένων αλλήλων»	18
2.3.16. «Αρχαί της Γεωμετρίας»	18
2.3.17. «Περί των επιπλεόντων σωμάτων»	18
2.4. Έργα που δεν έχουν διασωθεί ή δεν έχουν αποκαλυφθεί έως σήμερα	18
3. Ο Αρχιμήδης ως τεχνολόγος –μηχανικός	20
3.1. Αστρονομία	20
3.2. Το πλανητάριο.....	21

3.3. Υδροστατική	23
3.4. Ο ζυγός	26
3.5. Μηχανικές κατασκευές	27
3.5.1. Μοχλοί – θεωρητική μηχανική	28
3.5.2. Πολεμικές μηχανές – Η μηχανική στην άμυνα	30
3.5.3. Τα κάτοπτρα	32
3.5.4. Ο κοχλίας	37
3.6. Άλλες μηχανικές κατασκευές	41
3.6.1. Τηλεβόλο	41
3.6.2. Υδραυλικό ωρολόγιο	42
3.6.3. Το υδραυλικό μουσικό όργανο	43
3.6.4. Αραιόμετρο ή πυκνόμετρο	43
3.6.5. Οδόμετρο – δρομόμετρο	44
3.6.6. Συρακουσία	44
4. Ο Αρχιμήδης ως ερευνητής	45
5. Αρχιμήδης και απειροστικός λογισμός	47
6. Παλίμψηστο του Αρχιμήδη	56
6.1. Η ιστορική διαδρομή του Παλίμψηστου	57
6.2. Η επιστημονική έρευνα για το Παλίμψηστο	60
6.2.1. Η μέθοδος της πολυφασματικής απεικόνισης (multispectral imaging)	61
6.2.2. Η μέθοδος απεικόνισης φθορισμού ακτίνων X (X ray fluorescence ή XFR)	61
6.2.3. Το λογισμικό οπτικής αναγνώρισης γραμμάτων (optical character recognition)	62
6.3. Αναθεωρώντας τα επιστημονικά δεδομένα	62
Βιβλιογραφία	63
Πηγές από διαδίκτυο	63



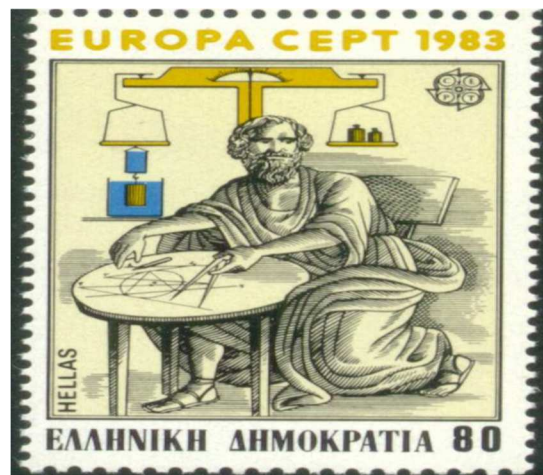
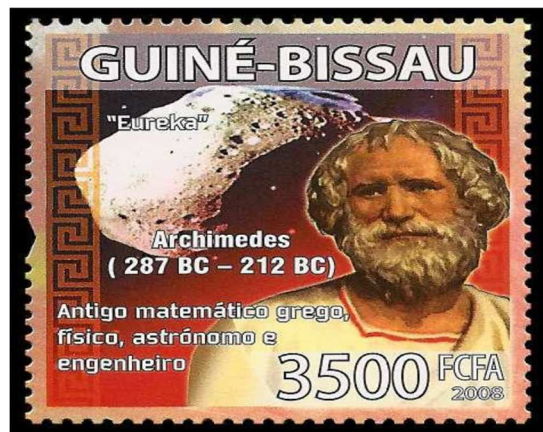
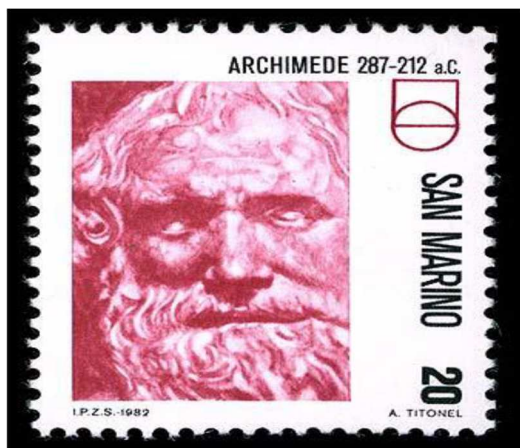
Εικόνα 1. Ο Αρχιμήδης



Εικόνα 2. Ο Κοχλίας του Αρχιμήδη

1. Βιογραφία του Αρχιμήδη

Ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος, ήταν αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, μηχανικός, φυσικός, εφευρέτης και αστρονόμος. Αν και λίγες λεπτομέρειες είναι γνωστές για τη ζωή του, εντούτοις θεωρούνται αρκετές, ώστε σήμερα να αναγνωρίζεται ως μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές ιδιοφυΐες όλων των εποχών και ένας από τους λαμπρότερους επιστήμονες της κλασικής αρχαιότητας. Οι λεπτομέρειες που επιβιώνουν για τη ζωή του Αρχιμήδη είναι πολύ περισσότερες από οποιουδήποτε άλλου αρχαίου επιστήμονα, αλλά είναι σε μεγάλο βαθμό ανέκδοτες, αντανakλώντας την εντύπωση που έκανε η μηχανική ιδιοφυΐα του στη δημοφιλή φαντασία. Γεννήθηκε το 287 π.Χ. στις Συρακούσες, οι οποίες υπήρξαν η σπουδαιότερη ελληνική πόλη της Σικελίας κατά την αρχαιότητα. Η ημερομηνία γέννησής του προκύπτει από τον Βυζαντινό ιστορικό Ιωάννη Τζέτζη, που αναφέρει ότι ο Αρχιμήδης έζησε 75 χρόνια. Όπως ο ίδιος αναφέρει, στο έργο του «Ψαμμίτης», πατέρας του ήταν ο Φειδίας, ο οποίος ήταν ένας αστρονόμος, ωστόσο δεν υπάρχει τίποτα άλλο γνωστό για αυτόν. Η οικογένεια του πρέπει να ήταν εξαιρετικά εύπορη. Ο Πλούταρχος έγραψε στο έργο του «**Βίοι Παράλληλοι**» ότι ο Αρχιμήδης ήταν συγγενής και φίλος με τον βασιλιά Ιέρωνα Β΄, κυβερνήτη των Συρακουσών, ενώ ο Ιωάννης Τζέτζης θεωρεί τον Αρχιμήδη φίλο και σύμβουλο του Ιέρωνα. Μια βιογραφία του Αρχιμήδη είχε γραφτεί από τον φίλο του Ηρακλείδη, αλλά η εργασία του αυτή έχει χαθεί, αφήνοντας τις λεπτομέρειες της ζωής του στο σκοτάδι. Είναι άγνωστο, αν είχε ποτέ παντρευτεί ή είχε παιδιά. Ο Διόδωρος ο Σικελιώτης, μας πληροφορεί ότι ο Αρχιμήδης πήγε αρκετά νωρίς στην Αλεξάνδρεια, όπου υπήρχε το σπουδαιότερο εκπαιδευτικό ίδρυμα της ελληνιστικής εποχής, το Μουσείο της Αλεξάνδρειας, εκεί ήταν η Βιβλιοθήκη και ανέπτυξε πολύ φιλικές σχέσεις με αρκετούς μαθηματικούς και λόγιους της εποχής. Μεταξύ αυτών ήταν ο Κόνων ο Σάμιος, ο οποίος είχε διαδεχθεί τον Ευκλείδη στη διεύθυνση του Μουσείου της Αλεξάνδρειας, ο Δοσίθεος, μαθητής και διάδοχος του Κόνωνα και ο Ερατοσθένης ο Κυρήναιος, ο οποίος έγινε διευθυντής της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Αν και δεν είναι σίγουρο ότι πρόφτασε ζωντανό τον Ευκλείδη, σίγουρα μελέτησε τα «**Στοιχεία**» και διδάχθηκε το κορυφαίο σύγγραμμα που αποτελεί την επιτομή των ελληνικών μαθηματικών. Κατά την παραμονή του στην Αλεξάνδρεια, έδειξε ότι εκτός από τα μαθηματικά είχε κλίση στη μηχανική. Έτσι, επινόησε μια μηχανή άντλησης νερού, η οποία ονομάστηκε «**κοχλίας**» και αποδείχτηκε πολύ χρήσιμη για την άρδευση των πεδιάδων γύρω από το Νείλο ποταμό. Η **έλικα**, όπως αλλιώς ονομάζεται ο κοχλίας, του Αρχιμήδη χρησιμοποιήθηκε για αιώνες σε όλες τις μεσογειακές χώρες. Μάλιστα, στην Αίγυπτο αναφέρεται η χρησιμοποίησή της μέχρι τον 20^ο αιώνα και μέχρι σήμερα σε ορισμένες αναπτυσσόμενες χώρες για αρδευτικούς σκοπούς.



Εικόνα 3. Γραμματόσημα στα οποία έχει αποτυπωθεί ο Αρχιμήδης

Επιστρέφοντας στις Συρακούσες, άρχισε να σχεδιάζει διαφορετικά αντικείμενα που σύντομα του κέρδισαν μια ορισμένη δημοτικότητα μεταξύ των κατοίκων της πόλης. Σε αυτή την περίοδο, έδωσε τον εαυτό του εντελώς στο επιστημονικό έργο, παρήγαγε διαφορετικές εφευρέσεις και συνήγαγε αρκετές μαθηματικές έννοιες, πολύ προχωρημένες στην εποχή του. Και μετά την επιστροφή του αυτή στις Συρακούσες, διατήρησε πολύ καλές σχέσεις με αρκετούς λόγιους της Αλεξάνδρειας. Ιδιαίτερη εκτίμηση φαίνεται πως έτρεφε προς τον Κώνωνα το Σάμιο, στον οποίο συνήθιζε να στέλνει τις μαθηματικές του ανακαλύψεις. Μετά το θάνατο του Κώνωνα, αποδέκτες των εργασιών του Αρχιμήδη έγιναν ο Δοσίθεος, μαθητής και διάδοχος του Κώνωνα και ο Ερατοσθένης ο Κυρήναιος. Π.χ. στο Δοσίθεο είχε στείλει τις εργασίες του: «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», «Περί κωνοειδών & σφαιροειδών», «Περί ελίκων» και «Τετραγωνισμός της παραβολής». Στον Ερατοσθένη είχε στείλει το «Περί μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος» και το «Βοεικόν πρόβλημα». Στο έργο του «Περί ελίκων», ο Αρχιμήδης αναφέρει ότι τα έργα του τα έστειλε στο Δοσίθεο με τον Ηρακλείδη, ο οποίος, κατά μαρτυρία του Ευτόκιου του Ασκαλωνίτη, υπήρξε ένας από τους βιογράφους του Συρακούσιου σοφού. Ο Αρχιμήδης έπαιξε σημαντικό ρόλο κατά την πολιορκία των Συρακουσών από τους Ρωμαίους. Επινόησε και κατασκεύασε πολεμικές μηχανές (καταπέλτες, βαλλιστρίδες, κάτοπτρα κλπ.) τόσο αποτελεσματικές, ώστε για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα να εμποδίζεται η άλωση της γενέτειράς του. Τελικά, οι Συρακούσες καταλήφθηκαν από το Ρωμαίο στρατηγό Μάρκο Κλαύδιο Μάρκελλο, το φθινόπωρο του 212 π.Χ. , μετά από τρία χρόνια πολιορκίας, ύστερα από προδοσία. Ο

Αρχιμήδης σκοτώθηκε κατά την άλωση της πόλης από Ρωμαίο στρατιώτη, την ώρα που, όπως αναφέρουν μαρτυρίες και η παράδοση διέσωσε, προσπαθούσε να λύσει κάποιο μαθηματικό πρόβλημα πάνω στην άμμο. Πάρα πολλοί συγγραφείς αναφέρονται στην ώρα του θανάτου του Αρχιμήδη. Το σημείο στο οποίο όλες οι μαρτυρίες συγκλίνουν είναι ότι ο Αρχιμήδης σκοτώθηκε κατά την άλωση των Συρακουσών (212 π.Χ.) από ένα Ρωμαίο στρατιώτη, τη στιγμή που προσπαθούσε να λύσει κάποιο μαθηματικό πρόβλημα, σκυμμένος πάνω σε κάποιο σχήμα που είχε χαράξει στην άμμο. Ως προς τις λεπτομέρειες του γεγονότος υπάρχουν διάφορες εκδοχές. Κατά τον Πλούταρχο, ο Αρχιμήδης ήταν τόσο προσηλωμένος στα σχήματά του, ώστε δεν αντιλήφθηκε την εισβολή των Ρωμαίων στην πόλη, ούτε το στρατιώτη που τον πλησίασε και τον σκότωσε. Κατά μια άλλη εκδοχή, πάλι από τον Πλούταρχο, ο στρατιώτης ζήτησε από τον Αρχιμήδη να τον ακολουθήσει, προκειμένου να τον οδηγήσει στο Μάρκελλο. Ο Αρχιμήδης αρνήθηκε να συμμορφωθεί πριν συμπληρώσει και λύσει τελείως το πρόβλημα, οπότε ο στρατιώτης οργισμένος τον σκότωσε. Ο Βαλέριος Μάξιμος αναφέρει ότι, όταν ο στρατιώτης πλησίασε απειλητικός τον Αρχιμήδη, εκείνος βάζοντας τα χέρια του προστατευτικά πάνω από τα σχήματα που είχε χαράξει στην άμμο, είπε «*noli obsecro istum disturbare*» (σε παρακαλώ μη μου χαλάσεις το σχήμα). Αυτά τα τελευταία λόγια του Αρχιμήδη, που δείχνουν την ολοκληρωτική απορρόφηση του επιστήμονα την ώρα της επιστημονικής εργασίας και δημιουργίας, αποδίδονται με μικρές παραλλαγές από διάφορους συγγραφείς. Έτσι:

Στον Τζέτζη βρίσκουμε την φράση: «**Απόστηθι, ω άνθρωπε, του διαγράμματός μου**» (= στάσου μακριά από το σχήμα μου, άνθρωπε).

Στο Δίωνα τον Κάσσιο: «**Παρ κεφαλάν και μη παρά γραμμάν**» (= χτύπησε με στο κεφάλι, μη μου χαλάσεις το σχήμα).

Στο Γεώργιο Παχυμέρη: «**Ταν κεφαλάν πλήττειν, μην ταν γράμμαν αφανίζειν**» (= να χτυπήσει το κεφάλι και να μην καταστρέψει το σχήμα).

Και σε μαρτυρία ανώνυμου συγγραφέα, το γνωστό «**Μη μου τους κύκλους τάραττε**» (Μη μου χαλάσεις τους κύκλους). Το γεγονός ότι όλες οι παραπάνω μαρτυρίες αναφέρονται σε σχήμα του Αρχιμήδη χαραγμένο στην άμμο, έχει δημιουργήσει την εντύπωση ότι ο μεγάλος Συρακούσιος επιστήμονας, κατά τις τελευταίες στιγμές της ζωής του εργαζόταν στην παραλία, στην αμμουδιά. Ο E. J. Dijksterhuis στο έργο του «Archimedes» γράφει ότι κάτι τέτοιο είναι απίθανο, για διάφορους λόγους, και λόγω της πολυπλοκότητας των αποδείξεων που έκανε ο Αρχιμήδης. Κατά τον ίδιο, οι Έλληνες μαθηματικοί έκαναν τα διαγράμματα τους πάνω στον άβακα, ένα δίσκο γεμάτο με ειδικά τριμμένη άμμο ή γυαλόσκονη. Στα λατινικά το υλικό που χρησιμοποιούσαν στον άβακα λεγόταν pulvis (σκόνη) και κατά τον Κικέρωνα, η φράση pulvis eruditus (σοφή, πολυμαθής σκόνη) ήταν μια μεταφορική έκφραση για τα μαθηματικά. Έτσι, λέει ο Dijksterhuis, πρέπει να φανταστούμε τον Αρχιμήδη την ώρα του θανάτου όχι έξω στην αμμουδιά, όπου θα ήταν αδύνατο να μην αντιληφθεί το θόρυβο από την κατάληψη της πόλης, αλλά μέσα στο σπίτι απορροφημένο πάνω σε ένα τραπέζι, όπου είχε τοποθετήσει τον άβακα που χρησιμοποιούσε για τη λύση προβλημάτων. Στην εκδοχή αυτή συνηγορεί η ύπαρξη ενός ψηφιδωτού του 3^{ου} αιώνα μ.Χ. που βρέθηκε στην Ηράκλεια και παρουσιάζει κάποιον άνθρωπο καθισμένο δίπλα σε ένα τραπέζι, πάνω στο οποίο βρίσκεται ένας παραλληλόγραμμος δίσκος, να απλώνει προστατευτικά τα χέρια του πάνω από αυτόν. Δίπλα του ένας πολεμιστής με το ξίφος τραβηγμένο φαίνεται ότι τον διατάζει να τον ακολουθήσει. Όπως λέγεται, το πιο αγαπημένο έργο του Αρχιμήδη ήταν το «**Περί σφαίρας & κυλίνδρου**». Κατά τον Πλούταρχο, ο μεγάλος αυτός μαθηματικός είχε εκφράσει την επιθυμία να χαραχτεί στον τάφο του μια σφαίρα εγγεγραμμένη σε κύλινδρο και μια επιγραφή στην οποία

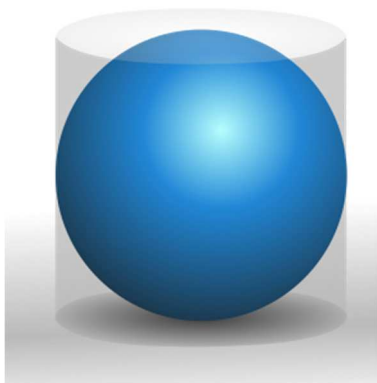
να αναγράφεται ότι κύλινδρος που έχει βάση ένα μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο με τη διάμετρό της, έχει όγκο ίσο με τα $\frac{3}{2}$ του όγκου της σφαίρας. Οι συγγενείς και φίλοι του Αρχιμήδη ζήτησαν την άδεια από το Μάρκελλο να εκπληρώσουν την επιθυμία του σκοτωμένου. Ο Μάρκελλος, που είχε λυπηθεί από το χαμό του μεγάλου σοφού, φρόντισε ώστε να εκπληρωθεί η επιθυμία αυτή.



Εικόνα 4. Μπρούτζινο άγαλμα του Αρχιμήδη στο Παρατηρητήριο Archenhold, Βερολίνο και γλυπτό του Gerhard Thieme που παρουσιάστηκε το 1972



Εικόνα 5. Ψηφιδωτό που απεικονίζει τη σκηνή του φόνου του Αρχιμήδη από Ρωμαίο στρατιώτη



Εικόνα 6. Το εμβαδόν & όγκος μιας σφαίρας είναι τα $\frac{2}{3}$ του αντίστοιχου κλειστού κυλίνδρου που την περιβάλλει

Με τον καιρό, ο τάφος ξεχάστηκε. Το 75 π.Χ. ο Κικέρων κατόρθωσε να τον ανακαλύψει. Παραθέτουμε σε ελεύθερη μετάφραση τι λέει ο ίδιος για την ανακάλυψη αυτή: «...Ο τάφος ήταν εντελώς άγνωστος στους Συρακούσιους και μάλιστα έλεγαν ότι τέτοιος τάφος δεν υπάρχει. Εγώ όμως τον ανακάλυψα, τον βρήκα κρυμμένο εντελώς από βάτα και θάμνους. Θυμόμουν μερικούς στίχους σε εξάμετρο, τους οποίους είχα ακούσει ότι βρίσκονται πάνω στον τάφο. Από αυτούς έβγαινε το συμπέρασμα ότι πάνω στην επιτύμβια πλάκα είχε χαραχθεί σφαίρα με κύλινδρο. Όταν εγώ προσωπικά εξερεύνησα όλους τους τάφους, γιατί υπήρχαν πολλοί τάφοι προ των Αχραδινίων πυλών, αντιλήφθηκα μια στήλη, η οποία εξέίχε από τους θάμνους και πάνω σε αυτήν υπήρχε το σχήμα σφαίρας και κυλίνδρου. Τότε είπα προς τους Συρακούσιους, οι προύχοντες από αυτούς ήταν μαζί μου: Πιστεύω ότι αυτός είναι ο τάφος τον οποίο

αναζητώ. Στάλθηκαν πολλοί εργάτες με σκαπάνες, καθάρισαν το μέρος και το έκαναν προσιτό. Όταν ανοίχτηκε η διάβαση, πλησιάσαμε την μπροστινή πλευρά της βάσης και είδαμε να βρίσκεται εκεί το επίγραμμα, του οποίου οι τελευταίοι στίχοι, περίπου οι μισοί, είχαν καταστραφεί». (Tuscul. disput. V, XXIII, 64-66, όπου στο κεφ. 1, σελ. 490). Ο τάφος του Αρχιμήδη αποκαταστάθηκε από τον Κικέρωνα το 75 π.Χ., αλλά παραμελήθηκε, καλύφτηκε πάλι από χώματα και χόρτα και ξεχάστηκε. Ανακαλύφθηκε ξανά το 1966, μετά από ανασκαφές που έκανε η ιταλική αρχαιολογική εταιρεία.

2. Το έργο του Αρχιμήδη

Το έργο του Αρχιμήδη είναι μεγάλο σε όγκο και εκτείνεται σε πολλές περιοχές της γνώσης, όπως καθαρά μαθηματικά, αστρονομία, φυσική, μηχανική, τεχνολογία. Είναι έργο πρωτότυπο στη σύλληψη και εντυπωσιακό στις εφαρμογές. Διαπνέεται από εκπληκτική πρωτοτυπία σκέψης, συνδυασμένη με αυστηρότητα στις αποδείξεις και μεγάλη ικανότητα στην τεχνική των υπολογισμών. Είναι επίσης έργο στο μεγαλύτερο μέρος του διαχρονικό. Από αυτό γεννήθηκε και αναπτύχθηκε ο διαφορικός και ο ολοκληρωτικός λογισμός. Είναι πολύ πιθανόν ότι αυτό το τεράστιο έργο δεν είχε εκδοθεί ποτέ στο σύνολό του κατά την αρχαιότητα, όπως είχε συμβεί και με τα έργα των Πλάτωνα, Αριστοτέλη, Ευκλείδη. Όπως έχουμε αναφέρει, ο Αρχιμήδης συνήθιζε να στέλνει τις μαθηματικές του ανακαλύψεις στους φίλους του μαθηματικούς της Αλεξάνδρειας, τον Κόνωνα, το Δοσίθεο και τον Ερατοσθένη τον Κρηναίο. Έτσι, τα έργα του μελετούνταν στην Αλεξάνδρεια, αντιγράφονταν, ταξίδευαν και σε άλλα πνευματικά κέντρα της εποχής, αλλά κατά πάσα πιθανότητα ποτέ δε συγκεντρώθηκαν και δεν κυκλοφόρησαν όλα μαζί, σε ενιαία έκδοση.

Αυτός είναι ένας σοβαρός λόγος για τον οποίο πολλά χάθηκαν. Πολλά επίσης έργα του κάηκαν στη μεγάλη πυρκαγιά που κατέστρεψε τη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας το 47 π.Χ. κατά το λεγόμενο Αλεξανδρινό πόλεμο, που ξέσπασε μεταξύ Ρωμαίων και Αιγυπτίων, όταν οι τελευταίοι αντέδρασαν, επειδή ο Καίσαρας προώθησε την Κλεοπάτρα στο θρόνο, παραγκωνίζοντας τον αδελφό της Πτολεμαίο.

Από τα έργα που σώζονται, μερικά έχουν υποστεί κάποιες μικρές αλλοιώσεις. π.χ. τα περισσότερα έχουν διασωθεί στην κοινή αττική διάλεκτο, ενώ ο Αρχιμήδης έγραφε στην τοπική του σικελική δωρική διάλεκτο, «την Αρχιμήδην φίλην δώριδα γλώσσαν», όπως σημειώνει ο Πλούταρχος. Αλλά και από αυτά που σώζονται στη σικελική διάλεκτο, τα περισσότερα έχουν υποστεί τις αναπόφευκτες αλλοιώσεις από τους αντιγραφείς και τους φιλόλογους, που προσπάθησαν κατά καιρούς να αποκαταστήσουν αμφισβητούμενα ή σβησμένα αποσπάσματα. Επίσης, κάποια έργα του Αρχιμήδη σώζονται σε λατινική μετάφραση, από τις πολλές που έγιναν στη γλώσσα αυτή, την αγαπημένη γλώσσα της Ευρώπης μέχρι το 1750 περίπου, ενώ το αρχικό αρχαιοελληνικό τους κείμενο έχει χαθεί. Κάποια άλλα χαμένα έργα, σώζονται σε αραβικές μεταφράσεις (διότι ο Αρχιμήδης δεν επηρέασε σε μεγάλο βαθμό μόνο την ευρωπαϊκή επιστημονική σκέψη, αλλά και τους Άραβες επιστήμονες, οι οποίοι αντέγραψαν όλα τα έργα του στα αραβικά, γλώσσα στην οποία διασώθηκαν αρκετά, αφού τα πρωτότυπα είχαν χαθεί). Υπάρχουν τέλος και τα έργα που σώζονται ελλιπή.

2.1. Τα έργα που έχουν διασωθεί

Από τα έργα που έγραψε ο Αρχιμήδης πρέπει να έχουν διασωθεί λιγότερα από τα μισά, όπως διαπιστώνουμε από τη μελέτη αρχαίων ελληνικών, λατινικών, βυζαντινών και αραβικών πηγών. Σχετικά με το ποια έργα σώζονται σήμερα, σε ποια έκταση, σε ποιά γλώσσα και κάτω από ποιες συνθήκες διασώθηκαν, έχουν γίνει πάρα πολλές έρευνες και έχουν δημοσιευθεί κατά καιρούς πολλές μελέτες, από τις οποίες

προκύπτει ότι τα έργα του που σώζονται σήμερα, είτε ολόκληρα, είτε αποσπασματικά στην ελληνική γλώσσα, στη λατινική, στην αραβική, ή σε μεταφράσεις άλλων γλωσσών είναι τα εξής:

«Περί επίπεδων ισορροπιών» ή «Κέντρα βαρών επιπέδων» ή «Μηχανικά», δύο βιβλία, α' & β'

«Τετραγωνισμός της παραβολής»

«Περί σφαίρας και κυλίνδρου», δύο βιβλία, α' & β'

«Περί ελίκων»

«Περί κωνοειδών & σφαιροειδών»

«Περί οχουμένων» ή «Περί των επιπλεόντων σωμάτων» ή «Περί των ύδατι εφισταμένων», δύο βιβλία, α' & β'

«Κύκλου μέτρησις»

«Ψαμμίτης»

«Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος (Μέθοδος)»

«Βιβλίο Λημμάτων»

«Βοεικόν πρόβλημα»

«Στομάχιον» ή «Οστομάχιον»

«Εγγραφή σε κύκλο κανονικού επταγώνου»/ «Κατασκευή της πλευράς του εις κύκλον εγγεγραμμένου κανονικού επταγώνου»

« Ωρολόγιον υδραυλικόν» ή «Ωρολόγιον Αρχιμήδους»

«Περί κύκλων εφαπτομένων αλλήλων»

«Αρχαί της Γεωμετρίας»

«Περί των επιπλεόντων σωμάτων» (σε διαφορετικές πηγές το βρήκαμε να εμφανίζεται ως ξεχωριστό έργο και να μην είναι το «Περί οχουμένων» απλά με διαφορετική ονομασία).

2.2. Το περιεχόμενο των έργων

Η έκταση των έργων του Αρχιμήδη είναι μεγάλη και περιλαμβάνει, εκτός από τους διάφορους κλάδους των μαθηματικών, πολλούς τομείς της ανθρώπινης γνώσης, όπως φυσική, αστρονομία, μηχανική, τεχνολογία. Σήμερα, στο ευρύτερο κοινό ο Αρχιμήδης είναι γνωστός κυρίως από τις μηχανικές ανακαλύψεις και εργασίες που έχουν σχέση με τη φυσική, τη μηχανική, την υδροστατική και από τις εκπληκτικές του τεχνολογικές κατασκευές. Όμως το μεγαλύτερο έργο του ανήκει στην περιοχή των καθαρών μαθηματικών, ενώ ήταν και για αυτόν το πιο σημαντικό του έργο και μάλιστα λέγεται ότι ισχυρίστηκε ότι το μόνο σημαντικό πράγμα ήταν τα μαθηματικά και οι εφευρέσεις του ήταν απλώς ένα χόμπι της εφαρμοσμένης γεωμετρίας.

Ο Πλούταρχος έγραψε για τον Αρχιμήδη ότι: «Αφιέρωσε όλη τη στοργή και φιλοδοξία του σε αυτές τις καθαρότερες εικασίες όπου δεν μπορεί να γίνει αναφορά στις χυδαίες ανάγκες της ζωής» και επιπλέον πάλι από τον Πλούταρχο μαθαίνουμε ότι η σχέση του Αρχιμήδη με τα Μαθηματικά έφτανε στα όρια της υπερβολής μιας και αναφέρει ο Πλούταρχος ότι ο Αρχιμήδης έμενε επί πολλές ώρες, κάποτε μέρες, χωρίς φαγητό και νερό, παραμελώντας την καθαριότητα του σώματος του στην προσπάθεια του να λύσει δυσεπίλυτους γρίφους ή να αποδείξει θεωρήματα που είχαν ζορίσει ικανούς μαθηματικούς, ενώ ακόμα ήταν ολότελα αφοσιωμένος και απορροφημένος στη χάραξη γραμμών, τόξων και κύκλων που δεν μπορούσε να ασχοληθεί με οτιδήποτε άλλο. Πάντως, στην επόμενη γενιά, τα έργα του σε καθαρά μαθηματικά έχουν εκτιμηθεί πολύ περισσότερο από τις εφευρέσεις του, αν και στην αρχαιότητα τα μαθηματικά κείμενα του Αρχιμήδη ήταν ελάχιστα γνωστά σε αντίθεση με τις εφευρέσεις του. Το μαθηματικό έργο που άφησε, ήταν εκπληκτικά μεγάλο σε ποιότητα και έκταση και είχε τεράστιες δυνατότητες εφαρμογής. Θα μπορούσαμε να

ισχυριστούμε ότι έφερε τα μαθηματικά σε τόσο υψηλό επίπεδο, ώστε να μη μπορεί να γίνει τίποτα περισσότερο μέχρι την εποχή που ανακαλύφθηκε η συμβολική άλγεβρα και η αναλυτική γεωμετρία, 18 αιώνες αργότερα. Ο Alfred Hooper στο έργο του «**Markers of Mathematics**» (σελ.60) γράφει ότι ο Αρχιμήδης ήταν υπέροχος, υπέρτατος και ασυναγώνιστος (*Supreme and unchallenged*).



Εικόνα 7. Μετάλλιο Fields (δίνεται για εξαιρετικές επιδόσεις στα Μαθηματικά), η μπροστά πλευρά στα αριστερά φέρει πορτρέτο του Αρχιμήδη. Η επιγραφή γύρω από το κεφάλι είναι ένα απόσπασμα που του αποδίδεται & σημαίνει ανέβα πάνω από τον εαυτό σου και κατάκτησε τον κόσμο. Η πίσω πλευρά στα δεξιά

Εικόνα 8. Ο Αρχιμήδης



Τα έργα του Αρχιμήδη, ανάλογα με το περιεχόμενό τους, τα χωρίζουμε συνήθως σε τρεις κατηγορίες: γεωμετρικά, αριθμητικά και μηχανικά. Στα τελευταία ανήκουν τα έργα του πάνω στη φυσική, την υδροστατική, τη μηχανική και την τεχνολογία. Όμως η διάκριση αυτή των έργων σε τρεις ομάδες δε μπορεί να είναι σαφής και ακριβής, γιατί υπάρχουν προτάσεις οι οποίες μπορούν να αναφέρονται σε κάποια κατηγορία και να ανήκουν ή να χρησιμοποιούνται για τη λύση προτάσεων σε κάποια άλλη κατηγορία. Π.χ. η πρόταση 6 στο έργο «**Τετραγωνισμός της παραβολής**» χρησιμοποιείται και στο προηγούμενο έργο του «**Περί επίπεδων ισορροπιών**». Επίσης, η πρόταση 3 στο έργο «**Κύκλου μέτρησις**» είναι μια προσπάθεια να βρεθεί η αριθμητική τιμή του λόγου μεταξύ του μήκους της περιφέρειας κύκλου και του μήκους της διαμέτρου, δηλαδή μια προσεγγιστική τιμή του αριθμού π . Ο Αρχιμήδης είχε επινοήσει ένα βελτιωμένο τρόπο να γράφει πολύ μεγάλους αριθμούς. Με τη βοήθεια της μεθόδου της εξάντλησης, είχε αποδείξει ότι η τιμή του π βρίσκεται μεταξύ $223/71$ και $220/70$ δηλαδή, με σημερινό συμβολισμό, είχε αποδείξει ότι η τιμή του π βρίσκεται μεταξύ 3,1408 και 3,14286, που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση, ακόμα και για τα σημερινά δεδομένα. Γνώριζε να υπολογίζει προσεγγιστικά τις τετραγωνικές ρίζες αριθμών, να βρίσκει το άθροισμα όρων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου και το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάντλησης και τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, μπορούσε να υπολογίσει εμβαδά επιφανειών και όγκους στερεών.

Είχε υπολογίσει, τις επιφάνειες κύκλου, έλλειψης και τμήματος παραβολής. Μπορούσε να χαράξει εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο της έλικας. Η μέθοδος και η διαδικασία που ακολουθούσε για τη χάραξη εφαπτομένης σε τυχαίο σημείο καμπύλης, για τον υπολογισμό του εμβαδού επιφανειών και του όγκου στερεών και για τον υπολογισμό μέγιστων και ελαχίστων τιμών, χρησιμοποιήθηκε από τους μεταγενέστερους μαθηματικούς και ιδίως από μαθηματικούς και άλλους επιστήμονες του 17^{ου} αιώνα για τη δημιουργία και ανάπτυξη του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού.

Τόσο μεγάλο σε έκταση και τόσο υψηλό σε ποιότητα ήταν το μαθηματικό έργο του, ώστε να μπορεί κανείς να ισχυριστεί, χωρίς διάθεση υπερβολής, ότι στα μαθηματικά η συμβολή του ήταν καθοριστική. Το μαθηματικό του έργο, που διακρίνεται από πρωτοτυπία σκέψης, αυστηρότητα και μεθοδικότητα, αποτέλεσε το θεμέλιο, πάνω στο οποίο στηρίχτηκαν οι μεταγενέστεροι μαθηματικοί για να δημιουργήσουν και να οικοδομήσουν το διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό. Δίκαια επομένως θεωρείται ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός, όχι μόνο της ελληνικής αρχαιότητας, αλλά όλων των εποχών. Ο Αρχιμήδης θεωρούσε ότι στα μαθηματικά ενυπάρχει το καλό, το ύψιστο, το θείο και με την απόδειξη εκφράζεται η μεγαλοφυΐα στην ακρίβεια και τη δύναμη. Για αυτό όλο σχεδόν το έργο του που σώζεται, είναι μαθηματικού περιεχομένου. Στη Φυσική, άφησε μια σημαντική κληρονομιά, με αρχές που ο χρόνος δεν ανέτρεψε μέχρι σήμερα. Στα βιβλία του «**Περί οξουμένων**», έχει διατυπώσει θεμελιώδεις αρχές της υδροστατικής, μεταξύ των οποίων και την περίφημη αρχή της υδροστατικής ή αρχή του Αρχιμήδη, που αναφέρεται στην άνοση των σωμάτων.

Έχει διατυπώσει ολόκληρη θεωρία περί ισορροπιών και για τα κέντρα βάρους στερεών σωμάτων. Έτσι, μπορεί να θεωρηθεί και ως Πατέρας της στατικής στερεού σώματος. Με το έργο του «**Περί επίπεδων ισορροπιών**» ή «**Κέντρα βαρών επιπέδων**» ή «**Μηχανικά**», έβαλε τις βάσεις της θεωρητικής μηχανικής. Στο χαμένο έργο του «**Κατοπτρικά**», σύμφωνα με πληροφορία του Θέωνα του Αλεξανδρέα, αναφερόταν η κατασκευή οργάνων για τη μελέτη των κατόπτρων και η συμπεριφορά του φωτός. Μερικά ακόμα έργα με τα οποία συνέβαλε στην ανάπτυξη και άλλων κλάδων της φυσικής είναι ο «**Κοχλίας**», «**Αραιόμετρο – πυκνόμετρο**», «**Υδραυλικό ωρολόγιον**», «**Βιβλίο λημμάτων**», «**Περί ζυγών**», «**Στοιχεία των μηχανικών**», «**Περί της βαρύτητας και ελαφρύτητας**», «**Περί ελίκων**». Η αστρονομία τον είχε απασχολήσει, αλλά δυστυχώς ελάχιστα από τα έργα του έχουν διασωθεί και αυτά κυρίως μέσα από τα έργα του Ιππόλυτου και τη «**Σύναξιν**» του Πτολεμαίου. Είναι γνωστή η κατασκευή αστρονομικής μηχανής, με την οποία υπολόγιζε την απόσταση της Γης από τον Ήλιο και τις αποστάσεις Γης και Ηλίου από τους άλλους πλανήτες. Τέτοιοι υπολογισμοί αναφέρονται στο έργο του «**Ψαμμίτης**». Στο έργο «**Κατοπτρικά**», κατά τον Θέωνα τον Αλεξανδρέα, ο Αρχιμήδης εξηγούσε τις διαφοροποιήσεις του μεγέθους των αστερών, όταν τους παρατηρούμε από διαφορετικά σημεία της Γης. Στο έργο του «**Περί σφαιροποιΐας**» περιγράφει την κατασκευή πλανηταρίου. Δηλαδή, την κατασκευή σφαίρας η οποία μιμείται τις κινήσεις Ηλίου, Σελήνης και πλανητών.

Ο Πάππος και αργότερα ο Πρόκλος αναφέρουν ότι ο Αρχιμήδης είχε κατασκευάσει από γυαλί τη σφαίρα του σύμπαντος, μέσα στην οποία γίνονταν οι κινήσεις της Σελήνης, του Ηλίου, των πλανητών και των ζωδίων, όπως αυτές γίνονται στην πραγματικότητα (στη φύση). Στη μηχανική και την τεχνολογία, η συμβολή του ήταν τεράστια. Συνδυάζοντας τους νόμους της φυσικής και των μαθηματικών, με τις τεχνικές και μηχανικές του ανακαλύψεις έβαλε τις βάσεις της μηχανικής. Με το έργο του «**Περί επίπεδων ισορροπιών**», στο οποίο διατυπώνονται με σαφήνεια και

ακρίβεια οι νόμοι των μοχλών και της ισορροπίας των σωμάτων, μπορεί να θεωρηθεί ότι έβαλε τις βάσεις της θεωρητικής μηχανικής. Επινόησε τους μοχλούς, τις τροχαλίες, τους οδοντωτούς τροχούς, τον κοχλία, το ζυγό, το πολύσπαστο, το σίφωνα, το τηλεβόλο, το υδραυλικό ωρολόγιο, το οδόμετρο –δρομόμετρο και έκανε πολλές άλλες μηχανικές και τεχνολογικές επινοήσεις. Επινόησε πολλά είδη πολεμικών μηχανών, με τις οποίες θωράκισε την άμυνα των Συρακουσών, γιατί μπορούσε να αποκρούει τις επιθέσεις Ρωμαίων από ξηρά και θάλασσα. Τέτοιες μηχανές ήταν τα κάτοπτρα, οι περίφημες άρπαγες, οι καταπέλτες, οι βαλλίστρες, τα παλίντονα και άλλα. Μεταξύ των έργων του τα οποία περιέχουν θέματα μηχανικής και τεχνολογίας είναι τα «**Στομάχιον**», «**Περί επίπεδων ισορροπιών**», «**Τετραγωνισμός της παραβολής**», «**Περί ζυγών**», «**Στοιχεία των μηχανικών**», «**Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος (Μέθοδος)**».

2.3. Παρουσίαση των έργων του Αρχιμήδη που έχουν διασωθεί

Θα παρουσιάσουμε τα έργα που έχουν διασωθεί, θα εντοπίσουμε τα χαρακτηριστικά τους σημεία, θα επισημάνουμε τη σπουδαιότητα και τη διαχρονική αξία που έχουν αρκετά από αυτά, θα τονίσουμε τη σημασία που είχαν για τους μεταγενέστερους επιστήμονες, τη βοήθεια που πρόσφεραν και το ρόλο που έπαιξαν στη δημιουργία και την ανάπτυξη των μαθηματικών και άλλων επιστημών μέσα στους αιώνες και το ρόλο που παίζουν ακόμα και σήμερα. Η περιγραφή των έργων θα γίνει με τη σειρά που αυτά έχουν καταγραφεί παραπάνω.

2.3.1. «Περί επίπεδων ισορροπιών» ή «Κέντρα βαρών επιπέδων» ή «Μηχανικά», δύο βιβλία, α' και β'

Περιέχεται στο δεύτερο τόμο του έργου του Heiberg (έκδοση 1913) και αποτελείται από δύο βιβλία. Το πρώτο βιβλίο, που αποτελεί και το πρώτο έργο του Αρχιμήδη, περιέχει 15 προτάσεις και 7 αξιώματα. Το δεύτερο βιβλίο, που γράφτηκε λίγο αργότερα και αφού προηγουμένως είχε γράψει το έργο «Τετραγωνισμός της παραβολής», περιέχει 10 προτάσεις. Σε ότι αφορά τον τίτλο αυτού του έργου, ο Ε. Σταμάτης αναφέρει ότι οι τίτλοι «Περί επίπεδων ισορροπιών» και «Κέντρα βαρών επιπέδων» δόθηκαν από μεταγενέστερους αντιγραφείς ή μεταφραστές, ενώ ο αρχικός τίτλος που είχε δώσει ο Αρχιμήδης ήταν «Μηχανικά». Αυτό συνεπάγεται και από το γεγονός ότι ο ίδιος ο Αρχιμήδης κατά την απόδειξη των προτάσεων 6 και 10 στο έργο του «Τετραγωνισμός της παραβολής», παραπέμπει σε προηγούμενο έργο του με τίτλο «Μηχανικά». Τότε το έργο «Μηχανικά» ήταν μόνο το πρώτο βιβλίο με το δεύτερο να προστίθεται αργότερα. Ο Πρόκλος στα «Σχόλια στο α' βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη» αποδίδει στο έργο αυτό τον τίτλο «Αι ανισορροπίαι».

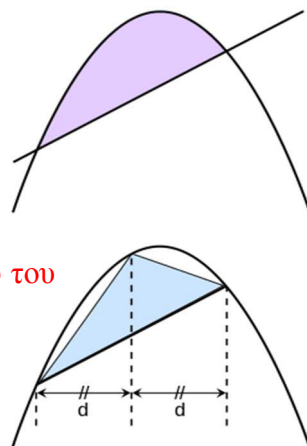
Ο Σιμπλίκιος στα σχόλια του έργου «Περί Ουρανού» του Αριστοτέλη αναφέρεται στο έργο αυτό ως «Κεντροβαρικά». Ο Sir Thomas Little Heath στο δεύτερο τόμο του έργου του «A History of Greek Mathematics» αναφέρει ότι ο Αρχιμήδης με το έργο του αυτό καθόρισε με αυστηρό γεωμετρικό τρόπο τις θεμελιώδεις αρχές της μηχανικής. Στο 1^ο βιβλίο όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο Αρχιμήδης παραθέτει πρώτα 7 αξιώματα και μετά 15 προτάσεις. Στις προτάσεις αυτές ασχολείται με τα κέντρα βάρους και τον προσδιορισμό τους σε απλά γεωμετρικά σχήματα, όπως τρίγωνα και τραπέζια. Υπάρχουν 7 αρχές ισορροπίας (αιτήματα), μεταξύ των οποίων και η αρχή: «σύμμετρα μεγέθη ισορροπούν σε αποστάσεις αντιστρόφως ανάλογες προς τα βάρη τους», την οποία χρησιμοποιούσε πολύ συχνά στις μηχανικές του αποδείξεις.

Επίσης διατυπώνονται οι νόμοι των μοχλών για σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη. Στο 2^ο βιβλίο, οι 10 προτάσεις που περιέχονται αναφέρονται στα κέντρα

βάρους παραβολοειδών επίπεδων τμημάτων. Όλο το έργο είναι πολύ σημαντικό και αποτέλεσε σημείο αναφοράς για αρκετούς από τους μεταγενέστερους επιστήμονες μέχρι και το 19^ο αιώνα.

2.3.2. «Τετραγωνισμός της παραβολής»

Περιέχεται στο δεύτερο τόμο του Heiberg (έκδοση 1913) και περιέχει 24 προτάσεις. Ο αρχικός τίτλος του έργου αυτού ήταν «**Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής**». Κεντρικό αποτέλεσμα στο έργο αυτό είναι οι δύο λύσεις του προβλήματος: «Το εμβαδόν της επιφάνειας που περιέχεται μεταξύ ενός τμήματος της παραβολής και μιας ευθείας γραμμής είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου το οποίο έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με το παραβολικό τμήμα». Η απόδειξη γίνεται με δύο τρόπους. Πρώτα μηχανικά (προτάσεις 1 μέχρι 17) και στη συνέχεια καθαρά γεωμετρικά, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάντλησης και τη μέθοδο της εις άτοπο απαγωγής (προτάσεις 18 μέχρι 24). Στην εισαγωγή αυτού του έργου υπάρχει ένα γράμμα του Αρχιμήδη προς τον Δοσίθεο και φαίνεται ότι είναι η πρώτη επιστολή που του έστειλε ο Αρχιμήδης μετά το θάνατο του Κόνωνα. Στην επιστολή αυτή δηλώνει ότι η λύση αυτή είναι πρωτότυπη και είναι ο πρώτος που την έδωσε.



Εικόνα 9. Απέδειξε ότι το εμβαδόν του παραβολικού τμήματος της πάνω εικόνας, είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του εγγεγραμμένου τριγώνου στην κάτω εικόνα

2.3.3. «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», δύο βιβλία, α' και β'

Αποτελείται από δύο βιβλία, α' και β', και περιέχεται ολόκληρο στον πρώτο τόμο του έργου του Heiberg (έκδοση 1910). Το πρώτο βιβλίο ξεκινά με μία επιστολή του Αρχιμήδη προς το Δοσίθεο και περιλαμβάνει 6 ορισμούς, 5 αξιώματα («τα λαμβανόμενα») και 50 προτάσεις. Μερικοί συγγραφείς αναφέρονται σε 49 προτάσεις και ο Ε. Σταμάτης στο έργο του «**Αρχιμήδους Άπαντα**» καταγράφει μόνο 44 προτάσεις. Το πρώτο αξίωμα λέει ότι: «Η ευθεία είναι η συντομότερη από όλες τις γραμμές που έχουν τα ίδια άκρα». Το πέμπτο αξίωμα είναι το γνωστό αξίωμα του Αρχιμήδη που αναφέρεται στη μέθοδο της εξάντλησης. Οι 7 πρώτες προτάσεις αναφέρονται στη θεωρία της εξάντλησης. Η πρόταση 6, για παράδειγμα λέει:

«Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ένας κύκλος, είναι δυνατό να εγγράψουμε ή να περιγράψουμε στον κύκλο δύο πολύγωνα, έτσι ώστε το περιγεγραμμένο πολύγωνο να έχει, ως προς το εγγεγραμμένο, λόγο μικρότερο του λόγου του μεγαλύτερου από τα δοθέντα μεγέθη προς το μικρότερο».

Αυτό σημαίνει ότι, αν εγγράψουμε και περιγράψουμε σε κύκλο πολύγωνα των οποίων οι πλευρές συνεχώς διπλασιάζονται, μπορούμε να βρούμε πολύγωνα τέτοια, ώστε η διαφορά της επιφάνειας του εγγεγραμμένου από την επιφάνεια του περιγεγραμμένου να είναι όσο θέλουμε μικρή.

Με τη βοήθεια εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων στις βάσεις κυλίνδρου και κώνου, ο Αρχιμήδης δημιουργεί πρίσματα και πυραμίδες εγγεγραμμένες και περιγεγραμμένες σε κύλινδρο και κώνο αντίστοιχα. Στη συνέχεια βρίσκει την επιφάνεια πυραμίδας εγγεγραμμένης και περιγεγραμμένης σε κώνο (προτάσεις 7 και 8) και στις προτάσεις 9 και 10 αποδεικνύει ότι η παράπλευρη επιφάνεια εγγεγραμμένης σε κώνο πυραμίδας, είναι μικρότερη από την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου, ενώ η παράπλευρη επιφάνεια περιγεγραμμένης σε κώνο πυραμίδας είναι μεγαλύτερη από την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου.

Στις επόμενες προτάσεις 11 και 12 αποδεικνύει ότι ισχύουν τα ίδια πράγματα, όταν πρίσμα εγγράφει ή περιγράφει σε κύλινδρο. Στις προτάσεις 13 και 14, με χρήση της μεθόδου της εξάντλησης και των προτάσεων που είχε προηγουμένως αποδείξει, αποδεικνύει με τη βοήθεια και της μεθόδου της εις άτοπον απαγωγής ότι η παράπλευρη επιφάνεια κώνου είναι $\pi R\lambda$, ενώ η παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου είναι $2\pi R\lambda$, όπου R είναι η ακτίνα της βάσης και λ η πλευρά του κώνου ή του κυλίνδρου αντίστοιχα. Να σημειωθεί ότι η πλευρά του κυλίνδρου ταυτίζεται με το ύψος του άρα, ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι οι παράπλευρες επιφάνειες του κώνου και του κυλίνδρου δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις: $E_{\text{κων}} = \pi R\lambda$ και $E_{\text{κυλ}} = 2\pi R\lambda$. Στη συνέχεια, ασχολείται με τον υπολογισμό της επιφάνειας και τον όγκο της σφαίρας. Στην πρόταση 33 αποδεικνύει ότι: «Η επιφάνεια της σφαίρας ισούται με την επιφάνεια τεσσάρων μέγιστων κύκλων της». Δηλαδή: $E_{\text{σφ.}} = 4\pi R^2$. Με χρήση της μεθόδου της εξάντλησης και της εις άτοπο απαγωγής, αποδεικνύει στην πρόταση 34 ότι: «Ο όγκος σφαίρας ισούται με το τετραπλάσιο του όγκου κώνου που έχει βάση πR^2 και ύψος την ακτίνα R της σφαίρας». Όπως ο ίδιος αναφέρει στο έργο του «Μέθοδος», πρώτα βρήκε τον όγκο σφαίρας και μετά το εμβαδόν της επιφάνειας της.

Μετά τον υπολογισμό της επιφάνειας και του όγκου σφαίρας, απέδειξε ότι: «Η ολική επιφάνεια κυλίνδρου που είναι περιγεγραμμένος σε σφαίρα ισούται με τα $3/2$ της επιφάνειας της σφαίρας» και «Ο όγκος κυλίνδρου περιγεγραμμένου σε σφαίρα με ύψος ίσο με τη διάμετρο της σφαίρας ισούται με τα $3/2$ του όγκου της σφαίρας».

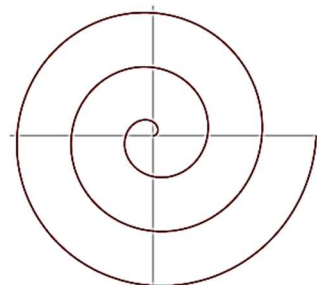
Στο 2^ο βιβλίο περιέχονται 9 προτάσεις, των οποίων οι αποδείξεις στηρίζονται στις προτάσεις του πρώτου βιβλίου, ενώ και στο βιβλίο αυτό προτάσσεται επιστολή του Αρχιμήδη προς το Δοσίθεο. Η **πρόταση 1** αναφέρεται στην εύρεση σφαίρας ίση με δοθέντα κώνο ή κύλινδρο. Στην **πρόταση 2** αποδεικνύεται ότι: «Κάθε σφαιρικό τμήμα ισούται με κώνο, ο οποίος έχει την ίδια βάση με το τμήμα και ύψος την ευθεία η οποία ως προς το ύψος του τμήματος έχει λόγο ίσο με εκείνον που έχει το άθροισμα της ακτίνας της σφαίρας και το ύψος του άλλου τμήματος ως προς το ύψος του άλλου τμήματος». Οι **προτάσεις 3 και 4** ασχολούνται με το πρόβλημα: «Να διαιρεθεί δοθείσα σφαίρα με επίπεδο, έτσι ώστε οι επιφάνειες (αντίστοιχα οι όγκοι) των τμημάτων να έχουν δοθέντα λόγο». Οι υπόλοιπες προτάσεις αναφέρονται στην κατασκευή σφαιρικών τμημάτων και στην τελευταία πρόταση αποδεικνύεται ότι: «Από όλα τα σφαιρικά τμήματα που έχουν την ίδια επιφάνεια μεγαλύτερο είναι το ημισφαίριο».

2.3.4. «Περί ελίκων»

Περιέχεται στο δεύτερο τόμο του Heiberg (έκδοση 1913) και περιέχει 7 ορισμούς και 28 προτάσεις. Στην αρχή του έργου, ο συγγραφέας δίνει τον ορισμό της έλικας στο επίπεδο, η οποία είναι γνωστή σήμερα ως **έλικα του Αρχιμήδη**. Ο ορισμός της είναι «Αν μια ευθεία γραμμή, η οποία είναι σταθερή κατά το ένα άκρο της, περιστρέφεται ισοταχώς στο επίπεδο, μέχρι να επιστρέψει στην αρχική της θέση και αν κατά τον ίδιο χρόνο που κινείται η ευθεία, κινείται και ένα σημείο ισοταχώς κατά μήκος της ευθείας γραμμής ξεκινώντας από το σταθερό άκρο της γραμμής, τότε το

σημείο αυτό θα περιγράψει μια έλικα στο επίπεδο». Ωστόσο πέρα από έλικα του Αρχιμήδη καλείται και **σπείρα του Αρχιμήδη** που επεξηγηματικά είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που αντιστοιχούν στο σύνολο των διάφορων θέσεων, από τις οποίες διέρχεται ένα σημείο, με την πάροδο του χρόνου, καθώς αυτό κινείται μακριά από ένα σταθερό σημείο με μια σταθερή ταχύτητα κατά μήκος μίας γραμμής, η οποία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Εικόνα 10. Η σπείρα του Αρχιμήδη



Ισοδύναμα, σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση: $r = a + b\theta$ με πραγματικούς αριθμούς a, b . Αυτό είναι ένα πρώιμο παράδειγμα μιας μηχανικής καμπύλης (καμπύλη που διαγράφεται από ένα κινούμενο σημείο), που θεωρείται από Έλληνα μαθηματικό. Πάντως, σε αυτό του το έργο δίνει τις βασικές ιδιότητες της έλικας και προτάσεις που αναφέρονται στην εφαπτόμενη της έλικας που περνά από ένα ορισμένο σημείο της. Η διαδικασία που ακολουθεί για τη χάραξη εφαπτόμενης σε συγκεκριμένο σημείο της έλικας είναι πολύ ενδιαφέρουσα και έχει χαρακτηριστεί από πολλούς ερευνητές ως **η αρχή της δημιουργίας του διαφορικού λογισμού**. Στο έργο αυτό προτάσσεται μια επιστολή του Αρχιμήδη προς το Δοσίθεο, όπου αναφέρεται στις σημαντικότερες προτάσεις που περιέχει το βιβλίο.

Στην επιστολή αυτή αναφέρεται και στα κύρια αποτελέσματα του έργου του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου». Από αυτό βγαίνει το συμπέρασμα ότι το έργο «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» έχει ασφαλώς γραφτεί πριν από το έργο «Περί ελίκων». Στην ίδια επιστολή ο Αρχιμήδης αναφέρεται και σε προτάσεις πάνω στα κωνοειδή και σφαιροειδή και δηλώνει ότι τις αποδείξεις των προτάσεων αυτών θα τις στείλει στο Δοσίθεο αργότερα.

2.3.5. «Περί κωνοειδών και σφαιροειδών»

Περιέχεται στον 1^ο τόμο του έργου του Heiberg (έκδοση 1910) και περιλαμβάνει 32 προτάσεις, 1 πόρισμα, διάφορους ορισμούς και λήμματα, ενώ και στο έργο αυτό προτάσσεται επιστολή προς το Δοσίθεο. **Κωνοειδές** είναι ένα στερεό που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή μιας παραβολής ή μιας υπερβολής γύρω από τον άξονα της. Το κωνοειδές που δημιουργείται από την περιστροφή μιας παραβολής γύρω από τον άξονα της ονομάζεται **ορθογώνιο κωνοειδές** ή **παραβολοειδές εκ περιστροφής**, ενώ το κωνοειδές που δημιουργείται από την περιστροφή μιας υπερβολής γύρω από τον άξονα της ονομάζεται **αμβλυγώνιο κωνοειδές** ή **υπερβολοειδές εκ περιστροφής**. **Σφαιροειδές** είναι το στερεό που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή μιας έλλειψης γύρω από έναν από τους άξονες της. Αν η περιστροφή της έλλειψης γίνει γύρω από το μεγάλο άξονα, τα σφαιροειδή ονομάζονται **παραμήκη**, ενώ όταν περιστρέφεται γύρω από το μικρό άξονα, ονομάζονται **επιπλατή σφαιροειδή**. Οι προτάσεις 1 έως 18 και το λήμμα, είναι προτάσεις που τα αποτελέσματά τους χρειάζονται για την απόδειξη των κυρίως προτάσεων που ακολουθούν. Στις προτάσεις αυτές περιλαμβάνονται μερικά αποτελέσματα αθροισμάτων που είχαν υπολογισθεί και στο έργο του «Περί ελίκων».

Στις προτάσεις 19 και 20 αποδεικνύει ότι σε κάθε τμήμα κωνοειδούς ή σφαιροειδούς μπορεί να εγγραφεί και να περιγραφεί στερεό σχήμα αποτελούμενο από κυλίνδρους του ίδιου ύψους, έτσι ώστε η διαφορά όγκου του εγγεγραμμένου από τον όγκο του περιγεγραμμένου να μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρή και πάντα μικρότερη οποιουδήποτε δοθέντος μεγέθους. Στις προτάσεις 21 και 22 αποδεικνύει ότι κάθε παραβολοειδές εκ περιστροφής, που αποκόπτεται με επίπεδο κάθετο ή όχι προς τον άξονα, είναι ίσο με τα $\frac{3}{2}$ του κώνου που έχει την ίδια βάση με το τμήμα και τον ίδιο άξονα. Όλες οι υπόλοιπες προτάσεις αναφέρονται σε όγκους τμημάτων κωνοειδών και σφαιροειδών, όταν αυτά αποκόπτονται από επίπεδα που τέμνουν τους άξονες και περνούν ή όχι από το κέντρο.

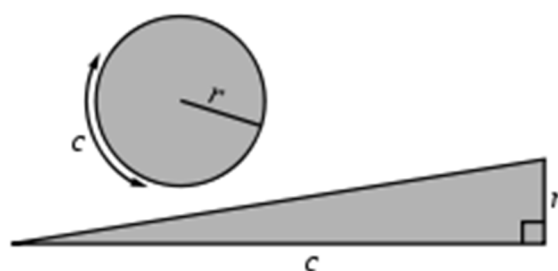
2.3.6. «Περί οχουμένων» ή «Περί των επιπλεόντων σωμάτων» ή «Περί των ύδατι εφισταμένων», δύο βιβλία, α' και β'

Σώθηκε από μια λατινική μετάφραση που έκανε ο Tartaglia το 1543. Σύμφωνα με το Heiberg, το έργο αυτό του Tartaglia ήταν ένα αντίγραφο του έργου «Ο τετραγωνισμός του κύκλου» του Luca Gaurico, που εμφανίστηκε για πρώτη φορά στη Βενετία το 1503. Από την έκδοση του Tartaglia το 1565 ο Curtius Troianus δημοσίευσε στη Βενετία σε ξεχωριστό τόμο το έργο με τίτλο «Περί επιπλεόντων σωμάτων». Τον τίτλο «Περί οχουμένων» τον βρίσκουμε στο έργο «Γεωγραφικά» του Στράβωνα και στο έργο «Πνευματικά & αυτόματα» του Ήρωνα. Ο Τζέτζης αναφέρεται στο βιβλίο αυτό με τον τίτλο «Επιστασίδια». Το «Περί οχουμένων» περιέχεται ολόκληρο στο δεύτερο τόμο του έργου του Heiberg (έκδοση 1913) και αποτελείται από δύο βιβλία. Το πρώτο βιβλίο περιέχει 2 αξιώματα και 9 προτάσεις. Στις προτάσεις 1 έως 7 αποδεικνύονται οι βασικές αρχές της υδροστατικής. Η θεμελιώδης αρχή της υδροστατικής (η άνωση) εκφράζεται με την πρόταση 6. Οι προτάσεις 8 και 9 αναφέρονται στη συνθήκη ισορροπίας τμήματος σφαίρας όταν αφεθεί στο υγρό, έτσι ώστε η βάση του τμήματος να μην εφάπτεται της επιφάνειας του υγρού. Το δεύτερο βιβλίο περιέχει 10 προτάσεις, οι οποίες αναφέρονται στην ευστάθεια και τις συνθήκες ισορροπίας παραβολοειδούς εκ περιστροφής, όταν αυτό επιπλέει ή βρίσκεται εντός υγρού. Με το έργο αυτό ο Αρχιμήδης, χωρίς καμία αμφισβήτηση, αναδεικνύεται ο πατέρας της υδροστατικής, αφού τόσο καθαρά καθιέρωσε τις βασικές αρχές της, πάνω στις οποίες στηρίχθηκε η ανάπτυξή της αργότερα.

2.3.7. «Κύκλου μέτρησις»

Περιέχεται στον 1^ο τόμο του Heiberg (έκδοση 1910) και περιέχει μόνο τρεις προτάσεις. Το έργο στην αρχική μορφή του έχει χαθεί και είναι πιθανόν αυτό που σώζεται να είναι μόνο ένα μέρος του αρχικού. Είναι γραμμένο σε μορφή αλληλογραφίας με τον Δοσίθεο. Στην πρώτη πρόταση αποδεικνύεται ότι: «*Το εμβαδόν του κύκλου ισούται με το εμβαδόν ορθογώνιου τριγώνου, το οποίο έχει τη μία κάθετη πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου και την άλλη κάθετη πλευρά ίση με την περιφέρεια του κύκλου*». Δηλαδή αν E , Γ , R είναι το εμβαδόν, το μήκος της περιφέρειας και η ακτίνα του κύκλου αντίστοιχα, ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι $E = \frac{1}{2} \Gamma R$.

Εικόνα 11. Ο κύκλος και το τρίγωνο είναι ίσοεμβαδικά



Στη 2^η πρόταση αποδεικνύεται ότι ο λόγος του εμβαδού του κύκλου προς το τετράγωνο της διαμέτρου του ισούται με $11/14$. Δηλαδή, αν $\delta=2R$ είναι η διάμετρος του κύκλου, τότε $E = \frac{11}{14}(2R)^2$. Στην 3^η πρόταση αποδεικνύεται ότι ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς τη περιφέρεια του (δηλαδή ο αριθμός π) βρίσκεται μεταξύ των αριθμών $3\frac{1}{7}$ και $3\frac{10}{71}$. Για την απόδειξη της πρότασης 1 χρησιμοποιεί τη μέθοδο της εξάντλησης και τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Η σειρά απόδειξης των προτάσεων δεν είναι η παραπάνω, αφού για την απόδειξη της πρότασης 2, ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί την πρόταση 3. Ακόμα, η τρίτη πρόταση περιέχει επίσης ακριβείς προσεγγίσεις για τη τετραγωνική ρίζα του 3 και άλλες μεγαλύτερες μη τέλειες τετραγωνικές ρίζες. Ο Αρχιμήδης, λοιπόν, υποστηρίζει ότι η τετραγωνική ρίζα του 3 βρίσκεται ανάμεσα στο $^{265}_{153}$ (περίπου 1,7320261) και στο $^{1351}_{780}$ (περίπου 1,7320512). Η πραγματική τιμή είναι περίπου 1,7320508, γεγονός που κάνει αυτό τον υπολογισμό πολύ ακριβή. Ωστόσο, παρουσίασε αυτό το αποτέλεσμα χωρίς να προσφέρει καμία εξήγηση για το πώς έφτασε σε αυτό.

2.3.8. «Ψαμμίτης»

Περιέχεται στο δεύτερο τόμο του Heiberg (έκδοση 1913). Είναι έργο αριθμητικού και αστρονομικού περιεχομένου και είχε αφιερωθεί από τον Αρχιμήδη στον Γέλωνα, γιο του Ιέρωνα. Εισάγει ένα σύστημα ονομασίας πολύ μεγάλων αριθμών με τάξεις και περιόδους, δηλαδή ένα σύστημα αρίθμησης, με το οποίο μπορεί να υπολογισθεί ο αριθμός των κόκκων της άμμου που απαιτείται για να συμπληρωθεί ένας όγκος με τις διαστάσεις του Σύμπαντος. Είναι η πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών, που γίνεται προσπάθεια απόδειξης της ύπαρξης του απείρως μεγάλου αριθμού. Ο Αρχιμήδης αναφέρεται στη θεωρία του Αρίσταρχου του Σάμιου, κατά την οποία ο κόσμος είναι πολύ μεγαλύτερος από αυτόν που έχει περιγράψει προηγουμένως. Κάνοντας διάφορες υποθέσεις, καταλήγει στον υπολογισμό της διαμέτρου του Ηλίου και της διαμέτρου της σφαίρας του κόσμου, παίρνοντας κάθε φορά οριακές τιμές. Στη συνέχεια, παίρνει ως μονάδα τη διάμετρο ενός κόκκου παπαρούνας, την οποία παίρνει λίγο μεγαλύτερη από τη συνηθισμένη, και υπολογίζει ότι η σφαίρα του κόσμου μπορεί να χωρέσει 10^{63} κόκκους άμμου, καθένας από τους οποίους θα έχει μέγεθος ίσο με το μέγεθος του κόκκου της παπαρούνας. Η εισαγωγική επιστολή αναφέρει ότι ο πατέρας του Αρχιμήδη ήταν αστρονόμος ονόματι Φειδίας, ενώ σε άλλο σημείο της επιστολής αυτής ο Αρχιμήδης παραπέμπει σε προηγούμενο έργο του, που είναι το έργο «Κύκλου μέτρησις» και άρα το έργο «Ψαμμίτης» έχει γραφεί μεταγενέστερα του έργου «Κύκλου μέτρησις». Ο «Ψαμμίτης» είναι το μόνο σωζόμενο έργο στο οποίο ο Αρχιμήδης συζητά τις απόψεις του σχετικά με την αστρονομία.

2.3.9. «Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος (μέθοδος)»

Ανακαλύφθηκε το 1906 στην Κωνσταντινούπολη όταν ανακαλύφθηκε δηλαδή το Παλίμνηστο του Αρχιμήδη και περιέχεται στο 2^ο τόμο του Heiberg (έκδοση 1913). Περιλαμβάνει 10 λήμματα και 15 προτάσεις. Στις αποδείξεις αυτών των προτάσεων χρησιμοποιούνται διαδικασίες όμοιες με τις διαδικασίες ολοκλήρωσης.

Στο βιβλίο προτάσσεται μια επιστολή του Αρχιμήδη προς τον Ερατοσθένη, στην οποία εξηγεί τη μέθοδο που χρησιμοποιεί για τις αποδείξεις των προτάσεων. Εκεί, δηλώνει ότι κάθε πρόταση την αποδεικνύει πρώτα με μηχανικό τρόπο και στη συνέχεια δίνει τη γεωμετρική της απόδειξη. Σε αυτό το έργο του χρησιμοποιεί απειροστικά και δείχνει πώς η διαμέλιση ενός σχήματος σε έναν άπειρο αριθμό, απείρως μικρών κομματιών, μπορεί να βοηθήσει στο να προσδιορίσουμε το εμβαδόν

ή και τον όγκο του. Είχε υπόψη του πως αυτή η μέθοδος στερείται επίσημης αυστηρότητας, έτσι χρησιμοποίησε και τη μέθοδο της εξάντλησης για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Πάντως, αυτή η νέα μέθοδος διερεύνησης, δηλαδή η μηχανική, που διεξήγαγε ο Αρχιμήδης θα γίνει ο πρόδρομος του άτυπου σταδίου της ανακάλυψης και διατύπωσης υποθέσεων της σύγχρονης επιστημονικής μεθόδου.

2.3.10. «Βιβλίο Λημμάτων»

Σώθηκε σε αραβική μετάφραση. Από αυτήν προέρχεται λατινική μετάφρασή του, η οποία περιέχεται στο δεύτερο τόμο του Heiberg (έκδοση 1913). Το έργο μεταφράστηκε και σε πολλές ευρωπαϊκές γλώσσες. Το 1965 ο Ε. Σταμάτης ανακατασκεύασε το κείμενο στη σικελική δωρική διάλεκτο και το δημοσιοποίησε στο Δελτίο της ελληνικής μαθηματικής εταιρείας (Νέα σειρά, τόμος 6, II τεύχος).

Περιέχει 15 προτάσεις επιπεδομετρίας. Τα λήμματα αυτά μπορεί να μην είναι αυθεντικά. Πιο συγκεκριμένα, οι μελετητές T.L. Heath και Marshall Clagett υποστήριζαν πως δε μπορεί να έχει γραφτεί από τον Αρχιμήδη, αυτό το έργο στη σημερινή του μορφή, δεδομένου ότι αναφέρει τον Αρχιμήδη σε τρίτο πρόσωπο, γεγονός που υποδηλώνει επεξεργασία από κάποιον άλλο συντάκτη. Το έργο αυτό μπορεί να βασίζεται σε μια προηγούμενη εργασία του Αρχιμήδη, η οποία πιθανότατα έχει χαθεί. Επίσης, θεωρείται πως ο τύπος του Ήρωνα για τον υπολογισμό εμβαδού ενός τριγώνου από το μήκος των πλευρών του, ήταν γνωστός στον Αρχιμήδη, ωστόσο, η πρώτη αξιόπιστη αναφορά στον τύπο, δίνεται από τον Ήρωνα τον Αλεξανδρέα τον 1ο μ.Χ. αιώνα. Πάντως, ο J.L. Heiberg και ο Moriz Cantor αναφέρουν ότι μερικά από αυτά και ιδίως τα Λήμματα 4,8,11 και 14 είναι αυθεντικά.

2.3.11. «Βοεικόν πρόβλημα»

Είναι ένα πρόβλημα που γράφτηκε στη δωρική διάλεκτο και σώζεται ως ποίημα με 44 στίχους. Αφορά τον υπολογισμό των βοδιών του Ηλίου που, σύμφωνα με τον Όμηρο, έβοσκαν στο νησί Θρινάκια. Στο πρόβλημα αυτό ζητείται να υπολογισθεί ο αριθμός των ταύρων και των αγελάδων 4 διαφορετικών χρωμάτων.

Η λύση του οδηγεί στη λύση ενός συστήματος 7 εξισώσεων με 8 αγνώστους. Είναι δηλαδή ένα πρόβλημα απροσδιόριστης ανάλυσης. Το έργο ανακαλύφθηκε σε ένα ελληνικό χειρόγραφο στη βιβλιοθήκη Herzog August στο Wolfenbüttel της Γερμανίας από τον Gotthold Ephraim Lessing, ο οποίος το εξέδωσε το 1773. Περιέχεται στο δεύτερο τόμο του Heiberg (έκδοση 1913). Το πρόβλημα το έστειλε ο Αρχιμήδης στους μαθηματικούς της Αλεξάνδρειας, με μια επιστολή του προς τον Ερατοσθένη και το είχε διατυπώσει υπό τύπον ποιήματος, καθώς ο Αρχιμήδης, όχι μόνο έλυσε τα 3 άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας αλλά δημιουργούσε τα δικά του άλυτα προβλήματα, σπαζοκεφαλιές τρομερής δυσκολίας, με τις οποίες προκαλούσε τους ανταγωνιστές του και έλεγχε τη δεινότητα της μαθηματικής τους σκέψης και έτσι στα πλαίσια αυτά έστειλε αυτή την επιστολή. Σε ελεύθερη μετάφραση το ποίημα έχει ως εξής:

Το πλήθος των βόων του Ηλίου, ξένη, μέτρησε, αφού επιστήσεις την προσοχή σου, αν μετέχεις σοφίας, πόσα δηλαδή έβοσκαν στις πεδιάδες της νήσου Σικελίας της τριγωνικής διαιρεμένο σε τέσσερις αγέλες διαφορετικού χρώματος. Η μία σε λευκό όπως το γάλα, η άλλη με κυανό έλαμπε χρώμα, η άλλη με ξανθό, η άλλη με ανάμικτο. Σε κάθε μια αγέλη ήταν ταύροι σε μεγάλο πλήθος διαιρεμένοι κατά την εξής αναλογία. Οι λευκοί ήταν το μισό και το 1/3 των κυανών ταύρων και φαντάσου, ξένη, αυξημένο το πλήθος αυτών με όλους τους ξανθούς, οι κυανοί ήταν ίσοι με το τέταρτο μέρος και το πέμπτο του ανάμικτου χρώματος, συν όλους τους ξανθούς. Τους δε υπολειπόμενους ανάμικτους φαντάσου ότι εξισούνται κατά τον αριθμό με το έκτο και έβδομο μέρος των

λευκών ταύρων και με όλους τους ξανθούς. Ως προς τις αγελάδες υπήρχαν οι εξής σχέσεις. Οι λευκές ήταν όλης της κυανής αγέλης ακριβώς ίσες προς το τρίτο μέρος και το τέταρτο. Οι κυανές πάλι ήταν ίσες με το τέταρτο και το πέμπτο μέρος της αγέλης του ανάμικτου χρώματος, όταν ερχόταν όλες με τους ταύρους στη βοσκή.

Οι αγελάδες ανάμικτου χρώματος είχαν αριθμό κατά το πλήθος ίσο και από τα τέσσερα μέρη με το πέμπτο και το έκτο μέρος της αγέλης των ξανθότριχων. Οι ξανθές αριθμούσαν το μισό του τρίτου μέρους συν το έβδομο μέρος της αγέλης των λευκών. Συ, ξένε, αν μου πεις με ακρίβεια πόσοι ήταν οι βόες του Ηλίου, χωριστά τον αριθμό των καλοθρεμμένων ταύρων, χωριστά πάλι, πόσες ήταν οι αγελάδες κάθε χρώματος, δε θα χαρακτηρίζεσαι ως αμαθής και αδαής των αριθμών, όμως δε θα συγκαταλέγεσαι ακόμα μεταξύ των σοφών. Έλα λοιπόν, λέγε και όλες τις ακόλουθες σχέσεις των βοών του Ηλίου. Οι μεν λευκοί ταύροι όταν αναμιχθούν με το πλήθος των κυανών βρίσκονται σε συμπαγή σχηματισμό ισομέτρως και κατά βάθος, και κατά πλάτος, όλες οι πεδιάδες της Θρινακίας ήταν γεμάτες από τον τετράγωνο αυτό σχηματισμό. Εξ άλλου οι ξανθοί και οι ανάμικτου χρώματος, αθροιζόμενοι μαζί βρίσκοταν έτσι, ώστε αρχίζοντας από ένα να αποτελούν σχήμα τριγώνου αριθμού, χωρίς να είναι περισσότεροι και χωρίς να είναι λιγότεροι οι ταύροι των άλλων χρωμάτων. Αφού βρεις και αυτά και τα συμπεριλάβεις στο νου σου και εκφράσεις, ξένε όλα τα μέτρα των πληθών, φύγε υπερήφανος ότι αποδείχτηκες νικητής και γνώριζε ότι κρίθηκες τέλειος σε αυτή τη σοφία.

Αυτό είναι ένα δύσκολο πρόβλημα απροσδιόριστης ανάλυσης, στο οποίο πρέπει να υπολογίσουμε 8 αγνώστους. Μας ζητείται να βρούμε τον αριθμό των ταύρων και αγελάδων για καθένα από τα 4 χρώματα. Έστω ότι

Ω , ω : είναι οι λευκοί ταύροι και αγελάδες αντίστοιχα.

X , x : οι κυανοί ταύροι και αγελάδες αντίστοιχα.

Y , y : οι ξανθοί ταύροι και αγελάδες αντίστοιχα.

Z , z : οι ανάμικτου χρώματος ταύροι και αγελάδες αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τις επιταγές του προβλήματος, θα έχουμε τις σχέσεις:

$$\Omega = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) X + Y, \quad X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) Z + X, \quad Z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \Omega + Y, \quad \omega = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (X + x)$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (Z + z), \quad z = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (Y + y), \quad y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (\Omega + \omega)$$

$$\Omega + X = \text{τετράγωνος αριθμός}, \quad Y + Z = \text{τρίγωνος αριθμός}$$

Τη λύση αυτού του προβλήματος έδωσε για πρώτη φορά ο Α. Amthor σε μια εργασία του με τίτλο: «**Das problema bouinum des Archimedes**», που δημοσιεύτηκε το 1880 στο περιοδικό Zeitschrift für Mathematik und Physik (Hist. litt. Abtheilung), τόμος 25, σελίδα 156 και εξής και η απάντηση εκφράζεται με έναν αριθμό που έχει 206.545 ψηφία και αρχίζει με τον αριθμό 7.766. Στην εργασία αυτή ο Α. Amthor κάνει μετρήσεις, υπολογισμούς και συμπεραίνει ότι ο ένας από τους αριθμούς αυτούς για να γραφεί θα χρειαζόταν 88,5 σελίδες και ότι για να γράψουμε τα ψηφία των 8 αγνώστων θα χρειαζόμασταν έναν τόμο από 660 σελίδες. Δε γνωρίζουμε αν ο Αρχιμήδης είχε λύσει το πρόβλημα, όμως είναι απίθανο να είχε δώσει πλήρη λύση. Ο Heiberg, στο δεύτερο τόμο του έργου του (έκδοση 1913), σελίδα 532, δίνει τις εξής τιμές για τους αγνώστους Ω , X , Y , Z , ω , x , y , z :

$$\Omega = 829.318.560, \quad X = 596.841.120, \quad Y = 331.950.960, \quad Z = 588.644.800$$

$$\omega = 576.508.800, \quad x = 391.459.680, \quad y = 435.137.040, \quad z = 281.265.600$$

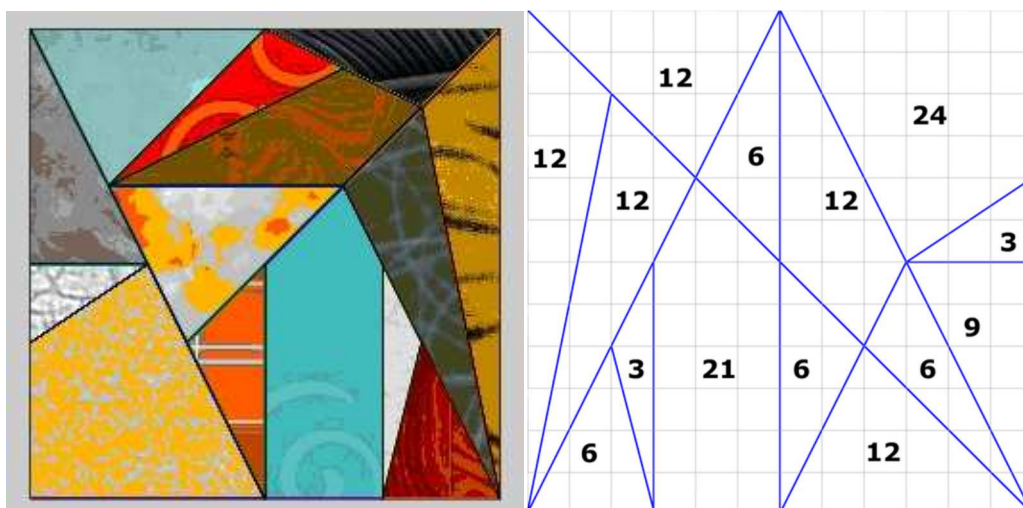
Το πρόβλημα αυτό είναι ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα. Λέγεται ότι όταν ο Κικέρων στην «Επιστολή προς Αττικόν» σε 2 περιπτώσεις χρησιμοποιεί τη φράση «Αρχιμήδειο πρόβλημα» για να δείξει κάτι το εξαιρετικά δύσκολο, είχε στο μυαλό του το βοεικό πρόβλημα του Αρχιμήδη.

2.3.12. «Στομάχιον» ή «Οστομάχιον»

Από το έργο αυτό σώζονται μόνο ελάχιστα αποσπάσματα. Ένα τμήμα του βρέθηκε σε αραβική μετάφραση το 1899, ο H. Suter το δημοσίευσε στη γερμανική γλώσσα. Ένα άλλο τμήμα, βρέθηκε στο «Παλίμψηστο» που αποκατέστησε το 1906 ο Heiberg στην Κωνσταντινούπολη και το περιέλαβε στο δεύτερο τόμο (έκδοση 1913).

Από τα τμήματα αυτά, προκύπτει ότι το έργο ήταν ένα γεωμετρικό παιχνίδι. Περιέγραφε τον τρόπο με τον οποίο κάποια κομμάτια από μέταλλο ή ελεφαντοστόν, που είχαν διάφορα επίπεδα σχήματα, μπορούσαν να συναρμολογηθούν και να σχηματίσουν διάφορες μορφές ζώων ή αντικειμένων. Πρόκειται για τεμαχισμένο πάζλ παρόμοιο με tangram. Ο Αρχιμήδης, υπολογίζει τα εμβαδά των 14 κομματιών, τα οποία συναρμολογούμενα μπορούν να σχηματίσουν ένα τετράγωνο. Έρευνα που δημοσιεύθηκε το 2003 από τον Dr. Reviel Netz του Πανεπιστημίου Στάφορντ, υποστήριζε ότι ο Αρχιμήδης προσπαθούσε να καθορίσει με πόσους δυνατούς τρόπους θα μπορούσαν να τοποθετηθούν τα κομμάτια έτσι ώστε να συναρμολογήσουν ένα τετράγωνο. Ο Dr. Netz, υπολογίζει πως τα κομμάτια μπορούν να δημιουργήσουν ένα τετράγωνο με 17.152 διαφορετικούς τρόπους. Ο αριθμός των διατάξεων είναι 536, όταν οι λύσεις που είναι ισοδύναμες με περιστροφή κι αντανάκλαση έχουν αποκλειστεί. Το πάζλ αντιπροσωπεύει ένα παράδειγμα πρώιμου προβλήματος στη συνδυαστική. Η προέλευση του ονόματος του πάζλ είναι ασαφής, και έχει υποστηριχθεί ότι αυτό έχει ληφθεί από την αρχαία ελληνική λέξη για το λαιμό ή τον οισοφάγο, στόμαχος. Ο Αυσόνιος στα «Γαμήλια ποιήματα» γράφει ότι πρόκειται για ένα παιχνίδι, που αποτελείται από 14 γεωμετρικά σχήματα. Με διάφορες συναρμολογήσεις αυτών των σχημάτων μπορούσες να δημιουργήσεις διάφορες μορφές, όπως ελέφαντα, αγριόχοιρο, χήνα που πετά, οπλισμένο μονομάχο, ενεδρεύοντα κυνηγό, πύργο, κάνθαρο και άπειρες άλλες μορφές αυτού του είδους.

Ο Αυσόνιος, ονομάζει αυτό το παιχνίδι «Οστομάχιον», μια ελληνική σύνθετη λέξη που σχηματίζεται από τις ρίζες του οστέον (οστό) και της μάχης (αγώνας), ενώ ορισμένοι ερευνητές θεωρούν πως η απόδοση «Στομάχιον» είναι λανθασμένη. Το πάζλ είναι επίσης γνωστό ως μικρό πακέτο (loculus) του Αρχιμήδη ή κουτί του Αρχιμήδη.



Εικόνα 12. Το «Στομάχιον» του Αρχιμήδη

2.3.13. «Εγγραφή σε κύκλο κανονικού επταγώνου» ή

«Κατασκευή της πλευράς του εις κύκλον εγγεγραμμένου κανονικού επταγώνου»

Ο Carh Schoy ερευνώντας τα αραβικά μαθηματικά, βρήκε ένα χειρόγραφο της εργασίας αυτής του Αρχιμήδη στην αραβική γλώσσα και το μετέφρασε στα

γερμανικά. Το έργο αυτό, δημοσιεύτηκε το 1927 μετά το θάνατο του Schoy και είχε συμπεριληφθεί στο έργο «**Τα τριγωνομετρικά μαθήματα**» του Πέρση αστρονόμου Al-Biruni. Περιέχει 17 προτάσεις, η τελευταία από τις οποίες αφορά τον τρόπο εγγραφής σε κύκλο, κανονικού πολυγώνου. Το 1968, ο Ε. Σταμάτης δημοσίευσε μια μετάφραση του έργου αυτού σε απλή καθαρεύουσα στο δελτίο της ελληνικής μαθηματικής εταιρείας (Νέα σειρά, τόμος 9, τεύχος 2).

2.3.14. «Ωρολόγιον υδραυλικόν» ή «Ωρολόγιον Αρχιμήδους»

Έχει διασωθεί στην αραβική γλώσσα, από την οποία μεταφράστηκε το 1917 στα γερμανικά και ανακοινώθηκε στην Ακαδημία της Halle από τους E. Wiedemann και F. Hauser. Δημοσιεύτηκε το 1918 με τίτλο «**Uhr des Archimedes und Zwei andere Vorrichtungen**» (ωρολόγιο του Αρχιμήδη και δύο άλλοι μηχανισμοί). Περιέχει θεωρία κατασκευής ρολογιού, το οποίο λειτουργεί με νερό.

2.3.15. «Περί κύκλων εφαπτομένων αλλήλων»

Περιέχει 14 προτάσεις επιπεδομετρίας και έχει διασωθεί σε αραβική μετάφραση.

2.3.16. «Αρχαί της Γεωμετρίας»

Περιέχει 19 προτάσεις επιπεδομετρίας και σώζεται σε αραβική μετάφραση.

2.3.17. «Περί των επιπλεόντων σωμάτων»

Ανακαλύφθηκε στο Παλίμψηστο του Αρχιμήδη, ενώ σε διαφορετική πηγή το έργο αυτό είναι το «Περί οχουμένων» απλώς με διαφορετική ονομασία. Στο πρώτο μέρος αυτής της πραγματείας, ο Αρχιμήδης εξηγεί το νόμο της ισορροπίας των υγρών κι αποδεικνύει πως το νερό θα υιοθετήσει μια σφαιρική μορφή γύρω από ένα κέντρο βαρύτητας. Αυτό μπορεί να ήταν μια προσπάθεια για να εξηγήσει τη θεωρία των τότε σύγχρονων Ελλήνων αστρονόμων και του Ερατοσθένη, ότι η Γη είναι σφαιρική.

Τα υγρά περιγράφονται από τον Αρχιμήδη ως μη αυτοβαρυντικά, δεδομένου ότι υποθέτει την ύπαρξη ενός σημείου, προς το οποίο εμπίπτουν όλα τα αντικείμενα, με αποτέλεσμα να αποκτούν το σφαιρικό τους σχήμα. Στο δεύτερο μέρος, υπολογίζει τις θέσεις ισορροπίας διάφορων τμημάτων από παραβολοειδή. Αυτό ήταν ίσως μια εξιδανίκευση των σχημάτων, που δημιουργούσε το βυθισμένο μέρος των πλοίων στο νερό. Κάποια από αυτά τα τμήματα επιπλέουν, με τη βάση κάτω από το νερό και τη μέγιστη (σε ύψος) κορυφή πάνω από το νερό, παρόμοια με τον τρόπο με τον οποίο τα παγόβουνα επιπλέουν. Η αρχή της άνωσης του Αρχιμήδη παρατίθεται σε αυτό το έργο, ως εξής: *«Κάθε σώμα που είναι εξ ολοκλήρου ή μερικώς βυθισμένο σε ένα ρευστό, δέχεται μια ώθηση ίση σε μέγεθος, αλλά αντίθετης φοράς, με το βάρος του εκτοπισμένου ρευστού».*

2.4. Έργα που δεν έχουν διασωθεί ή δεν έχουν αποκαλυφθεί έως σήμερα

Η ύπαρξη των έργων αυτών πιστοποιείται κυρίως από αραβικές πηγές και μαρτυρίες λογίων και μελετητών των αρχαίων ελληνικών κειμένων. Ένα σημαντικό έργο του Αρχιμήδη σε ελληνικό χειρόγραφο, που εξαφανίστηκε το 1942 και περιλάμβανε τη γεωμετρική οπτική, ήταν τα «**Κατοπτρικά**». Στο έργο αυτό αναφέρονται πολλοί μελετητές, όπως ο Ολυμπιόδωρος, ο Ψελλός, ο Θέων ο Αλεξανδρεύς και ο Λατίνος συγγραφέας Απουλήιος. Ο Θέων ο Αλεξανδρεύς αναφέρεται 2 φορές στο έργο του Αρχιμήδη «Κατοπτρικά». Την πρώτη, όταν μιλά για το φαινόμενο μέγεθος των αστερών. Εκεί αναφέρει ότι, ο Αρχιμήδης στο έργο του «Κατοπτρικά» αποδεικνύει ότι τα αντικείμενα που βυθίζονται στο νερό φαίνονται μεγαλύτερα και όσο περισσότερο βυθίζονται, τόσο μεγαλύτερα φαίνονται.

Ο Απουλήιος στην «Απολογία» του λέει ότι ο Αρχιμήδης στο μεγάλο έργο του «Κατοπτρικά» εξετάζει τα επίπεδα και κυρτά κάτοπτρα και τις ιδιότητες τους και σχολιάζοντας το έργο αυτό καταλήγει: «...Ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος σε όλη τη γεωμετρία άνδρας πολύ θαυμαστός ως προς την ιδιοφυΐα σε σύγκριση με άλλους, ... μελέτησε και τα κάτοπτρα πολλές φορές και με επιμέλεια». Δύο άλλα έργα, το «**Περί τριγώνων**» και το «**Περί τετράγωνων**» μνημονεύει ο ίδιος ο Αρχιμήδης στο «Βιβλίο λημμάτων». Εκεί, κατά την απόδειξη της πρότασης 12, παραπέμπει στο έργο του «Περί τετραγώνων» και στις αποδείξεις των προτάσεων 5 και 6 παραπέμπει στο έργο του «Περί τριγώνων». Συγκεκριμένα, στην πρόταση 6 γράφει: «... Όπως αποδείξαμε στο έργο μας περί τριγώνων...». Ο Ήρων, ο Πάππος, ο Torelli και ο Heiberg αναφέρονται σε έργο του Αρχιμήδη με τίτλο «**Περί ημικανονικών πολυέδρων**». Πρόκειται για έργο που πραγματεύεται 12 στερεά, τα οποία περατούνται σε κανονικά, αλλά ανόμοια πολύγωνα 2 ή 3 ειδών. Στη εισαγωγή του έργου «Ψαμμίτης», ο Αρχιμήδης αναφέρεται σε μια αριθμητική πραγματεία του με τίτλο «**Αριθμητικά**» ή «**Πρώται Αρχαί**», η οποία είχε αφιερωθεί στο Ζεύξιππο.

Στην «Αλεξανδρινή συλλογή» ο Πάππος αναφέρεται σε έργο του Αρχιμήδη με τίτλο «**Περί ζυγών**». Γράφει: «...Διότι αποδείχτηκε στην πραγματεία του Αρχιμήδη περί ζυγών και στα Μηχανικά του Φίλωνα και του Ήρωνα ότι...». Το έργο αυτό υπήρχε το 13^ο αιώνα στη βιβλιοθήκη του Πάπα στο Viterbo και μεταφράστηκε από τον W. Van Moerkbeke, σήμερα όμως είναι χαμένο. Ο Πάππος και ο Τζέτζης μνημονεύουν ένα άλλο έργο, το «**Κεντροβαρικά**». Στα «Άπαντα» του Ήρωνα (τόμος III, Μετρικά), αναφέρεται το έργο «**Πλινθίδες και κύλινδροι**».

Εκεί ο Ήρων γράφει: «... Ο Αρχιμήδης στην πραγματεία του περί πλινθίδων και κυλίνδρων αποδεικνύει ότι η περιφέρεια κάθε κύκλου προς τη διάμετρό του έχει λόγο μεγαλύτερο από 211875: 67441 και μικρότερο από 197888: 62351». Ο Αρχιμήδης, στην πρόταση 2 του β' βιβλίου του έργου του «Περί οχουμένων» αναφέρεται σε δύο άλλα έργα του, με τίτλους «**Στοιχεία Μηχανικών**» και «**Ισορροπίαι**». Το πρώτο αναφέρεται επίσης και στις προτάσεις 6 και 10 της πραγματείας «Τετραγωνισμός της παραβολής». Το δεύτερο μνημονεύεται επίσης από τον Πάππο και τον Τζέτζη. Υπάρχουν μαρτυρίες ότι ο Αρχιμήδης είχε γράψει ολόκληρο έργο με τίτλο «**Περί σφαιροποιΐας**» ή «**Κατασκευή πλανηταρίου**», στο οποίο περιέγραψε την κατασκευή σφαίρας που να μιμείται την κίνηση του Ηλίου, της Σελήνης και των πλανητών. Στο έργο αυτό αναφέρονται ο Πάππος (Αλεξανδρινή συλλογή) και ο Πρόκλος (Σχόλια στο Α' βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη).

Ο Πάππος γράφει: «... ο Κάρπος από την Αντιόχεια λέγει κάπου ότι ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος έγραψε μόνο ένα μηχανικό βιβλίο, το περί σφαιροποιΐας...». Ο Πρόκλος λέει: «... Στη μηχανική υπάγεται και η διερεύνηση των περί ισορροπίας και κεντροβαρικών, καθώς και η κατασκευή πλανηταρίου, που παριστάνει τις περιγραφές των ουράνιων σωμάτων, όπως τη διαπραγματεύτηκε ο Αρχιμήδης...». Ο Ήρων (Άπαντα, τόμος II, Μηχανικά) αναφέρεται σε έργο του Αρχιμήδη με τίτλο «**Βιβλίο στηρίξεων**». Εκεί γράφει: «... Ο Αρχιμήδης έχει δώσει γι' αυτό μια ασφαλή μέθοδο στην πραγματεία του που φέρει τον τίτλο «Βιβλίο στηρίξεων». Κατά την απόδειξη των προτάσεων 6 και 7 του έργου του «Τετραγωνισμός της παραβολής» ο Αρχιμήδης αναφέρεται σε έργο του με τίτλο «**Περί Αρχιτεκτονικής**». Άλλα έργα που αναφέρονται ως έργα του Αρχιμήδη από αρκετούς μελετητές είναι και τα «**Περί παράλληλων γραμμών**», «**Περί βαρύτητας και ελαφρότητας**», «**Προοπτική**», «**Επισΐδια βιβλία**». Στην κατηγορία των μη διασωθέντων ή μη αποκαλυφθέντων μέχρι σήμερα ανήκουν και τα «**Βαρουλκός, Υδροσκοπίαι, Πνευματική**», «**Ισοπεριμετικά**», «**Καύσις δια κατόπτρων**», «**Περί δρομομέτρων**» και «**Περί κοίλων και παραβολικών κατόπτρων**». Αραβες μελετητές αναφέρουν ως έργα του

Αρχιμήδη και τα «Στοιχεία Μαθηματικών», «Περί διαμέτρου» και «Συγγράμματα εν επιτομή».

3. Ο Αρχιμήδης ως τεχνολόγος –μηχανικός

Ο Αρχιμήδης δεν είχε σε μεγάλη εκτίμηση τις μηχανικές του κατασκευές και δεν αφιέρωσε σε αυτές ούτε ένα σύγγραμμα. Ο Πλούταρχος («Βίοι Παράλληλοι – Μάρκελλος» μας πληροφορεί ότι για τον Αρχιμήδη δεν είχαν καμία σημασία τα μηχανήματα, τα οποία δεν τα θεωρούσε ως άξια σπουδής. Γι' αυτόν, «τα περισσότερα ήταν πάρεργα γεωμετρικών παιγνίων». Και στο κεφ. 17 συμπληρώνει:

«... Τόσο φρόνημα και βάθος ψυχής είχε ο Αρχιμήδης ώστε, για κείνα τα οποία γνώριζε όχι από ανθρώπινη, αλλά από κάποια θεϊκή έμπνευση και για τα οποία είχε όνομα και φήμη, να μη θελήσει να αφήσει ούτε ένα σύγγραμμα, αλλά, θεωρώντας ότι η ενασχόληση με τα μηχανικά και γενικά κάθε επινόηση που έχει σχέση με τις πρακτικές εφαρμογές είναι αγενής και βάνανυση (τιποτένια, για παρακατιανούς), διέθεσε την προσπάθειά του μόνο σε εκείνα στα οποία ενυπάρχει το ωραίο και το ανώτερο χωρίς να είναι αναμειγμένο σ' αυτά το αναγκαίο».

Ωστόσο, η ιστορία έχει γράψει πολύ περισσότερα για τις μηχανικές επινοήσεις του Αρχιμήδη και τις πρακτικές τους εφαρμογές, παρά για τις μαθηματικές του ανακαλύψεις. Οι εφευρέσεις και οι κατασκευές του ήταν τόσο καταπληκτικές για την εποχή του, ώστε αναφέρονται σε αυτές όχι μόνο οι σύγχρονοί του, αλλά και συγγραφείς πολύ μεταγενέστεροι. Πραγματικά, ως τεχνολόγος μηχανικός υπήρξε νους πολυσύνθετος, επινοητικός, διορατικός και γόνιμος. Πολλές από τις ανακαλύψεις του δεν ξεπεράστηκαν μέχρι σήμερα κι άλλες αποτέλεσαν τη μαγιά για παραπέρα ανάπτυξη της τεχνολογίας. Χωρίς αμφισβήτηση, υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους εφευρέτες των αιώνων. Χαρακτηριστικά σημειώνουμε ότι:

- Κατασκεύασε αστρονομική συσκευή για τον υπολογισμό του μεγέθους τη Γης, της Σελήνης, του Ηλίου και δημιούργησε ένα πρωτότυπο και πολύ εντυπωσιακό πλανητάριο, που δεν έχει να ζηλέψει τίποτα από τα σημερινά.
- Ασχολήθηκε με την κίνηση και την πίεση των υγρών.
- Ανακάλυψε τους νόμους της υδροστατικής.
- Βρήκε τρόπους να μετακινεί μεγάλα βάρη με μοχλούς, γερανούς, οδοντωτούς τροχούς, τροχαλίες.
- Κατασκεύασε πολεμικές μηχανές, όπως καταπέλτες, κάτοπτρα που προκαλούσαν ανάφλεξη και διάφορα βλητικά μηχανήματα.
- Επινόησε μηχανές για να μεταφέρει υγρά σε υψηλότερα επίπεδα.
- Συνδυάζοντας τις βασικές επινοήσεις του, αυτές του μοχλού, της τροχαλίας και του οδοντωτού τροχού με τα μαθηματικά και τους φυσικούς νόμους, έβαλε τα θεμέλια της υδροστατικής και της θεωρητικής μηχανικής.

3.1. Αστρονομία

Είχε ασχοληθεί σοβαρά με την αστρονομία. Γιος αστρονόμου ο ίδιος, έδειξε μεγάλο ενδιαφέρον για τη μελέτη των ουράνιων σωμάτων και των φαινομένων της φύσης. Ο Τίτος Λίβιος («Ιστορία από κτίσεως Ρώμης», βιβλ. XXIV, XXXIII, 9) σημειώνει ότι ο Αρχιμήδης ως παρατηρητής του ουρανού και των άστρων ήταν υπέροχος και μοναδικός. Κατασκεύασε αρκετά αστρονομικά όργανα, με τα οποία μπορούσε να υπολογίσει το μέγεθος της Γης, της Σελήνης, του Ηλίου, την απόσταση της Γης από τον Ήλιο και τους πλανήτες και το μήκος της τροχιάς της Γης.

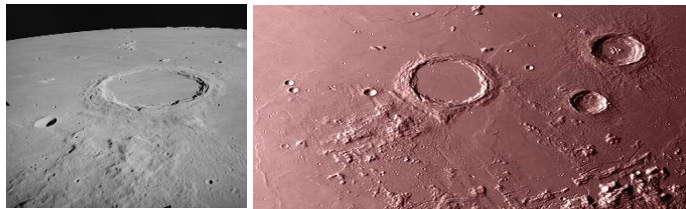
Ασχολήθηκε με τη μελέτη των διαφορών της διάρκειας του έτους και υπολόγισε προσεγγιστικά τη διάρκεια του έτους. Τον κόσμο δεν τον αντιλαμβανόταν, όπως πολλοί προγενέστεροι και σύγχρονοί του, ως μια σφαίρα που έχει ως κέντρο το

κέντρο της Γης και ακτίνα την απόσταση της Γης από τον Ήλιο. Για αυτόν ο κόσμος ήταν όπως τον εννοούσε ο Αρίσταρχος, με κέντρο τον Ήλιο. Την άποψη του αυτή διευκρινίζει και δικαιολογεί στο έργο του «Ψαμμίτης», το οποίο αποστέλλει στο Γέλωνα, γιο του τύραννου Ιέρωνα. Στο έργο αυτό περιγράφει πολύ παραστατικά τον τρόπο και τα μέσα που χρησιμοποίησε για να υπολογίσει το μέγεθος του κόσμου.

Αφού δημιουργεί ένα νέο σύστημα αρίθμησης, με το οποίο μπορεί να παριστάνει, σχετικά απλά, οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς, κατορθώνει να υπολογίσει τη διάμετρο του Ηλίου, μετρώντας τη γωνία υπό την οποία φαίνεται η διάμετρος αυτή από το μάτι του παρατηρητή. Πρέπει να σημειωθεί ότι, όπως ο ίδιος ο Αρχιμήδης περιγράφει, η μέτρηση της γωνίας υπό την οποία φαίνεται η διάμετρος του Ηλίου έγινε με πολύ απλά όργανα. Στη συνέχεια, αφού κάνει κάποιες προφανείς υποθέσεις, υπολογίζει με τη μέθοδο της εξάντλησης και της εις άτοπον απαγωγής τη γωνία υπό την οποία φαίνεται η διάμετρος του Ηλίου. Ο υπολογισμός της διαμέτρου του Ηλίου έγινε από τον Αρχιμήδη με μέσα που είχε κατασκευάσει μόνος του.

Το 1969 ο Ευάγγελος Σταμάτης ανακοίνωσε ότι είχε συγκεντρώσει 40 έργα του Αρχιμήδη στην αραβική γλώσσα, γενικής έκτασης 636 σελίδων, τα οποία βρέθηκαν στη βιβλιοθήκη της ινδικής πόλης Ratna. Ανάμεσα στα έργα αυτά που αποδίδονται στον Αρχιμήδη, είναι και μερικά αστρονομικού περιεχομένου όπως π.χ. «Περί αστρολάβου», «Περί των κύκλων του αστρολάβου και του Αζιμουθίου», «Περί ωριαίων κύκλων και του αστρολάβου», «Περί των αποστάσεων και περί των άστρων». Είναι δύσκολο να επιβεβαιωθεί ότι τα έργα αυτά είναι πράγματι του Αρχιμήδη. Εδώ, αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει ένας κρατήρας στη Σελήνη με το όνομα του Αρχιμήδη (29.7° Β, 4.0° Δ) προς τιμήν του και μια σεληνιακή οροσειρά, τα βουνά του Αρχιμήδη (25.3° Β, 4.6° Δ), ενώ ο αστεροειδής της κύριας ζώνης αστεροειδών, με προσωρινή ονομασία 1987 SL7, πήρε το όνομα 3600 Αρχιμήδης από αυτόν.

Εικόνα 13. Ο σεληνιακός κρατήρας που έχει το όνομα «Αρχιμήδης»



3.2. Το πλανητάριο

Μια από τις κατασκευές του φαίνεται ότι τη θεωρούσε πολύ αξιόλογη και από ό,τι φαίνεται, έκαμε παρέκκλιση από τη συνήθειά του και αφιέρωσε σε αυτή ολόκληρο έργο. Πρόκειται για το έργο «Περί σφαιροποιΐας» ή «Κατασκευή πλανηταρίου», στο οποίο περιέγραφε πως κατασκεύασε σφαίρα, η οποία αναπαρίστανε τις κινήσεις του Ηλίου, της Σελήνης και των πέντε πλανητών που ήταν γνωστοί εκείνη την εποχή, όπως αυτές γίνονται στην πραγματικότητα (πλανητάριο). Το έργο αυτό έχει χαθεί, υπάρχουν όμως πολλές αναφορές σε αυτό. Στο έργο αυτό αναφέρεται π.χ. ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς («Συναγωγή» έκδοση Hultsch 1875, σελ. 1024), ο Πρόκλος (Σχόλια στο Α' βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, έκδοση Friedlein 1873, σελ. 41), ο Πλούταρχος, ο Κικέρων, και άλλοι.

Από τους νεότερους ο T. L. Heath στο «A History of Greek Mathematics» (τόμος II, σελ. 17) αναφέρεται στο έργο αυτό λέγοντας: «Ο Αρχιμήδης πράγματι έχει γράψει ένα μηχανικό βιβλίο «Περί σφαιροποιΐας», το οποίο έχει χαθεί». Και ο E. J. Dijksterhuis στο έργο του «Archimedes», σελ.25, γράφει:

«Ο ίδιος ο Αρχιμήδης φαίνεται να είχε δώσει μεγαλύτερη αξία στην κατασκευή του πλανηταρίου από όλα τα άλλα τεχνικά του επιτεύγματα. Γι' αυτό πραγματικά, από ότι φαίνεται, έκανε εξαίρεση στη συνήθεια του να μην αφήνει ποτέ γραπτή αναφορά

των ανακαλύψεων του και των μηχανικών του επινοήσεων. Τουλάχιστον ανάμεσα στα χαμένα έργα του αναφέρεται ένα βιβλίο «**Περί σφαιροποιΐας**», το οποίο οπωσδήποτε δε μπορούσε παρά να αναφέρεται και στον τρόπο με τον οποίο κατασκεύασε εφευρέσεις τέτοιες, όπως το πλανητάριο».

Πολλοί μελετητές έργων των αρχαίων Ελλήνων συνδέουν τη σφαίρα αυτή του Αρχιμήδη με μια σφαίρα που είχε κατασκευάσει πολύ νωρίτερα ο Θαλής και είχε τελειοποιήσει αργότερα ο Εύδοξος οι οποίοι κατείχαν αρκετά προχωρημένες γνώσεις ουράνιας μηχανικής και ήταν σε θέση να κάνουν συγκεκριμένες προτάσεις για τον τρόπο κατασκευής ουράνιας σφαίρας, η οποία να παριστάνει τις ακριβείς κινήσεις των αστερών. Το πρόβλημα ήταν η τεχνολογική εφαρμογή αυτής της γνώσης.

Στο έργο του Αυτόλυκου «**Περί της εν κινήσει σφαίρας**», καθώς και στα «**Φαινόμενα**» του Ευκλείδη, βρίσκουμε την πληροφορία ότι στη σχολή του Εύδοξου υπήρχε ένα συγκεκριμένο εγχειρίδιο, που αναφερόταν στις ιδιότητες της σφαίρας. Η Κινητική Θεωρία του Αρχύττα του Ταραντίνου και η σφαιρικότητα των ουράνιων σωμάτων που είχε διατυπωθεί έναν αιώνα νωρίτερα, ήταν κάποια στοιχεία που βοηθούσαν στην κατασκευή της ουράνιας σφαίρας. Όλη αυτή τη σχετική με τη σφαίρα θεωρία των προγενέστερών του, ο Αρχιμήδης την εμπλούτισε με τα περίφημα έργα του «**Περί ελίκων**» και «**Περί κωνοειδών και σφαιροειδών**» και κατασκεύασε ένα μεγαλοφυές και καταπληκτικό δημιούργημα, το οποίο είναι εφάμιλλο των σημερινών τελειοποιημένων πλανηταρίων. Λεπτομερή περιγραφή της σφαίρας του Αρχιμήδη βρίσκουμε στο έργο «**De Republica**» (I, XIV, 21-22, όπου στο κεφ. 1, σελ. 40) του Κικέρωνα. Εκεί πληροφορούμαστε ότι ο Μάρκελλος, μετά την κατάληψη των Συρακουσών είχε πάρει ως μοναδικά λάφυρα 2 ουράνιες σφαίρες που είχε κατασκευάσει ο Αρχιμήδης. Η πρώτη, την οποία ο Μάρκελλος αφιέρωσε στο ναό της Αρετής, ήταν μια κλειστή ουράνια σφαίρα, στην οποία μπορούσε κανείς να παρατηρήσει τους διάφορους αστερισμούς του σύμπαντος. Η δεύτερη, την οποία ο Μάρκελλος είχε κρατήσει για τον εαυτό του, ήταν ένα υπέροχο και απίστευτα εντυπωσιακό δημιούργημα. Σύμφωνα με τον Κικέρωνα όσο αφορά για τη δεύτερη ουράνια σφαίρα που κράτησε ο Μάρκελλος αναφέρει (παρουσιάζοντας βέβαια κάποιον με το όνομα Philus να διηγείται):

«Όταν ο Γάλλος περιέστρεφε τη σφαίρα, είναι αλήθεια πως η Σελήνη πάνω στο μπρούντζινο περίβλημα βρισκόταν πίσω από τον Ήλιο τόσες περιστροφές όσες συμφωνούσαν ακριβώς με τον αριθμό των ημερών που πραγματικά βρίσκεται πίσω του και στον ουρανό. Έτσι, η ίδια η έκλειψη του Ηλίου εμφανιζόταν όπως ακριβώς θα συνέβαινε και στην πραγματικότητα».

Αυτή είναι και η περιγραφή ενός πλανηταρίου ή πλανητοσκοπίου. Ο Κικέρωνας αναφέρεται πάλι στην κατασκευή της σφαίρας του Αρχιμήδη στις «**Τουσκουλανές διατριβές**» (όπου στο κεφ. 1, σελ. 74) γράφοντας:

«Όταν ο Αρχιμήδης εκτελούσε πάνω σε μια σφαίρα τις κινήσεις του Ηλίου, της Σελήνης και των 5 περιπλανώμενων άστρων, δεν έκανε τίποτε άλλο, παρά αυτό που έκανε και ο Θεός του Πλάτωνα που δημιούργησε τον κόσμο στον Τίμαιο, δηλαδή να ελέγξει με μια περιστροφή της σφαίρας, διάφορες κινήσεις εντελώς ανόμοιες σε βραδύτητα και ταχύτητα. Τώρα, επειδή στον κόσμο αυτό τίποτε δε μπόρεσε να πραγματοποιηθεί χωρίς την επέμβαση του Θεού, ούτε ο Αρχιμήδης θα μπορούσε να αναπαράσχει αυτές τις κινήσεις πάνω σε μια σφαίρα χωρίς τη θεία έμπνευση».

Με τα λόγια αυτά ο Κικέρων τοποθετεί τον Αρχιμήδη στη σφαίρα των υπερανθρώπων. Ωστόσο, δεν είναι ο μόνος που μιλά με τόσο θαυμασμό για το πλανητάριο του Αρχιμήδη. Μια τέτοια εφεύρεση, που θα ήταν καταπληκτική και για τη σημερινή εποχή με την εξελιγμένη τεχνολογία, ήταν πολύ φυσικό να γίνει ξακουστή, να προκαλεί το θαυμασμό και να γίνεται αντικείμενο αναφοράς και

περιγραφής για πολλούς επιστήμονες της αρχαιότητας, αλλά και πηγή ποιητικής έμπνευσης πολλούς αιώνες μετά το θάνατο του Αρχιμήδη. Έτσι, το καταπληκτικό αυτό επίτευγμα μνημονεύουν, εκτός από τους συγγραφείς που αναφέραμε παραπάνω και ο Σέξτος ο Εμπειρικός («Προς μαθηματικούς», βιβλίο 9ο, σελ. 115),

ο Λακτάντιος («Θρησκευσιολογία», μέρος 1^ο, βιβλίο 2^ο, σελ. 117),

ο Μαρτιανός Καπέλλα («Περί των γάμων Φιλολογίας και Ερμού, II, 212),

ο Τερτουλλιανός («Περί ψυχής», κεφ. XIV),

ο Οβίδιος («Περί νηστειών», VI),

ο Ιούλιος Φίρμικος («Μάθησις» VI, 30.26) και άλλοι.

Χαρακτηριστικό είναι ένα ποίημα του Κλαύδιου Κλαυδιανού (4^{ος} αιώνας μ.Χ.) από την ποιητική συλλογή «Ποιήματα μικρά» (έκδοση M. Platnauer [Loeb], τόμος 2^{ος}, 1963, σελ.278). Σε αυτό, ο ποιητής απεικονίζει το θαυμασμό του Δία, όταν βλέπει να αναπαριστάνεται το έργο του ως Θεού σε μια σφαίρα, με τόση δεξιοτεχνία από το μεγάλο Συρακούσιο. Πρόσφατες έρευνες σε αυτό το θέμα εστιάζουν στο μηχανισμό των Αντικυθήρων, άλλη μία συσκευή από την κλασσική αρχαιότητα που πιθανότατα σχεδιάστηκε για τον ίδιο λόγο. Η δημιουργία τέτοιου είδους μηχανισμών απαιτούσε προχωρημένη γνώση για τη λειτουργία του διαφορικού. Αυτό πιστευόταν ότι ήταν πέρα των δυνατοτήτων της τεχνολογίας στις αρχαίες εποχές, αλλά η ανακάλυψη του μηχανισμού των Αντικυθήρων το 1902 επιβεβαίωσε το γεγονός ότι συσκευές τέτοιου είδους ήταν γνωστές στους αρχαίους Έλληνες.

Εικόνα 14. Ο Μηχανισμός των Αντικυθήρων.

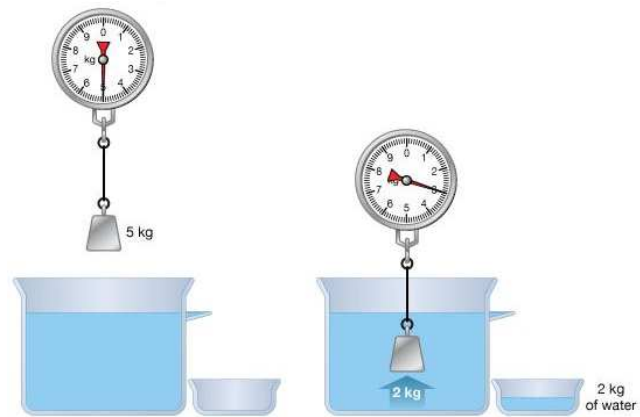


3.3. Υδροστατική

Ο Αρχιμήδης είναι ο εφευρέτης και δημιουργός ολόκληρης επιστήμης, της υδροστατικής. Ενώ υπήρξαν αρκετοί επιστήμονες της αρχαίας ελληνικής περιόδου πριν από τον Αρχιμήδη, που ασχολήθηκαν σοβαρά με θέματα θεωρητικής μηχανικής, στον τομέα της υδροστατικής, φαίνεται να μην υπάρχουν προηγούμενοι του Αρχιμήδη. Στο έργο του «**Περί οξουμένων**» βάζει τις θεμελιώδεις αρχές της υδροστατικής. Μελετά διεξοδικά την ισορροπία και την ευστάθεια σωμάτων και κάνει ολοκληρωμένη έρευνα για τις θέσεις σταθερότητας και ηρεμίας ενός δεξιού τμήματος παραβολοειδούς εκ περιστροφής, το οποίο επιπλέει σε υγρό με βάση προς τα πάνω ή προς τα κάτω, αλλά έτσι ώστε η βάση να είναι ολόκληρη πάνω ή ολόκληρη κάτω από την επιφάνεια του υγρού. Το νερό εξετάστηκε ως συστατικό των σωμάτων σε όλες του τις μορφές: υπόγειο, επίγειο, ουράνιο (χιόνι, βροχή, χαλάζι, πάχνη), πηγαίο, πόσιμο, κινούμενο ή στατικό. Ιδιαίτερη προσοχή έδωσε στις φυσικές και χημικές ιδιότητες και στη σχέση των ιδιοτήτων αυτών με τη βαρύτητα και τη θερμότητα. Στην έρευνα του Αρχιμήδη, η κίνηση των σωμάτων στο νερό θεωρήθηκε ως συνάρτηση του βάρους και του σχήματος των σωμάτων, σε σχέση με την πυκνότητα του νερού. Αποτέλεσμα όλης αυτής της διαδικασίας, ήταν η διατύπωση και μαθηματική απόδειξη των θεμελιωδών αρχών της Υδροστατικής, με πρώτη εκείνη που είναι γνωστή ως «Αρχή της υδροστατικής» ή «Αρχή του Αρχιμήδη».

Δηλαδή: «*Κάθε σώμα εμβαπτιζόμενο εντός υγρού χάνει από το βάρος του τόσο, όσο είναι το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται*».

Εικόνα 15. Η αρχή του Αρχιμήδη.



Το ρήμα «χάνει», προσδιορίζει τη δύναμη της άνωσης που είναι αντίθετης διεύθυνσης με το βάρος. Όταν η άνωση είναι μεγαλύτερη του βάρους, το σώμα επιπλέει στο σημείο εξίσωσης των δύο αντιθέτων δυνάμεων. Όταν το βάρος υπερνικά την άνωση, τότε το σώμα βυθίζεται. Στο έργο του Αρχιμήδη «Περί οχουμένων» εξετάζονται τρεις περιπτώσεις, πότε δηλαδή το σώμα είναι ισόβαρο μέσα στο νερό, πότε είναι βαρύτερο και πότε ελαφρότερο του νερού. Η ανακάλυψη της αρχής του Αρχιμήδη έχει συνδεθεί με ένα περιστατικό, το οποίο ήταν η αφορμή να μελετηθούν και να προσδιοριστούν ιδιότητες και ειδικά βάρη σωμάτων. Το περιστατικό αυτό το περιγράφει πολύ παραστατικά ο Βιτρούβιος στο έργο του «Αρχιτεκτονική». Γράφει ο Βιτρούβιος:

«Όταν ο Ιέρων απέκτησε τη βασιλική εξουσία στις Συρακούσες, θέλησε να αφιερώσει στους αθάνατους θεούς ένα χρυσό στεφάνι για τις επιτυχίες του. Τα παράγγειλε και μπροστά στο χρυσοχόο ζύγισε ακριβώς το χρυσό που διέθετε γι' αυτό. Το έργο παραδόθηκε την ορισμένη προθεσμία, βρήκε την πλήρη επιδοκιμασία του βασιλιά και το στεφάνι φαινόταν ότι είχε το προκαθορισμένο βάρος.

Αργότερα διατυπώθηκε η κατηγορία ότι μέρος του χρυσού είχε αφαιρεθεί και στο στεφάνι αναμείχθηκε το ανάλογο βάρος αργύρου. Ο Ιέρων αγανάκτησε από την απάτη και επειδή βρισκόταν σε απορία πώς να την αποδείξει, κάλεσε τον Αρχιμήδη και του έδωσε εντολή να ερευνήσει την υπόθεση. Κατά τη διάρκεια που ο Αρχιμήδης προσπαθούσε να διαλευκάνει το θέμα, έτυχε να μπει στο Βαλανείο (για να πάρει το λουτρό του). Όταν μπήκε στο λουτήρα, πέρασε από το νου του ότι όσο ήταν το βάρος του σώματός του, τόσο ήταν και το βάρος του νερού που χύθηκε από το λουτήρα.

Αφού σκέφτηκε για το αίτιο του φαινομένου, βρήκε την ερμηνεία του και δεν παρέμεινε εκεί περισσότερο, αλλά αναπήδησε συγκινημένος από το λουτήρα του και τρέχοντας γυμνός προς το σπίτι του φώναζε στα Ελληνικά εύρηκα, εύρηκα!!».



Εικόνα 16. Γλυπτό του Αρχιμήδη

Στη συνέχεια ο Βιτρούβιος αναφέρει ότι ο Αρχιμήδης παράγγειλε να κατασκευάσουν δύο σώματα ίσα σε βάρος με το βάρος του στεφανιού, το ένα από χρυσό και το άλλο από άργυρο. Κατόπιν, γέμισε πλήρως με νερό ένα δοχείο και βύθισε σε αυτό το σώμα από αργυρό. Μέτρησε το νερό που χύθηκε από το δοχείο και υπολόγισε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ του βάρους του αργύρου και του βάρους ίσου όγκου νερού, αφού έλαβε υπόψη ότι ο όγκος του νερού που χύθηκε ήταν τόσος, όση ήταν η μάζα του αργυρού που βυθίστηκε στο νερό.

Εικόνα 17. Η σφραγίδα του κράτους της Καλιφόρνια, που η λέξη «EUREKA» που γράφει είναι από το ελληνικό «Εύρηκα» του Αρχιμήδη και αναφέρεται στην εύρεση χρυσού, ενώ η λέξη αυτή αποτελεί και το σύνθημα της πολιτείας της Καλιφόρνιας



Στη συνέχεια, αφού ξαναγέμισε πλήρως το δοχείο με το νερό, βύθισε στο δοχείο το σώμα από χρυσό, μέτρησε την ποσότητα του νερού που χύθηκε και βρήκε ότι η ποσότητα αυτή ήταν μικρότερη από την ποσότητα που χύθηκε στην περίπτωση του αργυρού σώματος. Από τα αποτελέσματα αυτά διαπίστωσε ότι είχε γίνει νοθεία κατά την κατασκευή του στεφανιού. Με τις μετρήσεις βρήκε ότι η διαφορά όγκου του χρυσού από τον όγκο αργύρου ισούται με τη διαφορά όγκων των δύο ποσοτήτων νερού που χύθηκαν κατά τις δύο περιπτώσεις. Κατόπιν, υπολόγισε την ποσότητα νερού που χύθηκε όταν βύθισε στο δοχείο το νοθευμένο στεφάνι και τη διαφορά των ποσοτήτων νερού που χύθηκαν κατά τη βύθιση του στεφανιού και του σώματος από χρυσό, που είχε ίσο βάρος με το στεφάνι. Έτσι, υπολόγισε το βάρος του αργύρου που είχε αναμειχθεί με το χρυσό όταν κατασκευάστηκε το νοθευμένο στεφάνι.

Λέγεται ότι το περιστατικό αυτό οδήγησε τον Αρχιμήδη στην κατασκευή του αραιόμετρου. Μια άλλη εκδοχή για το πρόβλημα του στεφανιού δίνεται σε ένα λατινικό διδακτικό ποίημα πάνω στα μέτρα και σταθμά, το «Carmen de Ponderibus», που αποδίδεται στο Λατίνο γραμματικό Πρισκιανό, που έζησε μεταξύ 5^{ου} και 6^{ου} αιώνα μ.Χ. Στο ποίημα αυτό περιγράφεται η μέθοδος που ακολούθησε ο Αρχιμήδης για την αποκάλυψη της νοθείας ως εξής:

Στον ένα δίσκο μιας ζυγαριάς με ίσους βραχίονες τίθεται μια λίμπρα χρυσού και στην άλλη μια λίμπρα ασημιού. Και οι δύο δίσκοι βυθίζονται στο νερό και βρίσκουμε τη διαφορά στο βάρος. Ας υποθέσουμε ότι αυτή είναι 3 μονάδες. Στη συνέχεια, παίρνουμε το στεφάνι και ένα κομμάτι άργυρο του ίδιου βάρους και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία βρίσκουμε τη διαφορά βαρών. Έστω ότι αυτή είναι 18 μονάδες. Τότε το στεφάνι περιέχει 6 λίμπρες καθαρό χρυσό.

Αυτό εξηγείται ως εξής: Αν το ειδικό βάρος του χρυσού είναι ϵ_1 και του αργύρου ϵ_2 , τότε η διαφορά βάρους, ανά μονάδα βάρους των δύο υλικών κάτω από το νερό, θα είναι $\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}$. Αν το στεφάνι ζυγίζει a μονάδες, από τις οποίες οι x είναι χρυσός, τότε η διαφορά βάρους του αργύρου από τις a μονάδες, κάτω από το νερό θα

είναι $x \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right)$. Θα δώσουμε τώρα μια μαθηματική απόδειξη του τρόπου με τον οποίο ο Αρχιμήδης ανακάλυψε τη νοθεία. Η απόδειξη αυτή ακολουθεί το συλλογισμό της μεθόδου που περιγράφει ο Βιτρούβιος. Έστω ότι το βάρος του στεφανιού είναι a μονάδες και περιέχει x μονάδες χρυσού και y μονάδες αργυρού. Τότε θα είναι $x+y=a$.

Παίρνουμε ένα κομμάτι καθαρού χρυσού βάρους a , το βυθίζουμε στο νερό και το ζυγίζουμε. Έστω ότι αυτό έχασε από το βάρος του x_1 μονάδες. Τότε το βάρος x του χρυσού του στεφανιού, όταν βυθιστεί στο νερό, θα χάσει από το βάρος του $\frac{x}{a} x_1$ μονάδες. Στη συνέχεια παίρνουμε ένα κομμάτι καθαρού αργύρου βάρους a μονάδων και το βυθίζουμε στο νερό. Έστω ότι αυτό έχασε από το βάρος του y_1 μονάδες. Τότε το βάρος y του αργύρου του στεφανιού, όταν βυθιστεί στο νερό, θα χάσει από το βάρος του $\frac{y}{a} y_1$ μονάδες. Τέλος, βυθίζουμε το νοθευμένο στεφάνι μέσα στο νερό και έστω ότι αυτό έχασε από το βάρος του β μονάδες. Έτσι, έχουμε τις εξισώσεις: $x + y = a$ και $\frac{x}{a} x_1 + \frac{y}{a} y_1 = \beta$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι $\frac{x}{y} = \frac{y_1 - \beta}{\beta - x_1}$.

Εικόνα 18. Γκραβούρα, στην οποία φαίνεται ο Αρχιμήδης τη στιγμή που ανακαλύπτει το νόμο της υδροστατικής, ενώ μπροστά του είναι σχεδιασμένα συγκοινωνούντα δοχεία, σφαιρικά βάρη, δοχεία με νερό και το νοθευμένο στεφάνι



3.4. Ο ζυγός

Μετά την ανακάλυψη της νοθείας στο στεφάνι του Ιέρωνα, ο Αρχιμήδης κατασκεύασε και βαθμολόγησε ένα ζυγό, με τον οποίο μπορούσε να βρίσκει αμέσως ποια ποσότητα χρυσού και ποια ποσότητα αργύρου περιέχεται σε ένα κράμα. Σύμφωνα με τον Πάππο, (Συναγωγή, όπου στο κεφ. 1, σελ. 1024), ο Αρχιμήδης είχε γράψει ολόκληρο έργο για τον τρόπο κατασκευής και βαθμολόγησης του ζυγού. Το έργο αυτό, είχε τίτλο «Περί ζυγών», που δυστυχώς δε σώζεται. Βρέθηκε όμως στα Αραβικά, σε ένα αραβικό βιβλίο με τίτλο «Abdul Rahmanal Khazini» και μεταφράστηκε κατά λέξη στα ελληνικά από τον καθηγητή της Αραβικής Αλή Νούρ για λογαριασμό του Ευάγγελου Σταμάτη το 1979. Σύμφωνα με τη μετάφραση αυτή, ο Αρχιμήδης λέει:

«Χρησιμοποιούμε έναν πολύ ευαίσθητο ζυγό. Παίρνουμε ίσα βάρη χρυσού και αργυρού και τα τοποθετούμε στους δύο δίσκους, ώστε να ισορροπούν στον αέρα. Στη συνέχεια, τοποθετούμε τους δίσκους μέσα στο νερό. Όταν ο ζυγός κλίνει προς το μέρος του χρυσού, αφού το ειδικό βάρος του χρυσού είναι μεγαλύτερο, ισορροπούμε με το ζυγό μετακινώντας τον ιππέα μέχρις ότου γίνει οριζόντια η φάλαγγα του ζυγού και πάνω στο μοχλοβραχίονα σημειώνουμε τη θέση του ιππέα. Τα πείραμα αυτό γίνεται 2, 3 και 4 φορές στον αέρα. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι αποστάσεις του ιππέα από το υπομόχλιο, διαφέρουν ανάλογα με το βάρος του ιππέα. Όταν αναμείξουμε χρυσό με

Εικόνα 19. Ο ζυγός του Αρχιμήδη. Αυτή τη μετάφραση αραβικού κειμένου παρουσιάζει ο Σταμάτης σε εργασία του με τίτλο «Ο ζυγός του Αρχιμήδη»



Π.χ. ο Αρχιμήδης έγραψε πρώτα ολοκληρωμένη επιστημονική θεωρία πάνω στη θεωρητική μηχανική και με τη βοήθεια αυτής της θεωρίας έλυσε το πρόβλημα

«να μετακινηθεί δεδομένο βάρος με δεδομένη κίνηση». Έτσι, η επινόηση και κατασκευή των μοχλών, της τροχαλίας και του πολύσπαστου, δεν τοποθετείται σε πρακτικό επίπεδο, αλλά ήταν αποτέλεσμα της δημιουργίας και ανάπτυξης της θεωρητικής μηχανικής.

3.5.1. Μοχλοί – θεωρητική μηχανική

Μερικές απλές μηχανές, όπως ένα είδος μοχλού και η σφήνα, ήταν γνωστές πολύ πριν από την εποχή του Αρχιμήδη. Λέγεται ότι ο Αρχύτας είχε ανακαλύψει τον κοχλία και την τροχαλία. Ο Αριστοτέλης στα «**Μηχανικά φαινόμενα**», ασχολείται με ένα είδος θεωρίας μοχλών και στη συνέχεια αναφέρεται στην τροχαλία και σε συνδυασμό τροχαλιών. Επίσης, κάνει διάκριση μεταξύ μοχλού και ζυγού και μεταξύ υπομοχλίου και σημείου στήριξης του ζυγού. Υπάρχουν στοιχεία που επιβεβαιώνουν ότι η έρευνα γύρω από τους μοχλούς είχε απασχολήσει αρκετούς επιστήμονες πριν από τον Αρχιμήδη. Για παράδειγμα, ήταν γνωστό ότι η δύναμη και το βάρος αν εφαρμοστούν κάθετα σε μια ευθεία γραμμή, έτσι ώστε να ισορροπούν, θα είναι μεταξύ τους αντιστρόφως ανάλογα προς τις αποστάσεις του από το σημείο ισορροπίας. Επίσης, η έννοια του «κέντρου βάρους» σώματος είχε απασχολήσει τους επιστήμονες και πριν τον Αρχιμήδη. Είναι βέβαιο ότι καμία θεωρία δεν είχε διατυπωθεί σε σχέση με τη μηχανική και δεν είχε δοθεί μαθηματική απόδειξη σε καμία πρόταση της μηχανικής πριν από τον Αρχιμήδη. Ο Αρχιμήδης ήταν αυτός που έκανε το πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση αυτή.

Διατύπωσε και ανέπτυξε ολοκληρωμένη θεωρία πάνω στη θεωρητική μηχανική. Τις βάσεις αυτής της επιστήμης έθεσε με το έργο του «**Περί επίπεδων ισορροπιών**» ή «**Κέντρα βαρών επιπέδων**» ή «**Μηχανικά**». Ωστόσο, ο Αρχιμήδης δεν καθιέρωσε μόνο τις αρχές της μηχανικής, αλλά προχώρησε παραπέρα και βρήκε τα κέντρα βάρους επίπεδων σχημάτων και τα κέντρα βάρους ενός τμήματος της παραβολής, ημικυκλίου, κώνου, ημισφαιρίου, σφαιρικού τμήματος, τμημάτων παραβολοειδούς και σφαιροειδούς εκ περιστροφής. Κατόρθωσε να συνδυάσει τη μηχανική με τη γεωμετρία και να χρησιμοποιήσει αυτό το συνδυασμό για τη λύση δύσκολων και πολύπλοκων προβλημάτων. Με τη βοήθεια της θεωρητικής μηχανικής, διατύπωσε με ακρίβεια τους νόμους των μοχλών και τις βασικές τους ιδιότητες (στο χαμένο έργο του «**Περί ζυγών**») και επινόησε την τροχαλία, το πολύσπαστο και τους οδοντωτούς τροχούς.

Η θεωρία μοχλών του Αρχιμήδη, υπήρξε το κλειδί των παραπέρα μηχανικών εφαρμογών. Ο Πάππος στη «Συναγωγή» του αναφέρει ότι ο Αρχιμήδης στο βιβλίο του «Περί ζυγών» είχε αποδείξει αρκετές προτάσεις, οι οποίες μπορούσαν να έχουν άμεσες πρακτικές εφαρμογές. Σύμφωνα με την παράδοση, ο τύραννος Ιέρων ο ΙΙ κάλεσε τον Αρχιμήδη να αποδείξει την αξία των θεωριών του για τους μοχλούς και τις άλλες μηχανικές κατασκευές και αυτός κατόρθωσε με κάποια «μηχανή» να ανελκύσει μόνος του ένα βαρύ πολεμικό σκάφος. Φαίνεται ότι η «μηχανή» του Αρχιμήδη με την οποία γινόταν εύκολη η ανέλκυση πλοίων θεωρήθηκε ως τεράστιας σημασίας επίτευγμα, γιατί μπορούμε να βρούμε το θέμα αυτό, σε διάφορες παραλλαγές, μέσα σε πολλά έργα αρχαίων αλλά και νεότερων μελετητών. Έτσι, μερικοί από αυτούς που αναφέρουν τη «μηχανή» του Αρχιμήδη είναι:

- ο Ιωάννης Τζέτζης στο έργο «Χιλιάδες» (Π3, στο κεφ. 1, σελ. 45),
- ο Πλούταρχος στο έργο του «Βίοι Παράλληλοι,
- ο Μάρκελλος» (στο κεφ. 1, σελ. 468-486),
- ο Πρόκλος στα «Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη» (στο κεφ. 1, σελ. 63) και

ο Αθηναίος στο έργο του «Δειπνοσοφισταί» (όπου μάλιστα αναφέρει το πλοίο με την ονομασία «Συρακοσία», το οποίο αργότερα πήρε την ονομασία «Αλεξανδρίς»).

Τι ήταν όμως αυτή η «μηχανή»; Υπάρχουν πολλές απόψεις γι' αυτό. Ο Πλούταρχος λέει ότι ήταν ένα πολύσπαστο, δηλαδή ένα βίντσι με δύο τροχαλίες, κάθε μια από τις οποίες είχε μεγάλο αριθμό δεσμών. Ο Τζέτζης, στις «Χιλιάδες», αναφέρεται δύο φορές στη μηχανή αυτή. Τη μια φορά την αποκαλεί «τρίσπαστο», δηλαδή βίντσι με δύο τροχαλίες, κάθε μια από τις οποίες είχε τρεις δεσμούς.

Τη δεύτερη φορά η μηχανή αποκαλείται «χαριστίων» χωρίς ωστόσο να παρέχεται η περιγραφή της. Το τι ήταν ο «χαριστίων» του Αρχιμήδη το βρίσκουμε στο Συμπλίκιο, ο οποίος λέει ότι πρόκειται για «σταθμιστικόν όργανον», δηλαδή ένα είδος ζυγαριάς, που η λειτουργία του στηρίζεται στην «αρχή των μοχλών», στην αρχή δηλαδή ότι ο λόγος του φορτίου προς το έργο είναι αντιστρόφως ανάλογος των αποστάσεων από το υπομόχλιο (το σημείο στήριξης).

Ο Ήρων αναφέρει ότι η μηχανή αυτή ήταν ένα βαρούλκο. Και ο Αθηναίος στους «Δειπνοσοφιστές» παρουσιάζει τον Αρχιμήδη να κατασκευάζει «έλικα» για να καθελκύσει το πλοίο. Οι περισσότεροι από τους παραπάνω συγγραφείς συμφωνούν ότι η μηχανή ήταν ένας συνδυασμός τροχαλιών, πολύσπαστων, οδοντωτών τροχών και μοχλών. Μερικοί από τους συγγραφείς αναφέρουν ότι η επιστήμη της «μηχανής» αυτής και όχι μόνο του μοχλού, είχε ενθουσιάσει τον Αρχιμήδη, ο οποίος είπε την περίφημη φράση:

«Πα βω και κινώ τάν Γαν», κατά το Συμπλίκιο.

«Δος μοι πού στω και κινώ την Γην», κατά τον Ήωνα και τον Πάππο.

«Πα βω και χαριστίωνι ταν γαν κινήσω πάσαν», κατά τον Ιωάννη Τζέτζη, ο οποίος σε άλλο σημείο του έργου του αποδίδει τη φράση ως

«Όπα βω και σαλεύσω την χθόνα».

Την περίφημη αυτή φράση άλλοι συγγραφείς τη διασώζουν σε πλάγιο λόγο:

«Ήτει χωρίον έξω της γης, ως εαυτόν αντιταλαντεύσων όλη τη γη» (Συνέσιος) και

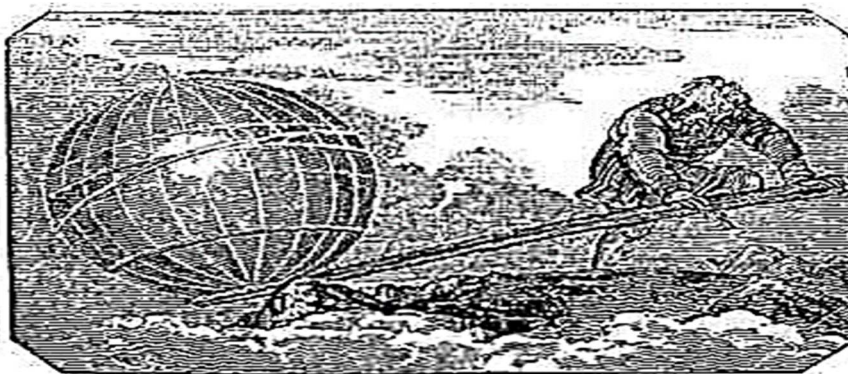
«Ει γην είχεν ετέρα, εκίνησεν αν ταύτην μεταβάς εις εκείνην» (Πλούταρχος).

Η γνωστή ρήση του Αρχιμήδη που σε νέα ελληνικά έχει μείνει ως «*δώσε μου τόπο να σταθώ και θα κινήσω τη Γη*» φανερώνει την ακλόνητη πεποίθηση του μεγάλου επιστήμονα για τη δύναμη και τη δυνατότητα των μηχανών που λειτουργούν με μοχλούς και τροχαλίες, να μετακινούν βαριά αντικείμενα.

Εικόνα 21. Ο μοχλός του Αρχιμήδη και η ανέλκυση του πλοίου



Εικόνα 22.
Χαρακτικό από το
«Mechanics
Magazine», που
δημοσιεύτηκε στο
Λονδίνο το 1824



3.5.2. Πολεμικές μηχανές – Η μηχανική στην άμυνα

Λέγεται ότι ο Ιέρων των Συρακουσών εντυπωσιάστηκε πολύ από τον τρόπο με τον οποίο ο Αρχιμήδης ανέλκυσε το πολεμικό πλοίο. Συνειδητοποίησε και αντιλήφθηκε την αξία και τη δύναμη των τεχνικών κατασκευών του Αρχιμήδη και τον παρακάλεσε, για χάρη του, να κατασκευάσει μηχανήματα που θα βοηθούσαν την άμυνα και την επίθεση των Συρακουσών, εφόσον θα υπήρχε ανάγκη. Η παράκληση του Ιέρωνα, η ανάγκη υπεράσπισης της πατρίδας του, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ο κίνδυνος από τη Ρώμη ήταν ορατός, έπεισαν τον Αρχιμήδη να αναπτύξει την εφευρετικότητα του στο μέγιστο βαθμό. Έτσι, επινόησε και κατασκεύασε πολεμικές μηχανές πολλών τύπων και μεγεθών, οι οποίες θωράκισαν την πόλη και προξένησαν μεγάλες απώλειες στους επιτιθέμενους. Κατασκεύασε πρωτότυπες βλητικές μηχανές, καταπέλτες, σκορπιούς, βαλλιστρίδες και παλίντονα, οι οποίες έπλητταν τα πλοία των εχθρών με βαριά αντικείμενα, πέτρες, βέλη και ποικίλα βλήματα τα οποία εκτόξευαν.

Είχε κατασκευάσει μηχανήματα που μπορούσαν να βάλουν σε κάθε απόσταση, εναντίον του εχθρικού στρατού που ενδεχομένως θα έκανε επίθεση από την ξηρά. Η ποικιλία τους, παρείχε δυνατότητα επιλογής στη χρήση της καταλληλότερης, ανάλογα με την απόσταση που βρισκόταν ο εχθρός. Έτσι:

- Όταν τα εχθρικά πλοία ήταν μακριά και έπλεαν προς τα τείχη, εκτοξεύονταν βαριά αντικείμενα και πέτρες, βάρους τουλάχιστον 360 κιλών (Πλούταρχος: «Βίοι παράλληλοι, Μάρκελλος») που προξενούσαν μεγάλες καταστροφές στον εχθρό.

- Όταν το πλοίο πλησίαζαν τα τείχη, αναλάμβαναν δράση οι μηχανικές αρπάγες (που αλλιώς ονομάζονται και ως «σιδερά αρπάγη» ή «σιδερά χείρα» ή «σιδερένιο χέρι»), που άρπαζαν τα εχθρικά πλοία με ένα σιδερένιο ράμφος όπως του γερανού, τα σήκωναν στον αέρα σε μεγάλο ύψος και στη συνέχεια τα άφηναν να πέσουν στη θάλασσα και να βουλιάζουν ή τα τσάκιζαν πάνω στα βράχια.

Ο Αρχιμήδης είχε τοποθετήσει τέτοια μηχανήματα σε όλο το μήκος των τειχών, έτσι που να μη φαίνονταν από τις θέσεις του εχθρού. Όταν χρειαζόταν, υψώνονταν έξω από το τείχος κεραίες, οι οποίες έφταναν πολύ μακριά και μπορούσαν να μετακινηθούν κατάλληλα με αλυσίδες. Οι μηχανικές αρπάγες χρησίμευαν και για την προσβολή εναντίον των στρατιωτών που επιτίθονταν από την ξηρά. Μόλις πλησίαζαν, έπεφτε από το τείχος ένα ξύλινο στέλεχος που κατέληγε σε σιδερένια λαβίδα, άρπαζε τους στρατιώτες, τους ανύψωνε στον αέρα και τους πέταγε με όλο τον οπλισμό τους στο έδαφος ή μέσα στην πόλη.

Υπήρξαν σύγχρονα πειράματα για να ελεγχθεί η σκοπιμότητα της αρπάγης και το 2005 ένα τηλεοπτικό ντοκιμαντέρ με τίτλο «Υπερόπλα του αρχαίου κόσμου», κατασκεύασε μια έκδοση της αρπάγης και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ήταν μια λειτουργική συσκευή. Μερικά από τα πολεμικά μηχανήματα εκτόξευαν βέλη ή πέτρες και βαριά αντικείμενα στους πολιορκητές (όπως η λιθοβόλος μηχανή που

μπορούσε να εκσφενδονίζει πέτρες βάρους 80 περίπου κιλών η κάθε μία, και βέλη 12 πήχεων σε απόσταση 180 μέτρων και την οποία εγκατέστησε ο Αρχιμήδης στο μεγαλύτερο πολεμικό πλοίο, που κατασκευάστηκε στις Συρακούσες υπό την επίβλεψη του όπως και τον κοχλία), ενώ συγχρόνως κατέβαζαν και σιδερένιες λαβίδες (άρπαγες), που ήταν δεμένες με αλυσίδες, άρπαζαν τα πλοία και τα βούλιαζαν ή τα κατέστρεφαν. Στην εσωτερική πλευρά του τείχους ο Αρχιμήδης είχε ανοίξει κοιλώματα, στα οποία τοποθετούσαν μηχανήματα μικρού βεληνεκούς, τα οποία ονόμαζε σκορπιούς. Με τα μηχανήματα αυτά, που ήταν αόρατα από τον εχθρό, μπορούσε να αντιμετωπίσει όσους πλησίαζαν τα τείχη. Λέγεται ότι είχε κατασκευάσει και το **πολεμικό τηλεβόλο** που λειτουργούσε με ατμό.

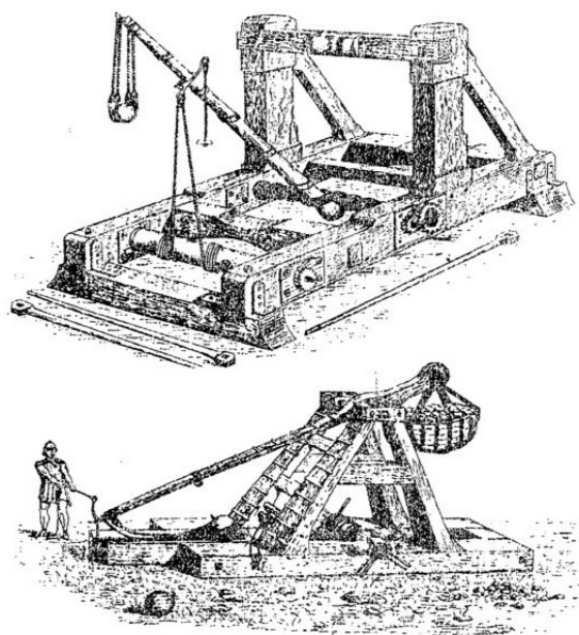
Εικόνα 23. Η μηχανική αρπάγη του Αρχιμήδη



Εικόνα 24. Η μηχανική αρπάγη του Αρχιμήδη



Εικόνα 25. Βαλλιστικά μηχανήματα της εποχής του Αρχιμήδη



Σπουδαία επινοήση του Αρχιμήδη, όπως αρκετοί αναφέρουν, ήταν και τα **εμπρηστικά κάτοπτρα**, με τα οποία συγκέντρωνε τις ηλιακές ακτίνες πάνω στα εχθρικά πλοία και προκαλούσε την πυρπόλησή τους. Τα κάτοπτρα αυτά χρησιμοποιήθηκαν και σε πολέμους πολύ μεταγενέστερους και ένας σημαντικός αριθμός επιστημόνων επί πολλές αιώνες ασχολήθηκε με τη λειτουργία και τις δυνατότητες τους. Όλες αυτές οι πολεμικές μηχανές προκαλούσαν πανικό στους Ρωμαίους στρατιώτες, οι οποίοι, όταν έβλεπαν πάνω από τα τείχη να προεξέχει κάποιο κομμάτι ξύλου ή σχοινί, έτρεχαν πανικόβλητοι, φωνάζοντας ότι ο Αρχιμήδης έχει επινοήσει κάποια νέα μηχανή για να τους καταστρέψει.

Οι πολεμικές επινοήσεις και οι μηχανικές κατασκευές του Αρχιμήδη είχαν προκαλέσει μεγάλη εντύπωση όχι μόνο στην προχριστιανική εποχή και τα πρώτα μεταχριστιανικά χρόνια, αλλά και πολλούς αιώνες αργότερα. Τόσο μεγάλος ήταν ο ενθουσιασμός των μεταγενέστερων για τα μεγαλοφυή αυτά έργα, ώστε να παρουσιάζονται και να περιγράφονται με τέτοιο τρόπο, που μερικές φορές προκαλεί αμφιβολία για το αν και κατά πόσο όλα αυτά ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα ή αγγίζουν τα όρια του απίθανου και του θρύλου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να εκδηλωθούν κατά καιρούς έντονες συζητήσεις σχετικά με την πατρότητα μερικών και να αμφισβητηθεί ακόμα και η ύπαρξη άλλων. Ιδιαίτερα αμφισβητήθηκε η ύπαρξη των εμπρηστικών κατόπτρων, τα οποία είχαν τη δυνατότητα να πυρπολούν, από σχετικά μακρινές αποστάσεις, τα πλοία του Ρωμαϊκού στόλου.

Οι αρχαίοι Έλληνες και Λατίνοι συγγραφείς, καθώς και οι Βυζαντινοί που μνημονεύουν τις πολεμικές μηχανές του Αρχιμήδη είναι πάρα πολλοί. Όλοι σχεδόν οι σύγχρονοι μελετητές του έργου του Αρχιμήδη αναφέρονται στα έργα του Πλούταρχου «**Βίοι παράλληλοι, Μάρκελλος**», του Τίτου Λίβιου «**Ιστορία από κτίσεως της Ρώμης**» και του Πολύβιου «**Ιστορίαι**». Αλλά υπάρχουν και αρκετοί άλλοι ιστορικοί, ποιητές, λόγιοι κ.τ.λ., στους οποίους μπορεί να βρει κανείς ενδιαφέροντα και σημαντικά στοιχεία για τις πολεμικές μηχανές του Αρχιμήδη. Ορισμένοι από αυτούς που αναφέρονται στις πολεμικές μηχανές του Αρχιμήδη είναι: ο Δίων ο Κάσσιος στο έργο του «**Ρωμαϊκή Ιστορία**» (στο κεφ. 1, σελ. 168), ο Θεόδωρος Μετοχίτης στο έργο του «**Ανάμικτα φιλολογικά και ιστορικά**», ο Ιωάννης Τζέτζης στο έργο του «**Χιλιάδες**» και ο Σίλιος Ιταλικός στα «**Καρχηδονιακά**».

3.5.3. Τα κάτοπτρα

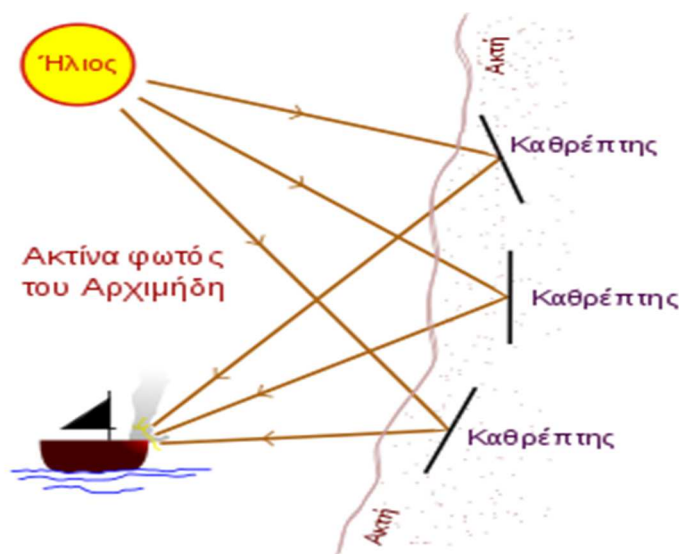
Μία από τις πιο πολυσυζητημένες επινοήσεις του Αρχιμήδη είναι αυτή των κατόπτρων, με τα οποία επιτυγχάνεται ανάφλεξη και πυρκαγιά αντικειμένων που βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση, ενώ η συσκευή των κατόπτρων είναι γνωστή και ως «**Ακτίνα φωτός του Αρχιμήδη**». Συγκεκριμένα, σε αρκετά χειρόγραφα κείμενα διαβάζουμε ότι ο Αρχιμήδης έκαψε με κάτοπτρα τα πλοία του ρωμαϊκού στόλου που πολιορκούσε θαλάσσης τις Συρακούσες. Το αρχαιότερο κείμενο στο οποίο γίνεται αναφορά της πυρκαγιάς των ρωμαϊκών πλοίων είναι ο «**Ιππίας**» του Λουκιανού (2^{ος} αιώνας μ.Χ.). Εκεί, ο συγγραφέας δεν κάνει καμία συζήτηση για κάτοπτρα, αλλά δηλώνει ότι ο Αρχιμήδης κατέκαψε τις τριήρεις των εχθρών με τεχνικά μέσα. Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι η πυρπόληση μπορεί να έγινε με εκτόξευση κάποιας πύρινης ύλης, (π.χ. καυτής πίσσας), κάτι που αναφέρεται και από άλλους συγγραφείς.

Ο Γαληνός που ήταν σύγχρονος του Λουκιανού στο έργο του «**Περί κράσεων**» (Detemperamentis, III), αναφερόμενος συνειρμικά στον κάψιμο των πλοίων από τον Αρχιμήδη, ενώ περιγράφει κάποια πυρκαγιά οικίας, δε μας δίνει ούτε αυτός την αδιαμφισβήτητη μαρτυρία ότι η πυρπόληση των πλοίων έγινε με κάτοπτρα.

Σαφή αναφορά σε κάτοπτρο ως όργανο πυρπόλησης του στόλου βρίσκουμε στη «**Ρωμαϊκή Ιστορία**» του Δίωνα του Κάσσιου, ο οποίος είναι λίγο μεταγενέστερος των δύο προηγούμενων συγγραφέων (μέσα 2^{ου} έως αρχές 3^{ου} αιώνα μ.Χ.). Περισσότερες και λεπτομερέστερες περιγραφές των κατόπτρων βρίσκουμε σε έργα Βυζαντινών συγγραφέων. Ο Ανθέμιος (6^{ος} αιώνας μ.Χ.), από τους μεγαλύτερους μηχανικούς και αρχιτέκτονες των αιώνων, ασχολήθηκε σοβαρά με τη δυνατότητα πρόκλησης πυρκαγιάς από απόσταση με χρήση κατόπτρων και απέδειξε ότι πράγματι, αυτό μπορεί να επιτευχθεί (έργο: «**Περί παράδοξων μηχανημάτων**»).

Ο Ανθέμιος δεν ήταν ο μόνος που ασχολήθηκε με την κατασκευή και λειτουργία πυρπόλων κατόπτρων. Αν η πληροφορία που μας παρέχει ο Ζωναράς (12^{ος} αιώνας μ.Χ.) είναι αληθινή, πολύ πιθανό να υπήρξε αυτόπτης μάρτυρας χρήσης τέτοιων κατόπτρων σε πραγματική πολεμική επιχείρηση και όχι απλώς σε θεωρητικό ή πειραματικό επίπεδο.

Εικόνα 26. Η ακτίνα φωτός του Αρχιμήδη.



Κατά τη μαρτυρία του Ζωναρά στο έργο του «**Επιτομή Ιστοριών**», όταν το 514 μ.Χ. ο Βιταλιανός επιχείρησε να επιβάλλει τυραννία και λεηλατούσε με το στόλο του τη Κωνσταντινούπολη, ο αυτοκράτορας έστειλε σε απόκρουσή του τον «ύπαρχο» Μαρριανό. Και στη ναυμαχία που έγινε, συνεχίζει ο Ζωναράς:

«...το ναυτικό των εχθρών καταπολεμήθηκε με μια μηχανή που είχε κατασκευάσει ο Πρόκλος, ο οποίος τότε ανθούσε στη φιλοσοφία και είχε διακριθεί στα μηχανήματα, έχοντας μελετήσει όλες τις μηχανικές κατασκευές του περιβάλλοντος γι' αυτές Αρχιμήδη και έχοντας βρει ο ίδιος και άλλες. Λέγεται δηλαδή, ότι ο Πρόκλος είχε κατασκευάσει πυρφόρα κάτοπτρα και τα κρατούσε αιωρούμενα από τα τείχη, απέναντι από τα πλοία των εχθρών, και ότι αυτά, όταν έπεφταν πάνω τους οι ακτίνες του ηλίου, έριχναν σαν κεραυνό τη φωτιά, που κατέκαιγε το ναυτικό στράτευμα των εχθρών και τα πλοία τους. Αυτό, όπως έχει εξιστορήσει ο Δίων, το είχε επινοήσει από παλιά ο Αρχιμήδης, όταν οι Ρωμαίοι πολιορκούσαν τότε τις Συρακούσες».

Το ενδιαφέρον των Βυζαντινών για τα εμπρηστικά κάτοπτρα του Αρχιμήδη διατηρήθηκε ζωντανό για πολλούς αιώνες. Έτσι, 500 και 600 χρόνια αργότερα από τους χρόνους του Πρόκλου και του Ανθέμιου, πολλοί συγγραφείς επιχειρούν να περιγράψουν και να ερμηνεύσουν το φαινόμενο και καταθέτουν το θαυμασμό τους γι' αυτό όπως ο Μιχαήλ Ψελλός (11^{ος} αιώνας μ.Χ.).

Ο Ιωάννης Τζέτζης στις «**Χιλιάδες**» περιγράφει τα κάτοπτρα του Αρχιμήδη ως σύστημα εξαγωνικών κατόπτρων, ενώ πιο συγκεκριμένα το όπλο αυτό αποτελείτο από ένα μεγάλο εξάγωνο κάτοπτρο, στο οποίο συνέκλιναν ηλιακές ακτίνες από

μικρότερα κάτοπτρα που ήταν υπό διαφορετικές γωνίες τοποθετημένα στο γύρω χώρο. Αναφορά στα κάτοπτρα του Αρχιμήδη γίνεται και από τον Ευστάθιο (12^{ος} αιώνας μ.Χ.) με αφορμή την περικεφαλαία και την ασπίδα του Διομήδη, όπως αυτά περιγράφονται στη ραψωδία Ε΄ της Ιλιάδας.

Εικόνα 27. Ο Αρχιμήδης στα τείχη των Συρακουσών καίει με κάτοπτρα το Ρωμαϊκό στόλο



Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν σε αρχαία και βυζαντινά χειρόγραφα τόσες αναφορές στα κάτοπτρα του Αρχιμήδη, παρατηρείται ένας σκεπτικισμός στους νεότερους μελετητές, και μια δυσκολία να δεχτούν ότι πράγματι ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε κάτοπτρα για να κάψει τα πλοία των Ρωμαίων. Ο λόγος είναι ότι οι πρώτες αφηγήσεις για αυτό το γεγονός απέχουν χρονικά αρκετά από την εποχή που ζούσε ο Αρχιμήδης. Π.χ. ο Λουκιανός, ο Γαληνός και ο Δίων ο Κάσσιος, συγγραφείς του 2^{ου} αιώνα μ.Χ., (ο Δίων και κατά το πρώτο τέταρτο του 3^{ου} αιώνα μ.Χ.), ζουν και γράφουν περίπου 400 χρόνια μετά το θάνατο του Αρχιμήδη και δεν αναφέρουν πως και από πού πληροφορήθηκαν τα σχετικά με τα κάτοπτρα οι συγγραφείς αυτοί.

Έτσι, ο Sir Thomas Little Heath στο «**A History of Greek Mathematics**» (2^{ος} τόμος, σελ. 18 & 19), σημειώνει ότι τα σχετικά με τα κάτοπτρα, δεν τα βρίσκουμε σε κανέναν έγκυρο συγγραφέα πριν από τον Λουκιανό. Αλλά κατά τη γνώμη του, είναι πολύ πιθανό ο Αρχιμήδης να ανακάλυψε κάποια μορφή καυστικών κατόπτρων. Ο E. J. Dijksterhuis στο «**Archimedes**» (σελ. 28) γράφει ότι οι παραδοσιακές ιστορίες για την άμυνα των Συρακουσών αναφέρουν βέβαια και τα καυστικά κάτοπτρα, με τα οποία ο Αρχιμήδης εστίαζε τις ακτίνες του ηλίου τόσο έντονα πάνω στα πλοία των Ρωμαίων, ώστε αυτά έπιαναν φωτιά. Ωστόσο, η ιστορία αυτή, στην οποία είναι φανερό το απίθανο της τεχνικής, δε βρίσκεται σε κανέναν από τους ιστορικούς Πολύβιο, Τίτο Λίβιο και Πλούταρχο.

Έτσι, συμπεραίνει ο συγγραφέας, αξίζει λιγότερης προσοχής από ότι οι αναφορές στα βαλλιστικά εργαλεία, που παρά την υπερβολή των μαρτυριών, μπορούν εξίσου καλά να περιέχουν και ένα πυρήνα αλήθειας. Το ίδιο κατηγορηματική είναι και η Isabella Gr. Bachmakova όπως διαφαίνεται σε κριτική που κάνει μαζί με τον B. A. Ρόζενφλτ σε έργο του E. Σταμάτη «**Αρχιμήδους Άπαντα**» και που δημοσιεύει στο περιοδικό «**Θέματα Ιστορίας Φυσιογνωσίας και Τεχνικής**» της Ακαδημίας Επιστημών της Ε.Σ.Σ.Δ. (τεύχος 4, (53), Μόσχα, 1976).

Η επινόηση από τον Αρχιμήδη κατόπτρων, τα οποία προκαλούν ανάφλεξη στον εχθρικό στόλο από μεγάλη απόσταση είχε προκαλέσει πολλές συζητήσεις και αντιπαραθέσεις κατά τον 17^ο και 18^ο αιώνα. Αν και η ιστορία αυτή μέχρι τότε είχε περάσει στη συνείδηση των επιστημόνων ως αληθινή και αξιοπίστη, λόγω της μεγάλης φήμης που είχε ο Αρχιμήδης ως μαθηματικός και μηχανικός, σιγά – σιγά άρχισε να αμφισβητείται όλο και περισσότερο. Αποκορύφωμα αυτής της

αμφισβήτησης, ήταν η δήλωση του Descartes στο έργο του «**Διοπτρικά**» (που γράφτηκε το 1637), ότι η ιστορία αυτή είναι παραμύθι. Ο Descartes, χωρίς να δικαιολογεί τις θέσεις του, αρνείται τη δυνατότητα κατασκευής κατόπτρων με τις ιδιότητες που αποδίδονται στα κάτοπτρα του Αρχιμήδη. Τη θέση αυτή υιοθέτησαν αρκετοί φυσικοί και άλλοι επιστήμονες της εποχής εκείνης. Όμως η θέση του Descartes, έτσι όπως δόθηκε αναιτιολόγητα, προκάλεσε και αντίθετες αντιδράσεις. Αξιόλογοι μαθηματικοί και άλλοι επιστήμονες αποφάσισαν να ερευνήσουν το θέμα και να το τεκμηριώσουν πειραματικά.

Ο Γερμανός καθηγητής στο Wurzburg Athanasius Kircher, επισκέφτηκε τις Συρακούσες και μελέτησε τις δυνατές αποστάσεις των ρωμαϊκών πλοίων από τα τείχη. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η απόσταση των πλοίων από τους αμυνόμενους δε μπορεί να ήταν μεγαλύτερη από 100 πόδια, σε αντίθεση με όλους εκείνους τους αρχαίους συγγραφείς που αναφέρουν πολύ μεγαλύτερες αποστάσεις. Στη συνέχεια, αποφάσισε να εξετάσει πειραματικά αν υπάρχει δυνατότητα κατασκευής κατόπτρων, τα οποία μπορούν να προκαλέσουν πυρκαγιά από αυτή την απόσταση. Όπως ο ίδιος αναφέρει στο δέκατο βιβλίο του έργου του «**Ars Magna Lucis Umbrae**», που γράφτηκε το 1646, τα ερευνητικά του πειράματα τον οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι με 5 μικρά κάτοπτρα προσαρμοσμένα κατάλληλα, μπορεί να επιτευχθεί το ζητούμενο.

Εικόνα 28. Τα εμπρηστικά κάτοπτρα του Αρχιμήδη



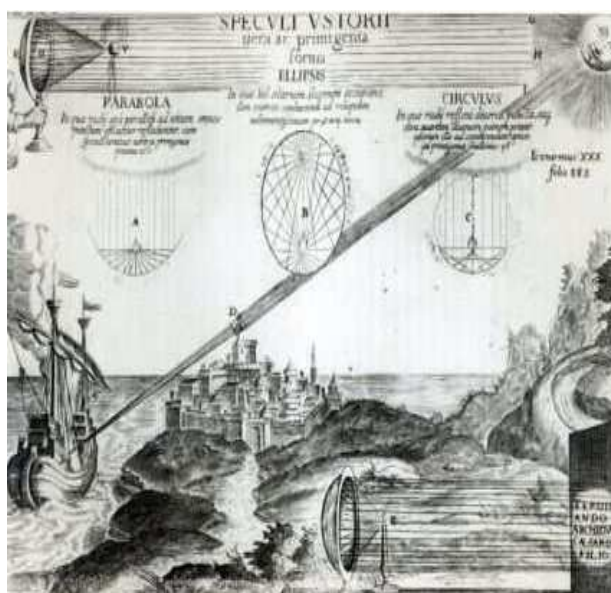
Ο Γάλλος μαθηματικός και μέλος της Ακαδημίας Φυσικών Επιστημών του Παρισιού George Louis Leclerc, κόμης του Buffon, αγανακτισμένος από την ατεκμηρίωτη δήλωση του Descartes, αποφάσισε να ερευνήσει διεξοδικά το θέμα αποφασίζοντας να το τεκμηριώσει πειραματικά, θέτοντας ως στόχο την επίτευξη ανάφλεξης στα 100, 200 και 300 πόδια. Τη διαδικασία έρευνας και τον τρόπο πειραματικής επιβεβαίωσης, περιγράφει ο ίδιος σε ένα έργο με τίτλο «**Invention de miroirs ardents Pour brusler a une grande distance**», που δημοσιεύτηκε το 1747 στο Memoirs Acad. de Sci. de l' Institut de France(σελίδες 82 μέχρι 101). Εκεί ο Buffon καταλήγει:

«Τώρα που τελείωσα με επιτυχία τα πειράματά μου, είναι πλέον βέβαιο ότι ο Αρχιμήδης ήταν ικανός να κάνει με μεταλλικά κάτοπτρα εκείνο που εγώ έκαμα με γυάλινα κάτοπτρα. Συνεπώς, δε μπορεί κανείς να αρνηθεί τον τίτλο του εφευρέτη αυτών των κατόπτρων στον Αρχιμήδη. Οι περιστάσεις που έκανε χρήση αυτών των κατόπτρων, χωρίς αμφιβολία, τον έκαμαν πιο φημισμένο, παρά η εφεύρεση του αυτή καθ αυτή».

Το 1992 ο Erwin Kreyzig του Πανεπιστημίου Carleton στην Ottawa του Καναδά δημοσίευσε μια ολόκληρη εργασία, στην οποία αναλύει τις κύριες ιδέες του παραπάνω έργου του Buffon. Η εργασία αυτή είναι αρκετά ενδιαφέρουσα και έχει τον τίτλο «**Archimedes and Invention of Burning Mirrors: An Investigation of work of Buffon**». Πολλοί ακόμα επιστήμονες και ερευνητές, προσπάθησαν να

τεκμηριώσουν τη δυνατότητα κατασκευής κατόπτρων, που να προκαλούν ανάφλεξη από μακρινές αποστάσεις. Τέτοια πειράματα είχε κάνει στο Μιλάνο, ο M. Settala, ιερέας και αργότερα διευθυντής της Ακαδημίας Καλών Τεχνών του Μιλάνου και στη Λυών ο F. Villette, ο οποίος είχε κατασκευάσει κάτοπτρα από γυαλισμένο σίδερο.

Ένα από αυτά, κατά τον Buffon, αγοράστηκε από το Λουδοβίκο 15^ο για την Ακαδημία του Παρισιού. Εκείνος που για πολλά χρόνια ασχολήθηκε με πειράματα πάνω στα αναφλεκτικά κάτοπτρα και κατασκεύασε τέτοια κάτοπτρα και φακούς σε ποικιλία μεγεθών και ποιότητας, ήταν ο Ehrenfried Walter von Tschirnhaus, κόμης του Kieslingswale και του Stolzenberg. Η έρευνα ξεκίνησε το 1676, όταν πήγε στην Ιταλία και τη Λυών και συνεργάστηκε με τους Settala, Villette και Kircher για 3 χρόνια. Γυρίζοντας στην πατρίδα του, συνέχισε την έρευνά και κατασκευή κατόπτρων μέχρι το 1692. Οι εργασίες αυτές οδήγησαν τον Tschirnhaus στην κατασκευή κυρτών κατόπτρων, που μπορούσαν να προκαλέσουν την ανάφλεξη από μεγάλη απόσταση.



Εικόνα 29. Τα παραβολικά κάτοπτρα του Αρχιμήδη.

Στην Ελλάδα, ο πολιτικός μηχανικός Ιωάννης Σακκάς, ασχολήθηκε εντατικά με τα κάτοπτρα του Αρχιμήδη και έγραψε ολόκληρο έργο γύρω από το θέμα αυτό. Το έργο αυτό του Ι. Σακκά έχει εκδοθεί από το Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας. Από το 1966, εστιάζει στο θέμα αυτό ο Ι. Σακκάς με τα πρώτα εργαστηριακά του πειράματα αναφορικά με τους διάφορους φακούς που είχε πιθανότατα χρησιμοποιήσει ο Αρχιμήδης, ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι ο Ι. Σακκάς ποτέ δεν αμφέβαλλε για την αλήθεια του γεγονότος της καύσης των ρωμαϊκών πλοίων. Μάλιστα, σε μια πρώτη δημοσίευση του στο θέμα σημειώνει:

«Ο Αρχιμήδης ηδύνατο να κατακαύση τα πλοία του στόλου των Ρωμαίων, συγκεντρών την ηλιακήν ακτινοβολίαν επ' αυτών μέσω κυλινδρικών είτε επιπέδων κατόπτρων. Κατά πάσα πιθανότητα, όμως, εχρησιμοποίησεν επίπεδα κάτοπτρα, γραμμικών διαστάσεων περί το μέτρον ή κατά τι μεγαλύτερων αυτού, εις συστήματα συγκεντρώσεως εξ 100 κατ πλέον κατόπτρων. Έκαστον σύστημα ηδύνατο να χρησιμοποιηθή εις απάσας τας αποστάσεις από τας πλησίον μέχρι των 100 μ. απ' αυτούς».

Στις 06.11.1973 ο Ι. Σακκάς έκανε μια αναπαράσταση της πυρπόλησης του Ρωμαϊκού στόλου με επίπεδα κάτοπτρα, η οποία ήταν επιτυχής όπως ο ίδιος ανακοίνωσε. Πιο συγκεκριμένα, το πείραμα έλαβε χώρα στη ναυτική βάση Σκαρμαγκά. Για αυτή τη περίπτωση χρησιμοποιήθηκαν 70 καθρέπτες, ο καθένας με

χάλκινη επίστρωση και μέγεθος περίπου στα 1,5 επί 1 m. Οι καθρέπτες στράφηκαν σε ένα ομοίωμα από κόντρα πλακέ ενός ρωμαϊκού πολεμικού πλοίου το οποίο βρισκόταν σε απόσταση περίπου 50 m. Όταν οι καθρέπτες σημάδεψαν με ακρίβεια το πλοίο, αυτό έπιασε φωτιά μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα. Το πλοίο από κόντρα πλακέ ήταν επιστρωμένο με βαφή πίσσας, η οποία μπορεί να βοηθήσει στην ανάφλεξη. Η επίστρωση με βαφή πίσσας ήταν κοινότοπη στα πλοία την κλασική εποχή.

Εικόνα 30. Πείραμα του Σακκά το 1973.



Τον Οκτώβριο του 2005 μια ομάδα φοιτητών του Τεχνολογικού Ινστιτούτου Μασαχουσέτης διεξήγαγε ένα πείραμα με 127 τετραγωνικά κεραμίδια καθρέπτη 30 cm, στοχεύοντας ένα ομοίωμα ξύλινου πλοίου σε απόσταση περίπου 30 m. Φλόγες ξέσπασαν σε ένα μπάλωμα του πλοίου αλλά μόνο όταν ο ουρανός δεν είχε σύννεφα και το πλοίο παρέμεινε στη θέση του για περίπου 10 λεπτά. Προέκυψε το συμπέρασμα ότι η παράταξη ήταν ένα εφικτό όπλο κάτω από αυτές τις συνθήκες. Η ομάδα του ινστιτούτου επανέλαβε το πείραμα για την τηλεοπτική εκπομπή Myth Busters, χρησιμοποιώντας μια ξύλινη βάρκα ψαρέματος στο Σαν Φρανσίσκο ως στόχο. Ξανά συνέβη μερική απανθράκωση, μαζί με μια μικρή φωτιά. Για να πιάσει φωτιά, το ξύλο χρειάζεται να φτάσει στη θερμοκρασία αυτανάφλεξης, που είναι γύρω στους 300 °C.

Όταν οι Myth Busters πρόβαλαν το αποτέλεσμα του πειράματος στο Σαν Φρανσίσκο τον Ιανουάριο του 2006, ο μύθος τοποθετήθηκε στην κατηγορία των «κατερριμένων» λόγω του χρόνου και των ιδανικών καιρικών συνθηκών που χρειαζόταν για να συμβεί η ανάφλεξη. Επίσης τονίστηκε ότι αφού οι Συρακούσες έβλεπαν τη θάλασσα προς τα ανατολικά, ο ρωμαϊκός στόλος θα έπρεπε να επιτεθεί κατά τη διάρκεια του πρωινού για βέλτιστη συγκέντρωση φωτός από τους καθρέπτες. Οι Myth Busters τόνισαν επίσης ότι συμβατικά όπλα όπως φλεγόμενα βέλη ή βίδες από τους καταπέλτες θα ήταν ένας πολύ εύκολος τρόπος για να βάλουν φωτιά σε ένα πλοίο σε κοντινές αποστάσεις.

Τον Δεκέμβριο του 2010, οι Myth Busters άνοιξαν ξανά την υπόθεση της ακτίνας φωτός σε ένα ειδικό επεισόδιο όπου συμμετείχε και ο Μπάρακ Ομπάμα με τον τίτλο «**Η πρόκληση του προέδρου**». Αρκετά πειράματα διεξήχθησαν, συμπεριλαμβανομένης και μιας δοκιμής μεγάλης κλίμακας με 500 μαθητές να σημαδεύουν με τους καθρέπτες ένα ομοίωμα ενός ρωμαϊκού πλοίου σε απόσταση 120 m. Σε όλα τα πειράματα το ιστίο απέτυχε να φτάσει στους 210 °C που απαιτούνται για να πιάσει φωτιά και ο μύθος τοποθετήθηκε εκ νέου στην κατηγορία των «κατερριμένων». Η εκπομπή συμπέρανε πως ένα πιο πιθανό αποτέλεσμα των καθρεφτών θα ήταν να τυφλώνει, να εκθαμβώνει και να αποσπά την προσοχή του πληρώματος του πλοίου.

3.5.4. Ο κοχλίας

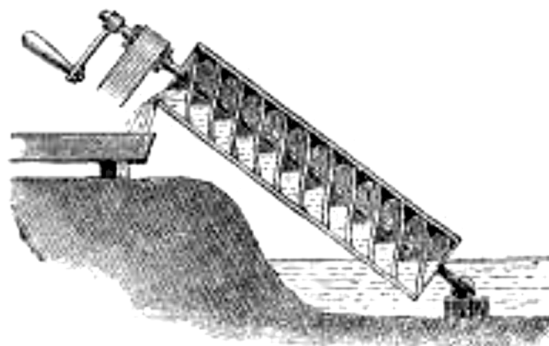
Ο κοχλίας του Αρχιμήδη είναι ένα μηχανήμα άντλησης νερού και η ονομασία του, οφείλεται στο σχέδιο, τη μορφή του οργάνου, που μοιάζει με κέλυφος σαλιγκαριού (κοχλίας). Με την ονομασία κοχλίας, μεταφέρθηκε και στη λατινική γλώσσα ως coclea, cochlia, ενώ συχνά πυκνά ονομαζόταν και «έλιξ» (σπείρα).

Ο Φίλων ο Αλεξανδρεύς τον ονόμαζε έλικα, υδραυλικό όργανο. Σύμφωνα με πληροφορίες πολλών αρχαίων Ελλήνων συγγραφέων, τον κοχλία τον χρησιμοποιούσαν στην Αίγυπτο για πότισμα των χωραφιών, των οποίων οι επιφάνειες βρίσκονταν πάνω από τη στάθμη των υδάτων του Νείλου κι έτσι δε μπορούσαν να ποτιστούν κατευθείαν από αυτόν. Όπως μας πληροφορεί ο Διόδωρος, ο κοχλίας χρησιμοποιήθηκε πολύ και στην Ισπανία για άντληση νερού από τα ορυχεία. Κατά τον Αθηναίο, ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε επίσης τον κοχλία για να αντλεί νερό από τα αμπάρια του περίφημου πλοίου «Συρακουσία», καθώς σε ένα πλοίο αυτού του μεγέθους θα διέρρεε σημαντική ποσότητα νερού διαμέσου του κύτους και έτσι, ο κοχλίας του Αρχιμήδη εικάζεται ότι αναπτύχθηκε με σκοπό την απομάκρυνση του νερού. Σύμφωνα με πληροφορίες του Φίλωνα του Βυζαντίου, με τη βοήθεια του κοχλία πότιζαν τους κρεμαστούς κήπους, που όπως ξέρουμε, αποτελούσαν ένα από τα θαύματα του αρχαίου κόσμου. Είναι άξιο επισήμανσης ότι όχι μόνο οι παραπάνω συγγραφείς, αλλά και άλλα αξιόπιστα ονόματα της αρχαιότητας και πολλοί Βυζαντινοί μελετητές (π.χ. Ευστάθιος, Ψελλός κ.ά.) αποδίδουν την πατρότητα της επινόησης και της κατασκευής αυτού του μηχανήματος στον Αρχιμήδη.

Οι Βυζαντινοί λόγιοι μάλιστα εκφράζουν μεγάλο θαυμασμό για τον κοχλία και εξαίρουν τον Αρχιμήδη που τον κατασκεύασε. Χαρακτηριστικές αναφορές στον κοχλία του Αρχιμήδη έκαναν: ο Στράβων καθώς και ο Διόδωρος (στην «Ιστορία»). Ο Α. Favaro στο έργο του «**Archimedes**», που εκδόθηκε στη Ρώμη το 1923, στη σελίδα 21 αναφέρει μεταξύ άλλων, ότι στη Βιο-βιβλιογραφική εργασία «**Tar Ikh alhukama**», του Αιγύπτιου Al Qifti (1172–1248), παρουσιάζεται ο Αρχιμήδης να έχει κατασκευάσει μεγάλα έργα, χτίσιμο φραγμάτων, κατασκευές γεφυρών, ρυθμίσεις του Νείλου κ.λπ. Την ίδια πληροφορία μας δίνει και ο Eilhad Wiedemann στο έργο του «Beitrag zur Geschichte der Naturwissenschaften III» (Συμβολές στην Ιστορία των Φυσικών Επιστημών III), που δημοσιεύτηκε από την Sitzungsber d. Phys. – Med. Soc. in Erlangen, 37 (1905), σελίδες 247–250.

Με όσα στοιχεία έχουμε στη διάθεσή μας, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν διάφορες μορφές και παραλλαγές του κοχλία. Ως μια μορφή κοχλία θα μπορούσαμε να φανταστούμε μια ελικοειδή υδραντλία, που αποτελείται από έναν ξύλινο άξονα, γύρω από τον οποίο τυλίγονται σε ελικοειδή διάταξη ξύλινα φύλλα. Το όλο σύστημα, προσαρμοσμένο σε ένα κύλινδρο, του οποίου η μία άκρη είναι βυθισμένη πλάγια στο νερό, είχε τη δυνατότητα να το αντλεί και να το αποθηκεύει σε επίπεδα που ήταν πιο ψηλά από την επιφάνεια του νερού.

Εικόνα 31. Ο κοχλίας του Αρχιμήδη



Η κατασκευή αυτή προέρχεται από το έργο του Αρχιμήδη «Περί ελίκων». Μια άλλη μορφή κοχλία αποτελείται από ένα σωλήνα που περικλείει μια έλικα, είναι κεκλιμένος κατά 45° ως προς το οριζόντιο επίπεδο και το κατώτερο άκρο του βρίσκεται βυθισμένο στο νερό. Με περιστροφή του κοχλία, το νερό ανεβαίνει στο

σωλήνα. Άλλες μορφές κοχλία, αποτελούνται από μια έλικα που περιστρέφεται σε έναν κύλινδρο, ή έναν ελικοειδή σωλήνα που είναι τοποθετημένος γύρω από άξονα. Οι σύγχρονες ελικοειδείς αντλίες, που χρησιμοποιούνται για την άντληση των αποβλήτων σε εργοστάσια επεξεργασίας λυμάτων, στηρίζονται στην αρχή λειτουργίας του κοχλία του Αρχιμήδη. Μια περιγραφή του κοχλία δίνεται από τον E. J. Dijksterhuis στο έργο του «Archimedes» (σελίδες 22-24) και είναι η εξής:

«Σε ξύλινο κύλινδρο, που το ύψος του είναι τόσα πόδια όσο είναι το πλάτος της διαμέτρου του σε δακτύλους, σχεδιάζουμε 8 έλικες. Αυτές, ξεκινούν από τις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου στην πάνω επιφάνεια και η κλίση τους ισούται με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου της βάσης. Πάνω σ' αυτές τις έλικες, θέτουμε ελικοειδείς αυλακώσεις από εύκαμπτους φλοιούς, που όλα μαζί σχηματίζουν τη μορφή του κέλφους σαλιγκαριού (κοχλία), στο οποίο όλο το μηχανήμα οφείλει το όνομά του.

Το ύψος αυτών των ελικοειδών αυλάκων είναι τέτοιο, ώστε η διάμετρος του πεπαχυμένου κυλίνδρου να ισούται με το 1/8 του κυλινδρικού άξονα. Τα κανάλια που σχηματίζονται έτσι, τα καλύπτουμε με ξύλο, έτσι ώστε να σχηματίζονται οκτώ σπειροειδείς αγωγοί. Όλο το ξύλο διαποτίζεται με πίσσα και ολόκληρη η συσκευή περιβάλλεται με σιδερένιες ταινίες. Ο κύλινδρος στερεώνεται έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται κατά τέτοιον τρόπο, που ο άξονας να έχει κλίση σχετικά με τον ορίζοντα ίση με τη μικρότερη γωνία ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου οι πλευρές είναι σε αναλογία 3 : 4 : 5. Αν βυθίσουμε την κάτω βάση σε κατάλληλο επίπεδο κάτω από την επιφάνεια του νερού που πρόκειται να αντλήσουμε, τότε, αν η περιστροφή γίνεται προς τη σωστή κατεύθυνση, δηλαδή έτσι ώστε το άνοιγμα του κάθε σωλήνα να κατευθύνεται προς τα κάτω όταν εισέρχεται στο υγρό, το νερό ανεβαίνει στους σωλήνες».

Η περιγραφή αυτή του κοχλία που κάνει ο E. J. Dijksterhuis αποδίδει με συντομία τον τρόπο κατασκευής του αιγυπτιακού κοχλία, όπως αυτός εκτίθεται με πληρότητα και σαφήνεια από το Βιτρούβιο, στο έργο του «Περί αρχιτεκτονικής», (X, VI. 258. όπου στο κεφ. 1, σελ. 484). Ο Βιτρούβιος δεν αναφέρει ότι ο κοχλίας ήταν εφεύρεση του Αρχιμήδη, όμως αυτό προκύπτει έμμεσα αλλά καθαρά από εκείνα που γράφει στα προηγούμενα. Η περιγραφή του κοχλία από τον Βιτρούβιο είναι η εξής:

«Παίρνουμε μια δοκό, της οποίας το μήκος σε πόδια είναι τόσο, όσο είναι το πάχος της σε δακτύλους, (Σημείωση: Αν π.χ. το μήκος της δοκού είναι 5 m, το πάχος θα είναι 0,33 m). Η δοκός αποστρογγυλοποιείται και γίνεται κύλινδρος. Οι περιφέρειες των βάσεων του κυλίνδρου διαιρούνται με 4 διαμέτρους σε 8 ίσα μέρη, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με χορδές. Η διαίρεση έχει γίνει κατά τέτοιον τρόπο, ώστε όταν η δοκός είναι οριζόντια, οι χορδές των βάσεων να είναι αντίστοιχες. Στη συνέχεια, συνδέουμε με ευθείες τις αντίστοιχες κορυφές των δύο βάσεων και κάθε τέτοια γραμμή τη διαιρούμε σε ίσα μέρη, έτσι ώστε καθένα να ισούται με το 1/8 του μήκους της περιφέρειας της βάσης. Έτσι, οι άτρακτοι (τμήματα της δοκού) που έχουν χαραχθεί με αυτόν τον τρόπο είναι ίσοι μεταξύ τους και στο μήκος και στο πάχος. Σημειώνουμε τα σημεία των υποδιαίρεσεων πάνω στις ευθείες.

Μετά από αυτή τη σχεδίαση, παίρνουμε ένα λεπτό ξύλινο έλασμα από ιτιά ή λυγαριά, το αλείφουμε με υγρή πίσσα και το στερεώνουμε στο πρώτο σημείο της τομής (στο σημείο της πρώτης υποδιαίρεσης). Κατόπιν το στρέφουμε πλαγίως προς το επόμενο σημείο τομής. (Από το πρώτο σημείο τομής μεταβαίνουμε στο αμέσως επόμενο σημείο της οριζόντιας γραμμής και από εκεί στο σημείο ίσης απόστασης που βρίσκουμε στον κάθετο κύκλο, όπου και το στερεώνουμε). Έτσι γίνεται η στερέωση, αφού το έλασμα περιστρέφεται γύρω από τη δοκό και προχωρεί σταδιακά κατά μήκος. Και αφού από το πρώτο σημείο φτάσουμε στο όγδοο, εδώ είναι το τέρμα της στερέωσης. Κατά τον τρόπο αυτό, το έλασμα προχωρεί πλάγια μέσα στα 8 σημεία και κατά μήκος από το

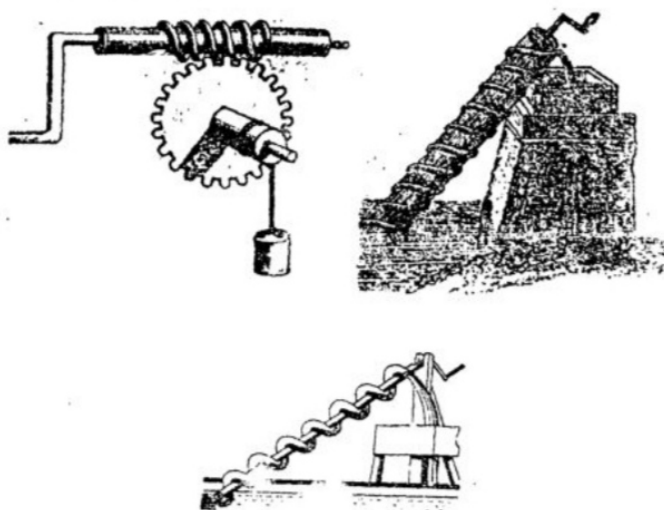
πρώτο προς το όγδοο. Κατά τον ίδιο τρόπο, αφού σε όλο το μήκος και το πλάτος στερεώνονται στελέχη σε κάθε σημείο, σχηματίζονται διάυλοι (κανάλια), οι οποίοι κινούνται περιστροφικά με τις οκτώ υποδιαιρέσεις της δοκού και έτσι δίνουν μια φυσική και ακριβή απομίμηση ενός ελικοειδούς όστρακου κοχλία. Με τον ίδιο τρόπο στερεώνονται και άλλα στελέχη, το ένα πάνω στο άλλο μέχρι τέτοιο ύψος, ώστε το πάχος να γίνει το 1/8 του μήκους της δοκού. Γύρω από τα στελέχη αυτά, τοποθετούνται περιστροφικά και στερεώνονται, ξύλινα ελάσματα, τα οποία προστατεύουν τον κοχλία.

Τα ελάσματα αυτά αλείφονται με πυκνή πίσσα και στερεώνονται με σιδερένια ταινία, για να μην καταστρέφονται από την πίεση του νερού. Τα άκρα της ξύλινης δοκού, επενδύονται με σίδηρο. Δεξιά και αριστερά του κοχλία, τοποθετούνται παραστάδες, που έχουν προσαρμοστεί με οριζόντια στελέχη στα άκρα των δύο πλευρών. Σε αυτά έχουν σφηνωθεί σιδερένια έμβολα και σε αυτά στερεώνονται τα έμβολα του κοχλία. Έτσι, ο κοχλίας περιστρέφεται με ανθρώπινη δύναμη που εφαρμόζεται σε μια περιστροφική συσκευή. Η διάταξη του κοχλία ως προς την κλίση του, ρυθμίζεται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να ανταποκρίνεται στο πυθαγόρειο ορθογώνιο τρίγωνο.

Δηλαδή, το μήκος του κοχλία χωρίζεται σε 5 ίσα μέρη και το ένα άκρο τοποθετείται σε ύψος 3 τέτοιων μερών. Έτσι, η απόσταση της κατακόρυφης από το υψηλότερο άκρο του κοχλία μέχρι το χαμηλότερο, είναι ίση με 4 μέρη. (Δηλαδή η κλίση του άξονα του κοχλία σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο ισούται με τη μικρότερη γωνία ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου οι πλευρές βρίσκονται σε αναλογία 3 : 4 : 5).

Ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να γίνεται αυτό περιγράφεται με σχήμα στο τέλος του βιβλίου». Ο Dijksterhuis παρατηρεί ότι δεν υπάρχει (δηλαδή δεν έχει διασωθεί) κανένα σχέδιο και αυτό δυσκολεύει τη σαφήνεια της περιγραφής.

Εικόνα 32. Μορφές κοχλία του Αρχιμήδη, όπως παρουσιάζονται στα έργα διάφορων ερευνητών



Ο κοχλίας του Αρχιμήδη είναι ένα μηχανήμα που είχε χαρακτηριστεί από το Γαλιλαίο «θαυμάσιο και θαυματουργό». Υπάρχει πραγματικά εδώ κάτι το αξιοθαύμαστο και το παράδοξο, το ότι ανεβαίνει το νερό, ενώ, κάτω από την επίδραση της βαρύτητας, θα έπρεπε συνεχώς να ρέει προς τα κάτω. Ακόμα, το πρώτο στον κόσμο ατμόπλοιο με βιδωτή έλικα ήταν το «SS Archimedes», το οποίο ξεκίνησε να λειτουργεί το 1839 και ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του Αρχιμήδη και του έργου του πάνω στον κοχλία, ενώ η αναγέννηση του κοχλία του Αρχιμήδη συμβαίνει ήδη σήμερα, όταν δημιουργούνται οχήματα παντός εδάφους για εκτός δρόμου, βάλτους και χιονισμένες πεδιάδες, καθώς το κάτω μέρος τους είναι φτιαγμένο με τη μορφή του κοχλία του Αρχιμήδη. Εκτός από κοχλίας αναφέρεται και ως «Βίδα» ή και «Σαλιγκάρι».

3.6. Άλλες μηχανικές κατασκευές

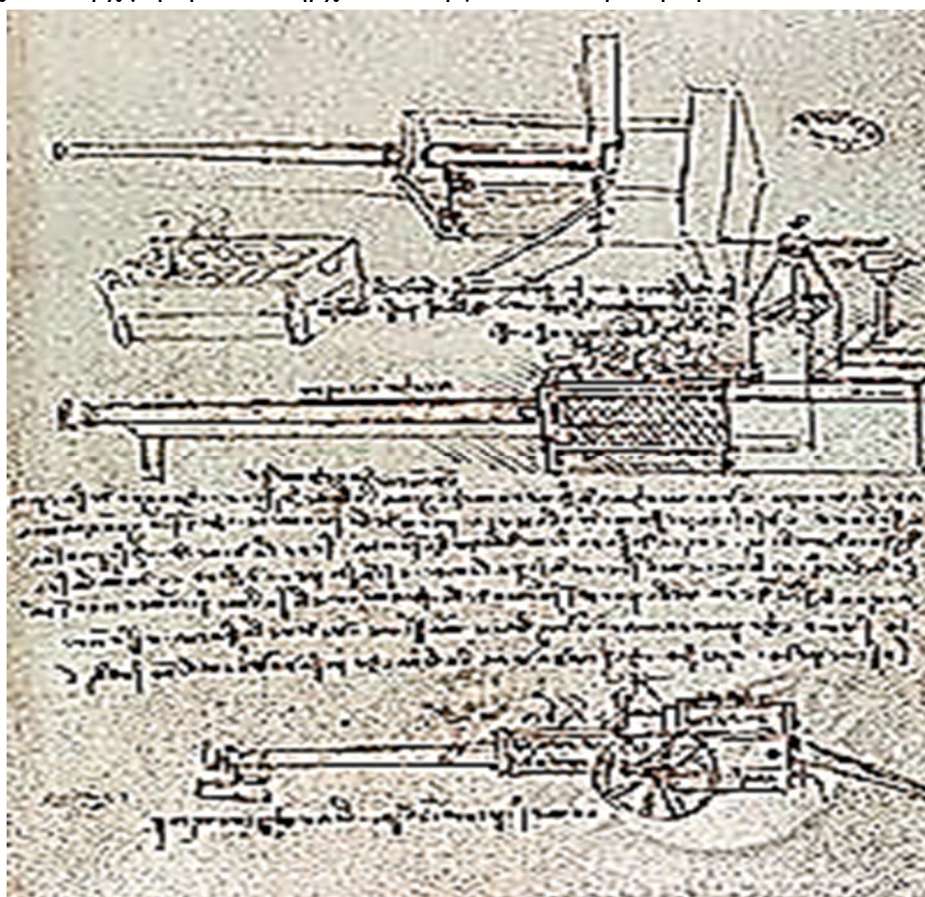
Εκτός από τις αστρονομικές συσκευές, την ουράνια σφαίρα, τους μοχλούς και διάφορα άλλα μηχανήματα ανέλκυσης βαρέων αντικειμένων, τα βαλλιστικά μηχανήματα και όλες τις πολεμικές κατασκευές, τον κοχλία και το ζυγό, αναφέρεται ότι ο Αρχιμήδης είχε κατασκευάσει πολλά άλλα μηχανήματα που λειτουργούσαν με νερό, αέρα, ατμό και μηχανισμούς που είχε επινοήσει μόνος του. Τέτοια μηχανήματα είναι π.χ. το τηλεβόλο, το υδραυλικό ωρολόγιο, το υδραυλικό μουσικό όργανο, το αραιόμετρο ή πυκνόμετρο, το οδόμετρο και δρομόμετρο.

3.6.1. Τηλεβόλο

Το τηλεβόλο ή ατμοτηλεβόλο ήταν ένα βαλλιστικό μηχανήμα που λειτουργούσε με ατμό/ ατμοσυμπίεση και μπορούσε να εκσφενδονίσει μπάλες βάρους ενός ταλάντου (περίπου 23 kg) σε απόσταση 6 σταδίων (περίπου 1.100 m.). Είναι το πρώτο τηλεβόλο του κόσμου και ο ίδιος ο Αρχιμήδης είχε περιγράψει τον τρόπο κατασκευής και λειτουργίας του σε ένα έργο με τίτλο «Περί τηλεβόλων», που όμως δε σώζεται. Στο τηλεβόλο που λειτουργεί με ατμό, αναφέρονται ο Φίλων στο έργο «Περί της κατασκευής τηλεβόλων» και ο Κτησίβιος, αλλά δυστυχώς η περιγραφή που κάνουν σταματά στο σημείο περιγραφής του μηχανισμού λειτουργίας του.

Το έργο «Περί τηλεβόλων» του Αρχιμήδη αναφέρεται για πρώτη φορά από τον Πετράρχη το 1350 περίπου, στο έργο του «*De remediis utriusque fortunae*» I, 99, (Διάλογος για τα θεραπευτικά μέσα κάθε μιας από τις τύχες, δηλ. της χαράς και της λύπης), που εκδόθηκε στη Βασιλεία το 1544. Το τηλεβόλο του Αρχιμήδη ανακατασκευάστηκε από τον Λεονάρντο Ντα Βίντσι τον 15^ο αιώνα, ο οποίος το ονόμασε αρχιτρόνιτο (από τις λέξεις Αρχιμήδης και τρώννυμι), σύμφωνα με τις προδιαγραφές του Αρχιμήδη που υπήρχαν στο έργο του «Περί τηλεβόλων».

Εικόνα 33.
Σχέδια του
Λεονάρντο
ντα Βίντσι
για ένα κανόνι
ατμού το
οποίο
αποδίδεται
στον
Αρχιμήδη



Κατά τον Matschoss, «*Geschichte der Dampfmaschine*», Βερολίνο 1909, σελ. 27, ο Λεονάρντο Ντα Βίντσι είχε το σχετικό χειρόγραφο του Αρχιμήδη, το οποίο όμως έχει χαθεί από τότε. Αποτελούνταν από ένα μεταλλικό κυλινδρικό λέβητα που πάνω του υπήρχε συνδεδεμένο με στρόφιγγα ένα κλειστό δοχείο με νερό. Ο λέβητας, στο ανοικτό άκρο του είχε ενσωματωμένη μια ξύλινη κάνη στην οποία τοποθετούνταν η προς εκτόξευση λίθινη σφαίρα. Η κάνη, έφρασσε με μια ξύλινη δοκό που ασφαλιζόταν με δύο αντηρίδες. Όταν ο λέβητας αποκτούσε με φωτιά την κατάλληλη θερμοκρασία, ανοιγόταν η στρόφιγγα, το νερό έπεφτε στον λέβητα, εξατμιζόταν ταχύτατα, η ξύλινη δοκός έσπαζε και η σφαίρα εκτοξευόταν. Το βεληνεκές της σφαίρας ρυθμιζόταν από την κλίση του όπλου και την επιλεγμένη αντοχή της ξύλινης δοκού. Το όπλο αυτό χρησιμοποιήθηκε ως αμυντικό όπλο κατά την πολιορκία των Συρακουσών εναντίον των Ρωμαίων το 212 π.Χ.

3.6.2. Υδραυλικό ωρολόγιο

Λειτουργούσε με νερό και χρησίμευε για τον υπολογισμό του χρόνου υπολογίζοντας με μεγάλη ακρίβεια τις ώρες, ενώ ειδοποιούσε για την αλλαγή της ώρας (όντας το πρώτο ρολόι με κτύπους της ιστορίας), ενώ θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπερείχε των ηλιακών ρολογιών καθώς με αυτά δεν ήταν δυνατή ή μέτρηση του χρόνου τη νύχτα ή όταν είχε συννεφιά. Περιγραφή αυτού του ωρολογίου έχει σωθεί στην αραβική σε 3 χειρόγραφα, τα οποία βρίσκονται σε 3 διαφορετικά μέρη. Το ένα στη βιβλιοθήκη του Παρισιού, το δεύτερο στο Βρετανικό Μουσείο και το τρίτο στη Βιβλιοθήκη της Οξφόρδης. Στο τρίτο χειρόγραφο, στον κώδικα 966, αναφέρεται ότι ο μηχανικός Φίλων ο Βυζάντιος γράφει:

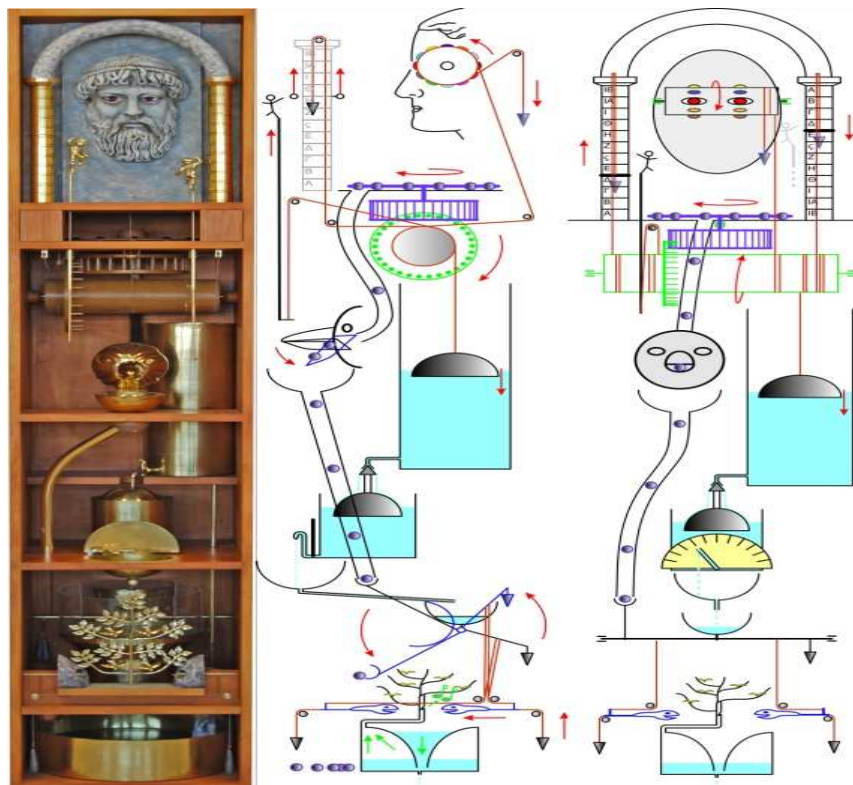
«... ο Αρχιμήδης είπε, αγαπητέ μου Αριστίων, επιθυμώ να σου εξηγήσω πως κατασκευάζονται τα υδραυλικά ωρολόγια».

Ο Βιτρούβιος στο έργο του «*Περί Αρχιτεκτονικής*» (I, όπου στο κεφ. 1, σελ. 34) γράφει ότι ο Αρχιμήδης ανακάλυψε, ερμήνευσε και παρέδωσε στους μεταγενέστερους πολλές μηχανικές κατασκευές και ωρολογιακές κατασκευές, που λειτουργούσαν σύμφωνα με τους νόμους της φύσης. Ακόμα, ο Πάππος ο Αλεξανδρινός διασώζει τη μαρτυρία της κατασκευής υδραυλικού ρολογιού, η αναφορά του όμως είναι γενική και ασαφής. Με βάση, πάντως, την ελληνική μετάφραση κειμένου από αραβικό χειρόγραφο, ο Ιωάννης Σακκάς ανακατασκεύασε το ρολόι, όσο πλησιέστερα μπορούσε στο πρωτότυπο. Το υδραυλικό αυτό ωρολόγιο του Αρχιμήδη πρόκειται για ένα πολύπλοκο υδραυλικό ωρολόγιο με πολλά αυτόματα κινούμενα πάρεργα, όπως περιγράφεται με λεπτομέρειες στο ομώνυμο αραβικό χειρόγραφο που το διασώζει. Αποτελούνταν από το κεντρικό δοχείο αποθήκευσης ύδατος, που τροφοδοτούσε μέσω ενός μικρότερου δοχείου εξασφάλισης σταθερής στάθμης (με κωνική βαλβίδα πάνω σε πλωτήρα) ένα ακροφύσιο.

Η παροχή εκροής του ακροφυσίου ρυθμιζόταν ανάλογα με την ημερομηνία, περιστρέφοντάς το πάνω σε ένα διαβαθμισμένο ημικυκλικό δίσκο (ώστε να μεταβάλλεται η υψομετρική διαφορά της οπής εκροής του ακροφυσίου και της στάθμης του ύδατος και επομένως η χρονική διάρκεια της ώρας της συγκεκριμένης ημέρας). Στους δυο κίονες τις πρόσοψης, δυο κινούμενοι δακτύλιοι (και δύο αγαλματίδια) υποδείκνυαν τις ώρες που διανύονταν και τις ώρες που απόμεναν αντίστοιχα. Κάθε ώρα, οι κόρες των οφθαλμών ενός ανθρώπινου προσώπειου άλλαζαν χρώμα και ένα σφαιρίδιο έπεφτε με κρότο σε ένα δοχείο από το (αυτόματα) ανοιγόμενο ράμφος ενός κόρακα.

Παράλληλα το νερό έπεφτε μέσα σε ογκομετρικό δοχείο και σε χρονικό διάστημα μιας ώρας ανατρεπόταν αυτόματα οπότε δύο φίδια κινούνταν συρίζοντας προς τα πουλιά των δένδρων που σφύριζαν τρομαγμένα.

Εικόνα 34. Το υδραυλικό ωρολόγιο του Αρχιμήδη



3.6.3. Το υδραυλικό μουσικό όργανο

Είναι αρμόνιο που λειτουργεί με αέρα και νερό. Ο αέρας διοχετεύεται στους σωλήνες, συμπιέζεται πάνω από το νερό που υπάρχει σε αεροθάλαμο και το όργανο λειτουργεί. Ο Τερτουλλιανός στο έργο του «**De Anima**» χρησιμοποιεί το υδραυλικό όργανο, ως ένα θαύμα τεχνολογίας, για να εξηγήσει την ουσία της ψυχής. Η μεγάλη ποικιλία και πολυμορφία των τμημάτων αυτού του οργάνου, που όμως αποτελούν ένα θαυμάσιο σύνολο, εξυμνείται από τον Τερτουλλιανό στο παραπάνω έργο του.

3.6.4. Αραιόμετρο ή πυκνόμετρο

Η προσπάθεια του Αρχιμήδη να λύσει το πρόβλημα του νοθευμένου στεφανιού, τον οδήγησε όχι μόνο στην ανακάλυψη και διατύπωση των θεμελιωδών αρχών της υδροστατικής, αλλά και στην κατασκευή διαφόρων μηχανημάτων για τη μέτρηση της πίεσης των υγρών. Ένα τέτοιο μηχανήμα είναι το αραιόμετρο ή πυκνόμετρο, που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό της πυκνότητας του νερού και η λειτουργία του βασίζεται ακριβώς στην περίφημη αρχή της άνωσης του Αρχιμήδη. Για τη συσκευή αυτή, δεν υπάρχουν πολλές πληροφορίες. Υπάρχει μια επιστολή του Κυρήναιου, Επισκόπου Συνεσίου, προς τη μαθηματικό και φιλόλογο Υπατία, όπου περιγράφεται η κατασκευή ενός μηχανήματος για τη μέτρηση της πυκνότητας των υγρών, το οποίο όμως δε συσχετίζεται καθόλου με τον Αρχιμήδη.

Εικόνα 35. Το αραιόμετρο του Αρχιμήδη

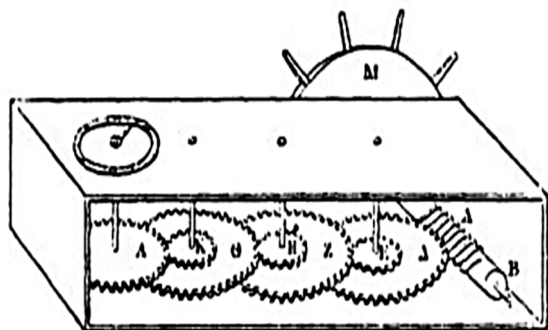


Το αραιόμετρο, αποτελούνταν από ένα μεταλλικό σωληνίσκο με διαβαθμίσεις (φραγμένο στο ένα άκρο του) που βυθιζόταν στο ελεγχόμενο υγρό. Η πυκνότητα του υγρού, υποδεικνυόταν από την υποδιαίρεση του οργάνου, που αντιστοιχούσε στη θέση ισορροπίας του.

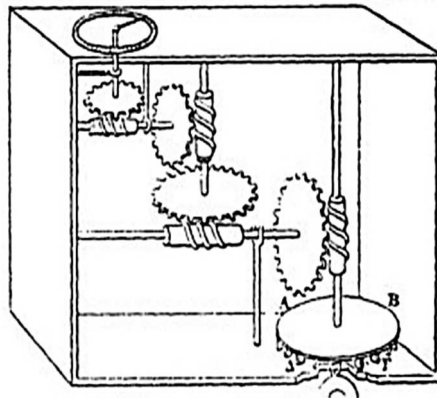
3.6.5. Οδόμετρο – δρομόμετρο

Ήταν μηχανήματα με τα οποία μετρούσαν τις αποστάσεις στην ξηρά και τη θάλασσα. Ως κατασκευαστής τους θεωρείται ο Αρχιμήδης. Πολλοί όμως αναφέρουν ως κατασκευαστή τον Ήρωνα τον Αλεξανδρέα, ο οποίος περιγράφει τον τρόπο κατασκευής του οδομέτρου με λεπτομέρεια, ενώ σκοπός του οργάνου είναι η μέτρηση αποστάσεων, με συνδυασμό μιας σειράς οδοντωτών τροχών και αποτελεί πρόδρομο των αντίστοιχων μηχανισμών που έχουμε στα αυτοκίνητα μας. Ο Ιωάννης Τζέτζης στις «Χιλιάδες», (XII, όπου στο κεφ. 1, σελ. 479), φαίνεται αγανακτισμένος που πολλοί θεωρούν ότι ο Αρχιμήδης έγραψε ένα μόνο βιβλίο και δηλώνει ότι αυτός έχει διαβάσει πολλά έργα του Αρχιμήδη, μεταξύ των οποίων και το «Περί δρομομέτρων». Επίσης στα «Άπαντα» του Ήρωνα (τόμος, 3^{ος}, έκδοση Schone, Λιψία, 1903, στις σελίδες 295-309), υπάρχει εκτεταμένη αναφορά στα οδόμετρα και δρομόμετρα, με αναφορές στον Αρχιμήδη.

Το οδόμετρο, στηριζόταν σε συνδυασμούς οδοντωτών τροχών, οι οποίοι μετέδιδαν την κίνηση των τροχών της άμαξας, με τρόπο ώστε μια περιστροφή του πρώτου να προκαλούσε τη μετακίνηση ενός δοντιού του δεύτερου κατά ένα διάστημα, μια πλήρης περιστροφή του δεύτερου οδοντωτού τροχού να προκαλούσε την κίνηση του πρώτου δοντιού του τρίτου κοκ. Ο τελευταίος τροχός μετακινούσε ένα δείκτη, κατά ένα διάστημα, μετά από πλήρη περιστροφή. Με τον πολλαπλασιαστικό αυτό τρόπο, μπορούσαν να μετρηθούν μεγάλες αποστάσεις.



Εικόνα 36. Οδόμετρο του Αρχιμήδη.



Εικόνα 37. Δρομόμετρο του Αρχιμήδη.

3.6.6. Συρακουσία

Ο Αθήναιος, διασώζει την ακόλουθη μαρτυρία σχετικά με εμπλοκή του Αρχιμήδη στην κατασκευή ενός από τα μεγαλύτερα τεχνολογικά θαύματα της εποχής του, του πλοίου «Συρακουσία». Ο βασιλιάς των Συρακουσών Ιέρωνας, θέλοντας να δείξει στον Πτολεμαίο την ισχύ και την ποιότητα των μηχανικών και επιστημόνων του βασιλείου του, δέχτηκε να φέρει σε πέρας παραγγελία και να ναυπηγήσει το μεγαλύτερο πλοίο που είχε μέχρι τότε κατασκευαστεί στον κόσμο. Σχεδιαστής του πλοίου ήταν ο Αρχιμήδης και ναυπηγός ο Αρχίας από την Κόρινθο. Το πλοίο ήταν το μεγαλύτερο πλεούμενο που ναυπηγήθηκε μέχρι το 1800 μ.Χ. Για την κατασκευή του χρησιμοποιήθηκε ξυλεία αρκετή για την ναυπήγηση 60 τριήρων. Ήταν ταυτόχρονα ένα πλωτό παλάτι και φρούριο, ικανό να στεγάσει ένα βασιλιά μαζί με την αυλή του.

Στα βασιλικά διαμερίσματα υπήρχε πλωτός ναός, κήπος, γυμναστήριο, χώροι ψυχαγωγίας, αίθουσες δεξιώσεων, διαμερίσματα προσωπικού και φρουράς, αρτοποιείο, δεξαμενή ικανή να μεταφέρει 78 τόνους νερό, υπερυψωμένες επάλξεις με πολεμικές συσκευές και πολλά άλλα. Το πλοίο έκανε ένα μόνο ταξίδι. Ήταν πολύ δαπανηρό να ταξιδεύει και δεν υπήρχαν λιμάνια στη Μεσόγειο ικανά να το δεχτούν.

Ο Πτολεμαίος το χρησιμοποίησε ως πλωτό παλάτι στην προβλήτα του λιμανιού της Αλεξάνδρειας. Όταν το πλοίο έφτασε στην Αίγυπτο, μετονομάστηκε σε Αλεξάνδρεια.



Εικόνα 38. Σχέδιο της Συρακοσίας του 1798

4. Ο Αρχιμήδης ως ερευνητής

Ο Αρχιμήδης ήταν νους ανήσυχος. Δεν ακολουθούσε τον τρόπο σκέψης του μέσου επιστήμονα της εποχής του, αμφισβητούσε το «σωστό», το «κανονικό», το «λογικό», το «επιστημονικό», που ήταν ανεξέλεγκτα. Όπως κάνουν οι σύγχρονοι ερευνητές, συνήθιζε να προσπερνά τις προκαταλήψεις και τα επιστημονικά ταμπού και να ανοίγει νέους δρόμους επιστημονικής σκέψης και έρευνας. Ο τρόπος που εργαζόταν, οι διαδικασίες που ακολουθούσε και οι μέθοδοι απόδειξης που εφαρμόζε, φανερώνουν ότι η σκέψη του δεν εγκλωβιζόταν στις ατραπούς της σύγχρονης ή προγενέστερης του διανόησης, αλλά ήταν ελεύθερη, χωρίς φραγμούς, ήταν σκέψη πραγματικού διαχρονικού επιστήμονα. Έτσι, ερευνώντας π.χ. τη λύση διαφόρων μαθηματικών προβλημάτων, δε δίσταζε να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις του στη μηχανική, ώστε να επισημάνει το αποτέλεσμα και να καθορίσει μια πορεία που θα τον οδηγούσε στη λύση. Η μηχανική απόδειξη άνοιγε το δρόμο για να επιτευχθεί η ακριβής και αυστηρή μαθηματική απόδειξη. Αυτή η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων είναι ένα δείγμα του πόσο πολυδιάστατη, αδέσμευτη και ελεύθερη σκέψη διέθετε ο Αρχιμήδης, πόσο δυνατό και σύγχρονο μυαλό ήταν.

Αντίθετα, οι περιορισμοί, οι προκαταλήψεις, οι δεσμεύσεις, λειτούργησαν πολλές φορές σαν παρωπίδες, εμποδίζοντας την οπτική γωνία πολλών άλλων επιστημόνων, όχι μόνο της αρχαιότητας, αλλά και μεταγενέστερων εποχών και οδήγησαν σε αδιέξοδα και αποτυχίες. Κλασικό παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης είναι η αδυναμία να βρεθεί λύση στα τρία «περίφημα» προβλήματα της αρχαιότητας δηλαδή στο **διπλασιασμό του κύβου**, την **τριχοτόμηση γωνίας** και τον **τετραγωνισμό του κύκλου**. Όπως ξέρουμε, τα προβλήματα αυτά απασχόλησαν το

σύνολο των γεωμετρών της αρχαιότητας ήδη από τον 5^ο αιώνα π.Χ., καθώς και όλους τους μετέπειτα κλασικούς γεωμέτρους μέχρι τον 19^ο αιώνα, που αποδείχτηκε ότι τα τρία αυτά προβλήματα ήταν αδύνατον να λυθούν με κανόνα και διαβήτη μόνο και πιο συγκεκριμένα αυτό αποδείχτηκε για το διπλασιασμό του κύβου το 1829, για την τριχοτόμηση της γωνίας το 1837 και για τον τετραγωνισμό του κύκλου το 1882.

Χαρακτηρίστηκαν «περίφημα» στην ιστορία των μαθηματικών, γιατί παρέμειναν άλυτα, παρά τις επίμονες προσπάθειες τόσων μεγάλων επιστημόνων για τόσους πολλούς αιώνες. Εκείνο που εμπόδιζε τη λύση τους ήταν ο δεσμευτικός περιορισμός ότι οι γεωμέτρους έπρεπε να εργαστούν αποκλειστικά με τη χρησιμοποίηση κανόνα και διαβήτη. Για αιώνες, ο κανόνας και ο διαβήτη ήταν τα μόνα επιτρεπτά όργανα για τη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Οι κατασκευές με άλλα όργανα θεωρούνταν «μηχανικές» και ως τέτοιες ήταν «χυδαίες» και αποτελούσαν «ταμπού» για την αξιοσέβαστη γεωμετρία.

Σήμερα, είναι γνωστό ότι για να είναι δυνατή μια γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη μόνο, πρέπει το πρόβλημα, διατυπωμένο αλγεβρικά, να οδηγεί σε μια ανάγωγη αλγεβρική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές και βαθμού 2^n , $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, της οποίας οι ρίζες μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια ρητών αριθμών και ενός ορισμένου πλήθους τετραγωνικών ριζών. Δηλαδή, η λύση τέτοιων προβλημάτων χρειάζεται τη βοήθεια της άλγεβρας και της ανάλυσης. Ο Αρχιμήδης, αποδεσμεύοντας τη σκέψη του από τους περιορισμούς που είχαν θέσει οι προγενέστεροί του για τις γεωμετρικές κατασκευές, δεν ακολούθησε τη λογική της αποκλειστικής χρήσης του κανόνα και του διαβήτη, αλλά εφάρμοσε μια διαφορετική αντίληψη, που τη συναντάμε πολλούς αιώνες αργότερα στα έργα του Fermat και του Descartes. Για τον Αρχιμήδη, δεν υπάρχουν προκαταλήψεις.

Ο επιστήμονας, μπορεί να χρησιμοποιεί οποιοδήποτε μέσο και όπλο που θα μπορούσε να τον βοηθήσει να φτάσει στο επιδιωκόμενο αποτέλεσμα. Έτσι, στις γεωμετρικές του αποδείξεις χρησιμοποιεί μεθόδους με ευκαμψία, δυναμική και ελευθερία, αλλά και με πλήρη μαθηματική αυστηρότητα. Για να υπολογίσει το μήκος περιφέρειας και το εμβαδόν κύκλου, για παράδειγμα, δε χρησιμοποίησε κανόνα και διαβήτη μόνο, αλλά και μέτρηση. Ξεκινώντας με την εγγραφή και περιγραφή στον κύκλο, ενός τετραγώνου και διπλασιάζοντας συνεχώς τον αριθμό των πλευρών του, κατόρθωσε να υπολογίσει το μήκος της περιφέρειας και το εμβαδόν του κύκλου με έναν τρόπο που είναι και σήμερα σύγχρονος. Εγγράφοντας και περιγράφοντας στον κύκλο τετράγωνα, δημιούργησε δύο ζεύγη ακολουθιών:

α) Δύο ακολουθίες που οι όροι τους αντιστοιχούν στα μήκη των περιμέτρων των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων, εκ των οποίων η πρώτη είναι αύξουσα και η δεύτερη φθίνουσα και, καθώς αυξάνονται οι πλευρές των πολυγώνων, οι όροι των ακολουθιών πλησιάζουν συνεχώς το μήκος της περιφέρειας.

β) Δύο ακολουθίες, που οι όροι τους αντιστοιχούν στα εμβαδά των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων αντίστοιχα. Και εδώ η πρώτη ακολουθία είναι αύξουσα και η δεύτερη φθίνουσα. Καθώς ο αριθμός των πλευρών των πολυγώνων αυξάνει, οι όροι των ακολουθιών πλησιάζουν συνεχώς το εμβαδόν του κύκλου. Τέλος, ο Αρχιμήδης με τη βοήθεια της μεθόδου εξάντλησης και της εις άτοπον απαγωγής, κατορθώνει να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου. Η διαδικασία που ακολουθεί, είναι όμοια με εκείνη που ακολουθούμε σήμερα για τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου, ως κοινό όριο των δύο ακολουθιών. Η τακτική επομένως που ακολουθεί και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, είναι μια ακόμα απόδειξη ότι ο Αρχιμήδης είχε πράγματι ένα σύγχρονο μυαλό. Αν οι Έλληνες μαθηματικοί και επιστήμονες, λέει ο Bell, είχαν ακολουθήσει τον Αρχιμήδη και όχι τον Ευκλείδη, τον Πλάτωνα ή τον Αριστοτέλη, θα είχαν προλάβει κατά 2.000 χρόνια νωρίτερα, την

περίοδο των σύγχρονων μαθηματικών που άρχισε το 17^ο αιώνα με τους Descartes και Newton, καθώς και την περίοδο της σύγχρονης φυσικής επιστήμης, που άρχισε με το Γαλιλαίο τον ίδιο αιώνα. Μια άλλη απόδειξη του πόσο σύγχρονη ήταν η σκέψη του Αρχιμήδη, προκύπτει από τις μεθόδους που εφάρμοσε για τη χάραξη εφαπτόμενης σε καμπύλες, τον υπολογισμό των ακροτάτων (μέγιστων & ελάχιστων) συγκεκριμένων καμπυλών και την αναγωγή προβλημάτων εφαπτομένης, σε προβλήματα μέγιστων και ελάχιστων και αντίστροφα. Η διαδικασία και οι μέθοδοι που ακολούθησε, είναι εκείνες που χρησιμοποιούμε σήμερα στο «Διαφορικό λογισμό».

Για τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου, παραβολικού χωρίου και άλλων σχημάτων, χρησιμοποίησε μεθόδους που δε διαφέρουν ουσιαστικά από τις μεθόδους που χρησιμοποιούμε σήμερα στον «Ολοκληρωτικό λογισμό». Δηλαδή, ο Αρχιμήδης είχε επινοήσει τους διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό 2.000 χρόνια περίπου πριν από τους Leibniz και Newton, χωρίς βέβαια να έχει συνειδητοποιήσει, πόσο σπουδαίο ήταν αυτό που επινόησε. Ακόμη, θα μιλήσουμε και για μία, όχι και τόσο γνωστή, δραστηριότητα του Αρχιμήδη, από την οποία όπως προκύπτει για μια ακόμα φορά, όχι μόνο η ικανότητα σκέψης, η φαντασία και η διορατικότητα του, αλλά και η αξία και η διαχρονικότητα του έργου του. Ο Αρχιμήδης, αναζητούσε νόμους και τρόπους λειτουργίας σε πολλές περιοχές της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Έτσι, κάποια στιγμή ενδιαφέρθηκε να ερευνήσει τους νόμους λειτουργίας της παιδικής αιώρας (κούνιας). Η κούνια ξεκινά με μια μικρή ώθηση του αντικειμένου (του παιδιού) που είναι πάνω της. Αυτό διαγράφει μια παλμική κίνηση, μια ταλάντωση και όταν επιστρέψει στην αρχική του θέση δέχεται ελαφρά ώθηση. Η συνεχής επανάληψη αυτού του φαινομένου, στέλνει τον αιωρούμενο σε μεγάλα ύψη με αρκετά μεγάλη ταχύτητα. Έτσι, με την πρόσθεση μικρής δύναμης στην προηγούμενως εφαρμοσθείσα δύναμη και σε κατάλληλο χρόνο, αυξάνεται διαρκώς η γραμμή που ακολουθεί η αιώρα. Ο Αρχιμήδης, ερεύνησε μαθηματικά τη γραμμή αυτή και καθόρισε τον τρόπο, τους κανόνες και τη βασική αρχή λειτουργίας της αιώρας. Η γραμμή που διαγράφει η αιώρα ονομάζεται, όπως είναι γνωστό, **έλικα του Αρχιμήδη**. Λέγεται ότι από τις παρατηρήσεις αυτές ο Αρχιμήδης οδηγήθηκε στο μαθηματικό ορισμό της έλικας και τη δημιουργία του πολύ σημαντικού έργου του «Περί ελίκων», το οποίο είχε μεγάλη επίδραση στους μεταγενέστερους επιστήμονες.

Τα συμπεράσματα του Αρχιμήδη πάνω στη λειτουργία της αιώρας χρησιμοποιήθηκαν και στην εποχή μας. Μάλιστα η έρευνα συνεχίστηκε με καταπληκτικά αποτελέσματα και πολλές και αξιόλογες πρακτικές εφαρμογές. Π.χ. η αρχή της αιώρας, όπως την καθόρισε ο Αρχιμήδης, εφαρμόζεται στους επιταχυντές σωματιδίων ύλης από τα μεγάλα κέντρα ατομικών ερευνών, σε συνδυασμό μαγνητικών πεδίων και εναλλασσόμενων ηλεκτρικών ρευμάτων.

5. Αρχιμήδης και απειροστικός λογισμός

Ο διαφορικός λογισμός είναι θεωρία λογισμού που ασχολείται με ποσότητες που μεταβάλλονται στην αύξηση τους, κατά απείρως μικρές διαφορές σε μερικά μεταβλητά μεγέθη. Ο λογισμός αυτός, επιτρέπει να προσδιορίσουμε τις υπάρχουσες σχέσεις μεταξύ ορισμένων μεγεθών, σχέσεις τις οποίες δε θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε με άμεσο τρόπο, διότι τα δοσμένα και τα άγνωστα στοιχεία δεν έχουν σύμμετρη σχέση. Η ανάπτυξη και το περιεχόμενο του διαφορικού λογισμού, συνδέονται στενά με την ανάπτυξη και το περιεχόμενο του ολοκληρωτικού λογισμού, μαζί με τον οποίο ο διαφορικός, αποτελεί βασικό τμήμα της μαθηματικής ανάλυσης. Η κεντρική έννοια του διαφορικού λογισμού, η παράγωγος, προέκυψε από την εξέταση μεγάλου αριθμού προβλημάτων των φυσικών επιστημών και της μαθηματικής επιστήμης, που αναφέρονται στον υπολογισμό των ορίων του ίδιου

τύπου. Τα σπουδαιότερα από αυτά τα προβλήματα, είναι ο προσδιορισμός της ταχύτητας της ευθύγραμμης κίνησης και η κατασκευή εφαπτομένης μίας επίπεδης καμπύλης. Έστω ότι ζητείται να καθορισθεί η ταχύτητα της ευθύγραμμης κίνησης ενός υλικού σημείου:

- Αν η κίνηση είναι ισοταχής, το διάστημα που διανύθηκε από το σημείο είναι ευθέως ανάλογο προς το χρόνο της κίνησης. Η ταχύτητα αυτής της κίνησης, μπορεί να ορισθεί ως το διάστημα που διανύθηκε στη μονάδα του χρόνου, ή ως ο λόγος του διαστήματος που διανύθηκε σε κάποιο διάστημα χρόνου, προς τη χρονική διάρκεια αυτού του διαστήματος.

- Αν η κίνηση είναι ανισοταχής, τα διαστήματα που διανύθηκαν από το σημείο σε ίσα στη διάρκεια τους διαστήματα, θα είναι γενικώς διαφορετικά.

Οι κύριες ιδέες που υποστήλυναν το λογισμό, αναπτύσσονταν για μία μεγάλη χρονική περίοδο. Τα πρώτα βήματα είχαν γίνει από τους Έλληνες μαθηματικούς. Για τους Έλληνες, οι αριθμοί ήταν λόγοι ακεραίων, συνεπώς η ευθεία των αριθμών είχε «τρύπες». Παρέκαμψαν αυτή τη δυσκολία χρησιμοποιώντας μήκη, εμβαδά και όγκους, συμπληρωματικά στους αριθμούς. Για τους Έλληνες δεν ήταν όλα τα μήκη αριθμοί. Ο Ζήνων ο Ελεάτης περίπου το 450 π.Χ., έδωσε στη δημοσιότητα έναν αριθμό προβλημάτων που στηρίζονταν στο άπειρο. Για παράδειγμα υποστήριξε την άποψη ότι η κίνηση είναι αδύνατη:

«Αν ένα σώμα κινείται από το Α στο Β, πριν φτάσει στο Β, διέρχεται από το ενδιάμεσο σημείο B_1 του ΑΒ. Για να μετακινηθεί στο B_1 πρέπει πρώτα να έχει προσεγγίσει το ενδιάμεσο σημείο B_2 του ΑΒ₁. Συνεχίζοντας αυτό το επιχείρημα, βλέπει ότι το Α πρέπει να μετακινηθεί μέσω ενός άπειρου πλήθους αποστάσεων και άρα δε μπορεί να μετακινηθεί».

Η **έννοια του συνεχούς** αποτελούσε αντικείμενο προβληματισμού και έρευνας, ήδη από τα χρόνια της αρχαιότητας. Η ανακάλυψη των αρρήτων, που ανέτρεψε την αρμονία ανάμεσα στην αριθμητική και στη γεωμετρία, σε συνδυασμό με τα μετέπειτα παράδοξα που αποδίδονται στον Ζήωνα τον Ελεάτη, σχετικά με τις ατέρμονες διαδικασίες και με τις αντιλήψεις για το «απείρως μικρό» και το «απείρως μεγάλο», υπήρξαν οι απαρχές–αφορμές για τη διερεύνηση της έννοιας του συνεχούς, ιδιαίτερα από τον Αριστοτέλη.

Κατά το μεσαίωνα, η μελέτη των έργων του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη, από σχολαστικούς φιλοσόφους, συνδυαζόμενη με θεωρητικές αναζητήσεις για τη φύση της θεότητας, οδήγησε σε λεπτεπίλεπτες εικασίες για τη φύση της κίνησης, για το συνεχές και το άπειρο. Οι Λύσιππος, Δημόκριτος και Αντιφών είχαν συνεισφορά στην ελληνική μέθοδο της εξάντλησης που τοποθετήθηκε σε επιστημονική βάση από τον Εύδοξο περίπου το 370 π.Χ. Η μέθοδος αυτή καλείται έτσι διότι κάποιος σκέπτεται ότι τα εμβαδά μετρούνται επεκτείνοντας τα, έτσι ώστε αυτά να υπολογίζονται για επιπλέον και επιπλέον του ζητούμενου εμβαδού.

Ο Εύδοξος, χρησιμοποιώντας την υπολόγισε τον όγκο κώνου. Τα ονόματα των Ζήωνα, Ευδόξου και Αρχιμήδη (το έργο του οποίου είχε τεράστια επιρροή σε όλη την μεταγενέστερη εξέλιξη των μαθηματικών) συνδέονται άμεσα με την επινόηση **«ατέρμονων διαδικασιών»** για τον υπολογισμό διαφόρων προβλημάτων. Οι **«ατέρμονες ή άπειρες»** διαδικασίες είναι στενά συνδεδεμένες με την έννοια του ορίου. Ο Αρχιμήδης (287–212 π.Χ.), περίπου το 225 π. Χ., έκανε μία από τις πιο αξιοσημείωτες ανακαλύψεις μέχρι τότε. Η πρώτη του σημαντική κίνηση προς τα εμπρός, ήταν να αποδείξει ότι το εμβαδόν ενός τμήματος μίας παραβολής είναι τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού ενός τριγώνου με την ίδια βάση και ύψος (κορυφή) και τα $\frac{2}{3}$ του εμβαδού του περιγεγραμμένου παραλληλογράμμου. Ο Αρχιμήδης, κατασκεύασε μία άπειρη σειρά από τρίγωνα, αρχίζοντας με ένα που είχε εμβαδόν Α και συνεχώς

προσέθετε επιπλέον τρίγωνα ανάμεσα στα ήδη υπάρχοντα τρίγωνα και στην παραβολή, της οποίας ήθελε να βρει το εμβαδόν.

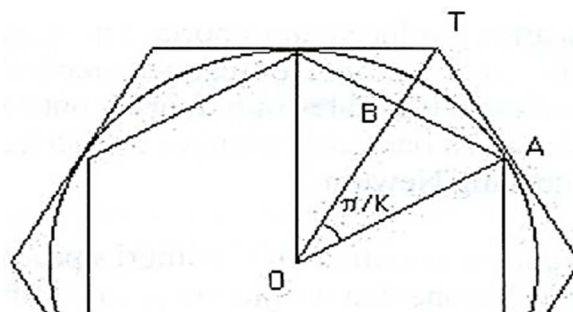
$$A, A + \frac{A}{4}, A + \frac{A}{4} + \frac{A}{16}, A + \frac{A}{4} + \frac{A}{16} + \frac{A}{64}.$$

Άρα, το εμβαδόν του τμήματος της παραβολής είναι:

$$A \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \right) = A \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) = \frac{4}{3} A.$$

Αυτό είναι το πρώτο γνωστό παράδειγμα άθροισης μίας άπειρης σειράς. Ο Αρχιμήδης, χρησιμοποιούσε την μέθοδο της εξάντλησης προκειμένου να βρει προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου. Αυτό φυσικά είναι ένα πρώιμο παράδειγμα ολοκλήρωσης το οποίο οδηγεί στο να προσεγγιστούν οι τιμές του π .

Εικόνα 39. Το διάγραμμα του Αρχιμήδη



Ανάμεσα σε άλλες «ολοκληρώσεις» από τον Αρχιμήδη, ήταν ο όγκος και η επιφάνεια της σφαίρας και του κώνου, το εμβαδόν της επιφάνειας της έλλειψης, το εμβαδόν χωρίου που περιέχεται μεταξύ της παραβολής $y=x^2$ και κάποιων ευθειών, ο όγκος κάθε τμήματος ενός παραβολοειδούς από περιστροφή και τμήματος υπερβολοειδούς εκ περιστροφής. Καμία περαιτέρω πρόοδος δεν είχε γίνει μέχρι τον 16^ο αιώνα, όταν οι μηχανικοί άρχισαν να οδηγούν τους μαθηματικούς να εξετάζουν προβλήματα, σχετικά με κέντρα βάρους. Η ιδέα της άπειρης διαδικασίας και τα προβλήματα που δημιουργεί, βρήκε για πρώτη φορά έκφραση στα περίφημα μαθηματικοφιλοσοφικά παράδοξα του Ζήνωνα που είναι κυριολεκτικά ανεξάντλητα σε προεκτάσεις και ερμηνείες. Η βαθιά εντύπωση που προξένησαν στην αρχαία ελληνική διανόηση αυτά τα παράδοξα, είχε ως αποτέλεσμα την ολική απόρριψη από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας της έννοιας του ορίου, σαν συμπληρωμένης και τελειωμένης, μετά από έναν άπειρο αριθμό βημάτων διαδικασίας.

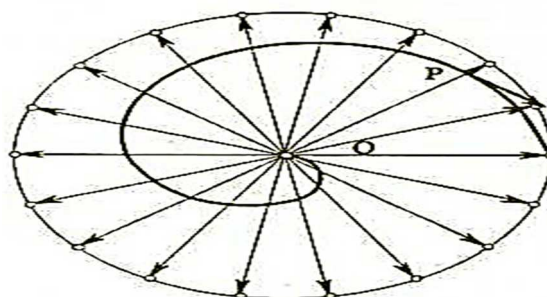
Έτσι, οι αποδείξεις του Εύδοξου ή του Αρχιμήδη, που σήμερα θα θεωρούσαμε ότι ασχολούνται με υπολογισμούς ορίων, ποτέ δε χρησιμοποιούν κατά εκπεφρασμένο τρόπο την έννοια του ορίου, που την θεωρούσαν όχι μαθηματικά έγκυρη και αυστηρή, αλλά βασίζονται σε μία πεπερασμένου τύπου μέθοδο διπλής αντίφασης. Κατά την διάκριση του Αριστοτέλη, οι μαθηματικοί δε χρησιμοποιούσαν τα απείρως μεγάλα ή τα απείρως μικρά μεγέθη, αλλά μεγέθη οσοδήποτε μεγάλα ή οσοδήποτε μικρά. Αυτή η τάση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, επηρέασε αποφασιστικά τα μεταγενέστερα μαθηματικά για πολλούς αιώνες και ιδιαίτερα την περίοδο μέχρι τον 16^ο–17^ο αιώνα, οπότε από πολλές πλευρές δημιουργήθηκε μία αντίδραση στην δεσμευτική για την ανάπτυξη των μαθηματικών (όπως πίστευαν) αυστηρότητα που είχαν επιβάλει με το κύρος τους οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί.

Κυριότεροι εκφραστές αυτής της αντίδρασης ήταν οι: B. Pascal, P. Fermat, J. Kepler, ο Γαλιλαίος και οι μαθητές του, μεταξύ των οποίων και ο B. Cavalieri. Η μέθοδος του Αρχιμήδη συνέχισε να χρησιμοποιείται, ώσπου τον 16^ο αιώνα άρχισε να αποσαφηνίζεται η έννοια του ορίου από τον Ιταλό Luca Valerio και τον Φλαμανδό Simm Stevin, οι οποίοι αποφεύγουν τη χρήση της μεθόδου της εξάντλησης και της διπλής αντίφασης. Η έννοια του ορίου εισήχθη, για να αντιμετωπισθούν οι δυσκολίες σε τρία βασικά προβλήματα.

- Γεωμετρικά προβλήματα (υπολογισμοί εμβαδών, μελέτη της φύσης των γεωμετρικών μηκών, υπολογισμοί όγκων, εφαπτόμενη καμπύλης, ...).
- Το πρόβλημα του αθροίσματος και το ύψος σύγκλισης μίας σειράς.
- Πρόβλημα της διαφορίσης (που προκύπτει από τη σχέση δύο ποσοτήτων που συγχρόνως τείνουν στο 0).

Την αρχική έννοια του ορίου πρέπει να την αναζητήσουμε στους γεωμετρικούς υπολογισμούς εμβαδών και όγκων την εποχή του ορθολογισμού, της φιλοσοφίας και της επιστημονικής αντιμετώπισης των προβλημάτων από τους μεγάλους Έλληνες μαθηματικούς. Εκείνο που χαρακτηρίζει την παράγωγο ως έννοια, είναι ότι συνδέει την ταχύτητα με την οποία κινείται ένα σημείο μίας καμπύλης, με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό. Είναι επομένως φυσικομαθηματική έννοια. Δεν είναι τυχαίο ότι τα πρώτα στοιχεία αυτής της έννοιας εμφανίζονται στα έργα του Αρχιμήδη και συγκεκριμένα στο έργο του «**Περί ελίκων**». Όταν μία ευθεία περιστρέφεται ομαλά γύρω από ένα σημείο O , ενώ ένα σημείο P , ξεκινώντας από το O κινείται ομαλά κατά μήκος αυτής, τότε το σημείο P διαγράφει μία έλικα.

Εικόνα 40. Έλικα



Ο Αρχιμήδης, απέδειξε (με μεθόδους που παραπέμπουν στο σύγχρονο ορισμό της παραγώγου) ότι η διεύθυνση της ταχύτητας του σημείου P πάνω στην έλικα είναι η διεύθυνση της εφαπτομένης της έλικας στο P . Είναι αξιοσημείωτο ότι, ο κινητικός ορισμός της έλικας που έδωσε ο Αρχιμήδης, καθιστά εύκολη τη φυσική έννοια της εφαπτομένης ως ταχύτητας. Αυτό δεν είναι το μοναδικό στοιχείο που έχουμε για τη συνεισφορά του Αρχιμήδη στο διαφορικό λογισμό. Στο έργο του «**Περί σφαίρας και κυλίνδρου**» διερευνά τις συνθήκες επίλυσης μίας εξίσωσης 3^{ου} βαθμού και κατά τη διερεύνηση αυτή καταλήγει στην ανάγκη προσδιορισμού της μέγιστης τιμής μίας ποσότητας. Τη μέγιστη αυτή τιμή, την προσδιορίζει με μεθόδους που ανάγονται ευθέως στις σημερινές. Είναι βέβαιο, ότι αν είχε κάνει το ελάχιστο βήμα προς την έννοια του ορίου θα ήταν ο θεμελιωτής και του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. Για αυτό άλλωστε όπως μας πληροφορεί ο Sir Thomas Little Heath,

«Οι εργασίες του Αρχιμήδη τόσο δυνατά και καθαρά υποδεικνύουν τις νεότερες μεθόδους της ανάλυσης, ώστε τον 17^ο αιώνα ο Torricelli και ο Wallis ριψοκινδύνεψαν την άποψη ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί έκρυψαν εσκεμμένα, κάτω από τις συνθετικές αποδείξεις τους, τα αναλυτικά τους τεχνάσματα, με τα οποία οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη της ανάλυσης».

Από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων μέχρι τον 12^ο μ.Χ. αιώνα, στην Ευρώπη δεν παρατηρείται παραγωγή έργου προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης της ανάλυσης. Η ελληνική παράδοση, καλλιεργήθηκε από τους Άραβες, οι οποίοι συγκέντρωσαν τα μέχρι τότε διασωθέντα χειρόγραφα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και τα μετέφρασαν στα αραβικά. Περί το 800 μ.Χ. ο χαλίφης της Βαγδάτης Αλ Μαμούν, προστάτης των γραμμάτων και επιστημών, αποδύεται σε μία πρωτοφανή εκστρατεία συγκέντρωσης και μετάφρασης των αρχαίων ελληνικών κειμένων. Σημαντικός Άραβας μαθηματικός είναι ο Σαράφ αλ Ντιν αλ Τουστ (1201-

1274), συνεχιστής του έργου του Ομάρ αλ Καγιάμ. Ως μυστικοσύμβουλος του Χουλαγκού, εγγονιού του Τσέγκις Χαν, τον έπεισε να ιδρύσει στο Μαραγκά του περσικού Αζερμπαϊτζάν μέγα αστεροσκοπείο, βιβλιοθήκη εκ 400.000 τόμων και ακαδημία, της οποίας τα μέλη μισθοδοτούνταν αδρώς. Μεταξύ των συγγραμμάτων του αναφέρονται:

- Το πρώτο αυτοτελές βιβλίο ευθυγράμμου και σφαιρικής τριγωνομετρίας, στο οποίο γίνεται χρήση όλων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

- Ερμηνείες και διορθώσεις της « **Συντάξεως** » του Πτολεμαίου.

- «**Λογική**»

- «**Ηθική**»

- «**Προλεγόμενα στην αστρονομία**»

- Πραγματεία περί αστρολάβου

- Περί ημερολογίου

- Ερμηνεία και προσθήκες στα έργα του Αβικέννα και

- Άλγεβρα, στα πλαίσια της οποίας αφού ολοκλήρωσε τη γεωμετρική μελέτη των εξισώσεων 3^{ου} βαθμού, οδηγήθηκε στη μελέτη καμπυλών γενικότερα. Φαίνεται ότι στη μελέτη αυτή χρειάστηκε και χρησιμοποίησε ένα εργαλείο που θα πρέπει να ονομάσουμε **παράγωγο**. Με δεδομένο ότι τα έργα του Αρχιμήδη είχαν μεταφραστεί στα αραβικά, πιθανολογούμε ότι τα είχε μελετήσει και αν μη τι άλλο χρησιμοποίησε στοιχεία από αυτά. Υπό την επίδραση της ανατολής, αναζωπυρώνεται το ενδιαφέρον για τα αρχαία κείμενα και στη δύση. Πολλά έργα, μεταφράζονται από τα αραβικά στα λατινικά. Οι έννοιες του απείρου, του απειροστού, του συνεχούς, που είναι έννοιες της ανάλυσης, ανακαλύπτονται αρχικά από τους σχολαστικούς φιλοσόφους στα «**Φυσικά**» του Αριστοτέλη. Κατά τον 14^ο αιώνα ο Richard Suiseth, γνωστός ως **Calculator** και ο Nicole Oresme ενδιαφέρονται για το μαθηματικό περιεχόμενο αυτών των εννοιών. Ο Calculator στο έργο του «**Liber Calculationum**» ασχολείται μεταξύ άλλων και με λόγους μεταβολής και διατυπώνει την πρόταση:

«Η ποσότητα της οποίας ο λόγος μεταβολής γίνεται άπειρος, έχει έναν πεπερασμένο μέσο λόγο μεταβολής».

Χρησιμοποιεί τη λέξη *fluent* για τη μεταβλητή ποσότητα και τη λέξη *fluxion* για το ρυθμό μεταβολής, λέξεις που θα χρησιμοποιήσει 300 χρόνια αργότερα ο Νεύτωνας. Υποστήριζε ότι, ο λόγος μεταβολής, αλλά και ο ρυθμός μεταβολής του λόγου μεταβολής, μπορούν να αποδοθούν αριθμητικά, αλλά δεν έδωσε ορισμούς. Ο Nicole Oresme (1323–1382) αναφέρεται στο έργο του Calculator, και ήταν ο πρώτος που παρέστησε το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής, με ευθεία γραμμή.

Ούτε αυτός έδωσε ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας κινητού, αλλά πλησίασε στον καθορισμό της παραγώγου σε σημείο καμπύλης. Εν τω μεταξύ, το δύσχηστο σύστημα των Ρωμαϊκών συμβόλων, έχει αντικατασταθεί από τους ινδοαραβικούς χαρακτήρες, που έφερε ο Fibonacci ($\cong$ 1175–1250) από τα ταξίδια του στις μουσουλμανικές χώρες, ενώ τα μαθηματικά σύμβολα των πράξεων εισάγονται περί το 1489 και της ισότητας (από τον Robert Recorde) το 1557. Το 1591, ο Vieta επινοεί τη **συμβολική άλγεβρα** και αργότερα, τον 17^ο αιώνα, ο Pierre Fermat και ο Descartes, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, την **αναλυτική γεωμετρία**.

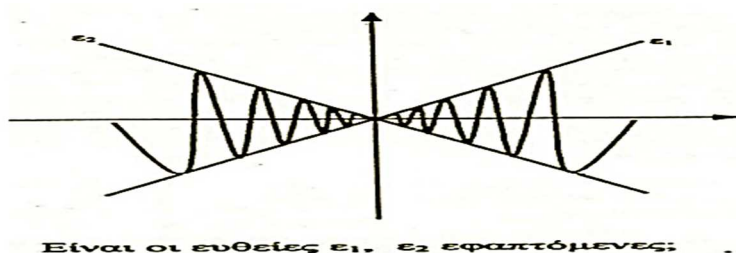
Όμως, μόνο από τον 16^ο αιώνα και μετά, αφ' ότου έγιναν γνωστά τα έργα του Αρχιμήδη* αρχίζει πλέον η ουσιαστική προσπάθεια για την ανάπτυξη της ανάλυσης. Η αναλυτική γεωμετρία, ήταν μία πραγματική επανάσταση. Τώρα, οι καμπύλες μπορούσαν να παρασταθούν με εξισώσεις, αλλά και κάθε εξίσωση όριζε μία καμπύλη.

*Με πρωτοβουλία του φιλομαθούς Πάπα Νικολάου του Ε', στα μέσα του 15^{ου} αιώνα, ακριβώς την εποχή που έσβηνε η Βυζαντινή Αυτοκρατορία, τα ελληνικά χειρόγραφα μεταφράστηκαν στα λατινικά από τον κληρικό Ιάκωβο της Κρεμόνας. Ο γερμανικής καταγωγής αστρονόμος Johann Muller, γνωστός ως **Regiomontanus** (1436–1476), διόρθωσε τη μετάφραση του Ιακώβου της Κρεμόνας το 1462 και είχε σκοπό να εκδώσει τα έργα του Αρχιμήδη με το ελληνικό κείμενο και τη λατινική μετάφραση, αλλά πέθανε πριν προλάβει να πραγματοποιήσει αυτή την έκδοση. Η 1^η έκδοση των έργων του Αρχιμήδη με τα ελληνικά πρωτότυπα και βελτιωμένη λατινική μετάφραση έγινε από τον Thomas Gerchauff (Venetianus) (1488–1551), το 1554, στον οίκο Ioannes Hervagius της Βασιλείας (Ελβετίας).

Οι Έλληνες και οι Άραβες, είχαν μελετήσει κυρίως τον κύκλο, τις κωνικές τομές και ορισμένες καμπύλες που ορίζονταν από γεωμετρικούς τόπους και είχαν βρει τις εφαπτόμενες και το εμβαδόν τους. Αλλά τώρα, το πλήθος των καμπυλών ήταν απεριόριστο. Και για αυτές οι μέθοδοι της συνθετικής γεωμετρίας, ήταν ανεπαρκείς. Επιπλέον, ετίθετο θέμα ορισμού των εννοιών.

Για τους αρχαίους Έλληνες, η εφαπτομένη καμπύλης ήταν η ευθεία που «αγγίζει» την καμπύλη, χωρίς να την τέμνει: «*Ευθεία κύκλου εφάπτεσθαι λέγεται, ήτις απομένη του κύκλου και εκβαλλομένη ου τέμνει τον κύκλον.*» 3^ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, Ορισμός β. Σε ελεύθερη μετάφραση: «*Εφαπτομένη κύκλου λέγεται η ευθεία, η οποία αγγίζει τον κύκλο και όταν προεκταθεί δεν τον τέμνει*». Παρατηρούμε ότι ο ορισμός του Ευκλείδη ήταν ένας στατικός ορισμός της εφαπτομένης και αναφέρεται αποκλειστικά σε εφαπτομένη κύκλου. Αυτή η έννοια της εφαπτομένης, μπορεί να ήταν ικανοποιητική για τις καμπύλες με αρκούντως ομαλή συμπεριφορά που είχαν μελετηθεί μέχρι τότε, όπως ο κύκλος ή οι κωνικές τομές. Τι θα μπορούσε όμως να πει κανείς για τις εφαπτόμενες καμπυλών, όπως η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Εικόνα 41.



Είναι οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 εφαπτόμενες:

Είναι γεγονός ότι ο στατικός ορισμός της εφαπτομένης είναι ανεπαρκής. Ο Gilles Persone de Roberval (1602–1675), στο έργο του «**Traite' des Invisibles**», που χρονολογείται από το 1634, αν και δεν εξεδόθη μέχρι το 1693, γενίκευσε την μέθοδο που είχε χρησιμοποιήσει ο Αρχιμήδης για την εύρεση της εφαπτομένης, σε τυχαίο σημείο της έλικας του. Όπως ο Αρχιμήδης, έτσι και ο Roberval αντιλαμβανόταν την καμπύλη ως την τροχιά ενός σημείου, που κινείται υπό την επίδραση δύο ταχυτήτων.

Ο Torricelli (1608–1647) παρατήρησε ότι η μέθοδος του Roberval χρησιμοποιούσε μία αρχή ήδη διατυπωθείσα από τον Γαλιλαίο, δηλαδή ότι η οριζόντια και η κάθετη ταχύτητα δρούσαν η μία ανεξαρτήτως της άλλης. Κατά τον 17^ο αιώνα, η μαθηματική επιστήμη και κυρίως ο απειροστικός λογισμός, γνώρισε μία πρωτοφανή άνθηση.

Για 1^η φορά μετά την αρχαιότητα, τα μαθηματικά απετέλεσαν το επίκεντρο της πνευματικής ανάπτυξης μιας εποχής. Από εκείνη τη στιγμή, που χαρακτηρίζεται κυρίως από τη συμβολή του J. Kepler, του Γαλιλαίου και των μαθητών του, δύο αστρονόμων και φυσικών, παρά μαθηματικών, αρχίζει ένας οργασμός ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού, που συμπληρώνεται σε ένα πρώτο στάδιο το 1675 περίπου με το έργο του Isaac Barrow, του Νεύτωνα, κυρίως φυσικού και του Leibniz, κυρίως φιλοσόφου, παρά μαθηματικών. Το γεγονός αυτό, έχει την ερμηνεία του. Στην αρχαία Ελλάδα, το κίνητρο για την εξέλιξη των μαθηματικών ήταν φιλοσοφικό και θεωρητικό και αυτό είχε ως αποτέλεσμα την αναζήτηση της εσωτερικής αρμονίας και

της υψηλής αυστηρότητας. Κατά τον 17^ο αιώνα ένα από τα κίνητρα για την εξέλιξη των μαθηματικών, ήταν η αναζήτηση και απόκτηση της γνώσης που θα ήταν χρήσιμη για τη θεμελίωση της επερχόμενης τεχνολογικής αναπτύξεως. Έτσι, πολλά θεμελιώδη μαθηματικά που χρησιμοποιούσαν έννοιες του απειροστικού λογισμού, προέρχονταν από τη μελέτη αστρονομίας, μηχανικής και φυσικής (ταχύτητα, κίνηση πλανητών) με στόχο, όχι τόσο θεωρητικό, όσο να αποκτηθούν οι πρακτικές γνώσεις σε μία εποχή που χαρακτηριζόταν από την κινητικότητα και ανάπτυξη του εμπορίου και της ναυσιπλοΐας.

Ο Kepler, στην εργασία του για την κίνηση των πλανητών, έπρεπε να υπολογίσει το εμβαδό τμημάτων μίας έλλειψης. Η μέθοδος του, συνίστατο στο να θεωρεί τα εμβαδά ως αθροίσματα γραμμών, μία ακατέργαστη μορφή ολοκληρώσεως, αλλά ο Kepler είχε λίγο χρόνο για «**ελληνική αυστηρότητα**» (ακρίβεια αποδείξεων) και ήταν αρκετά τυχερός στο να εξασφαλίσει τη σωστή απάντηση, αφότου έκανε δυο λάθος διαγραφές σε αυτή την εργασία! Τρεις μαθηματικοί γεννημένοι με 3 έτη διαφορά ο ένας από τον άλλο, ήταν οι επόμενοι που είχαν σημαντικές συνεισφορές. Αυτοί ήταν οι Fermat, Roberval, Cavalieri. Ο Cavalieri οδηγήθηκε στη δική του «**μέθοδο των αδιαιρέτων**», από τις προσπάθειες του Kepler στην ολοκλήρωση.

Αυτός δεν ήταν αυστηρός στην προσέγγιση του και είναι δύσκολο να δούμε καθαρά πως σκέφθηκε σχετικά με τη μέθοδο του. Εμφανίζεται ότι, ο Cavalieri σκέφθηκε μία επιφάνεια σα να ήταν φτιαγμένη από συστατικά τα οποία ήταν γραμμές και τότε άθροισε τον άπειρο αριθμό των «αδιαιρέτων». Έδειξε, χρησιμοποιώντας τέτοιες μεθόδους, ότι το ολοκλήρωμα του x^n από 0 έως a , ήταν $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, δείχνοντας το αποτέλεσμα για έναν αριθμό τιμών του n και συνάγοντας το γενικό αποτέλεσμα.

Ο Huygens, ήταν επικριτικός στις αποδείξεις του Cavalieri, λέγοντας ότι αυτό που χρειάζεται είναι μία απόδειξη που τελικά να πείθει ότι μία αυστηρή απόδειξη μπορούσε να κατασκευαστεί. Ο Huygens, άσκησε μείζονα επιρροή στον Leibniz και εξ' αυτού έπαιξε αξιόλογο ρόλο στο να παράγει μία περισσότερο ικανοποιητική προσέγγιση του λογισμού. Ο Roberval, θεώρησε προβλήματα του ίδιου τύπου αλλά ήταν περισσότερο αυστηρός από τον Cavalieri. Ο Roberval, θεώρησε το εμβαδόν ανάμεσα σε μία καμπύλη και μία ευθεία γραμμή, ως να ήταν φτιαγμένο από έναν άπειρο αριθμό απείρως στενών ορθογωνίων λωρίδων. Το εφάρμοσε αυτό στο ολοκλήρωμα του x^m από 0 έως 1 το οποίο έδειξε ότι έχει την προσεγγιστική τιμή: $\frac{[0^m+1^m+2^m+\dots+(n-1)^m]}{n^{m+1}}$. Ο Roberval τότε, ισχυρίστηκε ότι αυτό κατευθύνεται προς το $\frac{1}{m+1}$, όσο το n τείνει στο άπειρο και έτσι υπολόγισε το εμβαδόν.

Ο Torricelli, εφάρμοσε τη μέθοδο του Roberval, για να βρει τις εφαπτόμενες των καμπυλών με εξισώσεις της μορφής $y = x^n$ (με σημερινό συμβολισμό). Παρόλο που ο ορισμός της εφαπτομένης ως ευθείας, που έχει τη διεύθυνση της συνισταμένης ταχύτητας, ήταν πιο σύνθετος από τον ορισμό της ως «αγγίζουσας» ευθείας μίας καμπύλης, αυτός ο νέος ορισμός μπορούσε να εφαρμοστεί σε καμπύλες, στις οποίες ο παλαιότερος ορισμός ήταν ανεπαρκής. Ήταν επίσης χρήσιμος διότι συνέδεε τη στατική γεωμετρία με τη δυναμική, οι οποίες πριν την εργασία του Γαλιλαίου αντιμετωπίζονταν στην ουσία ως ξεχωριστοί τομείς. Δεν ήταν όμως δεκτός από μαθηματική πλευρά διότι στηριζόταν σε φυσικές έννοιες. Υπήρχαν καμπύλες που εμφανίζονταν σε καταστάσεις που δεν είχαν σχέση με κίνηση και επομένως αυτός ο ορισμός της εφαπτομένης δεν ήταν εφαρμόσιμος. Κατόπιν όλων αυτών άρχισαν να προκύπτουν και άλλες μέθοδοι εύρεσης εφαπτόμενων. Προς αυτή την κατεύθυνση κινούνται οι εργασίες των Pierre Fermat και Isaac Barrow.

Ο Pierre Fermat (1601–1665), ο «**πρίγκιπας των ερασιτεχνών**», ήταν βοηθός στο ανώτατο δικαστήριο της Τουλούζης και ασχολήθηκε με τα μαθηματικά στον ελεύθερο χρόνο του για διασκέδαση. Οι D' Alembert, Lagrange και Laplace του αποδίδουν τις πρώτες ιδέες του διαφορικού λογισμού. Θεμελίωσε τη σύγχρονη θεωρία αριθμών, έβαλε μαζί με τον Pascal τις βάσεις για τη θεωρία πιθανοτήτων και επινόησε, λίγα χρόνια πριν από τον Descartes, την αναλυτική γεωμετρία. Ο Fermat ήταν επίσης περισσότερο αυστηρός στην προσέγγιση του, αλλά δεν έδωσε καμία απόδειξη. Γενίκευσε την παραβολή και την υπερβολή:

$$\text{Parab}\square a : \frac{y}{a} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 \text{ t}\square \left(\frac{y}{a}\right)^n = \left(\frac{x}{b}\right)^m$$

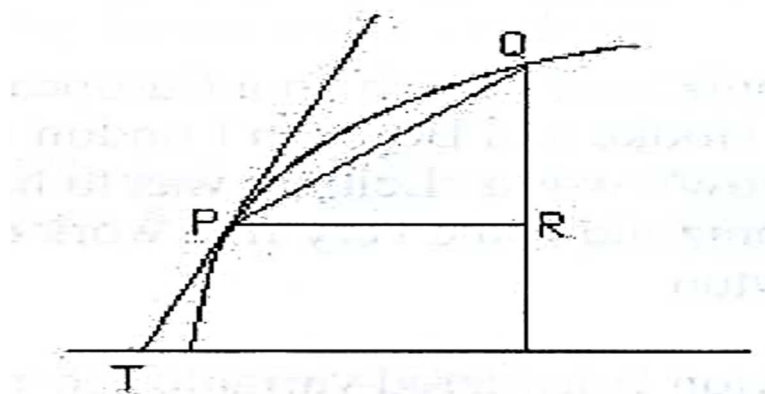
$$\text{Hyperb}\square a : \frac{y}{a} = \frac{b}{x} \text{ t}\square \left(\frac{y}{a}\right)^n = \left(\frac{b}{x}\right)^m$$

Σε αυτή την εξελικτική πορεία που εξετάζουμε $\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{b}\right)^p$, ο Fermat υπολόγισε το άθροισμα του r^r από $r=1$ έως $r=n$. Επίσης, υπολόγισε μέγιστα και ελάχιστα θεωρώντας ότι η εφαπτομένη στην καμπύλη ήταν παράλληλη στον άξονα των x . Έγραψε στον Descartes, δίνοντας του τη μέθοδο που ουσιαστικά χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα, βρίσκοντας μέγιστα και ελάχιστα, υπολογίζοντας πότε η παράγωγος της συνάρτησης ήταν μηδέν. Ο Fermat, έλυσε για πρώτη φορά προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων, μελετώντας τη συμπεριφορά των συναρτήσεων κοντά στις ακραίες τιμές τους. Η βασική του παρατήρηση, ήταν ότι αν η τιμή $f(x_0)$ είναι μέγιστη ή ελαχίστη για την συνάρτηση f , τότε η f μεταβάλλεται με μεγάλη βραδύτητα κοντά στο x_0 . Από τα προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων ο Fermat οδηγήθηκε σε μία μέθοδο για τη χάραξη εφαπτόμενων καμπύλης.

Η κεντρική ιδέα είναι ότι, η εφαπτομένη θεωρείται ως τέμνουσα της οποίας τα δύο σημεία προσεγγίζουν όλο και περισσότερο μέχρι να συμπέσουν. Η μέθοδος για την εύρεση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$, περιλαμβάνει τον υπολογισμό της κλίσης $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ της τέμνουσας, την αλγεβρική επεξεργασία που απαιτεί ο τύπος $f(x+h)$ στον αριθμητή και στη συνέχεια τη διαίρεση με το h . Όλη αυτή η διαδικασία, υποδηλώνει πως, όταν η ποσότητα h μηδενίζεται, η τέμνουσα γίνεται εφαπτομένη και έτσι η παράλειψη του h στον τύπο κλίσης της τέμνουσας δίνει την κλίση της εφαπτομένης. Το μεγαλύτερο μέρος του έργου του, περιέχεται σε επιστολές προς άλλους μαθηματικούς. Δημοσιεύτηκε μετά το θάνατο του, από το γιο του Σαμουήλ.

Ο Isaac Barrow (1630–1677), έδωσε επίσης μία ανάλογη μέθοδο κατασκευής εφαπτόμενων σε καμπύλες, όπου η εφαπτομένη δίνεται ως το όριο μίας χορδής όσο τα σημεία προσεγγίζουν το καθένα, γνωστή ως το διαφορικό τρίγωνο του Barrow.

Εικόνα 42. Το διαφορικό τρίγωνο του Barrow.



Μαζί οι Barrow και Torricelli μελέτησαν το πρόβλημα της κινήσεως με μεταβλητή ταχύτητα. Η εργασία του Torricelli συνεχίστηκε στην Ιταλία, από τους Mengoli και Angeli. Γνωρίζοντας καλά ελληνικά και αραβικά, ο Barrow μετέφρασε ορισμένα έργα του Ευκλείδη και βελτίωσε τις μεταφράσεις αρκετών έργων των Ευκλείδη, Απολλωνίου και Αρχιμήδη. Το κύριο έργο του, «**Lectiones Geometricae**» (1669) είναι μία από τις μεγαλύτερες συνεισφορές στην ανάλυση.

Η συμβολή των Fermat και Barrow στην εξέλιξη του διαφορικού λογισμού, είναι πολύ πιο ουσιαστική από ότι είναι γενικώς παραδεκτό. Στις εργασίες τους προσέγγισαν την έννοια της παραγώγου μέσω της εφαπτομένης καμπύλης, με καθαρά γεωμετρικό τρόπο και όχι μέσω στιγμιαίας ταχύτητας. Δηλαδή, η παράγωγος επινοήθηκε αρχικά από καθαρά μαθηματικές ανάγκες και συγκεκριμένα από την ανάγκη να βρεθούν οι λύσεις εξισώσεων, γεγονός που οδήγησε στον προσδιορισμό ακρότατων σε συνδυασμό με την κατασκευή της εφαπτομένης καμπύλης. Η κυριότερη αξία των προβλημάτων φυσικής που συνδέθηκαν με την εξέλιξη της έννοιας της παραγώγου, έγκειται στο γεγονός ότι εισήγαγαν την έννοια της μεταβολής στα μαθηματικά.

Η παράγωγος της απόστασης, είναι η ταχύτητα και η αντίστροφη λειτουργία πηγαιίνει από την ταχύτητα στην απόσταση. Ως εκ τούτου, η επίγνωση της αντιστροφής της παραγωγίσης άρχισε να αναπτύσσεται φυσιολογικά και η ιδέα ότι το ολοκλήρωμα και η παράγωγος ήταν αντίστροφα το ένα του άλλου, έγινε οικεία στον Barrow. Στην πραγματικότητα, παρόλο που ο Barrow ποτέ δε διατύπωσε κατηγορηματικά το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού, εργαζόταν προς αυτήν την κατεύθυνση και ο Newton ήταν αυτός που συνέχισε σε αυτή την κατεύθυνση και διατύπωσε κατηγορηματικά το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού. Το 1656 ο Wallis εξέδωσε το έργο «**Arithmetica Infinitorum**», στο οποίο γίνεται χρήση κάποιας «έννοιας ορίου». Το έργο αυτό έχει γεωμετρικό χαρακτήρα. Ο Ιταλός Pietro Nengoli το 1659 με το βιβλίο του «**Geometrica Speciosa**» βελτίωσε την μέθοδο του Luca Valerio για αναπαράσταση εμβαδών κάτω από συγκεκριμένες καμπύλες.

Ο Luca Valerio (1552–1618) εξέδωσε στη Ρώμη το 1606 το «**De quadratura parabolae**» το οποίο συνέχιζε τις ελληνικές μεθόδους αντιμετώπισης προβλημάτων εμβαδού αυτού του είδους. Οι Καρτέσιος, Fermat και D' Alembert προσέγγισαν την έννοια του ορίου μέσω της κλίσης εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο. Ο Καρτέσιος, βρήκε μέθοδο για τον υπολογισμό της εφαπτομένης μίας καμπύλης σε ένα σημείο $M(x_1, y_1)$. Ο Fermat, προσπαθώντας να λύσει το πρόβλημα της εφαπτομένης και το πρόβλημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής μίας συνάρτησης, εισάγει μία βασική ιδέα «*αυξάνει ελάχιστα τη μεταβλητή και μετά τις πράξεις, αφήνει την αύξηση να εξαφανίζεται*».

Ο Barrow (1650) για τη χάραξη εφαπτομένων, ακολουθεί μέθοδο που μοιάζει με του Fermat και με τη διαδικασία που ακολουθούμε σήμερα. Διαφέρει μόνον ως προς την ορολογία και το συμβολισμό. Κατά τον 17^ο αιώνα έχουμε ραγδαία ανάπτυξη των μαθηματικών και αυτό προέκυψε από την ανάγκη να αντιμετωπισθούν προβλήματα των φυσικών επιστημών, που απαιτούσαν αλλαγή στις μεθόδους που επικρατούσαν μέχρι τότε. Ότι είχε γίνει όμως μέχρι τον 17^ο αιώνα ήταν αποσπασματικό και αθεμελίωτο.

Ήταν καιρός να δομηθεί ο ίδιος ο απειροστικός λογισμός με τη μορφή ενός αποτελεσματικού εργαλείου αναλυτικών μεθόδων που να στηρίζονται σε αυστηρούς φορμαλιστικούς κανόνες. Υπό αυτήν την έννοια ο απειροστικός λογισμός είναι έργο των Isaac Newton και Gottfried Wilhelm Leibniz. Ο Isaac Newton, θεωρείτο πατέρας του διαφορικού λογισμού μέχρι το 1934, οπότε ο Louis Trenchard Moore ανακάλυψε μία σημείωση που έφερε την αλήθεια στο φως, απονέμοντας στο Fermat την

αναγνώριση που εδικαιούτο. Σε αυτήν, ο Newton ανέφερε ότι είχε αναπτύξει το διαφορικό λογισμό του, με βάση «τη μέθοδο του κυρίου Fermat για το σχεδιασμό των εφαπτόμενων». Η δημιουργία του διαφορικού λογισμού ως ανεξάρτητου κλάδου των μαθηματικών, πραγματοποιήθηκε από τους Newton και Leibniz.

Αυτοί ορθολογιστικά, απέδειξαν ότι η διαφορίση και η ολοκλήρωση είναι πράξεις αμοιβαία αντίστροφες. Από εκείνη την εποχή, ο διαφορικός λογισμός αναπτύχθηκε σε διαρκή δεσμό με τον ολοκληρωτικό λογισμό. Παρ' όλα αυτά, τα θεμέλια του λογισμού πάσχουν από ασάφειες, απουσιάζουν οι αυστηροί ορισμοί και ο τρόπος διατύπωσης των νοημάτων εμποδίζει την κατανόηση και η σύγχυση που προκαλείται σχετικά με τις άπειρα μικρές ποσότητες, επιφέρει αυστηρές επικρίσεις, ιδιαίτερα του επισκόπου Berkley, το 1734.

6. Παλίμψηστο του Αρχιμήδη

Κλείνοντας, δε μπορούμε να μην αναφερθούμε, στο κύριο έγγραφο που περιέχει το έργο του Αρχιμήδη που είναι το Παλίμψηστο. Το 1906, ο Δανός καθηγητής Johan Ludvig Heiberg επισκέφθηκε την Κωνσταντινούπολη και εξέτασε μια περγαμινή (από δέρμα κατσίκας). Τελικά ανακάλυψε ότι η περγαμινή ήταν ένα παλίμψηστο, δηλαδή ένα έγγραφο με κείμενο το οποίο είχε γραφεί πάνω σε μια σβησμένη παλιά εργασία. Τα παλίμψηστα, δημιουργούνται ξαίνοντας το μελάνι από τα αρχικά έργα των περγαμινών και με την επαναχρησιμοποίηση τους. Αυτή ήταν μια συνηθισμένη πρακτική στο Μεσαίωνα, καθώς η περγαμινή ήταν αρκετά ακριβή.

Από αυτό το νέο χειρόγραφο που ανακαλύφθηκε το 1906 στην Κωνσταντινούπολη, αντλήθηκαν ανεκτίμητες πληροφορίες για τα έργα του Αρχιμήδη καθώς επανακτήθηκε και αποκωδικοποιήθηκε πλήρως με τη βοήθεια της σύγχρονης τεχνολογίας. Οι πληροφορίες που προέκυψαν, από τη μελέτη των έργων του Αρχιμήδη, τα οποία υπάρχουν στη συγκεκριμένη περγαμινή, οδηγούν τους επιστήμονες σε αναθεώρηση των όσων πιστεύαμε για τις μαθηματικές γνώσεις των αρχαίων Ελλήνων. Και αυτό διότι αποδεικνύουν μεταξύ άλλων, ότι ο Αρχιμήδης γνώριζε τις αρχές και την πρακτική του διαφορικού και ολοκληρωτικού Λογισμού, πολλούς αιώνες πριν από τη διατύπωσή τους από τους Νεύτωνα και Λάιμπνιτς.

Πάντως, παρά το γεγονός πως η παρουσία των αρχαίων κειμένων σε αυτό είχε εντοπιστεί εδώ και πάνω από ένα αιώνα, η πλήρης ανάκτηση και αποκωδικοποίησή τους ολοκληρώθηκε κατά το 2008, με τη βοήθεια πρωτοποριακών τεχνολογικών μεθόδων. Το όλο επιστημονικό πρόγραμμα, έφερε την ονομασία «**Παλίμψηστο του Αρχιμήδη**», στο πλαίσιο του δε συστάθηκε μια διεθνής επιστημονική ομάδα έρευνας της περγαμινής. Τα αποτελέσματα ήταν εντυπωσιακά διότι, κατ' αρχήν, εκτός από τις άγνωστες εργασίες του Αρχιμήδη, εντοπίστηκαν και κείμενα του Αθηναίου πολιτικού, στρατηγού και ρήτορα Υπερείδη που έζησε τον 4^ο αιώνα π.Χ. και φιλοσοφικά κείμενα που αποτελούν σχολιασμούς του φιλόσοφου της Περιπατητικής Σχολής Αλέξανδρου της Αφροδισιάδος, ο οποίος έζησε κατά τον 3^ο αιώνα π.Χ., πάνω σε εργασίες του Αριστοτέλη.

Εκτός, όμως, από την ίδια την επιστημονική σημασία της ανακάλυψης και επανάκτησης των αρχαίων κειμένων, τα όσα αναγράφονται στις πραγματείες του Αρχιμήδη αποκαλύπτουν τη μέθοδο που ακολουθούσε για να οδηγείται στις εκπληκτικές ανακαλύψεις του. Όμως, το εντυπωσιακότερο όλων είναι ότι αποδεικνύεται πως ο Αρχιμήδης ήταν εξοικειωμένος με μαθηματικές έννοιες και πρακτικές που θεωρούντο, μέχρι αρκετά πρόσφατα, ως ανακαλύψεις μεταγενέστερων αιώνων.

6.1. Η ιστορική διαδρομή του Παλίμψηστου

Το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη, είναι ένα βιβλίο κατασκευασμένο από περγαμνή (δηλαδή μεμβράνη από επεξεργασμένο δέρμα ζώου, κατάλληλη για γραφή), στο οποίο αναγράφονται προσευχές της Ορθόδοξης Εκκλησίας. Ωστόσο, κάτω από τα θρησκευτικά κείμενα διακρίνονται ίχνη αρχαιότερης γραφής, τα οποία σβήστηκαν προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η περγαμνή για τη συγγραφή των εκκλησιαστικών κειμένων και για το λόγο αυτό πρόκειται για ένα «παλίμψηστο», καθώς ο όρος αυτός αφορά σε χειρόγραφο που με τη χρήση κατάλληλων μεθόδων είχε καθαριστεί από την αρχική γραφή, προκειμένου να επαναχρησιμοποιηθεί.

Εκτιμάται πως, το αρχικό κείμενο του Αρχιμήδη γράφτηκε στην Κωνσταντινούπολη γύρω στο 1000 μ.Χ. από κάποιον άγνωστο, μέχρι τώρα, αντιγραφέα εκείνης της εποχής. Σε αυτό περιλαμβάνονται, μοναδικά αντίγραφα άγνωστων έργων του Αρχιμήδη και συγκεκριμένα τα εξής:

- «**Περί των μηχανικών θεωρημάτων, προς Ερατοσθένη έφοδος (Μέθοδος)**» (αποτελεί το μόνο γνωστό αντίγραφο, καθώς μέχρι την ανακάλυψη του Παλίμψηστου παρέμενε άγνωστο το κείμενο αυτό, ενώ αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα έργα του Αρχιμήδη και μας δίνει και μια καινούρια αντίληψη του τρόπου σκέψης του)

- «**Περί των επιπλεόντων σωμάτων**» (αποτελεί το μόνο γνωστό αντίγραφο, που στη συγκεκριμένη περίπτωση αναφερόμαστε σε αυτό ως το μόνο γνωστό αντίγραφο λαμβάνοντάς το ως ξεχωριστό από το έργο «**Περί οχουμένων**»)

- «**Στομάχιον**» (η ανακάλυψη του ήταν σημαντική, γιατί αποδείχτηκε ότι το έργο αυτό ήταν πράγματι έργο του Αρχιμήδη, πράγμα που μέχρι τότε είχε αμφισβητηθεί από πολλούς μελετητές, ακόμα και από τον Heiberg που το ανακάλυψε στο Παλίμψηστο)

- «Περί επίπεδων ισορροπιών»
- «Περί ελίκων»
- «Κύκλου μέτρησις»
- «Περί σφαίρας και κυλίνδρου»
- «Περί οχουμένων»

Το χειρόγραφο, στη συνέχεια κατέληξε στο ορθόδοξο μοναστήρι του Αγίου Σάββα κοντά στην Ιερουσαλήμ.

Εικόνα 43. Το παλίμψηστο του Αρχιμήδη.



Εκεί ένας μοναχός, ονόματι Ιωάννης Μύρωνας, κατά το 1229-1230 (καθώς όπως αποκαλύφθηκε από το Παλίμψηστο ο συγκεκριμένος μοναχός τελείωσε τη μεταγραφή των προσευχών στις 14.04.1229, στην Ιερουσαλήμ), έσβησε το αρχικό

κείμενο αποξέοντας την περγαμινή και έγραψε πάνω σε αυτήν προσευχές, αφού πρώτα όμως έκοψε τις σελίδες, περιέστρεψε τα φύλλα κατά 90 μοίρες και τα δίπλωσε στη μέση. Εκτιμάται πως, η αρχική περγαμινή είχε 90 σελίδες, αλλά μετά τη επεξεργασία το παλίμψηστο που προέκυψε είχε περίπου 177 (τόσες όσες υπήρχαν το 1906) σελίδες. Για την κατασκευή του Παλίμψηστου χρησιμοποιήθηκαν εκτός της περγαμινής με τα έργα του Αρχιμήδη και άλλες περγαμινές, οι οποίες περιείχαν τα έργα των Υπερείδη και Αλέξανδρου της Αφροδισιάδος.

Το Παλίμψηστο, χρησιμοποιήθηκε ως προσευχητάριο από το 1230 έως το 1830, στη διάρκεια δε αυτών των αιώνων χάθηκαν ορισμένες σελίδες του, αλλά σε γενικές γραμμές διατηρήθηκε σε καλή κατάσταση. Το 1846 το μαθηματικό περιεχόμενο του Παλίμψηστου εντοπίστηκε από το Γερμανό μελετητή των Γραφών Constantin von Tischendorf ο οποίος, ωστόσο, δε γνώριζε για τι ακριβώς επρόκειτο. Ο Tischendorf, εξέτασε το Παλίμψηστο στη βιβλιοθήκη της εκκλησίας του Πανάγιου Τάφου στην Ιερουσαλήμ. Κάποια έτη μετά, ο Αθανάσιος Κεραμέως Παπαδόπουλος, γραμματέας του Πατριαρχείου Ιεροσολύμων και αργότερα υφηγητής στο Πανεπιστήμιο Αγίας Πετρούπολης, εξέδωσε ένα πεντάτομο έργο, την «**Ιεροσολυμητική Βιβλιοθήκη**».

Στη σελίδα 329 του τέταρτου τόμου, ο οποίος εκδόθηκε το 1899, σημειώνεται η ύπαρξη ενός παλίμψηστου αγνώστου συγγραφέα και παραθέτονται λίγοι στίχοι μαθηματικού περιεχομένου για να διευκολύνουν τον ειδικό αναγνώστη να αναγνωρίσει το χειρόγραφο. Ο Γερμανός καθηγητής H. Schoene, ο οποίος είχε εκδώσει τα «**Μετρικά**» και τη «**Διόπτρα**» του **Ήρωνα**, διαβάζοντας την πληροφορία του Παπαδόπουλου αντιλήφθηκε ότι πρόκειται για έργο του Αρχιμήδη και μετέδωσε την πληροφορία στο Heiberg, ο οποίος την εποχή εκείνη ερευνούσε το έργο του μεγάλου μαθηματικού. Το 1906, ο Δανός φιλόλογος και ιστορικός Johan Ludvig Heiberg, από το Πανεπιστήμιο Κοπεγχάγης, εντόπισε σε μοναστήρι στην Κωνσταντινούπολη το Παλίμψηστο και μελέτησε το παλαιότερο κείμενο που φαινόταν πολύ αμυδρά πίσω από τις γραμμές του θρησκευτικού κειμένου και στα περιθώρια. Τελικά, ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε την παρουσία κάποιων από τα κείμενα του Αρχιμήδη. Ο Heiberg αντέγραψε 177 σελίδες του χειρογράφου και φωτογράφησε τις 65 από αυτές. Κατά την περίοδο 1910-1915 δημοσίευσε την αντιγραφή των έργων του Αρχιμήδη που είχε πραγματοποιήσει ο ίδιος.

Ωστόσο, υπήρχαν αρκετά κενά. Έτσι, σταδιακά, η ύπαρξη των συγκεκριμένων κειμένων του Αρχιμήδη έγινε γνωστή στους κύκλους των ιστορικών, των μαθηματικών και των φυσικών. Λίγο αργότερα, το ελληνικό κείμενο του Αρχιμήδη μεταφράστηκε στην αγγλική γλώσσα από το Βρετανό ιστορικό και μαθηματικό Sir Thomas Little Heath.

Στη συνέχεια, το χειρόγραφο εξαφανίστηκε για να επανεμφανιστεί στην κατοχή ενός Γάλλου συλλέκτη που ζούσε με την οικογένειά του στην Κωνσταντινούπολη. Η συγκεκριμένη οικογένεια κράτησε το Παλίμψηστο από το 1908 έως το 1998. Από το 1920 και μετά, αυτό μεταφέρθηκε στο Παρίσι. Όμως, το 1938 κάποιος από τους κατόχους του, προσπαθώντας να του προσδώσει μεγαλύτερη αξία, πρόσθεσε σε αυτό τέσσερις πλαστές εικόνες των Ευαγγελιστών, υποτιθέμενης βυζαντινής τεχνοτροπίας. Η συγκεκριμένη παρέμβαση, κάλυψε σχεδόν πλήρως το αρχικό κείμενο σε ορισμένες σελίδες του χειρογράφου, δυσκολεύοντας, τις προσπάθειες ανάκτησής του. Κατά τη δεκαετία του 1990 οι απόγονοι της οικογένειας, προσπάθησαν ανεπιτυχώς να πωλήσουν το Παλίμψηστο, σε ιδιωτικά ινστιτούτα σε Λονδίνο και Παρίσι. Τελικά, το 1998 παρέδωσαν το χειρόγραφο στον οίκο Christie's στη Νέα Υόρκη για να πωληθεί σε ανοικτή δημοπρασία. Όταν έγινε γνωστή η είδηση

στην Ελλάδα, υπήρξε κινητοποίηση από το Υπουργείο Πολιτισμού και από πνευματικά ιδρύματα της χώρας για να συγκεντρωθεί το απαιτούμενο ποσόν.

Παράλληλα, όμως, το 1998, το Ορθόδοξο Πατριαρχείο Ιεροσολύμων διεκδίκησε την κατοχή του Παλίμψηστου φέρνοντας το θέμα προς επίλυση στο Ομοσπονδιακό Δικαστήριο Νέας Υόρκης διότι, κατά τους ισχυρισμούς του, το χειρόγραφο κλάπηκε από τη μονή Αγίου Σάββα, η οποία από το 1625 ανήκε στη δικαιοδοσία του Πατριαρχείου. Η απόφαση του δικαστηρίου ήταν υπέρ του οίκου Christie's και έτσι τελικά το Παλίμψηστο πωλήθηκε σε δημοπρασία στις 28.10.1998, στην εντυπωσιακή τιμή των 2.000.000 δολαρίων, σε κάποιον εκατομμυριούχο συλλέκτη που διατήρησε την ανωνυμία του και που συνήθως αναφέρεται ως «**κύριος Β**». Όμως, η ταυτότητα του μυστηριώδους συλλέκτη προφανώς ήταν γνωστή στον William Noel, διευθυντή του τομέα αρχαίων χειρογράφων του Μουσείου Τέχνης Walters στη Βαλτιμόρη. Αυτό προκύπτει από το ότι ο Noel έστειλε ένα γράμμα, μέσω του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου, στον «κύριο Β» με το οποίο τον προέτρεπε να παραδώσει το Παλίμψηστο στο συγκεκριμένο μουσείο προκειμένου να μελετηθεί.

Πράγματι, ο κάτοχός το παρέδωσε στο Μουσείο Walters το 1999, οπότε ξεκίνησαν οι διαδικασίες για την εξονυχιστική του έρευνα. Το όλο πρόγραμμα ονομάστηκε «**Πρόγραμμα Παλίμψηστο Αρχιμήδη**» (Archimedes Palimpsest Project) στο πλαίσιο του οποίου συστάθηκε μια διεθνής ερευνητική ομάδα στην οποία συμμετείχαν επιστήμονες διαφόρων ειδικοτήτων. Τη χρηματοδότηση της έρευνας ανέλαβε ο «κύριος Β», αν και αρκετοί επιστήμονες δέχθηκαν να εργαστούν αφιλοκερδώς θεωρώντας ως αποζημίωσή τους τη συμμετοχή σε μια τόσο σημαντική έρευνα που αφορούσε τον Αρχιμήδη. Πάντως, όταν το Μουσείο Walters παρέλαβε το χειρόγραφο, πολλοί πίστευαν ότι δε μπορούσε να ανακτηθεί τίποτε από αυτό. «*Ήταν σε φρικτική κατάσταση, έχοντας το βάρος των χιλίων χρόνων του, των μετακινήσεων και της κακής χρήσης*», δήλωσε ο διευθυντής του προγράμματος και επιμελητής χειρογράφων και σπάνιων βιβλίων του Walters, Γουίλ Νόελ. Το 2000 πραγματοποιήθηκε η πρώτη φάση μελέτης του χειρογράφου από ερευνητές του Ινστιτούτου Τεχνολογίας Rochester και του Πανεπιστημίου Johns Hopkins.

Κατά το 2001-2005 πραγματοποιήθηκε η δεύτερη φάση μελέτης του χειρογράφου με την παραγωγή ψευδοχρωματικών αντιγράφων του αρχαίου κειμένου που ελήφθησαν με την τεχνική της πολύφασματικής απεικόνισης. Κατά το 2005-2006 χρησιμοποιήθηκε η τεχνική του φθορισμού ακτίνων Χ στο Stanford Synchrotron Radiation Laboratory και αποκαλύφθηκε επιπλέον μη ορατό κείμενο.

Τον Απρίλιο 2007 ανακοινώθηκε πως ανακαλύφθηκε στο Παλίμψηστο ένα νέο κείμενο (6 σελίδες) που αποδίδεται στον περιπατητικό φιλόσοφο Αλέξανδρο της Αφροδισιάδος και το οποίο ήταν σχολιασμός πάνω στην εργασία του Αριστοτέλη «**Κατηγορίαι**». Επίσης, ανακαλύφθηκε και ένα τρίτο χειρόγραφο στο Παλίμψηστο, που αποδίδεται στον Αθηναίο ρήτορα Υπερείδη (υπάρχουν 10 σελίδες από το κείμενο του Υπερείδη). Στις 29.10.2008 οι ερευνητές που εμπλέκονταν στη συγκεκριμένη έρευνα δημοσίευσαν στο διαδίκτυο όλες τις πληροφορίες που άντλησαν για το χειρόγραφο, στη διάρκεια των ερευνών και τις ψηφιακές εικόνες των σελίδων του. Ουσιαστικά, πρόκειται για την ψηφιακή παρουσίαση του Παλίμψηστου του Αρχιμήδη που μπορεί να δει κάποιος στην ηλεκτρονική διεύθυνση: <http://www.archimedespalimpsest.org>. Οι διαδικασίες συντήρησης του Παλίμψηστου συνεχίζονται έως σήμερα, παρά το γεγονός ότι έχει φθαρεί αρκετά από τη μούχλα.

Εικόνα 44. Μια σελίδα από
το παλίμψηστο του
Αρχιμήδη.



6.2. Η επιστημονική έρευνα για το Παλίμψηστο

Ένας από τους πρώτους και πλέον ενθουσιώδεις μελετητές του Παλίμψηστου ήταν ο Nigel Wilson, συνταξιούχος καθηγητής κλασικής φιλολογίας του Κολεγίου Lincoln της Οξφόρδης, ο οποίος το εξέτασε για λογαριασμό του οίκου Christie's. Αξίζει σε αυτό το σημείο να αναφερθεί το εξής περιστατικό: Πριν από 30 χρόνια, ο ίδιος είχε αναγνωρίσει κείμενο του Αρχιμήδη σε μια μεμονωμένη σελίδα κάποιου άγνωστου παλίμψηστου την οποία είχε εξετάσει. Αυτή η σελίδα, παρέμεινε στο Πανεπιστήμιο Cambridge και τελικά, μετά από χρόνια, αποδείχθηκε πως ήταν μια από τις χαμένες σελίδες του Παλίμψηστου του Αρχιμήδη.

Στην έρευνα συμμετείχαν επιστήμονες από διάφορα μέρη του κόσμου και διάφορες ειδικότητες, όπως, συντηρητές, χημικοί, μαθηματικοί, φυσικοί, φιλόλογοι και ειδικοί στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνων. Η Abigail Quandt, συντηρήτρια σπάνιων βιβλίων και χειρογράφων στο Μουσείο Τέχνης Walters, ήταν εκείνη που ανέλαβε την ευθύνη της συντήρησης και προστασίας του χειρογράφου. Η παρουσία της ήταν κάτι παραπάνω από απαραίτητη σε όλη τη διάρκεια των ερευνών, καθώς οι γνώσεις της εξασφάλιζαν την ακεραιότητα του Παλίμψηστου. Η αντιγραφή που πραγματοποίησε ο Heiberg αποτέλεσε σημείο αναφοράς για την ερευνητική ομάδα.

Ο ίδιος είχε εξετάσει το Παλίμψηστο μόνο με τη βοήθεια μεγεθυντικού φακού, αλλά εκείνη την εποχή η κατάσταση του χειρογράφου ήταν σαφώς καλύτερη από τη σημερινή, καθώς τότε η μούχλα δεν είχε αρχίσει να το καταστρέφει. Εκείνη την εποχή υπήρχαν 177 σελίδες από τις οποίες οι 3 χάθηκαν αργότερα. Όμως, ο Heiberg πήρε αρκετές φωτογραφίες του χειρογράφου οι οποίες βρέθηκαν από τους ερευνητές στη Βασιλική Βιβλιοθήκη της Δανίας στην Κοπεγχάγη.

Με αυτό τον τρόπο, έγινε δυνατή η ψηφιακή αναπαραγωγή τους και έτσι καλύφθηκαν ορισμένα κενά που είχαν δημιουργηθεί από την εξάπλωση της μούχλας. Ωστόσο, το περισσότερο κείμενο ανακτήθηκε με μεγάλη ακρίβεια με τη βοήθεια των τεχνικών της πολυφασματικής απεικόνισης και του φθορισμού ακτίνων X.

6.2.1. Η μέθοδος της πολυφασματικής απεικόνισης (multispectral imaging)

Με χρήση της τεχνικής της πολυφασματικής απεικόνισης, φως με συγκεκριμένο κάθε φορά μήκος κύματος, κατευθυνόταν πάνω στο χειρόγραφο. Το φως αυτό ανακλάτο πάνω στο χειρόγραφο, στη συνέχεια συλλαμβανόταν από κατάλληλους αισθητήρες και μετατρεπόταν, με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών, σε εικόνα. Κάθε μήκος κύματος αποκάλυπτε διαφορετικές πληροφορίες στις σελίδες του Παλίμψηστου.

Στη συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιήθηκαν, συνολικά, 12 μήκη κύματος από την περιοχή του υπέρυθρου έως την περιοχή του υπεριώδους φωτός. Ενδεικτική του τρόπου λειτουργίας της συγκεκριμένης μεθόδου ήταν, η χρήση φωτός από την ερυθρή και την κυανή περιοχή του φάσματος. Η ίδια η περγαμινή, ανακλούσε τόσο το κυανό όσο και το ερυθρό φως που έπεφταν πάνω της και έτσι φαινόταν σχεδόν λευκή. Όμως, το μελάνι του θρησκευτικού κειμένου απορροφούσε αυτά τα συγκεκριμένα μήκη κύματος και φαινόταν μαύρο, ενώ το μελάνι από το κείμενο του Αρχιμήδη απορροφούσε το κυανό και ανακλούσε το ερυθρό και έτσι αυτό φαινόταν κόκκινο και ευανάγνωστο. Με αυτό τον τρόπο, δημιουργούνται ψευδοχρωματικές εικόνες των σελίδων του Παλίμψηστου.

Επίσης, με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού, ενισχύονταν επιλεγμένα τμήματα του κειμένου, στις ψηφιακές εικόνες, οπότε γίνονταν ορατά ίχνη μελανιού πολύ αμυδρά για να τα παρατηρήσει κάποιος με γυμνό οφθαλμό. Την ευθύνη της έρευνας με τη συγκεκριμένη μέθοδο είχαν οι Roger Easton από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rochester, Keith Knox από την εταιρεία Boeing του Seattle και Bill Christens-Barry από την εταιρεία Equipoise Imaging από το Maryland.

Σε γενικές γραμμές, το όλο αποτέλεσμα ήταν εντυπωσιακό, οι αναλύσεις των ψηφιακών εικόνων ήταν πολύ υψηλές και παρά τα κάποια προβλήματα που υπήρξαν, οι επιστήμονες κατόρθωσαν να ανακτήσουν το 80% του σβησμένου κειμένου με αυτή τη μέθοδο, αλλά το υπόλοιπο 20% εξακολουθούσε να παραμένει μη ευανάγνωστο.

6.2.2. Η μέθοδος απεικόνισης φθορισμού ακτίνων X (X ray fluorescence ή XFR)

Τη λύση έδωσε ο φυσικός UWe Bergmann από το Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) στο Menlo Park στην Καλιφόρνια. Συγκεκριμένα, πρότεινε τη χρήση της μεθόδου φθορισμού ακτίνων X, καθώς κατά την εκτίμησή του, αυτή θα μπορούσε να καταστήσει ορατό τον σίδηρο που υπήρχε στο μελάνι του αρχικού κειμένου. Με αυτή τη μέθοδο, όταν ένα φωτόνιο ακτίνων X προσκρούει πάνω σε ένα άτομο σιδήρου, το διεγείρει. Στη συνέχεια, το άτομο επανέρχεται στην αρχική του ενεργειακή κατάσταση, εκπέμποντας όμως τη δική του (χαρακτηριστική για το κάθε υλικό) ακτινοβολία στην περιοχή των ακτίνων X.

Το όλο σκεπτικό ήταν η «χαρτογράφηση», με αυτό τον τρόπο, της παρουσίας του σιδήρου στις σελίδες του Παλίμψηστου, οπότε θα αποκαλυπτόταν και το σβησμένο κείμενο. Με αυτή τη μέθοδο σημειωνόταν η θέση πρόσπτωσης της δέσμης των ακτίνων X (διαμέτρου ίσης με εκείνη μιας ανθρώπινης τρίχας), ανιχνευόταν και καταγραφόταν κάθε εκπομπή ακτίνων X από την περγαμινή, τελικά δε δημιουργήθηκε μια ψηφιακή εικόνα της παρουσίας του σιδήρου σε κάθε σελίδα της. Όσο για τα τις ακτίνες X που χρησιμοποιήθηκαν, παρήχθησαν με τη βοήθεια ενός επιταχυντή σύγχροτρον στο Stanford Linear Accelerator Center, καθώς απαιτούντο δέσμες ακτίνων X με ιδιαίτερα υψηλές ενέργειες (επρόκειτο δηλαδή για ακτίνες X υψηλής εστίασης καθώς τα ίχνη του μελανιού του αρχικού χειρογράφου ήταν πολύ μικρά).

Ένα πρόβλημα που ανέκυψε, ήταν το ότι το μελάνι του θρησκευτικού κειμένου περιείχε επίσης σίδηρο, ενώ δυσκολίες προέκυψαν από την παρουσία των

πλαστογραφημένων εικόνων που είχαν προστεθεί το 1838. Παρόλα αυτά, ο Bergmann και οι συνεργάτες του κατόρθωσαν να ανακτήσουν το κείμενο εκείνων των σελίδων του Παλίμψηστου για τις οποίες δεν υπήρξε κάποιο αποτέλεσμα με τη χρήση της πολυφασματικής απεικόνισης. Τελικά, τον Αύγουστο 2008 κατόρθωσαν να αποκαλύψουν όλο το σβησμένο κείμενο του Παλίμψηστου.

Όμως, η όλη διαδικασία ήταν χρονοβόρα, καθώς για τη σάρωση μιας σελίδας με ακτίνες X και την ψηφιακή αναδημιουργία των γραμμάτων και των εικόνων που περιέχονται σε αυτήν απαιτούντο περίπου 12 ώρες. Αρχικά, δημιουργούνται ψηφιακές εικόνες μικρών περιοχών της κάθε σελίδας, οι οποίες στη συνέχεια συνθέταν ολόκληρη τη σελίδα. Επίσης ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίαζε το λογισμικό που χρησιμοποιούσαν οι ερευνητές για την αναγνώριση των γραμμάτων πάνω στο Παλίμψηστο.

6.2.3. Το λογισμικό οπτικής αναγνώρισης γραμμάτων (optical character recognition)

Ακόμη και οι πλέον καθαρές και υψηλής ανάλυσης ψηφιακές εικόνες των σελίδων του Παλίμψηστου, συχνά είχαν πρόβλημα, καθώς αρκετά γράμματα δε φαίνονταν, αλλά μόνο κάποια τμήματά τους και αυτά πολύ αμυδρά. Συνεπώς, κρίθηκε αναγκαία η χρήση λογισμικού ικανού να βοηθά τους επιστήμονες στην ανίχνευση των γραμμάτων αυτών. Η αρχή λειτουργίας του, είναι ανάλογη με το λογισμικό που χρησιμοποιείται από διάφορες αρχές ασφαλείας, ανά τον κόσμο, για την αναγνώριση προσώπων. Ουσιαστικά, ο υπολογιστής συγκρίνει την εικόνα με εκείνες που υπάρχουν σε μια τεράστια βάση δεδομένων και εντοπίζει αν το πρόσωπο ή το γράμμα αντιστοιχεί με κάποιο στη βάση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η βάση δεδομένων περιείχε τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου σε διάφορες εκδοχές τους. Για αυτού του είδους την επεξεργασία χρησιμοποιούνται οι καλύτερες ψηφιακές εικόνες του Παλίμψηστου που είχαν ληφθεί με τις προαναφερθείσες δύο μεθόδους.

Στη συνέχεια, ο υπολογιστής εξέταζε τα επιλεγμένα δυσδιάκριτα γράμματα και έδινε τη στατιστικά πιθανότερη εκδοχή σχετικά με την ταυτότητά τους. Όμως και σε αυτή την περίπτωση ο ανθρώπινος παράγοντας καλείτο να διαδραματίσει καταλυτικό ρόλο, διότι η εξέταση από τους ίδιους ερευνητές της διάταξης ενός γράμματος μέσα στο κείμενο και η παρουσία των γειτονικών γραμμάτων αποτελούσαν ισχυρές ενδείξεις επιβεβαίωσης ή μη των αποτελεσμάτων που έδινε ο υπολογιστής. Έτσι, σταδιακά, οι ερευνητές κατόρθωσαν να φέρουν στο φως όλα τα μυστικά του Παλίμψηστου του Αρχιμήδη.

6.3. Αναθεωρώντας τα επιστημονικά δεδομένα

Οι πληροφορίες του Παλίμψηστου του Αρχιμήδη, πέρα από την καθαρά ιστορική, αρχαιολογική και φιλολογική τους αξία, εμπεριέχουν μια διαπίστωση που είναι συγκλονιστική. Ουσιαστικά, αποκαλύπτουν πως η μαθηματική σκέψη στην Αρχαία Ελλάδα ήταν αρκετά πιο προχωρημένη από ότι πιστεύαμε και αποδεικνύουν πως υπήρχε γνώση εκλεπτυσμένων μαθηματικών μεθόδων οι οποίες θεωρούντο ως μια σχετικά πρόσφατη κατάκτηση της ανθρωπότητας. Αυτή η διαπίστωση, από μόνη της οδηγεί σε αναθεώρηση ορισμένων συνιστωσών της ιστορίας των θετικών επιστημών και αποτελεί μια ηχηρή υπενθύμιση πως η επιστημονική αναζήτηση πάντα επιφυλάσσει εκπλήξεις. Φυσικά, με δεδομένη τη χρήση των μεθόδων διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού από τους επιστήμονες της αρχαιότητας, εγείρεται αυτόματα το εύλογο ερώτημα του αν υπάρχουν και άλλες επιστημονικές γνώσεις που ενώ πιστεύεται πως αποτελούν νεώτερες κατακτήσεις είχαν ήδη ανακαλυφθεί από αυτούς.

Και αυτό διότι η χρονική μετατόπιση της ανακάλυψης ισχυρών μαθηματικών εργαλείων κατά 2.000 χρόνια νωρίτερα, έχει ως λογική και πιθανή συνέπεια και τη δυνατότητα χρονικής μετατόπισης πολλών επιστημονικών ανακαλύψεων των θετικών επιστημών. Ας μη ξεχνάμε ότι για τις θετικές επιστήμες, τα μαθηματικά αποτελούν το βασικό εργαλείο, ένας δε επιστήμονας που έχει στη διάθεσή του ένα τέτοιο ισχυρό εργαλείο όπως είναι ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός σίγουρα δε θα περίμενε για 2.000 χρόνια δίχως να το χρησιμοποιεί. Εκτός όμως από όλους αυτούς τους προβληματισμούς, οι επιστήμονες έχουν αρχίσει να διερωτώνται και σχετικά με την ταυτότητα του αντιγραφέα που κατά τον 10^ο αιώνα μ.Χ. κατέγραψε στην περγαμηνή τα έργα του Αρχιμήδη. Ίσως στο μέλλον αυτό το ερώτημα να αποτελέσει την αφορμή για μια νέα έρευνα σχετικά με το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη.

Βιβλιογραφία

- Αναπολιτάνος, Δ. (1985). «Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των μαθηματικών», Αθήνα: Νεφέλη, Δ' έκδοση.
- Αρτεμιάδης, Ν. (1988). «Η ζωή και το έργο του Isaak Newton», Πρακτικά Ακαδημίας Αθηνών, τόμος 63, τεύχος 2, σελίδες 320–336.
- Γιαννακούλιας, Ε. (2002). «Σημειώσεις στη διδακτική του απειροστικού λογισμού», Αθήνα, ΕΚΠΑ/τμήμα μαθηματικών.
- Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, (1999). «Απειροστικός λογισμός», τόμος Ι, Αθήνα: Συμμετρία.
- Γ. Παντελίδης – Δ. Κραββαρίτης, (1997). «Λεξικό μαθηματικών», Αθήνα: Πατάκης.
- Ε. Bell, (2000). «Οι Μαθηματικοί», τόμος 1, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 3^η έκδοση.
- Karl B. Boyer – Uta C. Merzbach, (1968). «Η ιστορία των μαθηματικών», Αθήνα: Πνευματικός, 2^η έκδοση.
- D. Davis, (2001). «Η φύση & η δύναμη των μαθηματικών», Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- H. Evans, (1990). «Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών μετά το 1650», τόμος 2, Αθήνα: Τροχαλία.
- G. Loria, «Ιστορία των μαθηματικών» τόμος 3^Α, Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- R. Mankiewicz, (2002). «Η ιστορία των μαθηματικών», Αθήνα: Αλεξάνδρεια.
- E. Maor, (2002). «Τριγωνομετρικά λουκούμια», Αθήνα: Κάτοπτρο.
- G. Polya, (2001). «Η μαθηματική ανακάλυψη, τόμος 1, Αθήνα: Κάτοπτρο.
- D. Smith, (1951). «History of mathematics, Volume 1, New York: Dover Publications, INC.
- D. Struik, (1980). «Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, β' έκδοση, Αθήνα: Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος.
- V. Tikhomirov, (1999). «Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα», 1^η έκδοση, Αθήνα: Κάτοπτρο.
- R. Westfall, (1999). «Η ζωή του Ισαάκ Νεύτωνα», Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Πηγές από διαδίκτυο

The Archimedes Palimpsest. (n.d.). Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <http://www.archimedespalimpsest.org/>

Insurancedaily Editorial Team. (2012, 11 Σεπτεμβρίου). *Το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη*. . το γνωρίζατε; Insurancedaily.gr. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://www.insurancedaily.gr/%cf%84%ce%bf-%cf%80%ce%b1%ce%bb%ce%af%ce%bc%cf%88%ce%b7%cf%83%cf%84%ce%bf-%cf%84%ce%bf%cf%85-%ce%b1%cf%81%cf%87%ce%b9%ce%bc%ce%ae%ce%b4%ce%b7/>

Theodosiou, T. (2021,21 Ιουνίου). *Αρχιμήδης ο μέγας εφευρέτης*. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://www.mytexnologia.gr/2021/06/archimedes.the%20great.html?m=1>

Wikipedia contributors. (2020, 10 Μαΐου). *Τηλεβόλο του Αρχιμήδη*. Βικιπαίδεια. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από https://el.m.wikipedia.org/wiki/%CE%A4%CE%B7%CE%BB%CE%B5%CE%B2%CF%8C%CE%BB%CE%BF_%CF%84%CE%BF%CF%85_%CE%91%CF%81%CF%87%CE%B9%CE%BC%CE%AE%CE%B4%CE%B7

Wikipedia contributors. (2020, 5 Σεπτεμβρίου). *Συρακουσία (πλοίο)*. Βικιπαίδεια. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από [https://el.m.wikipedia.org/wiki/%CE%A3%CF%85%CF%81%CE%B1%CE%BA%CE%BF%CF%85%CF%83%CE%AF%CE%B1_\(%CF%80%CE%BB%CE%BF%CE%AF%CE%BF\)](https://el.m.wikipedia.org/wiki/%CE%A3%CF%85%CF%81%CE%B1%CE%BA%CE%BF%CF%85%CF%83%CE%AF%CE%B1_(%CF%80%CE%BB%CE%BF%CE%AF%CE%BF))

Wikipedia contributors. (2021, 17 Φεβρουαρίου). *Σπείρα του Αρχιμήδη*. Βικιπαίδεια. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από https://el.m.wikipedia.org/wiki/%CE%A3%CF%80%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B1_%CF%84%CE%BF%CF%85_%CE%91%CF%81%CF%87%CE%B9%CE%BC%CE%AE%CE%B4%CE%B7

Wikipedia contributors. (2021, 19 Φεβρουαρίου). *Παλίμψηστο του Αρχιμήδη*. Βικιπαίδεια. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CE%B1%CE%BB%CE%AF%CE%BC%CF%88%CE%B7%CF%83%CF%84%CE%BF_%CF%84%CE%BF%CF%85_%CE%91%CF%81%CF%87%CE%B9%CE%BC%CE%AE%CE%B4%CE%B7

Wikipedia contributors. (2021, 23 Οκτωβρίου). *Κύκλου μέτρησης*. Βικιπαίδεια. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από https://el.m.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CF%8D%CE%BA%CE%BB%CE%BF%CF%85_%CE%BC%CE%AD%CF%84%CF%81%CE%B7%CF%83%CE%B9%CF%82

Wikipedia contributors. (2022, 4 Αυγούστου). *Αρχιμήδης*. Βικιπαίδεια. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://el.m.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%81%CF%87%CE%B9%CE%BC%CE%AE%CE%B4%CE%B7%CF%82>

Αλεξόπουλος, Θ. (n.d.). *Η ΖΩΗ ΚΑΙ ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ* [Πτυχιακή Εργασία]. Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού (ΑΕΝ) Μακεδονίας. <https://maredu.hcg.gr/modules/document/file.php/MAK265/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20->

[%20%CE%A6%CF%85%CF%83%CE%B9%CE%BA%CE%AE/%CE%97%20%C
E%B6%CF%89%CE%AE%20%CE%BA%CE%B1%CE%B9%20%CE%AD%CF%
81%CE%B3%CE%BF%20%CF%84%CE%BF%CF%85%20%CE%91%CF%81%C
F%87%CE%B9%CE%BC%CE%AE%CE%B4%CE%B7.pdf](#)

Ανδρονίδης, Θ. (2017, 19 Μαρτίου). *Αρχιμήδης: Η μεγαλύτερη ιδιοφυΐα της αρχαιότητας*. T-logos. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από http://t-logo.blogspot.com/2017/03/blog-post_19.html?m=1

Αρχιμήδης | Γεγονότα & Βιογραφία. (2020, 2 Σεπτεμβρίου). Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://delphipages.live/el/%CE%B4%CE%B9%CE%AC%CF%86%CE%BF%CF%81%CE%B1/archimedes>

Αρχιμήδης - Εφευρέσεις στην Αρχαία Ελλάδα. (n.d.). Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://sites.google.com/site/epheureseis/inventors/archimedes>

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΠΑΙΔΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ, ΕΠΙΤΕΥΓΜΑΤΑ ΖΩΗΣ & ΧΡΟΝΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ - ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ. (n.d.).Celeb-true. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://el.celeb-true.com/archimedes-greatest-scientists-mathematicians-ever-born-made-incredible>

Αρχιμήδης Βιογραφία, συμβολές και εφευρέσεις. (n.d.). Thpanorama. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://el.thpanorama.com/articles/ciencia/arqumedes-biografa-aportes-e-inventos.html>

Αρχιμήδης η μεγαλοφυΐα της αρχαιότητας. (2018, 10 Απριλίου). Διάλογος. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://dialogos.com.cy/archimidis-i-megalofia-tis-archeotitas/>

Αρχιμήδης (κρατήρας). (n.d.). hmn.wiki. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από https://hmn.wiki/el/Archimedes_%28crater%29

Αρχιμήδης σύντομη βιογραφία για παιδιά. Βιογραφία του Αρχιμήδη. Εξαιρετικές ανακαλύψεις του Αρχιμήδη. (n.d.). Tltaudit. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://tltaudit.ru/el/diabetes/arhimed-kratkaya-biografiya-dlya-detei-biografiya-arhimeda-vydayushchiesya/>

Αρχιμήδης \Συρακούσες. (n.d.). Science Wiki. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από https://science.fandom.com/el/wiki/%CE%91%CF%81%CF%87%CE%B9%CE%BC%CE%AE%CE%B4%CE%B7%CF%82_%5C%CE%A3%CF%85%CF%81%CE%B1%CE%BA%CE%BF%CF%8D%CF%83%CE%B5%CF%82

Βιογραφία του Αρχιμήδη: μια ιδιοφυΐα που γεννήθηκε πολύ νωρίς Η ιστορία του Αρχιμήδη. (2022, 16 Μαρτίου). GOARA VETISYAN. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://goaravetisyan.ru/el/biografiya-arhimeda-biografiya-arhimeda-genii-kotoryi-rodilsya/>

Εξαρχάκος, Ι. (1994). *ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ ΚΑΙ Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΣΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ*

[Διδακτορική Διατριβή]. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
<https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/3469>

Η αρπάγη του Αρχιμήδους του Συρακουσίου. (2019, 26 Αυγούστου). Τα Πάντα Ρεί. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από https://www.tapantareinews.gr/2019/08/blog-post_521.html?m=1

Λεκάκης, Γ. (n.d.). *ΕΥΡΗΚΑ ότι η θεά Αθηνά εικονίζεται στην επίσημη σφραγίδα της Καλιφόρνιας!* ΑΡΧΕΙΟΝ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από <http://www.arxeion-politismou.gr/2019/01/Eureka-thea-Athina-Kalifornia.html?m=1>

Οι εφευρέσεις του Αρχιμήδη. (n.d.). Kotsanas Museum. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <http://kotsanas.com/cat.php?category=07>

«Ρολόι του Αρχιμήδη», Μουσείο Αρχαίας Ελληνικής Τεχνολογίας. (2015, 15 Ιουνίου). Αρχαιολογία Online. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://www.archaiologia.gr/blog/photo/%CE%81%CE%BF%CE%BB%CF%8C%CE%B9-%CF%84%CE%BF%CF%85-%CE%B1%CF%81%CF%87%CE%B9%CE%BC%CE%AE%CE%B4%CE%B7-%CE%BC%CE%BF%CF%85%CF%83%CE%B5%CE%AF%CE%BF-%CE%B1%CF%81%CF%87%CE%B1%CE%AF%CE%B1%CF%82/>

Σινανιώτης, Κ. (2009, Φεβρουάριος). *Το παλίμψηστο του Αρχιμήδη: Οι σημαντικές αποκαλύψεις ενός αρχαίου ελληνικού χειρογράφου*. ΠΕΡΙΣΚΟΠΙΟ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ, 334. <https://edessa4odim.files.wordpress.com/2016/04/palimpsisto.pdf>

Τα “παρασκήνια” της πρεμιέρας του “Εύρηκα!” το 265 π.Χ. (2018, 25 Ιουλίου). ScienceLab.Gr. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://www.sciencelab.gr/2018/07/26/eureka/?amp=1>

Το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη. (n.d.). ΕΛΛΗΝΙΚΟΝ ΓΕΝΟΣ. Ανακτήθηκε 7 Σεπτεμβρίου, 2022, από <http://hellinikongenios.blogspot.com/p/1998-35-reviel-netz.html>

Το χρυσό στεφάνι του βασιλιά και η Αρχή του Αρχιμήδη. (2013, 9 Μαρτίου). El Sito. Ανακτήθηκε 9 Σεπτεμβρίου, 2022, από <https://elsito.gr/index.php/history/item/404-archimedes-gold>

Φαράντος, Ν. (n.d.). *ΟΙ ΕΦΕΥΡΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ* [Σχολική εργασία]. https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwiY3Ket44P6AhUuVPEDHYfxB1wQFnoECAYQAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.arcmeletitiki.gr%2Fimages%2Fuploads%2Fpdf%2Farc_arx5.pdf&usg=AOvVaw2OPwie3hScuHi03NAXmcUM

Χαραλάμπους, Χ. (n.d.). *Ιστορία των Μαθηματικών, Ενότητα 3: Αρχιμήδης* [Slide show]. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. <https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=https://opencourses.auth.gr/modules/document/file.php/OCRS249/%25CE%25A0%25CE%25B1%25CF%2581%25CE%25BF%25CF%2585%25CF%2583%25CE%25B9%25CE%25AC%25CF%2583%25CE%25B5%25CE%25B9%25CF%2582%2520%25CE%259C%25CE%25>

[B1%25CE%25B8%25CE%25AE%25CE%25BC%25CE%25B1%25CF%2584%25CE%25BF%25CF%2582/%25CE%2595%25CE%25BD%25CF%258C%25CF%2584%25CE%25B7%25CF%2584%25CE%25B1%252003.1%2520%25CE%2591%25CF%2581%25CF%2587%25CE%25B9%25CE%25BC%25CE%25AE%25CE%25B4%25CE%25B7%25CF%2582.pdf&ved=2ahUKEwjN9djqnob6AhXGllsKHZHJCMcQFnoECA4QAQ&usg=AOvVaw3TbF1XIXGpgnfWFGmfJdpx](#)