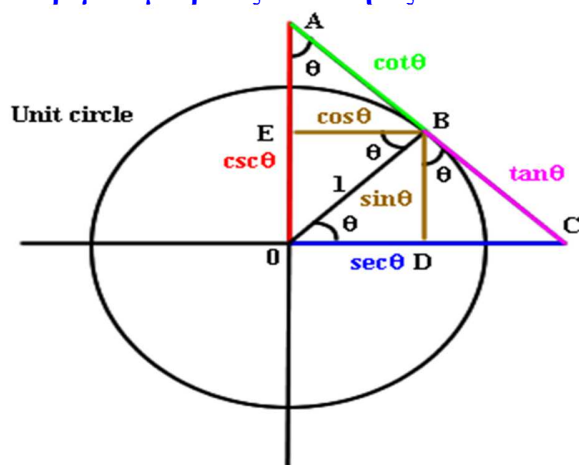




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Τριγωνομετρικές ανισότητες



Σπουδαστές: Βερανούδης Παναγιώτης (AM 8596)
Γουρδομιχάλης Χρήστος (AM 7956)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2022–2023

Ημερομηνία ανάθεσης: 23.11. 2021

Ημερομηνία κατάθεσης: 20.03.2023

Ημερομηνία εξέτασης: 27. 03.2023

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Ορισμοί	4
2. Βασικές τριγωνομετρικές ανισότητες	4
2.1 Επίλυση της $\eta\mu x > \lambda$	4
2.1.1. Εφαρμογές	5
2.2 Επίλυση της $\sigma\upsilon\nu x > \lambda$	6
2.2.1 Εφαρμογές	6
2.3 Επίλυση της $\epsilon\varphi x > \lambda$	7
2.3.1 Εφαρμογές	8
2.4 Επίλυση της $\sigma\varphi x > \lambda$	9
2.4.1 Εφαρμογές	9
2.5 Ανισότητες της μορφής $\eta\mu(vx) > \lambda$, $\sigma\upsilon\nu(vx) > \lambda$, $\epsilon\varphi(vx) > \lambda$, $\sigma\varphi(vx) > \lambda$,	10
2.5.1 Εφαρμογές	10
2.6 Ανισότητες της μορφής $\eta\mu\left(x + \frac{v\pi}{\mu}\right) > \lambda$, $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{v\pi}{\mu}\right) > \lambda$, $\epsilon\varphi\left(x + \frac{v\pi}{\mu}\right) > \lambda$, $\sigma\varphi\left(x + \frac{v\pi}{\mu}\right) > \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu, v \in \mathbb{Z}$, $\mu \neq 0$	13
2.6.1 Εφαρμογές	14
2.7 Ανισότητες της μορφής $\eta\mu(vx/\mu) > \lambda$, $\sigma\upsilon\nu(vx/\mu) > \lambda$, $\epsilon\varphi(vx/\mu) > \lambda$, $\sigma\varphi(vx/\mu) > \lambda$,	15
2.7.1 Εφαρμογές	16
2.8 Ανισότητες της μορφής $f(\eta\mu x) > 0$, $f(\sigma\upsilon\nu x) > 0$, $f(\epsilon\varphi x) > 0$, $f(\sigma\varphi x) > 0$	17
2.8.1 Εφαρμογές	17
2.9 Ανισότητες της μορφής $f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\varphi x, \sigma\varphi x) > 0$	18
2.9.1 Εφαρμογές	18
2.10 Ανισότητες της μορφής $\alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x + \gamma > 0$ με $\alpha\beta\gamma \neq 0$	20
2.10.1 Εφαρμογές	21
2.11 Ανισότητες της μορφής $\alpha(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + \beta \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \gamma > 0$	22
2.11.1 Εφαρμογές	23
2.12 Ανισότητες της μορφής $f\left(\eta\mu \frac{v_1 x}{\mu_1}, \sigma\upsilon\nu \frac{v_2 x}{\mu_2}, \dots\right) > 0$, $v_i \in \mathbb{Z}$, $\mu_i \in \mathbb{Z}^*$	24
2.12.1 Εφαρμογές	24
2.13 Ανισότητες της μορφής $f\left(x, \eta\mu \frac{v_1 x}{\mu_1}, \sigma\upsilon\nu \frac{v_2 x}{\mu_2}, \dots\right) > 0$	27
2.13.1 Εφαρμογές	27
Βιβλιογραφία	28

1. Ορισμοί

Θεωρώ τις τριγωνομετρικές παραστάσεις $A(x) = 4\eta\mu x + 5$ και $B(x) = \eta\mu x + 6$ με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

$$\text{Έχω } A\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + 5 = \frac{4}{2} + 5 = 7 \text{ και } B\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + 6 = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}.$$

$$\text{Άρα } A\left(\frac{\pi}{6}\right) > B\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad 4\eta\mu x + 5 > \eta\mu x + 6 \text{ είναι αληθείς για } x = \left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Λόγω αυτών των τριγωνομετρικών παραστάσεων έχω $A(\pi) = 5$ και $B(\pi) = 6$. Άρα, δεν είναι αληθής η $4\eta\mu x + 5 > \eta\mu x + 6$ για $x = \pi$. Γενικά, αν λάβω τις τριγωνομετρικές παραστάσεις $A(x)$, $B(x)$ όπου το x παριστάνει τόξο με ακτίνα και οι $A(x)$, $B(x)$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού, ονομάζω τριγωνομετρική ανισότητα με έναν άγνωστο του προτασιακού τύπου $A(x) > B(x)$ (αντιστοίχως $A(x) < B(x)$).

$$\alpha) \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x > 3\eta\mu x + 1 \quad \beta) (\eta\mu x - 1)\left(\epsilon\phi\frac{x}{2} - \sqrt{3}\right) > 0, \quad \gamma) 4x\sigma\upsilon\nu x - 3 < 2x - \sigma\upsilon\nu x$$

$$\delta) 2x + 3 > \frac{\pi}{2} \quad 2x + 3 > \frac{\pi}{2}, \quad \epsilon) 2\eta\mu x > 2, \quad \sigma\tau) 3 + \eta\mu x > \sigma\upsilon\nu x.$$

Μια τιμή του x που ανήκει στο κοινό πεδίο ορισμού των $A(x)$, $B(x)$ και καθιστά σωστή την ανισότητα, ονομάζεται **λύση** της ανισότητας ή ακριβέστερα **μερική λύση** της ανισότητας. Το σύνολο των μερικών λύσεων μιας τριγωνομετρικής ανισότητας ονομάζεται **γενική λύση**, δηλαδή γενική λύση είναι το σύνολο αλήθειας του αντίστοιχου προτασιακού τύπου. Η εύρεση της γενικής λύσης μιας τριγωνομετρικής ανισότητας ονομάζεται **επίλυση** αυτής. Επίλυση της ανισότητας η οποία κυμαίνεται σε ειδικό διάστημα π.χ. στο $[0, 2\pi]$ ονομάζονται οι **ειδικές λύσεις** αυτής. Είναι δυνατόν η τριγωνομετρική ανισότητα να επαληθεύεται $\forall x \in \Delta$, όπου Δ το κοινό πεδίο ορισμού των $A(x)$, $B(x)$. Τότε η ανισότητα ονομάζεται **μόνιμη** στο διάστημα Δ όπως π.χ. η (στ).

Υπάρχει ενδεχόμενο να μην υπάρχει τιμή του x η οποία να επαληθεύει την ανισότητα όπως π.χ. την (ε). Τότε η ανισότητα ονομάζεται **αδύνατη**. Παρακάτω θα ασχοληθώ με την επίλυση τριγωνομετρικών ανισοτήτων κατατάσσοντας αυτές σε διάφορες κατηγορίες.

2. Βασικές τριγωνομετρικές ανισότητες

Ονομάζω βασικές τριγωνομετρικές ανισότητες τις παρακάτω

$$\alpha) \eta\mu x > \lambda, \quad \beta) \sigma\upsilon\nu x > \lambda, \quad \gamma) \epsilon\phi x > \lambda, \quad \delta) \sigma\phi x > \lambda$$

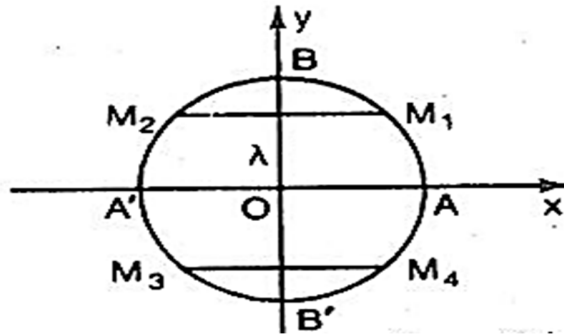
$$\alpha') \eta\mu x < \lambda, \quad \beta') \sigma\upsilon\nu x < \lambda, \quad \gamma') \epsilon\phi x < \lambda, \quad \delta') \sigma\phi x < \lambda$$

όπου σε όλες τις περιπτώσεις $\lambda \in \mathbb{R}$. Θα ασχοληθώ με την επίλυση των α , β , γ , δ . Ανάλογη είναι και η επίλυση α' , β' , γ' , δ' .

2.1 Επίλυση της $\eta\mu x > \lambda$

- Αν $\lambda \geq 1$ τότε η $\eta\mu x > \lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda < -1$ τότε η $\eta\mu x > \lambda$ επαληθεύεται $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Αν $\lambda = -1$ τότε η $\eta\mu x > \lambda$ επαληθεύεται $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{2k\pi - \frac{\pi}{2}\right\}$.

- Αν $0 \leq \lambda < 1$ τότε υπάρχουν μόνο δύο τόξα στο διάστημα $[0, 2\pi]$ που επαληθεύουν την εξίσωση $\eta\mu x = \lambda$, έστω τα τ_1, τ_2 που λήγουν στα σημεία M_1, M_2 . Τότε τα τόξα του διαστήματος $[0, 2\pi)$ που επαληθεύουν την $\eta\mu x > \lambda$ αν τα ονομάσω θ θα δίνονται από την $\tau_1 < \theta < \tau_2$. Η γενική λύση της ανισότητας είναι η $x = 2k\pi + \theta$ (1) με $k \in \mathbb{Z}$ και $\tau_1 < \theta < \tau_2$.



Παρατηρώ ότι βρέθηκαν οι λύσεις της ανισότητας στο διάστημα πλάτους μιας πρωτεύουσας περιόδου και στη συνέχεια με τον τύπο (1) δόθηκε η γενική λύση οπου το $2k\pi$ παριστάνει ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου 2π .

- Αν $-1 < \lambda < 0$ τότε υπάρχουν μόνο δύο τόξα στο διάστημα $[0, 2\pi)$ ώστε $\eta\mu x = \lambda$. Έστω τα ω_1, ω_2 με πέρατα τα σημεία M_3, M_4 . Αν ονομάσω θ τα τόξα του διαστήματος $[0, 2\pi)$ που επαληθεύουν την $\eta\mu x > \lambda$ τότε $0 \leq \theta < \omega_1$ ή $\omega_2 < \theta < 2\pi$. Η γενική λύση είναι $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in [0, \omega_1) \cup (\omega_2, 2\pi)$.

2.1.1. Εφαρμογές

- Να λυθεί η $\eta\mu x > \frac{1}{2}$. Είναι γνωστό ότι τα τόξα τ_1, τ_2 του διαστήματος $[0, 2\pi)$ για τα οποία ισχύει ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ είναι τα $\tau_1 = \frac{\pi}{6}$ και $\tau_2 = \frac{5\pi}{6}$. Συνεπώς τα τόξα $\theta \in [0, 2\pi)$ που επαληθεύουν την ανισότητα δίνονται από τη σχέση $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$ και η γενική λύση της ανισότητας είναι η $x = 2k\pi + \theta$, $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$.

- Να λυθεί η $\eta\mu x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Τα τόξα τ_1, τ_2 του διαστήματος $[0, 2\pi)$ για τα οποία ισχύει ότι $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι τα $\tau_1 = \frac{\pi}{4}$, $\tau_2 = \frac{3\pi}{4}$. Τα τόξα $\theta \in [0, 2\pi)$ που επαληθεύουν την ανισότητα, δίνονται από $\left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \text{ ή } \frac{3\pi}{4} < \theta < 2\pi\right)$. Η γενική λύση της ανισότητας δίνεται από $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$.

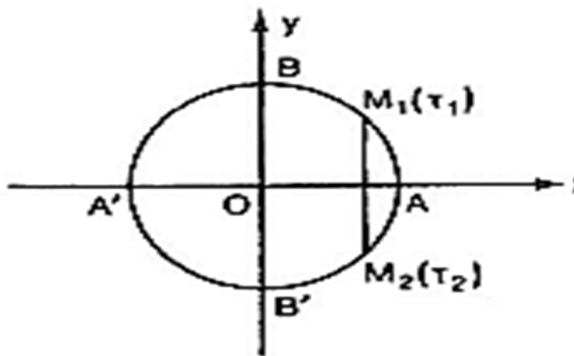
- Να λυθεί η $\eta\mu x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Τα τόξα $\tau_1, \tau_2 \in [0, 2\pi)$ για τα οποία ισχύει ότι $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι τα $\tau_1 = \frac{4\pi}{3}, \tau_2 = \frac{5\pi}{3}$. Τα τόξα $\theta \in [0, 2\pi)$ που επαληθεύουν την $\eta\mu x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ δίνονται από $\left(0 \leq \theta < \frac{4\pi}{3} \text{ ή } \frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi\right)$ και η γενική λύση είναι $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left[0, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$.

2.2 Επίλυση της $\sin x > \lambda$

- Αν $\lambda \geq 1$ τότε η $\sin x > \lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda < -1$ τότε η $\sin x > \lambda$ επαληθεύεται $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Αν $\lambda = -1$ τότε η $\sin x > \lambda$ επαληθεύεται $\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Αν $-1 < \lambda < 1$ τότε υπάρχουν μόνο δυο τόξα τ_1, τ_2 του διαστήματος $[0, 2\pi)$ που επαληθεύουν την $\sin x = \lambda$.

Έστω M_1, M_2 τα πέρατα αυτών των τόξων. Τότε αν θα ονομάσω θ τα τόξα του διαστήματος $[0, 2\pi)$ που επαληθεύουν την $\sin x = \lambda$ έχω $(0 \leq \theta < \tau_1)$ ή $(\tau_2 < \theta < 2\pi)$. Η γενική λύση της $\sin x > \lambda$ θα δίνεται τότε από $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in [0, \tau_1) \cup (\tau_2, 2\pi)$.

Παρατηρώ ότι όπως και πριν ότι δοθήκαν αρχικά οι λύσεις της ανισότητας σε διάστημα πλάτους μιας πρωτεύουσας περιόδου και στη συνέχεια από τον τύπο (1) δόθηκε η γενική λύση όπου το $2k\pi$ παριστάνει ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου 2π .

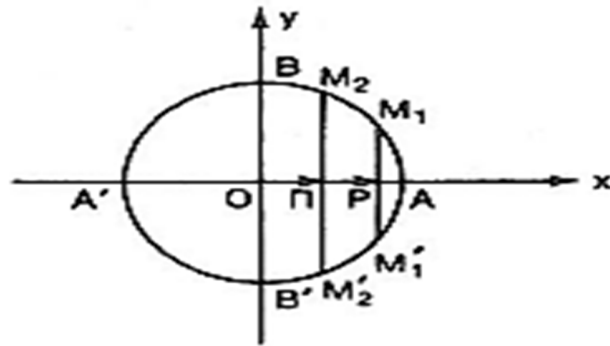


2.2.1 Εφαρμογές

- Να λυθεί η $\sin x > \frac{1}{2}$. Η εξίσωση $\sin x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ έχει τις λύσεις $\tau_1 = \frac{\pi}{3}$ και $\tau_2 = \frac{5\pi}{3}$ άρα τα τόξα $\theta \in [0, 2\pi)$ που είναι λύσεις της $\sin x > \frac{1}{2}$ δίνονται από

$\left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{3} \text{ ή } \frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi\right)$ και η γενική λύση της ανισότητας είναι $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$.

• Να λυθεί η $\sin x < \frac{1}{3}$. Η εξίσωση $\sin x = \frac{1}{3}$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ έχει δυο λύσεις τις $\tau_1 = \arcsin \frac{1}{3}$ και $\tau_2 = 2\pi - \arcsin \frac{1}{3}$. Άρα, οι λύσεις θ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ της ανισότητας είναι $\tau_1 < \theta < \tau_2$. Η γενική λύση είναι $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in (\tau_1, \tau_2)$.

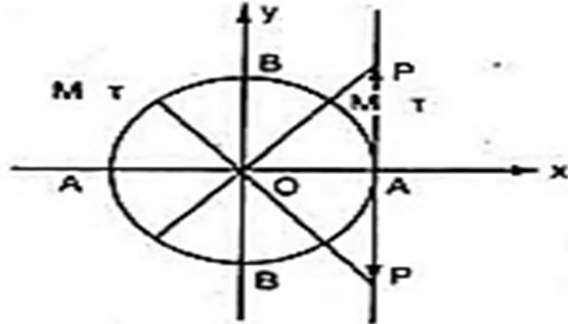


• Να λυθεί η $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Αν $(\overline{OP}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\overline{OM}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ τότε $(\widehat{AM_1^+}) = \frac{\pi}{6}$, $(\widehat{AM_2^+}) = \frac{\pi}{4}$, $(\widehat{AM_2^+}) = \frac{7\pi}{4}$, $(\widehat{AM_1^+}) = \frac{11\pi}{6}$ οπότε τα τόξα θ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ που επαληθεύουν την ανισότητα δίνονται από $\left(\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{6}\right)$. Η γενική λύση είναι $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right)$.

2.3 Επίλυση της $\varepsilon\varphi x > \lambda$

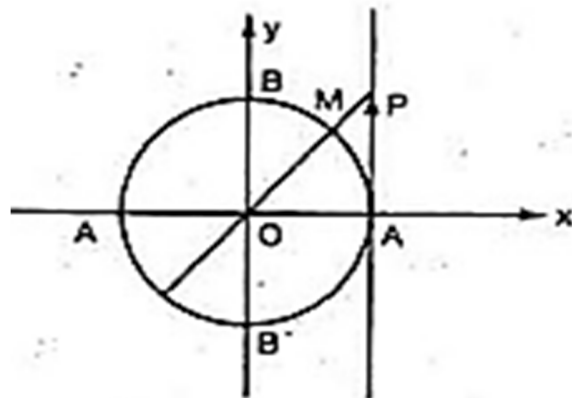
Η πρωτεύουσα περίοδος της $\varepsilon\varphi x$ είναι το π . Άρα, θα βρεθούν αρχικά οι λύσεις της $\varepsilon\varphi x > \lambda$ σε διάστημα πλάτους π . Για αυτό παίρνω το $[0, \pi)$. Στο διάστημα αυτό υπάρχει ένα μόνο τόξο τ_1 έτσι ώστε $\varepsilon\varphi x = \lambda$. Αν ονομάσω θ τα τόξα στο διάστημα $[0, \pi)$ που επαληθεύουν την $\varepsilon\varphi x > \lambda$ αν $\lambda \geq 0$ θα είναι $\tau_1 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ενώ αν $\lambda < 0$ θα είναι $\tau_1 < \theta < \pi$ και $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Η γενική λύση αν $\lambda \geq 0$ είναι η $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$

$\theta \in \left(\tau_1, \frac{\pi}{2}\right)$ ενώ αν $\lambda < 0$ είναι η $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup (\tau_1, \pi)$. Στον τύπο $x = 2k\pi + \theta$ το $k\pi$ παριστάνει ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου π .

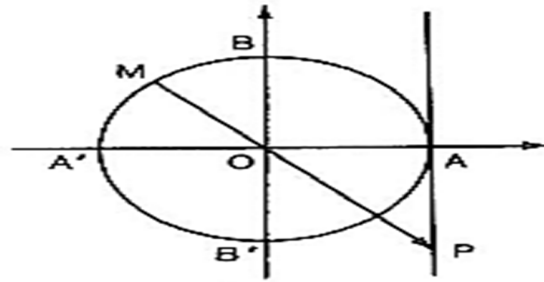


2.3.1 Εφαρμογές

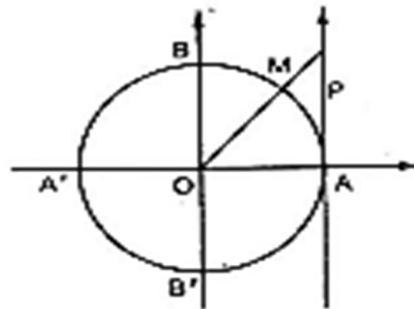
- Να λυθεί η $\epsilon\phi x > \sqrt{3}$. Στο σχήμα και πάνω στον άξονα των εφαπτομένων βλέπω $(\overline{AP}) = \sqrt{3}$. Φέρνω την OP καθορίζοντας το σημείο M. Τα τόξα θ στο διάστημα $[0, \pi)$ που επαληθεύουν την $\epsilon\phi x > \sqrt{3}$ έχουν πέρατα μεταξύ των M και B και επειδή $(\widehat{AM}^+) = \frac{\pi}{3}$ θα έχω $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ και η γενική λύση της ανισότητας θα είναι $x = k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$.



- Να λυθεί η $\epsilon\phi x > -1$. Στον άξονα των εφαπτομένων στο σχήμα, λαμβάνω $(\overline{AP}) = -1$. Η OP δίνει το σημείο M όπου $(\widehat{AM}^+) = \frac{3\pi}{4}$. Τα πέρατα των τόξων θ στο διάστημα $[0, \pi)$ τα οποία επαληθεύουν την $\epsilon\phi x > -1$ και σημειώνονται στο σχήμα, δίνονται από τις $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Η γενική λύση της $\epsilon\phi x > -1$ είναι η $x = k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.



• Να επιλυθεί η $\varepsilon\varphi x < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Έστω $(\overline{AP}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Τότε $(\widehat{AM^+}) = \frac{\pi}{6}$. Τα πέρατα των τόξων θ στο διάστημα $[0, \pi)$ που επαληθεύουν την $\varepsilon\varphi x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ είναι σημειωμένα στο διπλανό σχήμα και δίνονται από τις $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Η γενική λύση είναι η $x = k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

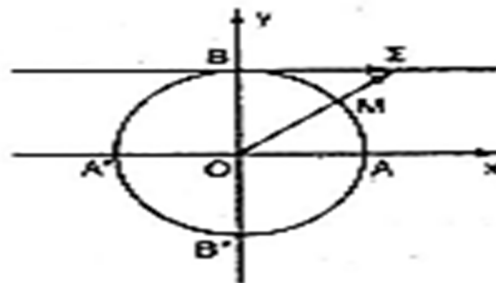


2.4 Επίλυση της $\sigma\varphi x > \lambda$

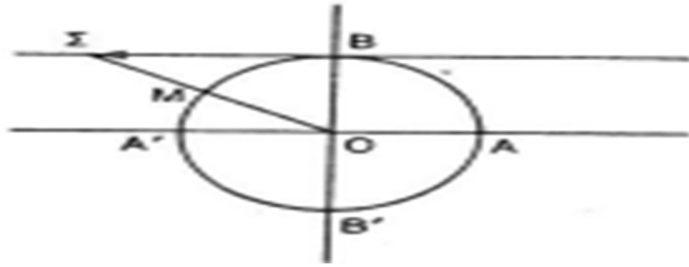
Η ανισότητα $\sigma\varphi x > \lambda$ επιλύεται όπως η $\varepsilon\varphi x > \lambda$. Αρχικά βρίσκω τις λύσεις του διαστήματος $(0, \pi)$ και στη συνέχεια η γενική λύση δίνεται κατά τρόπο ανάλογο της $\varepsilon\varphi x > \lambda$.

2.4.1 Εφαρμογές

• Να λυθεί η $\sigma\varphi x > 1$. Στον άξονα των συνεφαπτομένων λαμβάνω $(B\Sigma)=1$. Η ΟΣ δίνει το σημείο M όπου $(\widehat{AM^+}) = \frac{\pi}{4}$. Τα τόξα $\theta \in (0, \pi)$ που επαληθεύουν την $\sigma\varphi x > 1$ δίνονται από την $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$. Η γενική λύση είναι η $x = k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.



• Να λυθεί η $\sigma\phi x > -\sqrt{3}$. Αν είναι $(\overline{B\Sigma}) = -\sqrt{3}$ τότε $(\overline{AM^+}) = \frac{5\pi}{6}$ και τα τόξα $\theta \in (0, \pi)$ που επαληθεύουν την $\sigma\phi x > -\sqrt{3}$, δίνονται από την $0 < \theta < \frac{5\pi}{6}$ και η γενική λύση είναι η $x = k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left(0, \frac{5\pi}{6}\right)$.



2.5 Ανισότητες της μορφής $\eta\mu(vx) > \lambda$, $\sigma\upsilon\nu(vx) > \lambda$, $\epsilon\phi(vx) > \lambda$, $\sigma\phi(vx) > \lambda$, $v \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- Αν $v = 1$ έχω τις βασικές ανισότητες όπου αναφέρθηκα προηγουμένως.
- Αν $v = 0$ είναι μια απλή τετριμμένη περίπτωση.
- Αν $v \in \mathbb{Z}^-$ οι σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών αντίθετων τόξων, μπορούν να αναχθούν στους τριγωνομετρικούς αριθμούς αυτής της μορφής αλλά με συντελεστή v θετικό.
- Αν $v \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ τότε οι συναρτήσεις $\eta\mu(vx)$, $\sigma\upsilon\nu(vx)$ είναι περιοδικές με περίοδο $P = \frac{2\pi}{v}$ ενώ οι $\epsilon\phi(vx)$, $\sigma\phi(vx)$ είναι περιοδικές με περίοδο $P = \frac{\pi}{v}$.

Για την επίλυση μιας ανισότητας αυτής της μορφής θέτω $vx = y$, οπότε ανάγονται στην ανισότητα της προηγούμενης μορφής δηλαδή $\eta\mu(vx) > \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu y > \lambda \\ x = \frac{y}{\lambda} \end{cases} (1)$.

Από την (1) λαμβάνω τη γενική λύση της $\eta\mu(vx) > \lambda$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρόβλημα «Βρείτε τις λύσεις της $\eta\mu(vx) > \lambda$ οι οποίες βρίσκονται σε δοθέν διάστημα, συνήθως στο $[0, 2\pi]$ ». Ακολουθούν παραδείγματα για την κατανόηση προβλημάτων αυτού του είδους.

2.5.1 Εφαρμογές

- Να λυθεί η $\eta\mu(3x) > \frac{1}{2}$. Αν θέσω $3x = y$ λαμβάνω $\eta\mu(3x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu y > \frac{1}{2} \\ x = \frac{y}{3} \end{cases}$

Βρίσκω τη γενική λύση της $\eta\mu y > \frac{1}{2}$. Ως γνωστόν είναι $y = k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και

$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$. Επειδή $x = \frac{y}{3}$ έπεται ότι η γενική λύση της $\eta\mu(3x) > \frac{1}{2}$ είναι η $x = \frac{3k\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$.

- Να βρεθούν οι λύσεις της $\sigma\upsilon\nu(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ που κινείται στο διάστημα $[0, 2\pi)$

ή αλλιώς να επιλυθεί το σύστημα $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$.

1ος τρόπος. Βρίσκω τη γενική λύση της $\sigma\upsilon\nu(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Για αυτό θέτω $3x = y$ οπότε η

γενική λύση της $\sigma\upsilon\nu y < \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι η $y = k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}$.

Συνεπώς $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\frac{\pi}{12} < \frac{\theta}{3} < \frac{7\pi}{12}$ είναι η γενική λύση της

$\sigma\upsilon\nu(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Για να περιορίσω τις τιμές του x στο διάστημα $[0, 2\pi]$ δουλεύω ως

εξής. Έχω $k = 3\lambda + \upsilon$ με $k, \lambda \in \mathbb{Z}$ και $\upsilon \in \{0, 1, 2\}$ οπότε $x = \frac{2(3\lambda + \upsilon)\pi}{3} + \frac{\theta}{3} = 2\lambda\pi + \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$. Τότε τα τόξα x λαμβάνουν τις παρακάτω εκφράσεις:

➤ Για $\upsilon=0$ την $x = 2\lambda\pi + \frac{\theta}{3}$ (1)

➤ Για $\upsilon=1$ την $x = 2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$ (2)

➤ Για $\upsilon=2$ την $x = 2\lambda\pi + \frac{4\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$ (3)

Επειδή $\frac{\pi}{12} < \frac{\theta}{3} < \frac{7\pi}{12}$ και $\lambda \in \mathbb{Z}$ οι τιμές του $x \in [0, 2\pi]$ που επαληθεύουν την

$\sigma\upsilon\nu(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι οι $x = \frac{\theta}{3}, x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3}, x = \frac{4\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$ με $\frac{\pi}{12} < \frac{\theta}{3} < \frac{7\pi}{12}$.

2ος τρόπος. Έχω $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq x \leq 6\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu y < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq y \leq 6\pi \\ y = 3x \end{cases}$

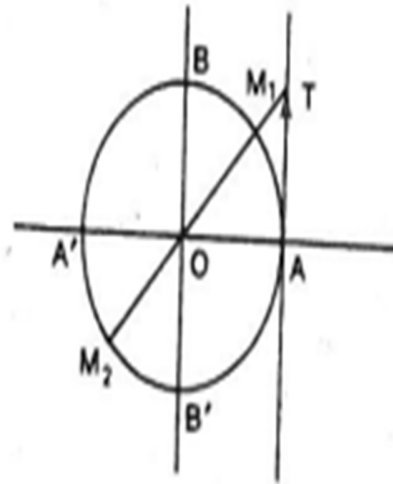
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} < y < \frac{7\pi}{4} \\ 2\pi + \frac{\pi}{4} < y < 2\pi + \frac{7\pi}{4} \\ 4\pi + \frac{\pi}{4} < y < 4\pi + \frac{7\pi}{4} \\ y = 3x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} < 3x < \frac{7\pi}{4} \\ \frac{9\pi}{4} < 3x < \frac{15\pi}{4} \\ \frac{17\pi}{4} < 3x < \frac{23\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12} \\ \frac{9\pi}{4} < x < \frac{15\pi}{4} \\ \frac{17\pi}{4} < x < \frac{23\pi}{4} \end{array} \right\}.$$

• Να λυθεί η $\text{εφ}(3x) > \sqrt{3}$ και στη συνέχεια να σημειωθούν επί της τριγωνομετρικής περιφέρειας τα πέρατα των τόξων x που την επαληθεύουν.

Για να σημειώσω επί της τριγωνομετρικής περιφέρειας τα πέρατα των τόξων x που επαληθεύουν την $\text{εφ}(3x) > \sqrt{3}$ αρκεί να βρεθούν

οι λύσεις του διαστήματος $[0, 2\pi]$. Θέτω $3x = y$ και ονομάζω θ τις λύσεις στο διάστημα $[0, 2\pi]$ της $\text{εφ}(y) > \sqrt{3}$. Τότε $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ και $\frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Η γενική λύση της $\text{εφ}y > \sqrt{3}$ είναι η $y = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Η γενική λύση της αρχικής είναι $3x = 2k\pi + \theta$ ή $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\frac{\theta}{3} \in \left(\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}\right)$.



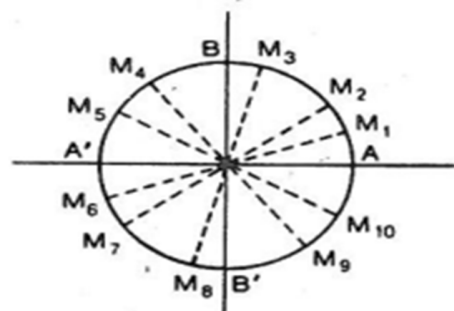
Αν στον ακέραιο k δώσω την έκφραση $k = 3\lambda + \nu$ με $\lambda \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \{0, 1, 2\}$ θα έχω $x = \frac{2(3\lambda + \nu)\pi}{3} + \frac{\theta}{3} = 2\lambda\pi + \frac{2\nu\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$.

➤ Αν $\nu = 0$ τότε $x = 2\lambda\pi + \frac{\theta}{3}$ εξ αυτών στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι οι $\frac{\theta}{3}$ που καλύπτει το διάστημα $\delta_1 = \left(\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\delta_2 = \left(\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}\right)$.

➤ Αν $\nu = 1$ τότε $x = 2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$ και εξ αυτών στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι οι $\frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$ που καλύπτουν τα διαστήματα:

$$\delta_3 = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{7\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\delta_4 = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{9}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{10\pi}{9}, \frac{7\pi}{6}\right).$$



➤ Αν $u = 2 \Rightarrow x = 2\lambda\pi + \frac{4\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$ εξ αυτών στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι οι $\frac{4\pi}{3} + \frac{\theta}{3}$ καλύπτουν τα διαστήματα

$$\delta_5 = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{13\pi}{9}, \frac{3\pi}{2} \right), \delta_6 = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{9}, \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{16\pi}{9}, \frac{11\pi}{6} \right).$$

Τα διαστήματα $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6$ στην τριγωνομετρική περιφέρεια βρίσκονται στο παραπάνω σχήμα δια των τόξων $\widehat{M_1M_2}, \widehat{M_3B}, \widehat{M_4M_5}, \widehat{M_6M_7}, \widehat{M_8B}, \widehat{M_9M_{10}}$ αντιστοίχως οπότε τα άκρα σημεία $M_i, i=1, 2, \dots, 10$ και B, B' δε λαμβάνονται.

Με τον δεύτερο τρόπο λαμβάνω τα τόξα του διαστήματος $[0, 2\pi]$ που επαληθεύουν την ανισότητα και σημειώνω αυτά στην τριγωνομετρική περιφέρεια. Με τον τρόπο αυτό λύνω το σύστημα:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi(3x) > \sqrt{3} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi(3x) > \sqrt{3} \\ 0 \leq 3x \leq 6\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi(3x) > \sqrt{3} \\ 0 \leq y \leq 6\pi \\ y = 3x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} < y < \frac{\pi}{2} \text{ ή } \pi + \frac{\pi}{3} < y < \pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } 2\pi + \frac{\pi}{3} < y < 2\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } 3\pi + \frac{\pi}{3} < y < 3\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή } 4\pi + \frac{\pi}{3} < y < 4\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } 5\pi + \frac{\pi}{3} < y < 5\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = 3x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{2} \text{ ή } \frac{4\pi}{3} < 3x < \frac{3\pi}{2} \text{ ή } \frac{7\pi}{3} < 3x < \frac{5\pi}{2} \\ \text{ή } \frac{10\pi}{3} < 3x < \frac{7\pi}{2} \text{ ή } \frac{13\pi}{3} < 3x < \frac{9\pi}{2} \text{ ή } \frac{16\pi}{3} < 3x < \frac{11\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \left\{ \frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{6} \text{ ή } \frac{4\pi}{9} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ή } \frac{7\pi}{9} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ή } \frac{10\pi}{9} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ή } \frac{13\pi}{9} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ή } \frac{16\pi}{9} < x < \frac{11\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

Παρατηρώ ότι τα διαστήματα μεταβολής του x είναι ακριβώς τα $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6$ τα οποία βρήκα από τον πρώτο τρόπο, αλλά πολύ πιο σύντομα.

2.6 Ανισότητες της μορφής

$$\eta\mu\left(x + \frac{\nu\pi}{\mu}\right) > \lambda, \quad \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\nu\pi}{\mu}\right) > \lambda, \quad \varepsilon\varphi\left(x + \frac{\nu\pi}{\mu}\right) > \lambda,$$

$$\sigma\varphi\left(x + \frac{\nu\pi}{\mu}\right) > \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mu, \nu \in \mathbb{Z}, \mu \neq 0$$

Για τη λύση ανισότητας αυτής της μορφής θέτω $\left(x + \frac{\nu\pi}{\mu}\right) = y$ οπότε

$$\eta\mu\left(x + \frac{\nu\pi}{\mu}\right) > \lambda \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu y > \lambda \\ y = x + \frac{\nu\pi}{\mu} \end{array} \right\}. \text{ Κατά τα γνωστά, βρίσκω τις τιμές του } y \text{ που}$$

επαληθεύουν την $\eta\mu y > \lambda$ και από την αντικατάσταση $\left(x + \frac{\nu\pi}{\mu}\right) = y$ έχω στη συνέχεια τις τιμές του x που επαληθεύουν την αρχική. Η συνάρτηση $\eta\mu\left(x + \frac{\nu\pi}{\mu}\right)$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , οπότε για το λόγο αυτό αν αναζητήσω λύσεις στο διάστημα μιας πρωτεύουσας περιόδου θα λύσω το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\left(x + \frac{\nu\pi}{\mu}\right) > \lambda \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\left(x + \frac{\nu\pi}{\mu}\right) > \lambda \\ \frac{\nu\pi}{\mu} \leq x + \frac{\nu\pi}{\mu} \leq 2\pi + \frac{\nu\pi}{\mu} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu y > \lambda \\ \frac{\nu\pi}{\mu} \leq y \leq 2\pi + \frac{\nu\pi}{\mu} \\ y = x + \frac{\nu\pi}{\mu} \end{array} \right\}.$$

2.6.1 Εφαρμογές

• Να βρεθούν οι λύσεις της $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ που κείνται στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Για αυτό λύνω το παρακάτω σύστημα.

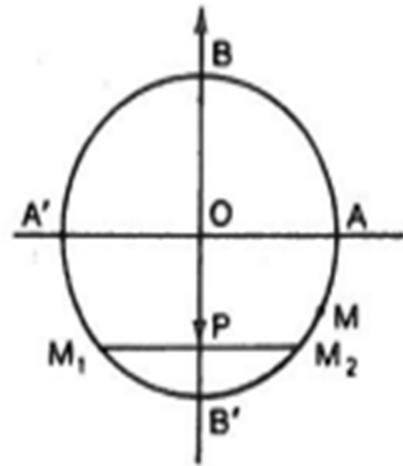
$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu y > -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{7\pi}{4} \\ y = x - \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{4\pi}{3} \\ \frac{5\pi}{3} < y \leq \frac{7\pi}{4} \\ y = x - \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{3} \\ \frac{5\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x < \frac{19\pi}{12} \\ \frac{23\pi}{12} < x \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Οι ζητούμενες λύσεις είναι οι $x \in \left[0, \frac{19\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{23\pi}{12}, 2\pi\right]$.

• Να λυθεί η $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$. Έχω $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu y > \frac{1}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$



$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \\ y = x + \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \theta \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} + \theta \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6} \end{array} \right\}. \quad \text{Av}$$

αναζητήσω λύσεις της ανισότητας στο διάστημα μιας πρωτεύουσας περιόδου αρκεί να βρεθούν οι λύσεις της ανισότητας που κείνται στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Για αυτό θέτω

$y = x + \frac{\pi}{3}$ οπότε αναζητώντας $x \in [0, 2\pi]$, αρκεί να βρω $y \in \left[\frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}\right]$. Στην

τριγωνομετρική περιφέρεια σημειώνω το σημείο M ώστε $(AM^+) = \frac{\pi}{3}$. Αυτό το σημείο

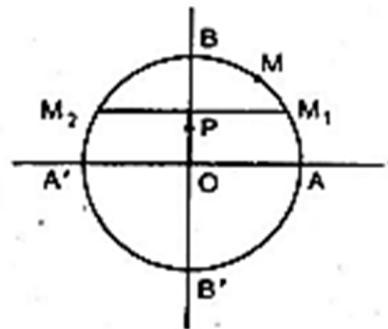
θα είναι η αρχή μέτρησης των τόξων y . Εξ' αλλού εάν $(\overline{OP}) = \frac{1}{2}$ θα είναι $(\overline{AM_1^+}) = \frac{\pi}{6}$,

$(\overline{AM_2^+}) = \frac{5\pi}{6}$ και οι λύσεις της $\eta\mu y > \frac{1}{2}$ του διαστήματος $\left(\frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ θ

$\left(\frac{\pi}{3} \leq y < \frac{5\pi}{6} \quad \text{ή} \quad 2\pi + \frac{\pi}{6} < y \leq 2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ άρα

$\left(\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \quad \text{ή} \quad 2\pi + \frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left(0 \leq x < \frac{4\pi}{3} \quad \text{ή} \quad 2\pi - \frac{\pi}{6} < x \leq 2\pi\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 \leq x < \frac{4\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{11\pi}{6} < x \leq 2\pi\right)$.



2.7 Ανισότητες της μορφής $\eta\mu(vx/\mu) > \lambda$, συν $(vx/\mu) > \lambda$, εφ $(vx/\mu) > \lambda$, σφ $(vx/\mu) > \lambda$,

$\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathbb{Z}^*$

Για τη λύση της ανισοτήτων αυτής της μορφής θέτω $\frac{vx}{\mu} = y$ οπότε

$\eta\mu\left(\frac{vx}{\mu}\right) > \lambda \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu y > \lambda \\ y = \frac{vx}{\mu} \end{array} \right\}$. Βρίσκω κατά τα γνωστά τις τιμές του y που επαληθεύουν

την $\eta\mu y > \lambda$ και μέσω της αντικατάστασης $\frac{vx}{\mu} = y$ έχω στη συνέχεια τις τιμές του x

που επαληθεύουν την αρχική. Επειδή η συνάρτηση $\eta\mu\left(\frac{\nu x}{\mu}\right)$ είναι περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο την $\frac{2\mu\pi}{\nu}$ αν αναζητήσω λύσεις της ανισότητας στο διάστημα μιας πρωτεύουσας περιόδου θα λύσω το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\left(\frac{\nu x}{\mu}\right) > \lambda \\ 0 \leq x \leq \frac{2\mu\pi}{\nu} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\left(\frac{\nu x}{\mu}\right) > \lambda \\ 0 \leq \frac{\nu x}{\mu} \leq 2\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu y > \lambda \\ 0 \leq y \leq 2\pi \\ y = \frac{\nu x}{\mu} \end{array} \right\}. \text{ Αν από τις λύσεις } \theta \text{ που κείνται}$$

στο διάστημα μιας πρωτεύουσας περιόδου θέλω να βρω τη γενική λύση της ανισότητας, εφαρμόζω τον τύπο $x = k \frac{2\mu\pi}{\nu} + \theta$ όπου $k \in \mathbb{Z}$.

2.7.1 Εφαρμογές

- Να λυθεί η $\varepsilon\varphi \frac{x}{3} > \sqrt{3}$. Έχω

$$\varepsilon\varphi \frac{x}{3} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi y > \sqrt{3} \\ y = \frac{x}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = k\pi + \theta \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{x}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3k\pi + 3\theta \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

• Να λυθεί η $\eta\mu \frac{x}{5} < \frac{1}{2}$ στο διάστημα μιας πρωτεύουσας περιόδου. Η συνάρτηση $\eta\mu \frac{x}{5}$ είναι περιοδική με περίοδο 10π . Βρίσκω τις λύσεις της $\eta\mu \frac{x}{5} < \frac{1}{2}$ που κυμαίνονται στο $[0, 10\pi]$. Προς τούτο θέτω $\frac{x}{5} = y$ οπότε αν $x \in [0, 10\pi]$ τότε $\frac{x}{5} = y \in [0, 2\pi]$ αλλά η $\eta\mu y < \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει λύσεις τις $\left(0 \leq y < \frac{\pi}{6} \text{ ή } \frac{5\pi}{6} < y \leq 2\pi\right)$ άρα $\left(0 \leq \frac{x}{5} < \frac{\pi}{6} \text{ ή } \frac{5\pi}{6} < \frac{x}{5} \leq 2\pi\right)$ δηλαδή $x \in \left[0, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{25\pi}{6}, 10\pi\right]$. Αν ονομάσω θ τις λύσεις της αρχικής που κινούνται στο $[0, 10\pi]$ τότε $\theta \in \left[0, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{25\pi}{6}, 10\pi\right]$ οπότε έχω τη γενική λύση της αρχικής $x = 10k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$.

2.8 Ανισότητες της μορφής $f(\eta\mu x) > 0$, $f(\sigma\upsilon\nu x) > 0$, $f(\epsilon\phi x) > 0$, $f(\sigma\phi x) > 0$

Μια ανισότητα της μορφής αυτής χαρακτηρίζεται ως **αλγεβρική**. Η επίλυση αυτής αρχικά αντιμετωπίζεται με αλγεβρικές μεθόδους για να οδηγηθώ τελικά στις βασικές τριγωνομετρικές ανισότητες.

2.8.1 Εφαρμογές

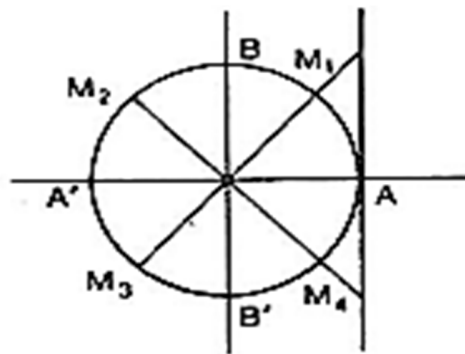
• Να λυθεί η $4\eta\mu^2 x - 2(\sqrt{2} + 1)\eta\mu x + \sqrt{2} < 0$. Οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $4\eta\mu^2 x - 2(\sqrt{2} + 1)\eta\mu x + \sqrt{2} = 0$ ως προς $\eta\mu x$ είναι $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα η ανισότητα γράφεται:

$$4\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right)\left(\eta\mu x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1). \text{ Αν } \theta \text{ οι λύσεις της (1) οι οποίες}$$

κείνται στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχω

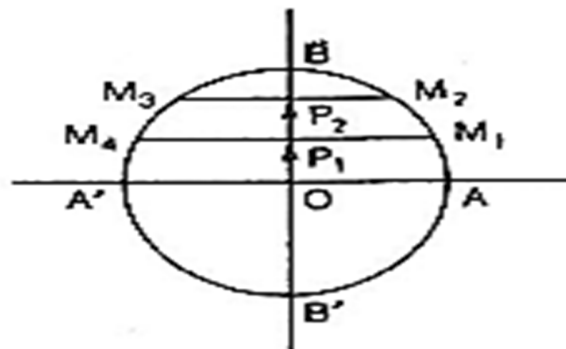
$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ και } \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{6} \text{ άρα η γενική λύση είναι } x = 2k\pi + \theta \text{ με } k \in \mathbb{Z} \text{ και}$$

$$\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right).$$



• Να λυθεί η $\epsilon\phi^2 x < 1$. Η παραπάνω ανισότητα γράφεται $\epsilon\phi^2 x < 1 \Leftrightarrow (\epsilon\phi x - 1)(\epsilon\phi x + 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < \epsilon\phi x < 1 \quad (1)$

Αν ονομάσω θ τις λύσεις στο διάστημα $[0, \pi)$ της (1) τότε $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$. Η γενική λύση της (1) είναι $x = k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.



2.9 Ανισότητες της μορφής $f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\varphi x, \sigma\varphi x) > 0$

Για την επίλυση μίας ανισότητας αυτής της μορφής, μετατρέπω την $f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\varphi x, \sigma\varphi x)$ σε γινόμενο παραγόντων έτσι ώστε να μελετήσω το πρόσημο ενός εκάστου ή την εκφράζω ως συνάρτηση ενός τριγωνομετρικού αριθμού π.χ. $\epsilon\varphi \frac{x}{2}$.

Στην 1^η περίπτωση μελετώ το πρόσημο κάθε παράγοντα στο διάστημα $[0, p]$ όπου p είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων για τις συναρτήσεις που παρουσιάζονται σε κάθε παράγοντα. Στην συνέχεια προσδιορίζω τα τόξα θ του διαστήματος $[0, p]$ για τα οποία το γινόμενο έχει το ζητούμενο πρόσημο. Από τις τιμές του θ στον τύπο $x = k\pi + \theta$ θα έχω τη γενική λύση της ανισότητας. Στη δεύτερη περίπτωση η ανισότητα μετατρέπεται σε αλγεβρική και ακολουθώ στη γνωστή μέθοδο.

2.9.1 Εφαρμογές

• Να λυθεί η $(\eta\mu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x - 1)(\epsilon\varphi x - 1) < 0$ (1). Η ανισότητα είναι της μορφής $f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\varphi x) < 0$ με $f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\varphi x)$ αναλυμένη σε γινόμενο. Βρίσκω το πρόσημο του κάθε παράγοντα στο διάστημα $[0, 2\pi)$ διότι οι συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$ έχουν περίοδο 2π και η συνάρτηση $\epsilon\varphi x$ έχει περίοδο π , οπότε το 2π είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων.

1. Είναι $\eta\mu x - 1 < 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$. Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $\eta\mu x - 1 = 0$.

Αρα, στο διάστημα $[0, 2\pi)$ είναι (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} (2\sigma\upsilon\nu x - 1)(\epsilon\varphi x - 1) > 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (2).

2. Ο παράγοντας $2\sigma\upsilon\nu x - 1$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ παρουσιάζει τα εξής πρόσημα:

$$\triangleright 2\sigma\upsilon\nu x - 1 < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right),$$

$$\triangleright 2\sigma\upsilon\nu x - 1 > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$$

$$\triangleright \text{Για } x = \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{3} \text{ είναι } 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0.$$

3. Ο παράγοντας $\epsilon\varphi x - 1$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ παρουσιάζει τα εξής πρόσημα:

$$\triangleright \epsilon\varphi x - 1 > 0 \Leftrightarrow \epsilon\varphi x > 1 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\triangleright \epsilon\varphi x - 1 < 0 \Leftrightarrow \epsilon\varphi x < 1 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right)$$

$$\triangleright \text{Για } x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4} \text{ έχω } \epsilon\varphi x - 1 = 0.$$

$$\triangleright \text{Για } x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{3\pi}{2} \text{ η συνάρτηση } \epsilon\varphi x \text{ δεν είναι συνεχής και αλλάζει πρόσημο.}$$

x	$0 \text{ ως } \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} \text{ ως } \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} \text{ ως } \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \text{ ως } \frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4} \text{ ως } \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \text{ ως } \frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3} \text{ ως } 2\pi$
$2\sigma\upsilon\nu x - 1$	+	+	-	-	-	-	+
$\varepsilon\varphi x - 1$	-	+	+	-	+	-	-
$(2\sigma\upsilon\nu x - 1)(\varepsilon\varphi x - 1)$	-	+	-	+	-	+	-

Η αρχική ανισότητα είναι ισοδύναμη με την (2) για την οποία από τον πίνακα λαμβάνω
 (2) $\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$. Έτσι βρέθηκαν οι λύσεις της ανισότητας
 στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Αν ονομάσω αυτές θ τότε η γενική λύση είναι $x = 2k\pi + \theta$ με
 $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

• Να λυθεί η $\frac{(3\eta\mu x - 1)(6\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + 1)}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} > 0$ (1). Βρίσκω αρχικά τις λύσεις
 της (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Είναι

$$(1) \Leftrightarrow (3\eta\mu x - 1)(6\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + 1)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(3\eta\mu x - 1)(3\eta\mu x - 1)(2\eta\mu x - 1)\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(3\eta\mu x - 1)^2\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \quad (2) \quad \text{με } x \neq \tau,$$

$$x \neq \pi - \tau, \quad \tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \eta\mu\tau = \frac{1}{3}. \text{ Για να βρω οι λύσεις της (2) στο διάστημα } [0, 2\pi]$$

μελετώ το πρόσημο των παραγόντων $\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right), \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ στο διάστημα αυτό:

1. Για τον παράγοντα $\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right)$ έχω

$$\begin{aligned} \triangleright \eta\mu x - \frac{1}{2} > 0 &\Leftrightarrow \eta\mu x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \\ \triangleright \eta\mu x - \frac{1}{2} < 0 &\Leftrightarrow \eta\mu x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right) \\ \triangleright \eta\mu x - \frac{1}{2} = 0 &\Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

2. Για τον παράγοντα $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ έχω

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ 0 \leq x < 2\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu y > 0 \\ y = x - \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{7\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x - \frac{\pi}{4} \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \\ 0 \leq x < 2\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{7\pi}{4}. \text{ Σχηματίζω τον πίνακα πρόσημων}$$

x	0 ως $\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$ ως $\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$ ως $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$ ως $\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$ ως 2π
$\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right)$	-	+	+	-	-
$\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	+	+	-	-	+
$\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	-	+	-	+	-

Από τον πίνακα λαμβάνω ότι $\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}\right)$

Επειδή $x \neq \tau$, $x \neq \pi - \tau$ και $0 < \tau < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < \pi - \tau < \frac{7\pi}{4}$ έπεται ότι αν ονομάσω θ τις λύσεις της αρχικής ανισότητας στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι

$\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi - \tau\right) \cup \left(\pi - \tau, \frac{7\pi}{4}\right)$ και η γενική λύση είναι $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$.

2.10 Ανισότητες της μορφής $\alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x + \gamma > 0$ με $\alpha\beta\gamma \neq 0$

Η επίλυση των ανισώσεων αυτής της μορφής επιτυγχάνεται με δύο τρόπους.

Τρόπος 1

Ελέγχω αν οι τιμές $x = 2k\pi + \pi$ επαληθεύουν την ανισότητα. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να ισχύει ότι $\gamma - \beta > 0$. Εκφράζω τα $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$ συναρτήσει της $\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$

και λαμβάνω $(\gamma - \beta) \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 2a \cdot \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) + \beta + \gamma > 0$ δηλαδή αλγεβρική της $\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right)$,
 οπότε κατά τα γνωστά επιλύεται.

Τρόπος 2

$$a \eta \mu x + \beta \sigma \upsilon \nu x + \gamma > 0 \Leftrightarrow a \left(\eta \mu x + \frac{\beta}{a} \sigma \upsilon \nu x + \frac{\gamma}{a} \right) > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \left(\eta \mu x + \varepsilon \varphi \omega \cdot \sigma \upsilon \nu x + \frac{\gamma}{a} \right) > 0 \\ \omega = \tau \omega_{\xi_0} \varepsilon \varphi \left(\frac{\beta}{a} \right) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{\sigma \upsilon \nu \omega} \left(\eta \mu (x + \omega) + \frac{\gamma \sigma \upsilon \nu \omega}{a} \right) > 0 \\ \omega = \tau \omega_{\xi_0} \varepsilon \varphi \left(\frac{\beta}{a} \right) \end{array} \right\}. \text{ Επειδή } \omega = \tau \omega_{\xi_0} \varepsilon \varphi \left(\frac{\beta}{a} \right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}, \text{ άρα}$$

$\sigma \upsilon \nu \omega > 0$, συνεπώς η αρχική ανισότητα γράφεται $a \eta \mu (x + \omega) + \gamma \sigma \upsilon \nu \omega > 0$ και επειδή $a \neq 0$ είναι $\eta \mu (x + \omega) > \frac{-\gamma \sigma \upsilon \nu \omega}{a}$ ή $\eta \mu (x + \omega) < \frac{-\gamma \sigma \upsilon \nu \omega}{a}$ που είναι γνώστης μορφής.

2.10.1 Εφαρμογές

- Να λυθεί η $\eta \mu x - (2 - \sqrt{3}) \sigma \upsilon \nu x - 1 > 0$ (1).

(α) Μέσω της αντικατάστασης διαπιστώνω ότι οι $x = 2k\pi + \pi$ δεν είναι λύσεις της αρχικής.

(β) Μέσω του μετασχηματισμού $\eta \mu x = \frac{2\varepsilon \varphi \frac{x}{2}}{1 + \varepsilon \varphi^2 \frac{x}{2}}$, $\sigma \upsilon \nu x = \frac{1 - \varepsilon \varphi^2 \frac{x}{2}}{1 + \varepsilon \varphi^2 \frac{x}{2}}$ με $x \neq 2k\pi + \pi$

είναι (1) $\Leftrightarrow \frac{2\varepsilon \varphi \frac{x}{2}}{1 + \varepsilon \varphi^2 \frac{x}{2}} - (2 - \sqrt{3}) \frac{1 - \varepsilon \varphi^2 \frac{x}{2}}{1 + \varepsilon \varphi^2 \frac{x}{2}} - 1 > 0 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{3}) \varepsilon \varphi^2 \frac{x}{2} + 2\varepsilon \varphi \frac{x}{2} + \sqrt{3} - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2} \right) - (1 + \sqrt{3}) \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) + \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow \left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) - 1 \right) \left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) - \sqrt{3} \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$1 < \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) < \sqrt{3} \quad (2). \quad \text{Βρίσκω λύσεις της (2) στο διάστημα } [0, 2\pi] \text{ διότι η}$$

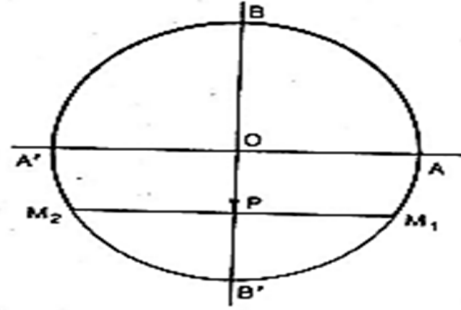
συνάρτηση $\varepsilon \varphi \frac{x}{2}$ είναι περιοδική περιόδου 2π . Θέτω $y = \frac{x}{2}$ και επειδή

$$0 \leq x < 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow 0 \leq y < \pi \quad \text{είναι}$$

$$1 < \varepsilon \varphi y < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}. \text{ Αν ονομάσω } \theta \text{ τις λύσεις της}$$

(2) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ και η γενική λύση της (2) είναι $x = 2k\pi + \theta$

με $k \in \mathbb{Z}$ και $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$.



• Να λυθεί η $\eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x + 1 > 0$ (1).

$$\text{Είναι (1)} \Leftrightarrow \eta\mu x - \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \sigma\upsilon\nu x + 1 > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \eta\mu \frac{\pi}{3} \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} > 0 \Leftrightarrow$$

$\eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$ (2). Η (2) λύνεται μέσω της αντικατάστασης $x - \frac{\pi}{3} = y$. Αναζητώντας

$x \in [0, 2\pi]$ είναι $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq y < \frac{5\pi}{3}$. Οπότε (2)

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu y > -\frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{3} \leq y \leq \frac{5\pi}{3} \\ y = x - \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{6} < y < \pi + \frac{\pi}{6} \\ y = x - \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{3} < \pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$$

Αν θ οι λύσεις της (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$ και η γενική λύση είναι $x = 2k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$.

2.11 Ανισότητες της μορφής $\alpha(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + \beta \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \gamma > 0$

Η επίλυση των ανισοτήτων αυτής της μορφής γίνεται αρχικά στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και με τους γνωστούς από την αντίστοιχη εξίσωση μετασχηματισμούς.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + \beta \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \gamma > 0 \\ 0 \leq x < 2\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu y + \frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu(2y) + \gamma > 0 \\ -\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{7\pi}{4} \\ y = x - \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\beta \sigma \nu^2 y + 2\alpha \sqrt{2} \sigma \nu y + 2\gamma - \beta > 0 \\ -\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{7\pi}{4} \\ y = x - \frac{\pi}{4} \end{array} \right\}. \text{ Η τελευταία ανισότητα είναι γνωστής μορφής}$$

και λύνεται κατά τα γνωστά.

2.11.1 Εφαρμογές

- Να λυθεί η $\eta \mu x + \sigma \nu x + 2(\sqrt{2} - 2)\eta \mu x \cdot \sigma \nu x - 1 > 0$.

Βρίσκω αρχικά τις λύσεις στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \mu x + \sigma \nu x + 2(\sqrt{2} - 2)\eta \mu x \cdot \sigma \nu x - 1 > 0 \\ 0 \leq x < 2\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \sigma \nu y + (\sqrt{2} - 2)\sigma \nu(2y) - 1 > 0 \\ -\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{7\pi}{4} \\ y = x - \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

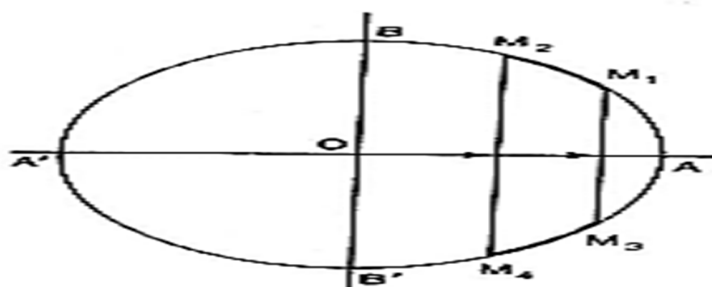
$$\left\{ \begin{array}{l} 2(\sqrt{2} - 2)\sigma \nu^2 y + \sqrt{2} \sigma \nu y + 1 - \sqrt{2} > 0 \\ -\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{7\pi}{4} \\ y = x - \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\sigma \nu^2 y - (1 + \sqrt{2})\sigma \nu y + \sqrt{2} < 0 \\ -\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{7\pi}{4} \\ y = x - \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} < \sigma \nu y < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{7\pi}{4} \\ y = x - \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \text{ Τα ζητούμενα τόξα } y \text{ είναι}$$

$$\left(\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{3} \text{ ή } \frac{5\pi}{3} < y < \frac{7\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} \text{ ή } \frac{5\pi}{3} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{12} \text{ ή } \frac{23\pi}{12} < x < 2\pi \right). \text{ Αν } \theta \text{ οι λύσεις στο διάστημα } [0, 2\pi) \text{ της αρχικής}$$

ανισότητας τότε $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12} \right) \cup \left(\frac{23\pi}{12}, 2\pi \right)$. Η γενική λύση είναι $x = 2k\pi + \theta$, $k \in \mathbb{Z}$.



$$f\left(\eta\mu\frac{\nu_1 x}{\mu_1}, \sigma\nu\frac{\nu_2 x}{\mu_2}, \dots\right) > 0, \nu_i \in \mathbb{Z}, \mu_i \in \mathbb{Z}^*$$

2.12 Ανισότητες της μορφής

Για τη λύση αυτών των ανισοτήτων μετατρέπω την f σε γινόμενο παραγόντων έτσι ώστε να είναι δυνατό να μελετήσω το πρόσημο του κάθε παράγοντα σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου της f ή μετατρέπω τα $\frac{\nu_1}{\mu_1}, \frac{\nu_2}{\mu_2}, \dots$ σε ομώνυμα κλάσματα οπότε

αν γίνουν $\frac{k_1}{\mu}, \frac{k_2}{\mu}, \dots$ θέτω $\frac{x}{\mu} = y$ οπότε παίρνω την $f(\eta\mu(k_1 y), \sigma\nu(k_2 y), \dots) > 0$ η οποία ανάγεται στην $g(\eta\mu y, \sigma\nu y, \dots) > 0$ που είναι γνωστή.

2.12.1 Εφαρμογές

• Να λυθεί η $\left(\eta\mu\frac{x}{2}+1\right)\left(\sigma\nu\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}-1\right) < 0$ (1). Παρατηρώ ότι ο παράγοντας $\left(\eta\mu\frac{x}{2}+1\right)$ είναι θετικός $\forall x \neq 4k\pi - \pi$. Άρα (1)

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\sigma\nu\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}-1\right) < 0 \\ x \neq 4k\pi - \pi \end{array} \right\} \quad (2).$$

Η συνάρτηση $\left(\sigma\nu\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)$ είναι περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο 6π . Η συνάρτηση $\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}-1\right)$ είναι περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο 2π . Γνωρίζω ότι αν μια συνάρτηση είναι περιοδική τότε έχει ως περίοδο κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο της πρωτεύουσας περιόδου. Το 6π είναι περίοδος της πρώτης και της δεύτερης συνάρτησης άρα και του γινόμενου αυτών. Επειδή το 6π είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των πρωτευουσών περιόδων θα είναι η πρωτεύουσα περίοδος του γινομένου αυτών των συναρτήσεων. Για τη λύση της (1) θα περιοριστώ αρχικά στην εύρεση των λύσεων στο διάστημα $[0, 6\pi)$. Προς αυτό βρίσκω το πρόσημο του κάθε παράγοντα στο διάστημα $[0, 6\pi)$.

$$\begin{aligned} \text{➤ Για τον παράγοντα } \left(\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right) \text{ έχω } \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} - \frac{1}{2} > 0 \\ 0 \leq x < 6\pi \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} > \frac{1}{2} \\ 0 \leq \frac{x}{3} < 2\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu y > \frac{1}{2} \\ 0 \leq y < 2\pi \\ y = \frac{x}{3} \end{array} \right\} &\text{ (3) } \text{οπότε } \left(0 \leq y < \frac{\pi}{3} \text{ ή } \frac{5\pi}{3} < y < 2\pi \right) \text{ άρα } \left(0 \leq \frac{x}{3} < \frac{\pi}{3} \text{ ή } \frac{5\pi}{3} < \frac{x}{3} < 2\pi \right) \end{aligned}$$

συνεπώς $(0 \leq x < \pi \text{ ή } 5\pi < x < 6\pi)$ και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης έχω

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} < \frac{1}{2} \\ 0 \leq x < 6\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \pi < x < 5\pi. \text{ Είναι } \sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pi \text{ ή } x = 5\pi.$$

$$\text{➤ Για τον παράγοντα } \left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2} - 1 \right) \text{ έχω } \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi\frac{x}{2} - 1 > 0 \\ 0 \leq x < 6\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi\frac{x}{2} > 1 \\ 0 \leq \frac{x}{2} < 3\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi y > 1 \\ 0 \leq y < 3\pi \\ y = \frac{x}{2} \end{array} \right\}$$

$$\text{(4) άρα } \left(\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2} \text{ ή } \frac{5\pi}{4} < y < \frac{3\pi}{2} \text{ ή } 2\pi + \frac{\pi}{4} < y < 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ ή } \frac{5\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2} \text{ ή } 2\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ ή } \frac{5\pi}{2} < x < 3\pi \text{ ή } 4\pi + \frac{\pi}{2} < x < 5\pi \right). \text{ Τα σημεία } \pi, 3\pi, 5\pi \text{ είναι σημεία}$$

ασυνέχειας στα οποία η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο. Τα σημεία $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2}$ είναι

ρίζα της $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} - 1 = 0$ άρα αν $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ή $\pi < x < \frac{5\pi}{2}$ ή $3\pi < x < 4\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $5\pi < x < 6\pi$

είναι $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} - 1 < 0$. Με βάση τα προηγούμενα κατασκευάζω τον παρακάτω πίνακα

x	$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$	$\pi \leq x < \frac{5\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2} \leq x < 3\pi$	$3\pi \leq x < 4\pi + \frac{\pi}{2}$	$4\pi + \frac{\pi}{2} \leq x < 5\pi$	$5\pi \leq x < 6\pi$
$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} - \frac{1}{2}$	+	+	-	-	-	-	+
$\varepsilon\varphi\frac{x}{2} - 1$	-	+	-	+	-	+	-
$\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right) \left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2} - 1 \right)$	-	+	+	-	+	-	-

Αν θα ονομάσω θ τις λύσεις της αρχικής που κείνται στο $[0, 6\pi)$ είναι $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ή $\frac{5\pi}{2} < \theta < 3\pi$ ή $4\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 5\pi$ ή $5\pi < \theta < 6\pi$ όπου το $\theta = 0$ διότι για το σημείο αυτό $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} - \frac{1}{2} > 0$ και $\epsilon\varphi\frac{x}{2} - 1 < 0$, άρα το γινόμενο τους είναι αρνητικό. Η γενική λύση της ανισότητας δίνεται από τον τύπο $x = 6k\pi + \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$.

• Να λυθεί η $2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} > 2 + \eta\mu\frac{x}{2}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\left(2\frac{x}{6}\right) > 2 + \eta\mu\left(3\frac{x}{6}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\sigma\upsilon\nu(2y) > 2 + \eta\mu(3y) \\ y = \frac{x}{6} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(1 - 2\eta\mu^2 y) > 2 - 4\eta\mu^3 y + 3\eta\mu y \\ y = \frac{x}{6} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\eta\mu^3 y - 4\eta\mu^2 y - 3\eta\mu y > 0 \\ x = 6y \end{array} \right\} \quad (2).$$

Για την επίλυση της (1) αρκεί να λυθεί η (2). Στην (1), η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)$ είναι περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο 6π και η συνάρτηση $\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$ περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο 4π , άρα το 12π είναι περίοδος και για τις δύο συναρτήσεις, άρα και για την $2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right) - 2 - \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$.

Συνεπώς, οι λύσεις της (1) θα βρεθούν στο διάστημα $[0, 12\pi)$, άρα $0 \leq x < 12\pi \Leftrightarrow$

$$0 \leq \frac{x}{2} < 6\pi \Leftrightarrow 0 \leq y < 6\pi \text{ και οι λύσεις της (2) στο διάστημα } [0, 2\pi)$$

$$4\eta\mu^3 y - 4\eta\mu^2 y + 3\eta\mu y > 0 \Leftrightarrow \eta\mu y(4\eta\mu^2 y - 4\eta\mu y - 3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu y \left(\eta\mu y + \frac{1}{2} \right) \left(\eta\mu y - \frac{3}{2} \right) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu y \left(\eta\mu y + \frac{1}{2} \right) < 0 \quad (3). \quad \forall y \in \mathbb{R}, \left(\eta\mu y - \frac{3}{2} \right) < 0$$

$$(3) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \eta\mu y < 0 \Leftrightarrow \left(\pi < y < \frac{7\pi}{6} \text{ ή } \frac{11\pi}{6} < y < 2\pi \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\pi < \frac{x}{6} < \frac{7\pi}{6} \text{ ή } \frac{11\pi}{6} < \frac{x}{6} < 2\pi \right) \Leftrightarrow (6\pi < x < 7\pi \text{ ή } 11\pi < x < 12\pi). \text{ Αν } \theta \text{ είναι οι λύσεις}$$

της (1) στο διάστημα $[0, 12\pi)$ τότε $\theta \in (6\pi, 7\pi) \cup (11\pi, 12\pi)$. Η γενική λύση είναι $x = 12k\pi + \theta$, $k \in \mathbb{Z}$

$$f\left(x, \eta\mu\frac{\nu_1 x}{\mu_1}, \sigma\upsilon\nu\frac{\nu_2 x}{\mu_2}, \dots\right) > 0$$

2.13 Ανισότητες της μορφής

Μετατρέπω την f σε γινόμενο παραγόντων ώστε να μελετήσω το πρόσημο κάθε παράγοντα ώστε να προκύψει το πρόσημο του γινομένου. Συνήθως καταλήγω σε γινόμενο ενός πολωνύμου του x επί μια συνάρτησης τριγωνομετρικών αριθμών του αγνώστου τόξου του x .

2.13.1 Εφαρμογές

- Να λυθεί η $2\eta\mu x - 2\eta\mu x - x + 1 > 0$ (1).

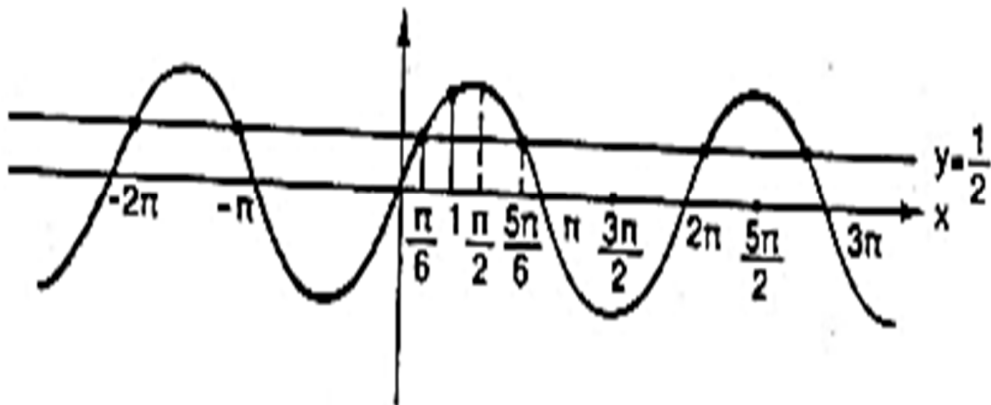
(1) $\Leftrightarrow 2\eta\mu x(x-1) - (x-1) > 0 \Leftrightarrow 2(x-1)\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right) > 0$ (2). Η λύση της (2) ανάγεται στη

λύση των παρακάτω συστημάτων (A) $\begin{cases} x-1 > 0 \\ \eta\mu x - \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$, (B) $\begin{cases} x-1 < 0 \\ \eta\mu x - \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$

(A) $\eta\mu x - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$. Αυτές για να είναι λύσεις του (A) πρέπει να επαληθεύουν την $x-1 > 0$ δηλαδή πρέπει $x = 2k\pi + \theta > 1$ που ισχύει $\forall k \in \mathbb{Z}^*$. Αν $k=0$ πρέπει $\theta > 1$ και επειδή $\frac{\pi}{6} < 1 < \frac{5\pi}{6}$ προκύπτει ότι από τις τιμές του

θ που επαληθεύουν την $\eta\mu x > \frac{1}{2}$ θα επιλεγούν όσες $1 < \theta < \frac{5\pi}{6}$, ώστε οι λύσεις του (A) να είναι οι $x = 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}^*$ με $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$ και $1 < x < \frac{5\pi}{6}$, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

Ομοίως υπολογίζονται οι λύσεις του (B) και είναι οι $x = 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}^-, 0 \leq x < \frac{\pi}{6}$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$.



• Να λυθεί στο $[-\pi, \pi]$ η $(9x^2 - 4)(4\eta\mu^2 x - (2 + 2\sqrt{2})\eta\mu x + \sqrt{2}) > 0$ (1).

(1) $\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right)\left(\eta\mu x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$. Στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ έχω

$$\triangleright \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ή } \frac{5\pi}{6},$$

$$\triangleright \eta\mu x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\triangleright \eta\mu x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\pi < x < \frac{\pi}{6} \text{ ή } \frac{5\pi}{6} < x < \pi. \quad \text{Στο διάστημα } [-\pi, \pi] \text{ έχω}$$

$$\triangleright \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } \frac{3\pi}{4},$$

$$\triangleright \eta\mu x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

$$\triangleright \eta\mu x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\pi < x < \frac{\pi}{4} \text{ ή } \frac{3\pi}{4} < x < \pi.$$

Επειδή $-\pi < -\frac{2}{3} < \frac{\pi}{6} < \frac{2}{3} < \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} < \frac{5\pi}{6} < \pi$ λαμβάνω τον παρακάτω πίνακα. Από τον πίνακα προκύπτουν οι λύσεις της ανισότητας στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ είναι οι

$$-\pi < x < -\frac{2}{3} \text{ ή } \frac{\pi}{6} < x < \frac{2}{3} \text{ ή } \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ ή } \frac{5\pi}{6} < x < \pi$$

x	$-\pi$ ως $-2/3$	$-2/3$ ως $\pi/6$	$\pi/6$ ως $2/3$	$2/3$ ως $\pi/4$	$\pi/4$ ως $3\pi/4$	$3\pi/4$ ως $5\pi/6$	$5\pi/6$ ως π
$x - \frac{2}{3}$	−	−	−	+	+	+	+
$x + \frac{2}{3}$	−	+	+	+	+	+	+
$\eta\mu x - \frac{1}{2}$	−	−	+	+	+	+	−
$\eta\mu x - \frac{\sqrt{2}}{2}$	−	−	−	−	+	−	−
Γινόμενο	+	−	+	−	+	−	+

Βιβλιογραφία

- Ζήβας, Μ. (1984). «Τριγωνομετρία», Αθήνα: Gutenberg
- Βιβλία άλγεβρας Α' & Β' λυκείου, ΟΕΔΒ