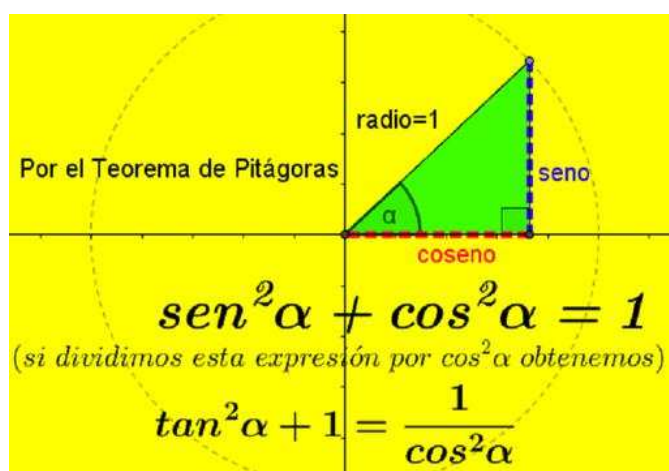




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Τριγωνομετρικά συστήματα



Σπουδαστής: Αβραμόπουλος Γεώργιος (ΑΜ 8108)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (Μ.Εδ.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2022 – 2023

Ημερομηνία ανάθεσης: 20.01.2021
 Ημερομηνία κατάθεσης: 09.2022
 Ημερομηνία εξέτασης: 09.2022

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Γενικοί ορισμοί	3
2. Συστήματα πρώτης κατηγορίας	3
2.1 Ομάδα 1 ^η	3
2.2 Ομάδα 2 ^η	4
2.3 Ομάδα 3 ^η	5
2.4 Ομάδα 4 ^η	7
2.5 Ομάδα 5 ^η	8
2.6 Ομάδα 6 ^η	9
3. Συστήματα δεύτερης κατηγορίας.....	10
3.1 Λύση του (α)	10
3.2 Λύση του (β)	13
3.3 Λύση του (γ).....	14
3.4 Λύση του (δ).....	14
3.5 Λύση του (ε).....	15
3.6 Λύση του (στ).....	15

1. Γενικοί ορισμοί

Ονομάζουμε τριγωνομετρικό σύστημα **πρώτης κατηγορίας** δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους, κάθε σύστημα της μορφής:
$$\left. \begin{aligned} f(t, z) &= 0 \\ \varphi(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} (1) \text{ όπου } f(t, z) \text{ πολυώνυμο}$$
 των t, z τα δε t, z είναι τριγωνομετρικοί αριθμοί των άγνωστων τόξων. Το $\varphi(x, y)$ είναι πολυώνυμο των x, y .

Π.χ. τριγωνομετρικά συστήματα πρώτης κατηγορίας είναι τα κάτωθι:

$$(i) \left\{ \begin{aligned} \eta\mu x + \eta\mu y &= \alpha \\ x + y &= \beta \end{aligned} \right\}, (ii) \left\{ \begin{aligned} \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi y &= a \\ x - y &= \beta \end{aligned} \right\}, (iii) \left\{ \begin{aligned} \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y &= a \\ x - y &= \beta \end{aligned} \right\}$$

Δηλαδή το χαρακτηριστικό των συστημάτων της μορφής (1) είναι ότι η μία των εξισώσεων είναι τριγωνομετρική και ή άλλη αλγεβρική ως προς τα άγνωστα τόξα. Εκτός από τα τριγωνομετρικά συστήματα πρώτης κατηγορίας έχουμε και τα τριγωνομετρικά συστήματα **δεύτερης κατηγορίας**. Αυτά έχουν τη μορφή:
$$\left. \begin{aligned} f(t, z) &= 0 \\ \varphi(\omega, \theta) &= 0 \end{aligned} \right\} (2) \text{ όπου τα } f(t, z), \varphi(\omega, \theta) \text{ πολυώνυμα δύο μεταβλητών και τα } t, z, \omega, \theta$$
 τριγωνομετρικοί αριθμοί των άγνωστων τόξων x, y .

Π.χ. συστήματα δευτέρας κατηγορίας είναι τα κάτωθι:

$$(i) \left\{ \begin{aligned} \eta\mu x \cdot \eta\mu y &= a \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y &= \beta \end{aligned} \right\}, (ii) \left\{ \begin{aligned} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu y &= a \\ \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu y &= \beta \end{aligned} \right\}, (iii) \left\{ \begin{aligned} \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y &= a \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y &= \beta \end{aligned} \right\}$$

Ονομάζουμε **μερική λύση** ενός τριγωνομετρικού συστήματος κάθε ζεύγος (x, y) το οποίο επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος. Το σύνολο των μερικών λύσεων ενός συστήματος το ονομάζουμε **γενική λύση** αυτού. Η εύρεση γενικής λύσης ενός συστήματος είναι γενικώς δύσκολη και σε πολλές περιπτώσεις αδύνατη. Θα αναφέρουμε παρακάτω τις κλασικές μορφές συστημάτων.

2. Συστήματα πρώτης κατηγορίας

2.1 Ομάδα 1^η

$$(a) \left\{ \begin{aligned} \eta\mu x + \eta\mu y &= a \\ x + y &= \beta \end{aligned} \right\}, (b) \left\{ \begin{aligned} \eta\mu x - \eta\mu y &= a \\ x + y &= \beta \end{aligned} \right\}, (γ) \left\{ \begin{aligned} \eta\mu x + \eta\mu y &= a \\ x - y &= \beta \end{aligned} \right\},$$

$$(δ) \left\{ \begin{aligned} \eta\mu x - \eta\mu y &= a \\ x - y &= \beta \end{aligned} \right\}, (ε) \left\{ \begin{aligned} \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y &= a \\ x + y &= \beta \end{aligned} \right\}, (στ) \left\{ \begin{aligned} \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y &= a \\ x + y &= \beta \end{aligned} \right\},$$

$$(ζ) \left\{ \begin{aligned} \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y &= a \\ x - y &= \beta \end{aligned} \right\}, (η) \left\{ \begin{aligned} \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y &= a \\ x - y &= \beta \end{aligned} \right\}.$$

Τα οκτώ αυτά συστήματα έχουν κοινό τρόπο λύσης. Η πρώτη των εξισώσεων εκάστου συστήματος αρκεί να τραπεί σε γινόμενο και να συνεχίσουμε ως χαρακτηριστικά θα γίνει κατωτέρω μόνο δια το σύστημα (α).

$$(\alpha) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = a \\ x+y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = a \\ x+y = \beta \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$(1^{\circ\nu}) \text{ αν } \eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \beta = 2k\pi \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = a \\ x+y = 2k\pi \end{array} \right\} \quad (2)$$

(1.α) και αν $a = 0 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x+y = 2k\pi$ άρα οι λύσεις είναι $x = \theta$, $y = 2k\pi - \theta$, οπού θ τυχόν πραγματικός αριθμός (σε ακτίνια).

(1.β) και αν $\alpha \neq 0 \Rightarrow (2)$ Αδύνατο

$$(2^{\circ\nu}) \text{ αν } \eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 2k\pi \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{a}{2\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)} \\ x+y = \beta \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$(2.α) \text{ αν } \left| \frac{\alpha}{2\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 4\eta\mu^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta \leq \frac{2-\alpha^2}{2} \Rightarrow (3) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\tau \\ x+y = \beta \\ \tau = \tau_{\mathcal{O}\xi_0} \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-y}{2} = 2k\pi \pm \tau \\ x+y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y = 4k\pi \pm 2\tau \\ x+y = \beta \end{array} \right\} \quad (4)$$

Οι λύσεις του (4) είναι οι λύσεις των συστημάτων: (i) $\left\{ \begin{array}{l} x-y = 4k\pi + 2\tau \\ x+y = \beta \end{array} \right\}$, (ii)

$\left\{ \begin{array}{l} x-y = 4k\pi - 2\tau \\ x+y = \beta \end{array} \right\}$. Από τα (i), (ii) λαμβάνουμε

$$(i) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \tau + \frac{\beta}{2} \\ y = -2k\pi - \tau + \frac{\beta}{2} \end{array} \right\}, \quad (ii) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi - \tau + \frac{\beta}{2} \\ y = -2k\pi + \tau + \frac{\beta}{2} \end{array} \right\}$$

$$(2.β) \text{ αν } \left| \frac{\alpha}{2\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)} \right| \geq 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta > \frac{2-\alpha^2}{2} \Rightarrow (3) \text{ αδύνατο.}$$

2.2 Ομάδα 2^η

$$(α) \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu x \cdot \eta\mu y = a \\ x+y = \beta \end{array} \right\}, \quad (β) \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu x \cdot \eta\mu y = a \\ x-y = \beta \end{array} \right\}, \quad (γ) \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = a \\ x+y = \beta \end{array} \right\}$$

$$(\delta) \begin{cases} \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = a \\ x - y = \beta \end{cases}, (\epsilon) \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = a \\ x + y = \beta \end{cases}, (\sigma\tau) \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = a \\ x - y = \beta \end{cases}$$

Αυτά συστήματα έχουν κοινό τρόπον λύση, αρκεί ή πρώτη των εξισώσεων εκάστου συστήματος να τραπεί σε άθροισμα και να συνεχίσουμε όπως χαρακτηριστικά θα γίνει παρακάτω για το (α).

$$(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\eta\mu x \cdot \eta\mu y = 2a \\ x + y = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu(x - y) - \sigma\upsilon\nu(x + y) = 2a \\ x + y = \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu(x - y) = 2a + \sigma\upsilon\nu\beta \\ x + y = \beta \end{cases}$$

$$(1^{ov}) \text{ αν } |2a + \sigma\upsilon\nu\beta| \leq 1 \Leftrightarrow -1 - 2a \leq \sigma\upsilon\nu\beta \leq 1 - 2a \Rightarrow (1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu(x - y) = \sigma\upsilon\nu\tau \\ x + y = \beta \\ \tau = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu(2a + \sigma\upsilon\nu\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2k\pi \pm \tau \\ x + y = \beta \end{cases} (2)$$

Οι λύσεις του (2) είναι οι λύσεις των παρακάτω συστημάτων:

$$(i) \begin{cases} x - y = 2k\pi + \tau \\ x + y = \beta \end{cases}, (ii) \begin{cases} x - y = 2k\pi - \tau \\ x + y = \beta \end{cases} \text{ Εξ αυτών λαμβάνουμε αντιστοίχως}$$

$$\begin{pmatrix} x = k\pi + \frac{\tau}{2} + \frac{\beta}{2} \\ y = -k\pi - \frac{\tau}{2} + \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = k\pi + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{2} \\ y = -k\pi + \frac{\beta}{2} + \frac{\tau}{2} \end{pmatrix}$$

$$(2^{ov}) \text{ αν } |2a + \sigma\upsilon\nu\beta| > 1 \Rightarrow (1) \text{ αδύνατο}$$

2.3 Ομάδα 3^η

$$(\alpha) \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu y} = a \\ x + y = \beta \end{cases}, (\beta) \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu y} = a \\ x - y = \beta \end{cases}, (\gamma) \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y} = a \\ x + y = \beta \end{cases}, (\delta) \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y} = a \\ x - y = \beta \end{cases}$$

$$(\epsilon) \begin{cases} \frac{\eta\mu x \eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu y} = a \\ x + y = \beta \end{cases}, (\sigma\tau) \begin{cases} \frac{\eta\mu x \eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu y} = a \\ x - y = \beta \end{cases}, (\zeta) \begin{cases} \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu y}{\sigma\upsilon\nu x \eta\mu y} = a \\ x + y = \beta \end{cases}$$

$$(\eta) \begin{cases} \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu y}{\sigma\upsilon\nu x \eta\mu y} = a \\ x - y = \beta \end{cases}$$

Για αυτά τα οκτώ συστήματα έχουμε κοινό τρόπο λύσης και για το λόγο αυτό θα περιοριστούμε στο να αναπτύξουμε μόνο τον τρόπο λύσης του (α). Προς τούτο διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1^{\text{ov}}) \text{ αν } a = 1 \Rightarrow (a) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x = \eta\mu y \\ x + y = \beta \\ y \neq k\pi \end{cases} \quad (1) \text{ Οι λύσεις του (1) είναι οι λύσεις των}$$

$$\text{συστημάτων (i) } \begin{cases} x = 2\lambda\pi + y \\ x + y = \beta \\ y \neq k\pi \end{cases} \quad (\text{ii}) \quad \begin{cases} x = (2\lambda + 1)\pi - y \\ x + y = \beta \\ y \neq k\pi \end{cases}$$

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\beta}{2} + \lambda\pi \\ y = \frac{\beta}{2} - \lambda\pi \\ y \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\beta}{2} + \lambda\pi \\ y = \frac{\beta}{2} - \lambda\pi \\ \frac{\beta}{2} - \lambda\pi \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\beta}{2} + \lambda\pi \\ y = \frac{\beta}{2} - \lambda\pi \\ \beta \neq 2(\lambda + k)\pi \end{cases}.$$

$$(ii) \quad \begin{cases} x + y = 2\lambda\pi + \pi \\ x + y = \beta \\ y \neq k\pi \end{cases} \quad (2). \text{ Αν } \beta = 2\lambda\pi + \pi \text{ τότε το (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2\lambda\pi + \pi \\ y \neq k\pi \end{cases}$$

Και οι λύσεις αυτού είναι $\begin{pmatrix} y = \theta \neq k\pi \\ x = 2\lambda\pi + \pi - \theta \end{pmatrix}$. Αν εξ αυτού $\beta \neq 2\lambda\pi + \pi$ τότε το (2) είναι αδύνατο.

$$(2^{\text{ov}}) \text{ αν } a \neq 1 \Rightarrow (a) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\eta\mu x + \eta\mu y}{\eta\mu x - \eta\mu y} = \frac{a+1}{a-1} \\ x + y = \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{2\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{x-y}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{a+1}{a-1} \\ x + y = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{a+1}{a-1} \\ x + y = \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right)\sigma\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{a+1}{a-1} \\ x + y = \beta \end{cases} \quad (3)$$

$$(2.a) \text{ αν } \varepsilon\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{a+1}{a-1}\sigma\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ x+y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sigma\varphi\tau \\ x+y = \beta \\ \tau = \tau o_{\xi_0} \sigma\varphi \frac{a+1}{a-1} \sigma\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
&\left\{ \begin{array}{l} x-y = 2\lambda\pi + 2\tau \\ x+y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\beta}{2} + \lambda\pi + \tau \\ y = \frac{\beta}{2} - \lambda\pi - \tau \end{array} \right\} \\
&(2.\beta) \text{ αν } \varepsilon\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \sigma\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{a+1}{a-1} \\ x+y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
&\text{και εάν } \alpha = -1 \Rightarrow (4) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-y}{2} \neq \lambda\pi \\ x+y = 2k\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y \neq 2\lambda\pi \\ x+y = 2k\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = \theta \\ y = 2k\pi - \theta \\ 2\theta - 2k\pi \neq 2\lambda\pi \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = \theta \\ y = 2k\pi - \theta \\ \theta \neq (\lambda + \kappa)\pi \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Παρατήρηση. Το σύστημα (3) ελήφθη από το προηγούμενο με την αντικατάσταση $x+y = \beta$. Τίθεται το ερώτημα αν η αντικατάσταση είναι δυνατή, δηλαδή αν $\beta \neq 2k\pi + \pi$. Αυτό όμως στην περίπτωση οπου εργαζόμαστε με $\alpha \neq 1$ είναι αληθές, διότι εάν $\beta = 2k\pi + \pi$ το αρχικό σύστημα δίνει $\alpha = 1$.

2.4 Ομάδα 4^η

$$\begin{aligned}
&(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = a \\ x+y = \beta \end{array} \right\}, (\beta) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi y = a \\ x-y = \beta \end{array} \right\}, (\gamma) \left\{ \begin{array}{l} \sigma\varphi x - \sigma\varphi y = a \\ x+y = \beta \end{array} \right\} \\
&(\delta) \left\{ \begin{array}{l} \sigma\varphi x - \sigma\varphi y = a \\ x-y = \beta \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Τα συστήματα της ομάδας αυτής λύνονται όπως θα λυθεί παρακάτω το (α)

$$\begin{aligned}
&(\alpha) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y} = \alpha \\ x+y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = \eta\mu\beta \\ x+y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
&\left\{ \begin{array}{l} \alpha\sigma\upsilon\nu(x+x) + \alpha\sigma\upsilon\nu(x-x) = 2\eta\mu\beta \\ x+y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha\sigma\upsilon\nu(x-y) = 2\eta\mu\beta - \alpha\sigma\upsilon\nu\beta \\ x+y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \quad (1)
\end{aligned}$$

$$(1^{ov}) \text{ Εάν } \alpha=0 \Rightarrow (1) \left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \sigma\upsilon\nu(x-y) = 2\eta\mu\beta \\ x+y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$(1.a) \text{ αν } \eta\mu\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \lambda\pi \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y = \lambda\pi \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y = k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

$$\text{Άρα, } \left(\begin{array}{l} x = \theta \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = \lambda\pi - \theta \end{array} \right).$$

(1.β) αν $\eta\mu\beta \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq \lambda\pi \Rightarrow (2)$ αδύνατο αρά και το αρχικό

$$(2^{ov}) \text{ αν } \alpha \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(x-y) = \frac{2\eta\mu\beta - \alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha} \\ x+y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$(2.a) \text{ αν } \left| \frac{2\eta\mu\beta - \alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha} \right| \leq 1 \Rightarrow (3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(x-y) = \sigma\upsilon\nu\tau \\ x+y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \\ \tau = \tau_{0\xi_0} \sigma\upsilon\nu \left[\frac{2\eta\mu\beta - \alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha} \right] \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y = 2k\pi \pm \tau \\ x+y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{Τις λύσεις αυτού λαμβάνουμε από τα γνωστά}$$

$$(2.β) \text{ αν } \left| \frac{2\eta\mu\beta - \alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha} \right| > 1 \Rightarrow (3) \text{ αδύνατο}$$

2.5 Ομάδα 5^η

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = \alpha \\ x-y = \beta \end{array} \right\}, (b) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi y = \alpha \\ x+y = \beta \end{array} \right\}, (γ) \left\{ \begin{array}{l} \sigma\varphi x + \sigma\varphi y = 0 \\ x-y = \beta \end{array} \right\}$$

$$(δ) \left\{ \begin{array}{l} \sigma\varphi x - \sigma\varphi y = 0 \\ x+y = \beta \end{array} \right\}$$

Για τη λύση των συστημάτων αυτής της ομάδας θα εργαστούμε όπως και για τη λύση του (α)

$$\begin{aligned}
(a) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y} = a \\ x-y = \beta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu(x+y) = \alpha\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \\ x-y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
\left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu(x+y) = \alpha\sigma\upsilon\nu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(x-y) \\ x-y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu(x+y) - \alpha\sigma\upsilon\nu(x+y) = a\sigma\upsilon\nu\beta \\ x-y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (1) είναι γραμμική ως προς $\eta\mu(x+y)$, $\sigma\upsilon\nu(x+y)$ και επειδή $2^2 + \alpha^2 \geq \alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2 \beta \Leftrightarrow 4 + \alpha^2 (1 - \sigma\upsilon\nu^2 \beta) \geq 0 \Leftrightarrow 4 + \alpha^2 \eta\mu^2 \beta \geq 0$ για κάθε α και β η εξίσωση έχει λύση, αρά το (1) γράφεται:

$$\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu(x+y) - \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(x+y) = \frac{a}{2} \sigma\upsilon\nu\beta \\ x-y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \\ \omega = \tau\sigma\xi_0 \varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \\
\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu(x+y-\omega) = \frac{a}{2} \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \\ x-y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu(x+y-\omega) = \eta\mu\tau \\ x-y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \\ \tau = \tau\sigma\xi_0 \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2} \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\omega\right) \end{array} \right\} (2)
\end{aligned}$$

Οι λύσεις του (2) θα προκύψουν ως λύσεις των συστημάτων:

$$\text{(i)} \left\{ \begin{array}{l} x+y-\omega = 2k\pi + \tau \\ x-y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}, \text{(ii)} \left\{ \begin{array}{l} x+y-\omega = (2k+1)\pi - \tau \\ x-y = \beta \\ x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, y \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

2.6 Ομάδα 6^η

$$\text{(α)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y} = \alpha \\ x+y = \beta \end{array} \right\}, \text{(β)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y} = \alpha \\ x-y = \beta \end{array} \right\}, \text{(γ)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma\varphi x}{\sigma\varphi y} = \alpha \\ x+y = \beta \end{array} \right\}, \text{(δ)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma\varphi x}{\sigma\varphi y} = \alpha \\ x-y = \beta \end{array} \right\}$$

$$\text{(ε)} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi y = \alpha \\ x+y = \beta \end{array} \right\}, \text{(στ)} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi y = \alpha \\ x-y = \beta \end{array} \right\}, \text{(ζ)} \left\{ \begin{array}{l} \sigma\varphi x \cdot \sigma\varphi y = \alpha \\ x+y = \beta \end{array} \right\},$$

$$(\eta) \begin{cases} \sigma\varphi x \cdot \sigma\varphi y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases}$$

Τα σύστημα αυτά είναι ισοδύναμα αντιστοίχως με τα παρακάτω:

$$(\alpha') \begin{cases} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y}{\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu y} = a \\ x + y = \beta \\ y \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}, (\beta') \begin{cases} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y}{\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu y} = a \\ x - y = \beta \\ y \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}, (\gamma') \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu y \cdot \eta\mu x} = a \\ x + y = \beta \\ y \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

$$(\delta') \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu y}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y} = a \\ x - y = \beta \\ y \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}, (\epsilon') \begin{cases} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y} = a \\ x + y = \beta \end{cases}, (\sigma\tau') \begin{cases} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y} = a \\ x - y = \beta \end{cases},$$

$$(\zeta') \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y}{\eta\mu x \cdot \eta\mu y} = a \\ x + y = \beta \end{cases}, (\eta') \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y}{\eta\mu x \cdot \eta\mu y} = a \\ x - y = \beta \end{cases}.$$

Τα τελευταία αυτά συστήματα ανήκουν στην τρίτη ομάδα και ως εκ τούτου γνωρίζουμε τον τρόπο λύσης τους.

3. Συστήματα δευτέρας κατηγορίας

Στα συστήματα αυτής της κατηγορίας δε θα υποδείξουμε το γενικό τρόπο λύσης, καθώς παρουσιάζονται με ποικίλες μορφές. Για την εξοικείωσή του σπουδαστή με τα συστήματα αυτής της κατηγορίας θα λυθούν στην παραγραφώ των ασκήσεων όσο το δυνατόν περισσότερα. Για τώρα περιοριζόμαστε με το να αναφέρουμε τα συμμετρικά συστήματα ως προς τα γνωστά τόξα x, y . Συμμετρικά είναι και τα παρακάτω:

$$(\alpha) \begin{cases} \eta\mu x + \eta\mu y = a \\ \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases}, (\beta) \begin{cases} \eta\mu x \cdot \eta\mu y = a \\ \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases}, (\gamma) \begin{cases} \eta\mu x + \eta\mu y = a \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases}$$

$$(\delta) \begin{cases} \eta\mu x \cdot \eta\mu y = a \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases}, (\epsilon) \begin{cases} \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = a \\ \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases}, (\sigma\tau) \begin{cases} \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = a \\ \eta\mu x \eta\mu y = \beta \end{cases}$$

3.1 Λύση του (α)

$$\begin{cases} \eta\mu x + \eta\mu y = a \\ \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = a \\ 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = \beta \end{cases} \quad (1)$$

$$(1^{ov}) \text{ αν } \beta = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = \alpha \\ 2\sigma\nu\nu\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$(1.a) \text{ αν } a = 0 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \left\{ \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0 \right\} \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x - y = 2k\pi + \pi \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} y = \theta \\ x = 2k\pi + \pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ σε ακτίνια} \end{array} \right)$$

$$(1.\beta) \text{ αν } a \neq 0 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = a \\ \sigma\nu\nu\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right) \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = a \\ x + y = 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(-1)^k \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = a \\ x + y = 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{a(-1)^k}{2} \\ x + y = 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$(1.\beta i) \text{ αν } \left| \frac{\alpha(-1)^k}{2} \right| > 1 \Leftrightarrow |\alpha| > 2 \Rightarrow (3) \text{ αδύνατο.}$$

$$(1.\beta ii) \text{ αν}$$

$$|\alpha| \neq 0 \leq 2 \Rightarrow (3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sigma\nu\nu\tau \\ x + y = 2k\pi + \pi \\ \tau = \tau o \xi_0 \sigma\nu\nu\left(\frac{\alpha(-1)^k}{2}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-y}{2} = 2\lambda\pi \pm \tau \\ x + y = 2k\pi + \pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 4\lambda\pi \pm 2\tau \\ x + y = 2k\pi + \pi \end{array} \right\}$$

και η περαιτέρω λύσης είναι απλή.

$$(2^{ov}) \text{ αν } \beta \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right) \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = a \\ \varepsilon\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{a}{\beta} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)=a \\ \frac{x+y}{2}=k\pi+\tau \\ \tau=\tau_0\xi_0\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(-1)^k\eta\mu\tau\cdot\sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)=a \\ x+y=2k\pi+2\tau \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$(2.a) \quad \text{αν} \quad \eta\mu\tau \neq 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\tau \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow (4)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{a(-1)^k}{2\eta\mu\tau} \\ x+y=2k\pi+2\tau \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$(2.ai) \text{ αν } \left| \frac{\alpha(-1)^k}{2\eta\mu\tau} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 4\eta\mu^2\tau \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 4 \frac{\varepsilon\varphi^2\tau}{1+\varepsilon\varphi^2\tau} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 \leq 4 \frac{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}} \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 4 \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 \leq 4 \Rightarrow (5) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\nu\nu\frac{x-y}{2}=\sigma\nu\nu\theta \\ x+y=2k\pi+2\tau \\ \theta=\tau_0\xi_0\sigma\nu\nu\left(\frac{\alpha(-1)^k}{2\eta\mu\tau}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y=4\lambda\pi\pm 2\theta \\ x+y=2k\pi-2\tau \end{array} \right\} \text{ Και λύνεται εύκολα.}$$

$$(2.a.ii) \text{ αν } \left| \frac{\alpha(-1)^k}{2\eta\mu\tau} \right| > 1 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 > 4 \Rightarrow (5) \text{ αδύνατο}$$

(2.β) αν $\eta\mu\tau=0$ τότε $\tau=0$ και $\alpha=0$ άρα το (1) δίνει το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)=0 \\ 2\sigma\nu\nu\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)=\beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right)=0 \\ 2\sigma\nu\nu\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)=\beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{2}=k\pi \\ 2(-1)^k\sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)=\beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=2k\pi \\ \sigma\nu\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{\beta(-1)^k}{2} \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$(2.βi) \text{ αν } \left| \frac{\beta(-1)^k}{2} \right| > 1 \Leftrightarrow |\beta| > 2 \Rightarrow (6) \text{ αδύνατο}$$

$$(2\beta.ii) \text{ αν } |\beta| \leq 2 \text{ είναι } (6) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=2k\pi \\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\omega \\ \omega=\tau\omega\xi_0\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta(-1)^k}{2}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=2k\pi \\ x-y=4\lambda\pi \pm 2\omega \end{array} \right\}$$

και λύνεται κατά τα γνωστά.

Συμπεράσματα.

(α) Το σύστημα έχει λύση με ζεύγος (α, β) το οποίο πληροί την $\alpha^2 + \beta^2 \leq 4$.

(β) Το σύστημα δεν έχει λύση για κάθε (α, β) το οποίο πληροί την $\alpha^2 + \beta^2 > 4$.

3.2 Λύση του (β)

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu x \cdot \eta\mu y = a \\ \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{array} \right\} (1)$$

Παρατηρήσεις. Μια αναγκαία συνθήκη ώστε το (1) να έχει λύση είναι όπως τα (α, β) επαληθεύουν συγχρόνως τα $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 2$, διότι προφανώς αν μια των προηγούμενων δεν ικανοποιείται, τότε το (1) είναι αδύνατο. Αν ένα τουλάχιστον από το α, β είναι μηδέν τότε το (1) είναι απλής μορφής και λύνεται εύκολα. Μετά από τις άνω παρατηρήσεις η λύση του συστήματος θα γίνει με τις προϋποθέσεις

$$|\alpha| \leq 1 \wedge |\beta| \leq 2 \wedge \alpha\beta \neq 0 \quad (A). \text{ Τότε}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(x-y) - \sigma\upsilon\nu(x+y) = 2\alpha \\ 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x+y}{2}\right) = a \\ 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = \beta \end{array} \right\} (2)$$

Αν θέσουμε $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = z, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+y}{2}\right) = \omega$ τότε το (2) είναι ένα

αλγοριθμικό σύστημα ομογενές ως προς z, ω και συνεπώς θα έχουμε να λύσουμε το παρακάτω σύστημα με τις προϋποθέσεις (A).

$$\left\{ \begin{array}{l} z^2 - \omega^2 = \alpha \\ 2z\omega = \beta \\ z = \omega t \\ |z| \leq 1, |\omega| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega^2 t^2 - \omega^2 = \alpha \\ 2\omega^2 t = \beta \\ z = \omega t \\ |z| \leq 1, |\omega| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{a}{b} \\ 2\omega^2 t = \beta \\ z = \omega t \\ |z| \leq 1, |\omega| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta t^2 - 2\alpha t - \beta = 0 \\ 2\omega^2 t = \beta \\ z = \omega t \\ |z| \leq 1, |\omega| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \\ 2\omega^2 t = \beta \\ z = \omega t \\ |z| \leq 1, |\omega| \leq 1 \end{array} \right\} (3)$$

Επειδή από τη δεύτερη το t και το β πρέπει να είναι ομόσημα, λαμβάνουμε:

$$(3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{a + \sqrt{a^2 + \beta^2}}{2} \\ \omega^2 = \frac{\beta^2}{2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} \\ z = \omega t \\ |z| \leq 1, |\omega| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{a + \sqrt{a^2 + \beta^2}}{2} \\ \omega = \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}} \\ z = \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 + \beta^2}}{2} \\ |z| \leq 1, |\omega| \leq 1 \end{array} \right\}$$

Οι τιμές των ω, z που βρέθηκαν θα είναι δεκτές εάν πληρούν το $|\omega| \leq 1, |z| \leq 1$.

Αν αυτό είναι αληθές, θα έχουμε να λύσουμε τα παρακάτω απλά συστήματα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu \frac{x-y}{2} = z_1 \\ \sigma\upsilon\nu \frac{x+y}{2} = \omega_1 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu \frac{x-y}{2} = -z_1 \\ \sigma\upsilon\nu \frac{x+y}{2} = -\omega_1 \end{array} \right\}$$

3.3 Λύση του (γ)

Το σύστημα αυτό λύνεται όπως το (β).

3.4 Λύση του (δ)

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu x \cdot \eta\mu y = a \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(x-y) - \sigma\upsilon\nu(x+y) = 2\alpha \\ \sigma\upsilon\nu(x-y) + \sigma\upsilon\nu(x+y) = 2a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(x-y) = a + \beta \\ \sigma\upsilon\nu(x+y) = \beta - \alpha \end{array} \right\}$$

(1^{ov}) αν $|\alpha + \beta| > 1$ ή $|\beta - \alpha| > 1$ το σύστημα είναι αδύνατο.

$$(2^{ov}) \quad \text{αν} \quad |\alpha + \beta| \leq 1 \quad \text{και} \quad |\beta - \alpha| \leq 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(x-y) = \sigma\upsilon\nu\tau \\ \sigma\upsilon\nu(x+y) = \sigma\upsilon\nu\theta \\ \tau = \tau\omega_{\xi_0} \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \\ \theta = \tau\omega_{\xi_0} \sigma\upsilon\nu(\beta - \alpha) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y = 2k\pi \pm \tau \\ x+y = 2\lambda\pi \pm \theta \\ k, \lambda \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \quad (2) \quad \text{Για την εύρεση των λύσεων (2), αρκεί να λυθούν τα}$$

παρακάτω απλά αλγεβρικά συστήματα:

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} x-y = 2k\pi + \tau \\ x+y = 2\lambda\pi + \theta \end{array} \right\}, \quad (B) \left\{ \begin{array}{l} x-y = 2k\pi + \tau \\ x+y = 2\lambda\pi - \theta \end{array} \right\}, \quad (Γ) \left\{ \begin{array}{l} x-y = 2k\pi - \tau \\ x+y = 2\lambda\pi + \theta \end{array} \right\},$$

$$(Δ) \left\{ \begin{array}{l} x-y = 2k\pi - \tau \\ x+y = 2\lambda\pi - \theta \end{array} \right\}.$$

3.5 Λύση του (ε)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = a \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y} = a \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{array} \right\} \quad (1)$$

(1^{ov}) αν $\beta=0$, το σύστημα δεν έχει νόημα, διότι τότε ένα από τα $\sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu y$ θα είναι μηδέν, αλλά τότε δεν θα έχει νόημα η αντίστοιχη εφαπτομένη.

$$(2^{\text{ov}}) \text{ αν } \beta \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu(x+y) = \alpha\beta \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu(x+y) = \alpha\beta \\ \sigma\upsilon\nu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(x-y) = 2\beta \end{array} \right\} \quad (2)$$

(2.α) αν

$$|\alpha\beta| \leq 1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu(x+y) = \eta\mu\tau \\ \sigma\upsilon\nu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(x-y) = 2\beta \\ \tau = \tau_{0\xi_0} \eta\mu(\alpha\beta) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y = k\pi + (-1)^k \tau \\ (-1)^k \sigma\upsilon\nu\tau + \sigma\upsilon\nu(x-y) = 2\beta \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y = k\pi + (-1)^k \tau \\ \sigma\upsilon\nu(x-y) = 2\beta - (-1)^k \sigma\upsilon\nu\tau \end{array} \right\}$$

(2.αι) αν

$$|2\beta - (-1)^k \sigma\upsilon\nu\tau| \leq 1 \Rightarrow (3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y = k\pi + (-1)^k \tau \\ \sigma\upsilon\nu(x-y) = \sigma\upsilon\nu\theta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y = k\pi + (-1)^k \tau \\ x-y = 2\lambda\pi \pm \theta \end{array} \right\} \text{ Και}$$

λύνεται κατά τα γνωστά με $k=2\rho, k=2\rho+1$.

(2.αιι) αν $|2\beta - (-1)^k \sigma\upsilon\nu\tau| > 1 \Rightarrow (3)$ αδύνατο.

3.6 Λύση του (στ)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = a \\ \eta\mu x \cdot \eta\mu y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y} = a \\ \eta\mu x \cdot \eta\mu y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu(x+y) = \alpha\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \\ \eta\mu x \cdot \eta\mu y = \beta \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu(x+y) = \alpha\sigma\upsilon\nu(x+y) + \alpha\sigma\upsilon\nu(x-y) \\ \sigma\upsilon\nu(x-y) - \sigma\upsilon\nu(x+y) = 2\beta \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu(x+y) = \alpha\sigma\upsilon\nu(x+y) + \alpha\sigma\upsilon\nu(x-y) \\ \sigma\upsilon\nu(x-y) = 2\beta + \sigma\upsilon\nu(x+y) \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu(x+y) - 2\alpha\sigma\upsilon\nu(x+y) = 2\alpha\beta \\ \sigma\upsilon\nu(x-y) = 2\beta + \sigma\upsilon\nu(x+y) \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \neq 0 \end{array} \right\}$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (1) είναι ως προς $\eta\mu(x+y)$, $\sigma\upsilon\nu(x+y)$ συνεπώς αν $2^2 + 4\alpha^2 \geq 4\alpha^2 \beta^2$ τότε η εξίσωση έχει λύση, οπότε λαμβάνουμε το $(x+y)$ και αντικαθιστώντας τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε το $(x-y)$ και λύνουμε κατά τα γνωστά.