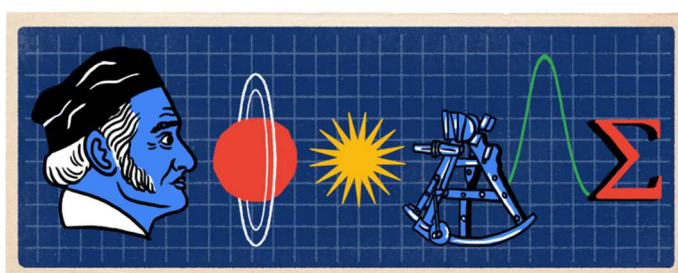




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Το έργο και η ζωή του Carl Friedrich Gauss



Σπουδαστής: Θωμάς Θεμιστοκλής (AM 8627)
Κακλαμάνης Παναγιώτης (AM 8634)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2022–2023

Ημερομηνία ανάθεσης: **18.11.2021**

Ημερομηνία κατάθεσης: **...02.2023**

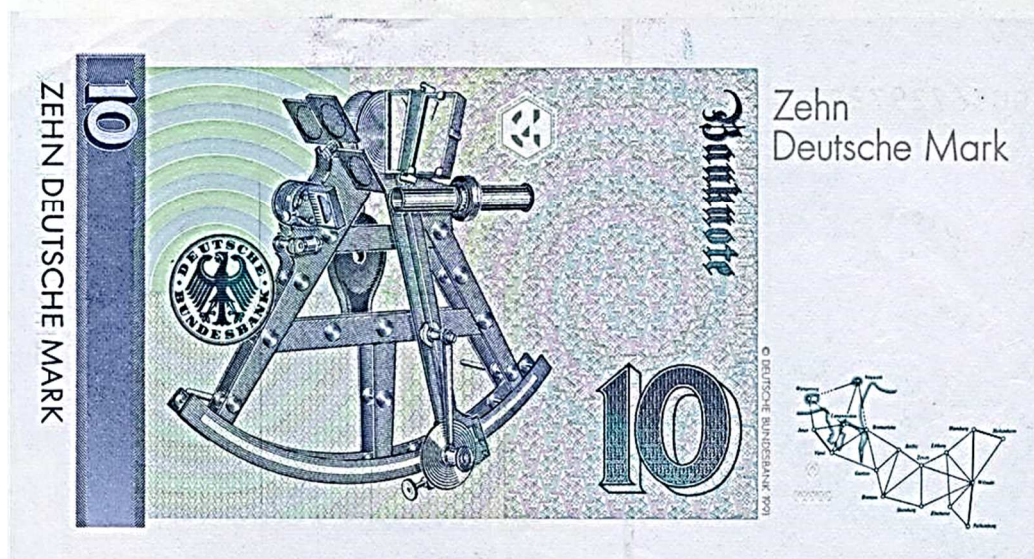
Ημερομηνία εξέτασης: **...02.2023**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Οπτικό υλικό	3
Το έργο και η ζωή του Gauss.....	10
Βιβλιογραφία	46









Absender:
(Vor- und Zuname) *P. H. H. H.*

Stuttgart
Wohnort, auch Zustell- oder Leitpostamt
Heistergasse 106
Straße, Hausnummer, Gebäudeteil, Stockwerk oder Post-
schließfachnummer; bei Untermietern auch Name des
Vermieters

POSTKARTE

Monsieur
Jean Pallud
38 Rue de Raspail
Paris 7e
France

Straße, Hausnummer, Gebäudeteil, Stockwerk oder Post-
schließfachnummer; bei Untermietern auch Name des
Vermieters

2. 53 640 000 + C 134

10



Morena
Prenato ha
cote. May
attention

J'ai lu avec la plus grande satisfaction le mémoire
que vous m'avez fait l'honneur de m'envoyer.

Je ne puis me croire digne du présent que vous m'avez
fait que par mon empressement à l'étudier.

Quittés qu'un rapport déjà ancien de M^r
Delambre m'eût appris tout quel point devant
vous envisager la science des nombres j'ai dû
connaître vos recherches. Je pensais dès lors
que j'y trouverais, en quelque sorte, la justification
des procédés que j'employais à la détermination
de l'ordre des ^{considérés} restes dans la série des nombres
naturels.

La lecture de votre mémoire insérée dans l'Ann-

Voici ce que j'ai trouvé:

L'ordre dans lequel les résidus (puissances égales et impaires)
se trouvent placés dans la série des nombres naturels
détermine les diviseurs nécessaires qui appartiennent
aux nombres entre lesquels on établit non seulement l'équation
de Fermat, mais encore beaucoup d'autres équations analogues
à celle-là.

Prenez pour exemple l'équation même de Fermat qui
est la plus simple de toutes celles dont il s'agit ici.

Soit donc, p étant un nombre premier, $z^p = x^p + y^p$.

Je dis que si cette équation est possible, tout nombre
premier de la forme $8Np+1$ (N étant un entier quelconque)
pour lequel il n'y aura pas deux résidus première puissance
placés de suite dans la série des nombres naturels divisera
nécessairement l'un des nombres z , y et x .

Cela est évident, car l'équation donne $z^p = x^p + y^p$ donne
la congruence $1 \equiv x^{p-1} + y^{p-1}$ dans laquelle x représente une
racine primitive de 1 et y des entiers.



Born	Johann Carl Friedrich Gauss 30 April 1777 Brunswick, Principality of Brunswick-Wolfenbüttel
Died	23 February 1855 (aged 77) Göttingen, Kingdom of Hanover, German Confederation
Alma mater	Collegium Carolinum University of Göttingen University of Helmstedt
Known for	See full list
Spouse(s)	Johanna Osthoff (m. 1805; died 1809) Minna Waldeck (m. 1810; died 1831)
Children	Joseph Wilhelmina Louis Eugene Wilhelm Therese
Awards	Lalande Prize (1809) Copley Medal (1838)
	Scientific career
Fields	Mathematics and sciences
Institutions	University of Göttingen
Thesis	<i>Demonstratio nova...</i> (1799)
Doctoral advisor	Johann Friedrich Pfaff
Other academic advisors	Johann Christian Martin Bartels
Influences	Leonhard Euler
Influenced	Ferdinand Minding

Το έργο και η ζωή του Gauss

Η περαιτέρω επεξεργασία ανάπτυξης της συστηματικής Αριθμητικής, όπως σχεδόν οτιδήποτε άλλο παρήγαγαν τα μαθηματικά του αιώνα μας [19^{ος}] από άποψη πρωτότυπων επιστημονικών ιδεών, συνδέονται στενά με τον Gauss.

Ο Αρχιμήδης, ο Νεύτων και ο Gauss αποτελούν μόνοι τους μια κλάση ανάμεσα στους μεγάλους μαθηματικούς και δεν είναι δουλειά των κοινών θνητών να επιχειρήσουν να τους κατατάξουν ως προς την αξία τους. Και οι τρεις προξένησαν παλιρροϊκά κύματα τόσο στα καθαρά όσο και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά: ο Αρχιμήδης έτρεφε μεγαλύτερη εκτίμηση για τα καθαρά μαθηματικά του απ' ότι για τις εφαρμογές τους, για τον Νεύτωνα φαίνεται ότι επιστημονικές χρήσεις των μαθηματικών επινοήσεων του αποτελούν τη βάση καταξίωσή τους, ενώ ο Gauss δήλωνε ότι του ήταν αδιάφορο αν δούλευε στην καθαρή ή στην εφαρμοσμένη πλευρά των μαθηματικών. Παρ' όλα αυτά, η δουλειά του έδωσε το στέμμα της Βασίλισσας των μαθηματικών στην ανώτερη αριθμητική, που στις μέρες του ήταν η λιγότερο πρακτική κατεύθυνση των μαθηματικών. Η καταγωγή του Gauss, του Πρίγκιπα των μαθηματικών, ήταν κάθε άλλο παρά βασιλική. Γιός φτωχών γονέων γεννήθηκε σε ένα άθλιο αγρόκτημα στο Brunswick (Braunschweig) της Γερμανίας στις 30.04.1777. Ο παππούς από τη μεριά του πατέρα του ήταν ένας φτωχός αγρότης.

Το 1740 ο παππούς εγκαταστάθηκε στο Brunswick, όπου δουλεύοντας σκληρά ως κηπουρός ζούσε μια στερημένη ζωή. Ο δεύτερος απ' τρεις γιούς του, ο Gerhard Diederich, γεννημένος το 1744, έγινε πατέρας του Gauss. Πέρα από αυτή τη μοναδική τιμή, σε όλη του τη ζωή που την πέρασε δουλεύοντας σκληρά ως κηπουρός, φύλακας καναλιών και κτίστης, ο Gerhard δεν γνώρισε καμία άλλη διάκριση οποιουδήποτε είδους. Η εικόνα που έχουμε για τον πατέρα του Gauss είναι εκείνη ενός άκρως έντιμου και ευσυνειδήτου, άξεστου ανθρώπου, του οποίου η τραχύτητα προς τους γιούς του άγγιζε μερικές φορές τα όρια της κτηνωδίας.

Τα λόγια του ήταν σκληρά και το χέρι του βαρύ. Με την εντιμότητα και την υπομονή του, πέτυχε βαθμιαία μια ορισμένη βελτίωση της ζωής του, όμως τα πράγματα δεν υπήρξαν ποτέ εύκολα. Δεν αποτελεί έκπληξη που ένας τέτοιος άνθρωπος έκανε ότι περνούσε απ' το χέρι του για να σταματήσει την εξέλιξη του μικρού γιού του και να τον εμποδίσει να μορφωθεί, σύμφωνα με τις ικανότητες του. Αν είχε γίνει το δικό του, το προικισμένο αγόρι θα είχε ακολουθήσει κάποιο από τα επαγγέλματα της οικογένειας και μόνο μια σειρά από ευτυχείς συγκυρίες έσωσαν τον Gauss από το να γίνει κηπουρός ή κτίστης.

Ως παιδί ήταν υπάκουος, έδειχνε σεβασμό και παρ' όλο που ποτέ, ούτε και σε μεγαλύτερη ηλικία, δεν είχε αισθανθεί πραγματική στοργή γι' αυτόν. Ο Gerhard πέθανε το 1806. Στο μεταξύ ο γιός του, τον οποίο είχε προσπαθήσει με κάθε τρόπο να αποθαρρύνει, είχε ήδη δημιουργήσει ένα αθάνατο έργο. Ο Gauss πραγματικά ευτύχησε από την πλευρά της μητέρας του. Ο πατέρας της Δωροθέας Benz ήταν λατόμος και πέθανε στα τριάντα του από φυματίωση, αποτέλεσμα των ανθυγιεινών συνθηκών εργασίας, αφήνοντας πίσω του δύο παιδιά: τη Δωροθέα και τον νεότερο αδερφό της τον Frienderich. Εδώ γίνεται φανερό η καταγωγή της μεγαλοφυΐας του Gauss. Καταδικασμένος από την ανέχεια να ασκεί το επάγγελμα του υφαντή, ο Frienderich ήταν ένας ιδιαίτερα ευφυής καλόκαρδος άνθρωπος, του οποίου το οξύ και ανήσυχο μυαλό βοσκούσε σε χωράφια, απομακρυσμένα από τον περιορισμένο χώρο της καθημερινής ζωής. Στο επάγγελμα του, ο Frienderich γρήγορα απέκτησε τη φήμη υφαντή των καλύτερων δαμασκηνών, μια τέχνη που την κατέκτησε ολομόναχος.

Βρίσκοντας ένα ανάλογο ιδιοσύστατης μυαλό στο παιδί της αδερφής του, ο έξυπνος θεός Frienderich ακόνιζε το μυαλό πάνω σε κείνο του μεγαλοφυούς νεαρού και έκανε ότι μπορούσε για να ενεργοποιήσει τη λογική του αγοριού με ειρωνικές

παρατηρήσεις και με μια κάπως κοροϊδευτική φιλοσοφία για τη ζωή. Ο Friederich, ήξερε τι έκανε ο Gauss εκείνη την εποχή, ίσως όμως και όχι. Ο δεύτερος όμως, διέθετε μια φωτογραφική μνήμη που διατηρούσε τις εντυπώσεις της βρεφικής και παιδικής του ζωής άφθαρτες, ως τον θάνατο του. Μεγάλος πια, αναλογιζόμενος όσα ο Friederich είχε κάνει για αυτόν και αναπολώντας το γόνιμο εκείνο μυαλό, που ένας πρόωρος θάνατος το εμπόδιζε να φτάσει στην καρποφορία, ο Gauss έλεγε με οδύνη πως «χάθηκε μια γεννημένη μεγαλοφυΐα». Η Δωροθέα μετακινήθηκε στο Brunswick το 1769. Στα τριάντα τέσσερα της (1776) παντρεύτηκε τον πατέρα του Gauss.

Ένα χρόνο μετά γεννήθηκε ο γιος της. Το πλήρες όνομά του ήταν Johann Friederich Carl Gauss. Σε μεγαλύτερη ηλικία, υπέγραφε τα αριστουργήματά του απλώς ως Carl Friederich Gauss. Αν με τον Frienerich Benz χάθηκε μια μεγαλοφυΐα, το όνομα του επιζεί σ' εκείνο του ευγνώμονα ανιψιού του. Η μητέρα του Gauss, ήταν μία ντόμπρα γυναίκα με ισχυρό χαρακτήρα, οξύνους και με καυτό χιούμορ. Ο γιος της, ήταν το καμάρι της από την ημέρα της γέννησής του, ως την ημέρα θανάτου της στην ηλικία των 97 χρόνων. Όταν φάνηκε πως η εκπληκτική νοημοσύνη του «παιδιού θαύματος» των 2 χρόνων, που εντυπωσίαζε όλους τους γύρω σαν κάτι το μη γήινο, διατηρούνταν και ξεπερνούσε τις υποσχέσεις της βρεφικής του ηλικίας καθώς ο μικρός Gauss μεγάλωνε, η Δωροθέα Gauss πήρε το μέρος του αγοριού και νίκησε τον πεισματάρη σύζυγό της, που προσπαθούσε να αφήσει το παιδί αμόρφωτο όπως είχε μείνει εκείνος.

Η Δωροθέα περίμενε μεγάλα πράγματα από τον γιο της. Το ότι είχε κάποιες αμφιβολίες για το εφικτό των ονείρων της, φαίνεται από τις διστακτικές της ερωτήσεις σ' εκείνους που ήταν σε θέση να εκτιμήσουν τις ικανότητές του γιου της. Έτσι, όταν ο Gauss ήταν 19 χρονών, εκείνη ρώτησε τον φίλο του μαθηματικό Wolfgang Bolyai αν θα γινόταν ποτέ ο Gauss κάτι σημαντικό. Όταν ο Bolyai αναφώνησε ο «μεγαλύτερος μαθηματικός της Ευρώπης» εκείνη αναλύθηκε σε λυγμούς. Τα τελευταία 22 χρόνια της ζωής της, τα πέρασε στο σπίτι του γιου της, την τελευταία τετραετία ήταν τελείως τυφλή. Ο ίδιος ο Gauss, ελάχιστα νοιαζόταν για τη φήμη. Οι θρίαμβοι του, ήταν η ζωή της μητέρας του. Υπήρχε πάντα μία απόλυτη συνεννόηση ανάμεσα τους και ο Gauss την αντάμειψε για τη θαρραλέα υποστήριξη της, κατά τα παιδικά του χρόνια, με το να της εξασφαλίσει ήσυχα γερατειά. Όταν εκείνη τυφλώθηκε, την περιποιούνταν μόνος του και έκανε το νοσοκόμο στη διάρκεια της τελευταίας μακράς αρρώστιας της. Η Δωροθέα πέθανε στις 19.04.1839.

Ένα από τα πολλά ατυχήματα που θα μπορούσαν να είχαν αφήσει τον Αρχιμήδη και τον Νεύτωνα μόνους στην κορυφή των μαθηματικών, αναφέρεται από τον Gauss από το πρώτα παιδικά του χρόνια. Μία ανοιξιάτικη μπόρα έχει κάνει το κανάλι που περνούσε δίπλα από την αγροικία της οικογένειάς του να πλημμυρίσει. Παίζοντας κοντά στα νερά, ο Gauss παρασύρθηκε από αυτά και σχεδόν πνίγηκε.

Αν δεν είχε την τύχη να βρίσκεται κοντά ένας εργάτης, η ζωή του θα είχε τότε τελειώσει εκεί. Σε όλη την ιστορία των μαθηματικών, τίποτα δε μπορεί να συγκριθεί με τα κατορθώματα του Gauss όταν ήταν παιδί. Δε μας είναι γνωστό πότε έδειξε ο Αρχιμήδης για πρώτη φορά τη μεγαλοφυΐα του. Οι πιο πρώιμες εκδηλώσεις του υψίστου μαθηματικού ταλέντου του Νεύτωνα, ίσως πέρασαν απαρατήρητες.

Αν και φαίνεται απίστευτο, ο Gauss άφησε να φανεί το διαμέτρημά του, πριν κλείσει τα 3 του χρόνια. Κάποιο Σάββατο, ο Gerhard Gauss έκανε λογαριασμούς για τη βδομαδιατική πληρωμή των εργατών που είχε υπό την ευθύνη του, χωρίς να έχει αντιληφθεί πως ο μικρός του γιος παρακολουθούσε τη διαδικασία με κριτική προσοχή. Όταν έφτασε στο τέλος των μακρών του υπολογισμών, ο Gerhard τα 'χασε ακούγοντας το μικρό αγόρι να ψιθυρίζει «πατέρα ο λογαριασμός είναι λάθος, θα πρέπει να είναι....». Ένας έλεγχος έδειξε πως το νούμερο που είπε ο Gauss ήταν

σωστό. Πριν από αυτό, το αγόρι είχε εκμαιεύσει από τους γονείς, τους φίλους, την προφορά των γραμμάτων του αλφαβήτου και είχε μάθει να διαβάξει από μόνος του.

Κανένας δεν του είχε δείξει τίποτα στην αριθμητική αν και θα πρέπει να είχε συλλάβει το νόημα των ψηφίων 1,2,... παράλληλα με την εκμάθηση του αλφαβήτου. Σε μεγαλύτερη ηλικία, του άρεσε να αστειεύεται πως ήξερε να κάνει λογαριασμούς πριν μπορέσει να μιλήσει. Σε όλη του τη ζωή εξάλλου, διατήρησε μία μοναδική ικανότητα για πολύπλοκους υπολογισμούς. Λίγο μετά τα έβδομα γενέθλια του, ο Gauss πήγε για πρώτη φορά στο σχολείο, ένα άθλιο μεσαιωνικό λείψανο που το διεύθυνε ένας κτηνώδης τύπος ονόματι Buttner, που το σύστημα διδασκαλίας του συνίστατο στο να ρίξει τα 100 περίπου αγόρια που είχε επιφορτισθεί, σε μία τέτοια κατάσταση ηλιθιότητας από τον τρόπο, ώστε να ξεχνούν το ίδιο τους το όνομα.

Χαρακτηριστικό και αυτό εκείνων των παλιών καλών χρόνων, που νοσταλγούν συναισθηματικοί αντιδραστικοί. Ήταν σε αυτή την τρύπα της κόλασης που ο Gauss βρήκε την τύχη του. Τίποτα το εξαιρετικό δε συμβαίνει στη διάρκεια των πρώτων δύο χρόνων. Στη συνέχεια, όταν ήταν πια στα δέκα του έγινε δεκτός στην τάξη της αριθμητικής. Καθώς ήταν η πρώτη τάξη στην αριθμητική, κανένα από τα αγόρια δεν είχε ακούσει για αριθμητικές προόδους. Ήταν εύκολο λοιπόν για τον ηρωικό Buttner να τους δώσει έναν μακρύ πρόβλημα στην πρόσθεση, του οποίου την απάντηση μπορούσε να βρει ο ίδιος σε δευτερόλεπτα με τη βοήθεια ενός τύπου. Το πρόβλημα ήταν του είδους, $81297+81495+81693+.....+100899$, όπου το βήμα από έναν αριθμό στον επόμενο, είναι το ίδιο πάντα (εδώ 198) και πρέπει να προστεθούν ένας δεδομένος αριθμός όρων (εδώ 100). Ήταν συνήθεια του σχολείου, το αγόρι που πρώτο εύρισκε την απάντηση να αφήνει την πλάκα του στο τραπέζι, το δεύτερο θα άφηνε τη δική του πάνω στην πλάκα του πρώτου κ.ο.κ.

Ο Buttner, μόλις είχε τελειώσει τη διατύπωση του προβλήματος όταν ο Gauss άφησε την πλάκα του στο τραπέζι: «Εδώ είναι», είπε «Ligget se» στη χωριάτικη διαλεκτό του. Στη συνέχεια, όση ώρα οι συμμαθητές του μοχλούσαν, περίμενε με σταυρωμένα τα χέρια του, ενώ το βλέμμα του Buttner έπεφτε σαρκαστικό πού και πού πάνω του. Ο τελευταίος φανταζόταν πως ο μικρότερος μαθητής της τάξης ήταν και χοντροκέφαλος. Στο τέλος του προβλεπόμενου χρόνου, ο Buttner κοίταξε τις πλάκες. Στο Gauss υπήρχε μόνο ένας αριθμός. Έως το τέλος της ζωής του, ο Gauss έλεγε με μεγάλη ευχαρίστηση πως ο αριθμός που είχε δώσει ήταν ο σωστός και πως οι άλλοι είχαν κάνει λάθος. Κανένας δεν του είχε δείξει τον τρόπο για να λύνει εύκολα προβλήματα. Όταν ο σχετικός τύπος είναι γνωστός, η λύση φαίνεται συνηθισμένη όμως το να το βρει ένα αγόρι 10 χρονών αμέσως του ήταν κάτι ασυνήθιστο. Έτσι, άνοιξε η πόρτα από την οποία ο Gauss πέρασε στην αθανασία.

Ο Buttner εντυπωσιάστηκε τόσο με αυτό που κατάφερε χωρίς καθοδήγηση ένα αγόρι 10 χρονών, ώστε θέλησε αμέσως να εξιλεωθεί και, για έναν τουλάχιστον από τους μαθητές του, έγινε ανθρωπινότερος. Πλήρωσε ο ίδιος για την αγορά του καλύτερου διαθέσιμου εγχειριδίου αριθμητικής και το δώρισε στον Gauss. Το αγόρι έκανε αστραπιαία κτήμα του το βιβλίο. «Αυτός είναι πέρα από μένα», είπε ο Buttner. «Δε μπορώ να του διδάξω τίποτε περισσότερο». Από μόνος του ο Buttner ίσως να μην μπορούσε να κάνει πολλά για το μεγαλοφυή νεαρό. Είχε όμως έναν βοηθό, τον Johann Martin Bartels (1769-1836), ένα νεαρό με πάθος για τα μαθηματικά, που το καθήκον του ήταν να βοηθά τους νέους μαθητές στο γράψιμο και να ακονίζει τις γραφίδες τους. Ανάμεσα στο βοηθό των 17 και το μαθητή των 10, αναπτύχθηκε μια θερμή φιλία, που κράτησε σ' όλη τη ζωή του Bartels. Μελετούσαν μαζί, βοηθώντας ο ένας τον άλλον στις δυσκολίες και εξηγώντας τις αποδείξεις που περιείχε το κοινό τους εγχειρίδιο της άλγεβρας και των στοιχείων της ανάλυσης.

Από εδώ έλκει την προέλευση του ένα από τα κυρίαρχα ενδιαφέροντα όλης της σταδιοδρομίας του Gauss. Γρήγορα έγινε κάτοχος του διωνυμικού θεωρήματος

$$((1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} * x^3 + \dots$$

όπου ο n δεν είναι απαραίτητα θετικός ακέραιος, αλλά οποιοσδήποτε αριθμός. Αν ο n δεν είναι θετικός ακέραιος, η σειρά στο δεξί μέλος είναι άπειρη (μη τερματιζόμενη) και για να είμαστε σε θέση να πούμε τότε η σειρά αυτή είναι όντως ίση προς το $(1+x)^n$, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε κάτω από ποιούς περιορισμούς για το x και το n η άπειρη σειρά θα συγκλίνει σε ένα καθορισμένο, πεπερασμένο όριο. Έτσι αν $x = -2$ και $n = -1$, παίρνουμε το αλλόκοτο αποτέλεσμα ότι ο αριθμός $(1-2)^{-1}$ ή $(1)^{-1}$ ή $1/(-1)$ ή τελικά -1 είναι ίσος προς το $1+2+2^2+2^3+\dots$, δηλαδή το -1 είναι ίσο προς τον «άπειρο αριθμό» $1+2+4+8+\dots$, κάτι που φυσικά δεν μπορεί να ισχύει. Πριν θέσει ο νεαρός Gauss το ερώτημα για τη σύγκλιση των απείρων σειρών, προσφέροντάς μας έτσι τη δυνατότητα να υπολογίζουμε τις μαθηματικές εκφράσεις (συναρτήσεις) που αυτές αντιπροσωπεύουν, οι παλιότεροι αναλυτές δεν είχαν ασχοληθεί σοβαρά με την εξήγηση των μυστηρίων που προέκυπταν από τη μη κριτική χρησιμοποίηση των απείρων διαδικασιών.

Το πρώιμο συναπάντημα του Gauss με το διωνυμικό θεώρημα, στάθηκε η αφορμή για ορισμένες από τις μεγαλύτερες εργασίες του και ο ίδιος υπήρξε ο πρώτος από τους θιασώτες της «αυστηρής» αντιμετώπισης των μαθηματικών διαδικασιών. Μια απόδειξη του διωνυμικού θεωρήματος όταν ο n δεν είναι ακέραιος μεγαλύτερος του μηδενός, ξεπερνά ακόμη και σήμερα το βεληνεκές ενός στοιχειώδους εγχειριδίου.

Μένοντας ανικανοποίητος με αυτό που μαζί με τον Bartels βρήκαν στο βιβλίο τους, ο Gauss έδωσε μια απόδειξη. Αυτό στάθηκε το ξεκίνημά του στη μαθηματική ανάλυση. Η πεμπτουσία της ανάλυσης είναι η σωστή χρήση των απείρων διαδικασιών. Το έργο που είχε ξεκινήσει τόσο καλά, επρόκειτο να αλλάξει όλη την όψη των μαθηματικών. Ο Newton, ο Leibniz, ο Euler, ο Lagrange, ο Laplace, όλοι οι μεγάλοι αναλύστες της εποχής τους, δεν είχαν ουσιαστικά συλλάβει αυτό που είναι σήμερα δεκτό ως απόδειξη που περιλαμβάνει άπειρες διαδικασίες.

Ο πρώτος που είδε ξεκάθαρα ότι μια «απόδειξη» που μπορεί να οδηγήσει σε ανοησίες του τύπου « -1 ισούται προς το άπειρο» δεν είναι καθόλου απόδειξη, ήταν ο Gauss. Ακόμη και αν σε μερικές περιπτώσεις ένας μαθηματικός τύπος δίνει συνεπή αποτελέσματα, δεν έχει θέση στα μαθηματικά, μέχρι να καθοριστούν οι ακριβείς συνθήκες κάτω από τις οποίες θα εξακολουθεί να οδηγεί σε συνεπή αποτελέσματα.

Η αυστηρότητα που επέβαλε ο Gauss στην ανάλυση, σταδιακά επεκτάθηκε σε όλα τα μαθηματικά, τόσο στα θέματα που αντιμετώπιζε ο ίδιος όσο και σε εκείνα των συγχρόνων του, Abel, Cauchy και των διαδόχων τους, Weierstrass, Dedekind: τα μαθηματικά μετά τον Gauss έγιναν κάτι το τελείως διαφορετικό από τα μαθηματικά των Newton, Euler και Lagrange. Ο Gauss υπήρξε, κατά τρόπο εποικοδομητικό, ένας επαναστάτης. Πριν τελειώσει το σχολείο, το ίδιο κριτικό πνεύμα που τον άφησε ανικανοποίητο με το διωνυμικό θεώρημα τον έκανε να αμφισβητήσει τις αποδείξεις της στοιχειώδους γεωμετρίας. Στα 12 του κοίταζε ήδη με λοξό βλέμμα τα θεμέλια της ευκλείδειας γεωμετρίας· μέχρι τα δεκαέξι του είχε κάνει την πρώτη του ανίχνευση μιας γεωμετρίας διαφορετικής από την ευκλείδεια. Ένα χρόνο αργότερα, ξεκίνησε μια κριτική έρευνα των αποδείξεων στη θεωρία των αριθμών, αποδείξεων που είχαν ικανοποιήσει τους προγενεστέρους του, θέτοντας στον εαυτό του τον εξαιρετικά δύσκολο στόχο να καλύψει τα κενά και να συμπληρώσει τις ημιτελείς αποδείξεις.

Η αριθμητική, το πεδίο των πρώτων του θριάμβων, έγινε το αντικείμενο που τον έθελγε περισσότερο, εκεί όπου κυρίως έγκειται το αριστούργημά του. Στο σίγουρο αισθητήριό του για το τί είναι απόδειξη, ο Gauss προσέθεσε πάμπολλες

μαθηματικές ανακαλύψεις που έμειναν αξεπέραστες. Ο συνδυασμός ήταν ακαταμάχητος. Ο Bartels έκανε περισσότερα για τον Gauss από το να τον εισαγάγει στα μυστήρια της άλγεβρας. Ο νεαρός δάσκαλος είχε γνωριμίες με μερικούς ανθρώπους με επιρροή στο Brunswick και έβαλε στόχο να κερδίσει το ενδιαφέρον τους για το εύρημά του. Αυτοί με τη σειρά τους, εντυπωσιασμένοι από τη μεγαλοφυΐα του Gauss, έθεσαν την περίπτωση του υπ' όψιν του Carl Wilhelm Ferdinand, Δούκα του Brunswick. Ο Δούκας, δέχτηκε για πρώτη φορά τον Gauss το 1791. Ο Gauss ήταν τότε 14 χρόνων. Η μετριοφροσύνη του αγοριού και η αδέξια ντροπαλοσύνη του, κέρδισαν την καρδιά του γενναιόδωρου Δούκα.

Ο Gauss έφυγε έχοντας τη διαβεβαίωση πως η εκπαίδευσή του θα συνεχιζόταν. Τον επόμενο χρόνο (Φεβρουάριο 1792) γράφηκε στο Collegium Carolinum στο Brunswick. Ο Δούκας, πλήρωσε τα δίδακτρα και συνέχισε να τα πληρώνει μέχρι που ολοκληρώθηκε η εκπαίδευση του Gauss. Πριν εισέλθει στο κολλέγιο, σε ηλικία 15 χρόνων, ο Gauss είχε κάνει μεγάλες προόδους στις κλασικές γλώσσες, μελετώντας κατ' ιδίαν και βοηθούμενος από μεγαλύτερους φίλους, επισπεύδοντας έτσι μια κρίση στην καριέρα του. Για τον απελπιστικά πρακτικό πατέρα του, η μελέτη των αρχαίων γλωσσών ήταν το αποκορύφωμα της ανοησίας.

Η Δωροθέα Gauss πολέμησε για το αγόρι της, νίκησε και ο Δούκας έδωσε την οικονομική υποστήριξη για μια διετή επιμόρφωση στο γυμνάσιο. Εκεί, η εκτυφλωτική ικανότητα του Gauss στην εκμάθηση των κλασικών, άφησε εμβρόντητους δασκάλους και μαθητές μαζί. Ο Gauss αισθανόταν μια δυνατή έλξη για τις φιλολογικές σπουδές, ευτυχώς όμως για την επιστήμη σύντομα αισθάνθηκε μια ακόμη δυνατότερη έλξη για τα μαθηματικά. Μπαίνοντας στο κολλέγιο, ήταν ήδη κάτοχος των λατινικών, στα οποία είναι γραμμένες πολλές από τις σπουδαιότερες εργασίες του. Είναι χαρακτηριστικό μιας ανεπανόρθωτης συμφοράς, το ότι ακόμη και το παράδειγμα του Gauss στάθηκε ανίσχυρο απέναντι στην παλίρροια ενός μισαλλόδοξου εθνικισμού που σάρωσε την Ευρώπη μετά τη γαλλική επανάσταση και την πτώση του Ναπολέοντα.

Εκεί που είχε κανείς να κάνει με τα εύκολα λατινικά που αρκούσαν στους Euler και Gauss και τα οποία κάθε σπουδαστής μπορεί να μάθει μέσα σε λίγες εβδομάδες, οι επιστήμονες ερευνητές πρέπει σήμερα να έχουν τη δυνατότητα να διαβάζουν σε 2 ή 3 γλώσσες εκτός της δικής τους. Ο Gauss, αντιστάθηκε όσο μπορούσε, όμως και αυτός αναγκάστηκε να υποχωρήσει όταν οι αστρονόμοι φίλοι του στη Γερμανία τον πίεσαν να γράψει μερικές από τις αστρονομικές του εργασίες στα γερμανικά.

Ο Gauss σπούδασε στο Collegium Carolinum για 3 χρόνια, στη διάρκεια των οποίων αφομοίωσε τις πιο σημαντικές εργασίες του Euler, του Lagrange και κυρίως το νευτώνειο Principia. Ο μεγαλύτερος έπαινος που μπορεί να πάρει ένας μεγάλος άνδρας, είναι από έναν άλλον της κλάσης του. Ο Gauss ποτέ δε μετέβαλε την εκτίμηση που είχε για το Νεύτωνα από τα 17 του χρόνια.

Οι Euler, Laplace, Lagrange, Legendre, εμφανίζονται στα λατινικά του ως λαμπρότατοι, ενώ τον Νεύτωνα τον αποκαλεί κορυφαίο. Την εποχή που ήταν ακόμη στο κολλέγιο, ο Gauss είχε ξεκινήσει εκείνες τις έρευνες στην ανώτερη αριθμητική που επρόκειτο να του χαρίσουν την αθανασία. Οι εκπληκτικές υπολογιστικές του ικανότητες μπήκαν τώρα στο παιχνίδι. Πειραματιζόμενος με τους αριθμούς, ανακάλυπτε με επαγωγικό τρόπο βαθειά γενικά θεωρήματα που οι αποδείξεις τους απαιτούσαν ιδιαίτερη προσπάθεια ακόμη κι απ' αυτόν. Με αυτό τον τρόπο, ανακάλυψε εκ νέου «το διαμάντι της αριθμητικής» το «*theorema aureum*», στο οποίο ο Euler είχε φτάσει επαγωγικά και είναι γνωστό ως **νόμος της τετραγωνικής αντιστροφής**· ο Gauss ήταν ο πρώτος που το απέδειξε. (Η επιχειρηθείσα απόδειξη

από τον Legendre αντιπαρέρχεται τη βασική δυσκολία). Η όλη διερεύνηση ξεκίνησε με μια απλή ερώτηση, την οποία πολλοί πρωτάρηδες στην αριθμητική υποβάλλουν στους εαυτούς τους: πόσα ψηφία υπάρχουν στην περίοδο ενός περιοδικού δεκαδικού;

Για να φωτίσει κάπως το πρόβλημα, ο Gauss υπολόγισε τα δεκαδικά αναπτύγματα όλων των κλασμάτων $1/n$ για $n=1$ μέχρι 1000. Δε βρήκε το θησαυρό που ζητούσε, αλλά κάτι απείρως σπουδαιότερο το νόμο της τετραγωνικής αντιστροφής. Μια και μπορεί να διατυπωθεί αρκετά απλά θα τον περιγράψουμε, εισάγοντας ταυτόχρονα μία από τις επαναστατικές βελτιώσεις στην ορολογία και το συμβολισμό της αριθμητικής που οφείλεται στον Gauss, εκείνης της ισοτιμίας.

Σε ότι ακολουθεί, όλοι οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται είναι ακέραιοι. Αν η διαφορά ($a-b$ ή $\delta-a$) δύο αριθμών a , b είναι ακριβώς διαιρετή από τον αριθμό m , λέμε ότι οι a , b είναι ισότιμοι ως προς τον m , ή απλώς ισότιμοι, *modul* m και το συμβολίζουμε με αυτό γράφοντας $a \equiv b \pmod{m}$. Έτσι, $100 \equiv 2 \pmod{7}$, $35 \equiv 2 \pmod{11}$. Το πλεονέκτημα αυτής της παρουσίασης, βρίσκεται στο ότι θυμίζει τον τρόπο γραφής αλγεβρικών εξισώσεων, παγιδεύει την κάπως φευγαλέα έννοια της αριθμητικής διαιρετότητας σε έναν συμπαγή συμβολισμό και υποδεικνύει την προσπάθεια μεταφοράς στην αριθμητική (που είναι πολύ δυσκολότερη από την άλγεβρα) μερικών από τους χειρισμούς που οδηγούν σε ενδιαφέροντα αποτελέσματα στην Άλγεβρα.

Για παράδειγμα, μπορούμε να «προσθέτουμε» εξισώσεις και βρίσκουμε πως οι ισοτιμίες μπορούν επίσης να «προστεθούν» εφόσον έχουν όλες ίδιο *modulus* για να προκύψουν έτσι άλλες ισότητες. Έστω k άγνωστος αριθμός, r και m δοθέντες αριθμοί, με το r μη διαιρετό από το m . Υπάρχει αριθμός x τέτοιος $x \equiv r \pmod{m}$; Αν υπάρχει, ο r καλείται τετραγωνικό ισοϋπόλοιπο του m αν όχι, τετραγωνικό ανισοϋπόλοιπο του m . Αν ο r είναι τετραγωνικό ισοϋπόλοιπο του m , πρέπει να μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον ένα x του οποίου το τετράγωνο, όταν διαιρείται με το m , να αφήνει υπόλοιπο r αν ο r είναι ένα τετραγωνικό ανισοϋπόλοιπο του m , τότε δεν υπάρχει x του οποίου το τετράγωνο, διαιρούμενο με το m , να αφήνει υπόλοιπο r . Αυτές είναι άμεσες συνέπειες των προηγούμενων ορισμών.

Παράδειγμα: Είναι ο 13 τετραγωνικό υπόλοιπο του 17; Αν ναι, πρέπει να έχει λύση η αναλογία $x^2 \equiv 13 \pmod{17}$. Δοκιμάζοντας με το 1, 2, 3, ..., βρίσκουμε πως οι $x=8, 25, 42, 59, \dots$ είναι λύσεις ($8^2=64=3 \times 17+13$, $25^2=625=36 \times 17+13$ κ.τ.λ.), άρα το 13 είναι ένα τετραγωνικό ισοϋπόλοιπο του 17. Δεν υπάρχει όμως λύση της $x^2 \equiv 5 \pmod{17}$ και επομένως το 5 είναι τετραγωνικό ανισοϋπόλοιπο του 17.

Είναι φυσικό, στο σημείο αυτό να ρωτήσει κανείς: ποιά είναι τα τετραγωνικά ισοϋπόλοιπα και ανισοϋπόλοιπα ενός δοθέντος m ; Συγκεκριμένα, δοθέντος m στην $x \equiv r \pmod{m}$, ποιοί αριθμοί r εμφανίζονται και ποιοί όχι καθώς το x διατρέχει τους φυσικούς 1, 2, 3, ... ; Αρκεί να απαντήσουμε στην ερώτηση όταν r και m είναι πρώτοι. Έτσι, επαναδιατυπώνουμε το πρόβλημα: Αν p είναι δοθείς πρώτος, ποιοί πρώτοι q καθιστούν επιλύσιμη την ισοτιμία $x \equiv q \pmod{p}$;

Σε αυτή τη φάση της αριθμητικής, φαίνεται πως ζητούμε υπερβολικά πολλά, θέτοντας ένα τέτοιο ερώτημα. Οπωσδήποτε, η κατάσταση δεν είναι τελείως απελπιστική. Υπάρχει μια όμορφη «αντιστροφή» ανάμεσα στο ζεύγος των ισοτιμιών $x^2 \equiv q \pmod{p}$, $x^2 \equiv p \pmod{q}$, όπου p , q είναι πρώτοι: και οι δύο αναλογίες επιλύονται ή και οι δύο δεν επιλύονται, εκτός αν p και q αφήνουν υπόλοιπο 3 όταν διαιρεθούν δια 4, οπότε η μία από τις ισοτιμίες επιλύεται και η άλλη όχι. Αυτός είναι ο νόμος της τετραγωνικής αντιστροφής.

Η απόδειξη δεν είναι εύκολη. Είχε φέρει σε αδιέξοδο τον Euler και τον Legendre. Ο Gauss, έδωσε την πρώτη απόδειξη σε ηλικία 19 χρόνων. Καθώς αυτή η αντιστροφή είναι θεμελιώδους σημασίας στην ανώτερη αριθμητική και σε πολλούς προχωρημένους τομείς της άλγεβρας, ο Gauss την ξανάφερνε στο μυαλό του για

πολλά χρόνια αναζητώντας την κύρια ρίζα της, μέχρι που έφτασε να δώσει 6 διαφορετικές αποδείξεις, η μία από τις οποίες βασίζεται στην κατασκευή κανονικών πολυγώνων με κανόνα και διαβήτη. Ένα αριθμητικό παράδειγμα θα διασαφηνίσει τη διατύπωση του νόμου. Ας πάρουμε πρώτα $p=5$, $q=13$. Επειδή το 5 και το 13 αφήνουν υπόλοιπο 1 αν διαιρεθούν δια του 4 και οι δύο ισοτιμίες $x^2=13(\text{mod } 5)$, $x^2=5(\text{mod } 13)$ πρέπει να επιλύονται ή καμιά να μην επιλύεται.

Γι' αυτό το ζεύγος συμβαίνει το δεύτερο. Για $p=13$, $q=17$, όπου και οι δύο αφήνουν υπόλοιπο 1, διαιρούμενοι διά 4, παίρνουμε $x^2=17(\text{mod } 13)$, $x^2=13(\text{mod } 17)$ και ή και οι δύο μαζί επιλύονται ή καμιά τους δεν επιλύεται. Εδώ ισχύει το πρώτο: η πρώτη ισοτιμία έχει λύσεις $x=2, 15, 28, \dots$, η δεύτερη έχει λύσεις $x=8, 25, 42, \dots$. Υπολείπεται ένα παράδειγμα της περίπτωσης όπου ο p και ο q αφήνουν υπόλοιπο 3 όταν διαιρεθούν με 4. Έστω $p=11$, $q=19$. Τότε, σύμφωνα με το νόμο, ακριβώς μία από τις $x^2=19(\text{mod } 11)$, $x^2=11(\text{mod } 19)$ πρέπει να επιλύεται. Η πρώτη ισοτιμία δεν έχει λύση: η δεύτερη έχει λύσεις 7, 26, 45, ... Η απλή ανακάλυψη ενός τέτοιου νόμου, ήταν αξιοσημείωτο κατόρθωμα. Το ότι αποδείχθηκε για πρώτη φορά από ένα δεκαεννιάχρονο αγόρι θα πείσει όποιον έχει επιχειρήσει να αποδείξει τον νόμο, πως ο Gauss ήταν περισσότερο από ικανός στα μαθηματικά.

Όταν ο Gauss άφηνε το κολλέγιο τον Οκτώβριο του 1795 στα 18 του χρόνια, για να μπει στο Πανεπιστήμιο Göttingen, δεν είχε ακόμη αποφασίσει αν θα ακολουθούσε τα μαθηματικά ή τη φιλολογία. Είχε ήδη επινοήσει (όταν ήταν 18 χρόνων) τη μέθοδο των «ελαχίστων τετραγώνων», η οποία σήμερα είναι απαραίτητη στη γεωδαιτική χωρομέτρηση, στη μείωση του αριθμού των παρατηρήσεων και γενικά σε κάθε περίπτωση όπου η «πιθανότερη» τιμή κάποιας μετρήσιμης ποσότητας πρόκειται να συναχθεί από ένα μεγάλο αριθμό μετρήσεων. (Η πιθανότερη τιμή προκύπτει με την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των «διαφορών», δηλαδή των αποκλίσεων από την υποτιθέμενη ακριβή τιμή).

Ο Gauss μοιράζεται αυτή την τιμή με τον Legendre, ο οποίος δημοσίευσε τη μέθοδο ανεξάρτητα στα 1806. Έτσι, ξεκίνησε το ενδιαφέρον του Gauss για τη θεωρία των σφαλμάτων παρατήρησης. Ο ομώνυμος νόμος του για την κανονική κατανομή των σφαλμάτων και η καμπανόσχημη καμπύλη που τον εκφράζει γραφικά, είναι γνωστά σήμερα σε όλους που έχουν σχέση με τη στατιστική, από τους εισηγητές των τεστ νοημοσύνης έως όσους διαμορφώνουν τις τιμές της αγοράς. Η 30.03.1796 αποτελεί σημείο καμπής στη σταδιοδρομία του Gauss. Εκείνη την ημέρα, ένα μήνα πριν μπει στα 20, αποφασίζει οριστικά να ασχοληθεί με τα μαθηματικά. Η μελέτη των γλωσσών, επρόκειτο να παραμείνει το χόμπι του για μια ζωή, η φιλολογία όμως τον έχασε για πάντα εκείνη την αξιομνημόνευτη μέρα του Μαρτίου.

Το κανονικό πολύγωνο με τις 17 πλευρές, υπήρξε το ζάρι που το τυχερό ριζισμό του έκανε τον Gauss να διαβεί το Ρουβίκωνα του. Την ίδια μέρα, ο Gauss άρχισε να κρατά το επιστημονικό του ημερολόγιο (Notizenjournal). Πρόκειται για ένα από τα πιο πολύτιμα ντοκουμέντα στην ιστορία των μαθηματικών. Η πρώτη γραμμή αναφέρεται στη μεγάλη ανακάλυψή του.

Το ημερολόγιο κυκλοφόρησε στους επιστημονικούς κύκλους μόλις το 1898, 43 χρόνια μετά το θάνατο του Gauss, όταν η Βασιλική Εταιρεία του Göttingen το δανείστηκε από έναν εγγονό του, για κριτική μελέτη. Αποτελείται από 19 μικρές σελίδες και περιέχει 146 εξαιρετικά συνοπτικές διατυπώσεις ανακαλύψεων ή αποτελέσματα υπολογισμών, όπου η τελευταία σημείωση χρονολογείται στις 09.07.1814. Μια πανομοιότυπη ανατύπωση, δημοσιεύθηκε το 1917 στον δέκατο τόμο (Μέρος 1) των απάντων του Gauss, μαζί με μια εξαντλητική ανάλυση του περιεχομένου της, από διάφορους ειδικούς. Είναι βέβαιο πως δεν είναι σημειωμένες όλες οι ανακαλύψεις του Gauss της γόνιμης περιόδου από το 1796 ως το 1814.

Πολλές όμως από όσες είναι σημειωμένες, αρκούν για να αποκαταστήσουν την προτεραιότητα του Gauss σε πεδία όπως οι ελλειπτικές συναρτήσεις, όπου ορισμένοι από τους συγχρόνους του αρνούνταν να πιστέψουν ότι τους είχε προλάβει. (θυμηθείτε πως ο Gauss γεννήθηκε το 1777). Σε αυτό το ημερολόγιο ήταν θαμμένα για χρόνια ή για δεκαετίες, πράγματα που επαρκούσαν να στείλουν στα ύψη τη φήμη μισής ντουζίνας μαθηματικών, αν είχαν δημοσιευθεί έγκαιρα. Μερικά δε δημοσιεύθηκαν ποτέ στη διάρκεια της ζωής του και ουδέποτε ο ίδιος προέβαλε κάποια αξίωση σε οτιδήποτε τύπωσε, πως προηγήθηκε άλλων οι οποίοι έφθασαν στο ίδιο αποτέλεσμα με αυτόν. Όμως, οι αναφορές μένουν.

Είχε όντως προλάβει ορισμένους που αμφισβητούσαν τα λόγια των φίλων του. Και μάλιστα όχι σε τετριμμένα πράγματα. Μερικά από τα θέματα με τα οποία πρώτος καταπιάστηκε έγιναν βασικοί τομείς έρευνας στα μαθηματικά του δεκάτου ενάτου αιώνα. Μερικές σημειώσεις δείχνουν πως το ημερολόγιο ήταν μια αυστηρά ιδιωτική υπόθεση του συγγραφέα του. Έτσι, στις 10.07.1796 υπάρχει η γραμμή EYPHKA! num = Δ+Δ+Δ.

Αυτό απηχεί το θριαμβευτικό «Εύρηκα» του Αρχιμήδη και λέει πως κάθε θετικός ακέραιος είναι άθροισμα τριών τριγωνικών αριθμών, ένας τριγωνικός αριθμός είναι μέλος της ακολουθίας $(0, 1, 3, 6, 10, 15, \dots)$ όπου ο καθένας (μετά το 0) είναι της μορφής $\frac{1}{2}n(n+1)$, με η θετικό ακέραιο. Ένας άλλος τρόπος διατύπωσης του ίδιου πράγματος είναι να πούμε πως κάθε αριθμός της μορφής $8n+3$ είναι άθροισμα τριών περιττών τετραγώνων:

$$3^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 11 = 1^2 + 1^2 + 3^2 \quad 19 = 1^2 + 3^2 + 3^2 = \dots \text{ κλπ}$$

Δεν είναι εύκολο να το αποδείξει κανείς αυτό όπως-όπως. Λιγότερο κατανοητή είναι η αποκρυφιστική σημείωση της 11.10.1796, «Vicimus GECAN». Ποιόν δράκο να είχε νικήσει ο Gauss αυτή τη φορά; Ή ποιά γίγαντα είχε καταβάλει στις 08.04.1799, όταν τοποθετεί την ένδειξη REV. GALEN σε ένα περιποιημένο ορθογώνιο; Αν και το νόημα των δύο αυτών σημειώσεων είναι για πάντα χαμένο, οι υπόλοιπες 144 αναφορές είναι στο μεγαλύτερό τους μέρος αρκετά ξεκάθαρες.

Μία, συγκεκριμένα, είναι εξαιρετικής σημασίας, η αναφορά στις 19.03.1797, δείχνει πως ο Gauss είχε ήδη ανακαλύψει τη διπλή περιοδικότητα ορισμένων ελλειπτικών συναρτήσεων. Δεν είχε κλείσει ακόμη τα 20 χρόνια. Μια μεταγενέστερη αναφορά, δείχνει πως είχε αναγνωρίσει τη διπλή περιοδικότητα στη γενική περίπτωση. Αυτή η ανακάλυψη από μόνη της, αν την είχε δημοσιεύσει, θα τον είχε κάνει διάσημο. Όμως δεν τη δημοσίευσε ποτέ. Γιατί ο Gauss δεν ανακοίνωνε τα σπουδαία πράγματα που ανακάλυπτε; Αυτό είναι ευκολότερο να το εξηγήσουμε από ότι τη μεγαλοφυΐα του, αν δεχθούμε τις δικές του απλές δηλώσεις που θα παραθέσουμε λίγο πιο κάτω. Μια πιο ρομαντική εκδοχή αποτελεί η ιστορία που παραθέτει ο Ball στην «Ιστορία των μαθηματικών».

Σύμφωνα με αυτήν, ο Gauss υπέβαλε το πρώτο του αριστούργημα με τον τίτλο Disquisitiones Arithmeticae στη γαλλική Ακαδημία επιστημών και το απέρριψαν χλευαστικά. Η άδικη ταπείνωση πλήγωσε τον Gauss τόσο βαθιά, που αποφάσισε στο μέλλον να προχωρήσει σε δημοσίευση μόνο όταν όλοι θα συμφωνούσαν ότι το περιεχόμενο και η μορφή ήταν πάνω από κάθε κριτική. Δεν υπάρχει ίχνος αλήθειας σε αυτόν το δυσφημιστικό θρύλο. Το πράγμα ξεκαθαρίστηκε μια για πάντα το 1935, όταν οι αξιωματούχοι της γαλλικής Ακαδημίας βεβαίωσαν, ύστερα από μια εξονυχιστική έρευνα των αρχείων της, πως το Disquisitiones δεν υποβλήθηκε ποτέ στην Ακαδημία και φυσικά δεν ήταν δυνατό να είχε απορριφθεί.

Μιλώντας για τον εαυτό του, ανέφερε πως αναλάμβανε τις επιστημονικές του έρευνες αποκρινόμενος αποκλειστικά στις βαθύτερες παρορμήσεις της φύσης του και ήταν απολύτως δευτερεύουσας σημασίας αν τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών θα

δημοσιεύονταν ποτέ για την καθοδήγηση άλλων. Μια άλλη δήλωση που έκανε σε ένα φίλο του, εξηγεί το ημερολόγιό και την καθυστέρηση στη δημοσίευση.

Του είπε, , πως μια τέτοια ορδή νέων ιδεών κατέκλυζε το μυαλό του πριν φτάσει στα 20, ώστε δε μπορούσε να τις ελέγξει και να βρει χρόνο να τις καταγράψει, εκτός από ένα μικρό μέρος τους. Το ημερολόγιο περιλαμβάνει μόνο τις τελικές σύντομες διατυπώσεις του αποτελέσματος πολύπλοκων διερευνήσεων, μερικές από τις οποίες τον απασχολούσαν για εβδομάδες. Αναλογιζόμενος σε νεαρή ηλικία τις αυστηρές, άθραυστες αλυσίδες συνθετικών αποδείξεων με τις οποίες ο Αρχιμήδης και ο Νεύτων είχαν δαμάσει τις εμπνεύσεις τους, αποφάσισε να ακολουθήσει το παράδειγμά τους και να αφήσει πίσω του μόνο ολοκληρωμένα έργα τέχνης, που θα τα διέκρινε αυστηρή τελειότητα και όπου τίποτε δε θα μπορούσε να προστεθεί ή αφαιρεθεί χωρίς να παραμορφωθεί το σύνολο. Το ίδιο το έργο, πρέπει να στέκεται αυτοδύναμο, πλήρες, απλό και πειστικό, χωρίς να υπάρχει ίχνος της εργασίας που το έφερε σε πέρας. Ένας καθηδρικός δεν είναι καθηδρικός, έλεγε, μέχρι να φύγει απ' τη μέση και η τελευταία σκαλωσιά. Εργαζόμενος με αυτό το ιδεώδες, ο Gauss προτιμούσε να στιλβώνει πολλές φορές ένα αριστούργημα παρά να δημοσιεύει σε αδρές γραμμές πολλά, όπως εύκολα θα μπορούσε να είχε κάνει.

Η σφραγίδα του, ένα δέντρο με λίγα φρούτα μόνο, έφερε το motto *Pauca sed matura* (λίγα αλλά ώριμα). Τα φρούτα αυτής της προσπάθειας για τελειότητα, ήταν πραγματικά ώριμα, αλλά όχι πάντα εύπεπτα. Με σβησμένα όλα τα ίχνη των βημάτων με τα οποία είχε επιτευχθεί ο στόχος, δεν ήταν εύκολο για τους μελετητές του Gauss να ανακαλύψουν το δρόμο που είχε διανύσει. Συνεπώς, κάποιες από τις εργασίες του έπρεπε να περιμένουν εξαιρετικά προικισμένους ερμηνευτές, πριν μπορέσουν να τις καταλάβουν οι μαθηματικοί γενικά, ώστε να δουν τη σημασία τους για κάποια άλματα προβλήματα και να τα προχωρήσουν.

Οι σύγχρονοί του, τον παρακαλούσαν να αφήσει την ψυχρή τελειότητα, χάριν της ταχύτερης ανάπτυξης των μαθηματικών, όμως ο Gauss ποτέ δεν άλλαξε τη στάση του. Μόνο πολλά χρόνια μετά το θάνατό του, έγινε γνωστό πόσες κατευθύνσεις και αποτελέσματα των μαθηματικών του δεκάτου ενάτου αιώνα είχε προβλέψει, πριν το 1800. Αν είχε αποκαλύψει ό,τι γνώριζε, είναι αρκετά πιθανό πως τα μαθηματικά θα βρίσκονταν σήμερα μισό ή περισσότερο αιώνα πιο μπροστά από όπου βρίσκονται.

Οι Abel, Jacobi θα μπορούσαν να είχαν ξεκινήσει από εκεί που σταμάτησε ο Gauss, αντί να καταβάλουν πολλές από τις καλύτερες προσπάθειές τους ανακαλύπτοντας εκ νέου πράγματα που ο Gauss ήξερε πριν ακόμη αυτοί γεννηθούν, και οι δημιουργοί της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας θα μπορούσαν να είχαν στρέψει τη μεγαλοφυΐα τους σε άλλες κατευθύνσεις. Μιλώντας για τον εαυτό του, έλεγε πως ήταν «όλος μαθηματικός». Αυτό τον αδικεί, εκτός αν θυμηθούμε πως το «μαθηματικός» στις μέρες του περιελάμβανε και το σημερινό μαθηματικό φυσικό.

Πράγματι, το δεύτερο motto του **Εσύ, φύση, είσαι η θεά μου τους νόμους σου υπηρετώ...**, συμπυκνώνει την αφοσίωση μιας ζωής στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες του καιρού του. Το «όλος μαθηματικός» θα πρέπει να εννοηθεί ως προσήλωση στην καλλιέργεια του κορυφαίου χαρίσματός του, με στόχο την τελειότητα, σε αντιδιαστολή με τη διασπορά προς πολλές κατευθύνσεις (όπως επέκρινε τον Leibniz ότι είχε κάνει), όπου λόγω των ικανοτήτων του μπορούσε επίσης να δρέψει πλούσιους καρπούς. Τα τρία χρόνια (Οκτώβριος 1795– Σεπτέμβριος 1798) στο Πανεπιστήμιο Göttingen υπήρξαν τα παραγωγικότερα στη ζωή του.

Χάρη στη γενναιοδωρία του Δούκα Ferdinand, ο νέος άνδρας δεν ανησυχούσε για ζητήματα οικονομικής φύσης. Απορροφήθηκε στη δουλειά του, κάνοντας πολύ λίγους φίλους. Ένας από αυτούς, ο Wolfgang Bolyai «**το σπανιότερο πνεύμα που γνώρισα ποτέ**», όπως τον περιέγραψε ο Gauss, επρόκειτο να μείνει φίλος του μια

ζωή. Η πορεία αυτής της φιλίας και η σημασία της στην ιστορία της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας δεν είναι δυνατό να ιστορηθούν εδώ. Ο γιός του Wolfgang, Johann, επρόκειτο να ακολουθήσει το ίδιο μονοπάτι που είχε πάρει ο Gauss για τη δημιουργία της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας, αγνοώντας πλήρως πως ο παλιόφιλος του πατέρα του τον είχε προλάβει. Οι ιδέες που είχαν κατακλύσει τον Gauss από τα 17 του χρόνια, είχαν τιθασευτεί εν μέρει και μπήκαν σε τάξη. Από το 1795, σκεφτόταν ένα μεγάλο έργο στη θεωρία των αριθμών. Αυτό έπαιρνε τώρα συγκεκριμένη μορφή και έως το 1798, οι **Disquisitiones Arithmeticae (Αριθμητικές Έρευνες)** είχαν πρακτικά ολοκληρωθεί.

Για να εξοικειωθεί με ότι είχε ήδη γίνει στην ανώτερη αριθμητική και για να βεβαιωθεί πως είχε δείξει την οφειλόμενη αναγνώριση στους προγενέστερούς του, ο Gauss πήγε το Σεπτέμβριο 1798 στο Πανεπιστήμιο Helmstedt, όπου υπήρχε μια καλή μαθηματική βιβλιοθήκη. Εκεί, διαπίστωσε πως η φήμη του είχε προπορευτεί. Έγινε εγκάρδια δεκτός από το βιβλιοθηκάριο και τον καθηγητή μαθηματικών, Johann Friedrich Pfaff (1765–1825) στον οποίο το σπίτι εγκαταστάθηκε. Ο Gauss και ο Pfaff έγιναν στενοί φίλοι, αν και η οικογένεια του Pfaff έβλεπε σπάνια τον ξένο της. Προφανώς ο Pfaff, θεώρησε καθήκον του να φροντίσει ώστε ο σκληρά εργαζόμενος νεαρός φίλος του να ασκείται λίγο και έτσι ο ίδιος και ο Gauss βολτάριζαν μαζί τα βράδια, συζητώντας μαθηματικά. Μιας και ο Gauss δε συνήθιζε να μιλά για τη δουλειά του, είναι πιθανό να μην έμαθε ο Pfaff όσα θα μπορούσε να είχε μάθει. Ο Gauss, θαύμαζε απεριόριστα τον καθηγητή (ήταν τότε ο πιο γνωστός μαθηματικός στη Γερμανία), όχι μόνο για τα εξαιρετικά του μαθηματικά αλλά και για τον απλό, ανοικτό του χαρακτήρα. Σε όλη του τη ζωή ο Gauss αισθανόταν αποστροφή για έναν μόνο τύπο ανθρώπου: αυτόν που υποκρίνεται τον πολύξερο και δεν παραδέχεται τα λάθη του όταν γνωρίζει πως έχει λάθος.

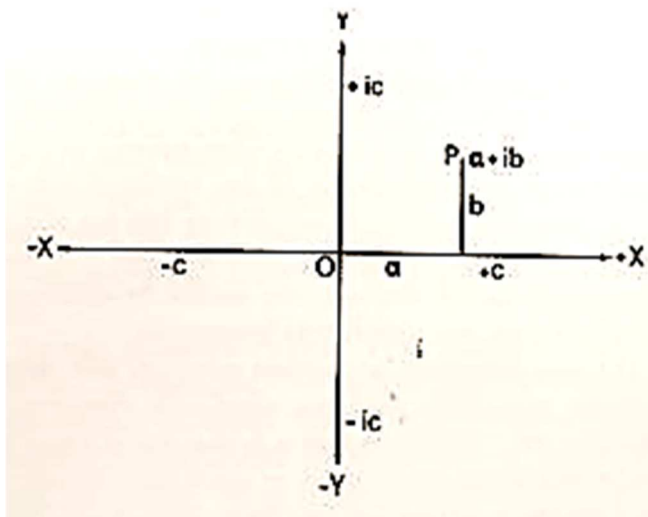
Ο Gauss, πέρασε το φθινόπωρο του 1798 (ήταν τότε στα 20 ένα του) στο Brunswick με περιστασιακά ταξίδια στο Helmstedt, βάζοντας τις τελευταίες πινελιές στις *Disquisitiones*. Είχε ελπίσει σε μια γρήγορη δημοσίευση, όμως καθυστέρησε στην εκτύπωση λόγω οικονομικών δυσχερειών ενός εκδότη από τη Λειψία, μέχρι το Σεπτέμβριο 1801. Σε ένδειξη ευγνωμοσύνης για ότι είχε κάνει ο Δούκας Φερδινάνδος για αυτόν, ο Gauss τού αφιέρωσε το βιβλίο του, «**Serenissimo Principi ac Domino Carolo Guilielmo Ferdinando**».

Αν ποτέ ένας γενναιόδωρος πάτρωνας άξιζε την τιμή που του έκανε ο προστατευόμενος του, αυτός ήταν ο Φερδινάνδος. Όταν ο μεγαλοφυής νέος άρχισε να ανησυχεί σοβαρά για το μέλλον του αφήνοντας το Göttingen και προσπάθησε ανεπιτυχώς να βρει μαθητές, ο Δούκας τον έβγαλε από τη δυσκολία, πλήρωσε για την εκτύπωση της διδακτορικής διατριβής (Πανεπιστήμιο Helmstedt, 1799) και του εξασφάλισε ένα μέσο εισόδημα, που θα του επέτρεπε να συνεχίσει την επιστημονική του εργασία ανεπηρέαστος από τη φτώχεια. «Η καλοσύνη Σας», λέει ο Gauss στην αφιέρωσή του, «με απάλλαξε από όλες τις άλλες ευθύνες και μου επέτρεψε να ασχοληθώ αποκλειστικά μ' αυτή». Πριν περιγράψουμε τις *Disquisitiones*, θα ρίξουμε μια ματιά στη διατριβή για την οποία έλαβε ο Gauss τον τίτλο του διδάκτορα *in absentia* από το Πανεπιστήμιο Helmstedt το 1799: **Demonstratio nova theorematis omnem functionem alge braicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse (Μια νέα απόδειξη πως κάθε ρητή ακέραια συνάρτηση μίας μεταβλητής, μπορεί να αναλυθεί σε πραγματικούς παράγοντες 1^{ου} ή 2^{ου} βαθμού)**.

Υπάρχει μόνο ένα πράγμα που είναι λάθος σ' αυτό το έργο -σταθμό στην άλγεβρα. Οι πρώτες 2 λέξεις στον τίτλο, υποδεικνύουν ότι ο Gauss απλώς πρόσθεσε μια νέα απόδειξη σε άλλες ήδη γνωστές. Θα έπρεπε να είχε παραλείψει το «*nova*». Η

δική του ήταν η πρώτη απόδειξη. (Αυτός ο ισχυρισμός θα δικαιολογηθεί αργότερα). Μερικοί πριν από αυτόν, είχαν δημοσιεύσει κάποια πράγματα που νόμιζαν ότι ήταν αποδείξεις του θεωρήματος αυτού που συνήθως αποκαλείται **Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας** όμως κανείς δεν είχε κατορθώσει να το αποδείξει. Με την ασυμβίβαστη απαίτησή του για λογική και μαθηματική αυστηρότητα, ο Gauss επέμεινε να βρει μια απόδειξη, και έδωσε την πρώτη. Μια άλλη, ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος, λέει πως **κάθε αλγεβρική εξίσωση με έναν άγνωστο έχει μια ρίζα**, ισχυρισμός που οι πρωτάρηδες συχνά δέχονται ως αληθή χωρίς να έχουν την παραμικρή ιδέα για το τι σημαίνει.

Εξ ίσου προβληματικός είναι ο ισχυρισμός πως κάθε αλγεβρική εξίσωση έχει μια ρίζα, έως ότου ξεκαθαριστεί το είδος της ρίζας που έχει η εξίσωση. Έχουμε μια αμυδρή ιδέα πως ένας αριθμός θα «ικανοποιεί» την εξίσωση. Ο Gauss, διατύπωσε με ακρίβεια αυτή την ιδέα, αποδεικνύοντας πως όλες οι ρίζες μιας αλγεβρικής εξίσωσης είναι «αριθμοί» του τύπου $a+bi$ όπου a, b , είναι πραγματικοί αριθμοί (οι αριθμοί που αντιστοιχούν σε αποστάσεις θετικές, μη δεν ή αρνητικές, μετρημένες από ένα σταθερό σημείο O , πάνω σε μια ευθεία γραμμή, όπως στον κ-άξονα της γεωμετρίας του Καρτέσιου) και i είναι η τετραγωνική ρίζα του -1 . Το νέο είδος «αριθμού» καλείται **μιγαδικός**. Ο $a+bi$ καλείται μιγαδικός. Παρεμπιπτόντως, ο Gauss ήταν ένας από τους πρώτους που έκαναν μια περιεκτική αναφορά στους μιγαδικούς αριθμούς, ερμηνεύοντάς τους ως σημεία ενός επιπέδου, όπως γίνεται σήμερα σε σχολικά εγχειρίδια άλγεβρας. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του P είναι (a, b) : το σημείο P αποδίδεται ως $a + bi$. Έτσι, σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί ακριβώς ένας μιγαδικός αριθμός οι αριθμοί που αντιστοιχούν στα σημεία της ευθείας XOX' είναι «πραγματικοί», εκείνοι που αντιστοιχούν στα σημεία της ευθείας YOY' «καθαρώς φανταστικοί» (είναι όλοι του τύπου ic , όπου c είναι πραγματικός αριθμός).



Η λέξη «φανταστικός», αποτελεί μεγάλη αλγεβρική συμφορά, αλλά είναι σε τέτοιο βαθμό εδραιωμένη που δε μπορούν οι μαθηματικοί να την ξεριζώσουν. Δε θα έπρεπε να είχε χρησιμοποιηθεί ποτέ. Βιβλία στοιχειώδους άλγεβρας, δίνουν μια απλή ερμηνεία των φανταστικών αριθμών στη γλώσσα των στροφών. Έτσι, αν ερμηνεύσουμε τον πολλαπλασιασμό ixc , όπου ο πραγματικός, ως στροφή του τμήματος O γύρω από το O κατά ορθή γωνία, το Oe στρέφεται και συμπίπτει με το OY · ένας άλλος πολλαπλασιασμός με 1 , συγκεκριμένα $ixixc$, στρέφει το Oc κατά μία ακόμη ορθή γωνία, που συνεπώς είναι σαν να έχει στραφεί συνολικά κατά δυο ορθές γωνίες, και το $+O$ γίνεται $-Oc$.

Ως πράξη, ο πολλαπλασιασμός με ixi έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τον πολλαπλασιασμό με -1 : ο πολλαπλασιασμός με i έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τη στροφή κατά ορθή γωνία και αυτές οι ερμηνείες (όπως είδαμε) είναι συνεπείς. Αν επιθυμούμε μπορούμε να γράψουμε τώρα $ixi = -1$ όταν κάνουμε πράξεις, ή $i' = -1$: οπότε η πράξη της στροφής κατά ορθή γωνία συμβολίζεται $V-1$. με Όλα αυτά βέβαια δεν αποδεικνύουν τίποτε, γιατί δεν είναι αυτό το νόημα της ιδέας. Δεν υπάρχει τίποτε για να αποδειχτεί απλώς δίνουμε στα σύμβολα και στις πράξεις της άλγεβρας διάφορες σημασίες που οδηγούν σε μεταξύ τους συνέπεια.

Αν και η ερμηνεία μέσω των στροφών δεν αποδεικνύει τίποτε, ωστόσο υποδηλώνει πως δεν υπάρχει τίποτε το μυστικιστικό γύρω από τους ατυχέστατα αποκαλούμενους «φανταστικούς». Για περισσότερες λεπτομέρειες, πρέπει να παραπέμψουμε σε κάποιο βιβλίο πάνω στη στοιχειώδη άλγεβρα. Ο Gauss, έκρινε ότι το θεώρημα «**κάθε αλγεβρική εξίσωση έχει ρίζα**» είναι τόσο σημαντικό, ώστε έδωσε 4 διαφορετικές αποδείξεις, την τελευταία όταν ήταν στα 70 του.

Σήμερα, μερικοί θα μετέφεραν το θεώρημα από την άλγεβρα (η οποία περιορίζεται σε διαδικασίες με πεπερασμένο αριθμό βημάτων) στην ανάλυση. Ακόμη και ο Gauss, υπέθεσε πως το γράφημα ενός πολυωνύμου είναι συνεχής καμπύλη και πως, αν το πολυώνυμο είναι περιττού βαθμού, το γράφημα πρέπει να τέμνει τον άξονα τουλάχιστον σε ένα σημείο. Αυτό φαίνεται προφανές στον καθένα που κάνει τα πρώτα του βήματα στην άλγεβρα. Σήμερα όμως, δεν είναι προφανές χωρίς απόδειξη, και κάθε απόπειρα για την απόδειξή του προσκρούει σε δυσκολίες που συνδέονται με τη συνέχεια και το άπειρο. Οι ρίζες μιας τόσο απλής εξίσωσης όπως η $x^2 - 2 = 0$ δεν μπορεί να υπολογιστούν ακριβώς με οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Οι Disquisitiones ήταν το πρώτο από τα αριστουργήματα του Gauss και σύμφωνα με ορισμένους, το μεγαλύτερό του. Ήταν ο αποχαιρετισμός του στο αποκλειστικό ενδιαφέρον του για τα καθαρά μαθηματικά.

Μετά τη δημοσίευση του έργου το 1801 (ο Gauss ήταν τότε 24 χρόνων) επεξέτεινε τη δραστηριότητά του σε τομείς όπως η αστρονομία, η γεωδαισία και ο ηλεκτρομαγνητισμός, τόσο στη μαθηματική όσο και στην πρακτική κατεύθυνσή τους. Η αριθμητική όμως, ήταν η πρώτη του αγάπη, και μετάνιωσε αργότερα που δεν είχε βρει ποτέ το χρόνο να γράψει το δεύτερο τόμο, όπως σχεδίαζε όταν ήταν νέος.

Το βιβλίο έχει 7 «τμήματα». Υπήρχε η πρόθεση και για ένα όγδοο, αλλά παραλείφθηκε λόγω κόστους της εκτύπωσης. Η πρώτη πρόταση του προλόγου περιγράφει που αποβλέπει σε γενικές γραμμές το βιβλίο. «Οι έρευνες που περιέχονται σε αυτή την εργασία ανήκουν σε εκείνο το μέρος των μαθηματικών που ασχολείται με τους ακέραιους αριθμούς και τα κλάσματα, αποκλεισμένων των αρρήτων».

Τα πρώτα 3 τμήματα είναι αφιερωμένα στη θεωρία ισοτιμιών και συγκεκριμένα στην εξαντλητική μελέτη της διωνυμικής ισοτιμίας $x^n \equiv A \pmod{p}$, όπου οι n , A είναι οποιοδήποτε δοσμένοι ακέραιοι και ο p είναι πρώτος· ο άγνωστος x είναι ο k . Αυτή η όμορφη αριθμητική θεωρία παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με την αντίστοιχη αλγεβρική θεωρία της διωνυμικής εξίσωσης $x^4 = 4$, όμως στα κατ'εξοχήν αριθμητικά της μέρη, είναι ασύγκριτα πλουσιότερη και δυσκολότερη. Στο τέταρτο τμήμα, ο Gauss αναπτύσσει τη θεωρία των τετραγωνικών υπολοίπων. Εδώ βρίσκεται η πρώτη δημοσιευμένη απόδειξη του νόμου της τετραγωνικής αντιστροφής. Η απόδειξη, δίνεται με μια εκπληκτική εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής, αποτελεί δε ένα από τα δυσκολότερα παραδείγματα αυτής της ιδιοφυούς λογικής. Στο πέμπτο τμήμα εμφανίζεται η θεωρία των δυαδικών τετραγωνικών μορφών από την αριθμητική σκοπιά και στη συνέχεια ακολουθεί μια πραγματεύση των τριαδικών τετραγωνικών μορφών που βρέθηκε ότι ήταν απαραίτητες για την ολοκλήρωση της θεωρίας των δυαδικών.

Ο νόμος της τετραγωνικής αντιστροφής, παίζει θεμελιώδη ρόλο σε αυτά τα δύσκολα εγχειρήματα. Για τις δυαδικές τετραγωνικές μορφές, το γενικό πρόβλημα αφορά στις ακέραιες λύσεις x της απροσδιόριστης εξίσωσης $ax^2+2bxy+cy^2=m$, όπου a, b, c, m είναι δοθέντες ακέραιοι για τις τριαδικές τετραγωνικές μορφές αναζητούνται οι ακέραιες λύσεις x, y, z της $ax^2+2bxy+cy^2+2dxz+2eyz+fz=m$, όπου a, b, c, d, e, f, m είναι δοθέντες ακέραιοι. Μια φαινομενικά εύκολη, αλλά στην πραγματικότητα δύσκολη ερώτηση σε αυτήν την περιοχή, είναι να βρει κανείς αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τους a, c, f, m , οι οποίες θα εξασφαλίσουν την ύπαρξη μιας ακεραίας λύσης x, y, z της απροσδιόριστης εξίσωσης $ax+cy+fz=m$.

Στο έκτο τμήμα εφαρμόζεται η προηγούμενη θεωρία σε διάφορες ειδικές περιπτώσεις, για παράδειγμα στις ακέραιες λύσεις k της $mx+y=A$, 380 όπου m, n, A δοθέντες ακέραιοι. Στο έβδομο και τελευταίο τμήμα, που πολλοί θεωρούν ως το κορυφαίο του έργου, ο Gauss εφαρμόζει τα προηγούμενα αποτελέσματα, ιδιαίτερα τη θεωρία διωνυμικών ισοτιμιών, σε μια θαυμάσια μελέτη της αλγεβρικής εξίσωσης και $x'=1$ όπου n είναι δοσμένος ακέραιος, συνυφαίνοντας την αριθμητική, την άλγεβρα και τη γεωμετρία σε ένα τέλειο υπόδειγμα. Η εξίσωση $x'=1$ αποτελεί την αλγεβρική διατύπωση του γεωμετρικού προβλήματος της κατασκευής κανονικού πολυγώνου με n πλευρές ή της διαίρεσης της περιφέρειας ενός κύκλου σε n ίσα μέρη (συμβουλευθείτε ένα οποιοδήποτε εγχειρίδιο λυκείου στην άλγεβρα ή την τριγωνομετρία)· η αριθμητική ισοτιμία $x=1 \pmod{p}$, όπου m, p δοθέντες ακέραιοι με τον p πρώτο, αποτελεί το συνδετικό νήμα ανάμεσα στην άλγεβρα και τη γεωμετρία και δίνει στο υπόδειγμα το συνολικό του νόημα. Αυτό το αψεγάδιαστο έργο τέχνης είναι προσπελάσιμο από κάθε μαθητή που έχει παρακολουθήσει τη συνήθη άλγεβρα του σχολείου, όμως το *Disquisitiones* δε συνιστάται στους πρωτάρηδες (η συνοπτική παρουσίαση του Gauss έχει ξαναδουλευτεί από άλλους στη συνέχεια, ώστε να αποκτήσει μια πιο αφομοιώσιμη μορφή).

Πολλά μέρη του έργου είχαν γίνει με άλλους τρόπους πριν, από τον Fermat, τον Euler, τον Lagrange, τον Legendre και άλλους, όμως ο Gauss αντιμετώπισε το σύνολο από τη δική του σκοπιά, πρόσθεσε πολλά δικά του πράγματα και συνήγαγε τα απομονωμένα αποτελέσματα των προγενεστέρων του από τις γενικές διατυπώσεις και λύσεις των σχετικών προβλημάτων. Για παράδειγμα, το όμορφο αποτέλεσμα του Fermat ότι **κάθε πρώτος της μορφής $4n+1$ είναι άθροισμα δύο τετραγώνων κατά έναν και μόνο τρόπο**, που ο Fermat απέδειξε με τη δύσκολη μέθοδό του της «άπειρης καθόδου», προκύπτει με φυσικό τρόπο από τη γενική πραγμάτευση του Gauss των δυαδικών τετραγωνικών μορφών. «Το *Disquisitiones Arithmeticae* έχει περάσει στην ιστορία», έλεγε ο Gauss στα γράματά του και είχε δίκιο.

Μια νέα κατεύθυνση δόθηκε στην ανώτερη αριθμητική με τη δημοσίευση του *Disquisitiones* και η θεωρία των αριθμών, που στον 17^ο και 18^ο αιώνα αποτελούσε ένα σύμφυρμα ασύνδετων μεταξύ τους ειδικών αποτελεσμάτων, απέκτησε συνοχή και αλληλουχία, κερδίζοντας μια αξιοσέβαστη θέση στα μαθηματικά μαζί με την άλγεβρα, την ανάλυση και τη γεωμετρία. Η ίδια εργασία έχει χαρακτηριστεί ως «**επτασφράγιστο βιβλίο**». Η ανάγνωσή της είναι δύσκολη, ακόμη και για ειδικούς, οι θησαυροί όμως που περιέχει (και εν μέρει αποκρύπτει) στις σύντομες συνθετικές της αποδείξεις βρίσκονται σήμερα στη διάθεση όλων όσων επιθυμούν να τους μοιραστούν, κυρίως χάρη στους κόπους και στις προσπάθειες του φίλου και μαθητή του Gauss, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Ικανοί κριτές αναγνώρισαν αμέσως την πραγματική αξία του αριστουργήματος. Ο Legendre στην αρχή ίσως αισθάνθηκε πως ο Gauss τον είχε αδικήσει. Στον πρόλογο όμως της δεύτερης έκδοσης, της δικής του πραγματείας, πάνω στη θεωρία των αριθμών (1808), που κατά μεγάλο μέρος είχε ξεπεραστεί από το *Disquisitiones* είναι ενθουσιώδης.

Ο Lagrange το επαινεί απεριόριστα. Γράφοντας στον Gauss στις 31.03.1804 λέει: «*Το Disquisitiones σας, σας έχει αμέσως ανεβάσει στην τάξη των πρώτων μαθηματικών και φρονώ πως το τελευταίο τμήμα περιέχει την ωραιότερη ανακάλυψη στην ανάλυση που έχει γίνει εδώ και καιρό..... Πιστέψτε, κύριε, πως κανένας δε χειροκροτεί την επιτυχία σας ειλικρινέστερα από μένα*».

Η κλασική τελειότητα του στυλ του Disquisitiones είχε ως αποτέλεσμα την καθυστερημένη αφομοίωση του έργου και όταν επιτέλους προικισμένοι νέοι άρχισαν να το μελετούν σε βάθος, δεν ήταν σε θέση να βρουν αντίγραφό του, εξαιτίας της χρεωκοπίας ενός βιβλιοπώλη. Ακόμη και ο Eisenstein, ο αγαπημένος μαθητής του Gauss, δεν είχε καταφέρει να εφοδιαστεί με ένα αντίγραφο. Ο Dirichlet στάθηκε πιο τυχερός. Το αντίγραφό του, τον συνόδευε σε όλα του τα ταξίδια και κοιμόταν με αυτό κάτω από το μαξιλάρι του. Πριν πάει στο κρεβάτι, συνήθιζε να παλεύει με κάποια δύσκολη παράγραφο ελπίζοντας, όπως και συχνά συνέβαινε, ότι θα ξυπνούσε τη νύχτα και μια εκ νέου ανάγνωση θα ξεκαθάριζε τα πράγματα. Στον Dirichlet οφείλεται το υπέροχο, ότι κάθε αριθμητική πρόοδος $a, a+b, a+2b, a+3b, a+4b, \dots$ όπου a, b ακέραιοι χωρίς κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1, περιέχει μια απειρία πρώτων. Αυτό αποδείχθηκε με εργαλεία της ανάλυσης, κάτι που από μόνο του αποτελεί ένα θαύμα, μια και το θεώρημα αφορά ακεραίους ενώ η ανάλυση ασχολείται με το συνεχές, το μη ακέραιο. Ο Dirichlet προσέφερε πολύ περισσότερα στα μαθηματικά από την επεξήγηση του Disquisitiones. Ο Eisenstein ήταν από τους λαμπρούς νέους των αρχών του 19^{ου} αιώνα που πέθαναν πριν την ώρα τους και για τον οποίο έχει αναφερθεί, όσο και αν φαίνεται ακατανόητο στους περισσότερους μαθηματικούς, πως ο Gauss είπε «**Δεν υπάρχουν παρά τρεις μόνο μαθηματικοί που άφησαν εποχή: ο Αρχιμήδης, ο Νεύτων και ο Eisenstein**».

Αν ο Gauss το είπε ποτέ αυτό (είναι αδύνατο να το ελέγξουμε), αξίζει την προσοχή μας απλώς και μόνο γιατί το είπε αυτός, όντας και άνθρωπος που δε μιλούσε βιαστικά. Πριν αφήσουμε αυτό το πεδίο δραστηριοτήτων του Gauss, μπορούμε να αναρωτηθούμε γιατί δεν επιχείρησε να αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Την απάντηση τη δίνει ο ίδιος. Η παρισινή Ακαδημία το 1816 πρότεινε την απόδειξη (ή την απόδειξη του εναντίου) του θεωρήματος σαν το πρόβλημα για το βραβείο της στην περίοδο 1816–1818. Γράφοντας από τη Βρέμη στις 07.03.1816, ο Olbers προσπαθεί να κινήσει το ενδιαφέρον του Gauss για τον συναγωνισμό: «*Μου φαίνεται σωστό, αγαπητέ Gauss, να ασχοληθείς μ' αυτό*».

Ο «αγαπητός Gauss» όμως αντιστάθηκε στον πειρασμό. Απαντώντας 2 βδομάδες αργότερα, διατυπώνει την άποψή του για το τελευταίο θεώρημα του Fermat. «Σας είμαι εξαιρετικά υπόχρεος για τα νέα σας σχετικά με το βραβείο του Παρισιού. Ομολογώ όμως πως το θεώρημα του Fermat ως ξεκομμένη πρόταση παρουσιάζει πολύ λίγο ενδιαφέρον για εμένα, επειδή θα μπορούσα πολύ εύκολα να παραθέσω ένα πλήθος τέτοιων προτάσεων, για τις οποίες δεν είναι γνωστή ούτε η απόδειξή τους ούτε η απόδειξη της άρνησής τους».

Ο Gauss συνεχίζει λέγοντας πως το ερώτημα τον έκανε να ξανασκεφθεί πάνω σε μερικές από τις παλιές του ιδέες για μια μεγάλη επέκταση της ανώτερης Αριθμητικής. Εδώ αναμφίβολα αναφέρεται στη **θεωρία των αλγεβρικών αριθμών** και την οποία οι Kummer, Dedekind και Kronecker επρόκειτο να αναπτύξουν ανεξάρτητα ο ένας απ' τον άλλο.

Όμως η θεωρία που έχει ο Gauss στο μυαλό του, όπως δηλώνει, είναι από εκείνα τα πράγματα που είναι δύσκολο να προβλεφθεί η πρόοδος προς κάποιο μακρινό στόχο που μόλις αγνοφάινεται στο σκοτάδι. Για να επιτύχει σε μια τέτοια δύσκολη έρευνα, πρέπει το τυχερό αστέρι αυτού που θα την αναλάβει να βρίσκεται σε άνοδο· οι περιστάσεις όμως είναι τώρα για τον Gauss τέτοιες, που με τις διάφορες

ασχολίες του δε θα μπορούσε να αφοσιωθεί σε αυτήν, αντίθετα με ότι είχε συμβεί «στα ευτυχισμένα χρόνια 1796–1798, όταν διαμόρφωνα τα κύρια σημεία των *Disquisitiones Arithmeticae*. Είμαι ωστόσο πεπεισμένος, πως, αν σταθώ τόσο τυχερός όσο τολμώ να ελπίζω και πετύχω να κάνω κάποια βασικά βήματα σε εκείνη τη θεωρία, τότε το θεώρημα του Fermat θα προκύψει ως ένα από τα λιγότερο ενδιαφέροντα πορίσματα».

Ίσως όλοι οι μαθηματικοί σήμερα, να θλίνονται που ο Gauss παρέκκλινε από την πορεία του μέσα στο σκοτάδι εξ αιτίας «ενός ζεύγους σβώλων βρωμιάς, που αποκαλούμε πλανήτες», τα δικά του λόγια που έλαμψαν ξαφνικά στο νυχτερινό ουρανό και τον έβγαλαν από τον δρόμο του. Μικρότερου μεγέθους μαθηματικοί από τους Gauss, Laplace θα μπορούσαν να είχαν κάνει ότι κατάφερε ο Gauss υπολογίζοντας τις τροχιές της Δήμητρας και της Παλλάδας, έστω και αν τα προβλήματα αυτού του είδους, σύμφωνα με τα λόγια του Νεύτωνα, είναι από τα δυσκολότερα της μαθηματικής αστρονομίας. Ωστόσο, η λαμπρή επιτυχία του Gauss σε αυτά τα θέματα, του απέφερε άμεση αναγνώριση και εθεωρείτο πια ο πρώτος μαθηματικός της Ευρώπης, πράγμα που του εξασφάλιζε μια οικονομική άνεση για να μπορεί να εργάζεται απερίσπαστος· ίσως λοιπόν οι άθλιοι σβώλοι βρωμιάς να ήταν πραγματικά τα τυχερά του αστερία. Η δεύτερη μεγάλη φάση στην καριέρα του Gauss άρχισε την πρώτη μέρα του 19^{ου} αιώνα, ημέρα εξ ίσου σημαντική στην ιστορία της φιλοσοφίας και της αστρονομίας. Από το 1781, όταν ο Sir William Herschel (1732–1893) ανακάλυψε τον πλανήτη Ουρανό, ανεβάζοντας έτσι τον αριθμό των τότε γνωστών πλανητών στον ικανοποιητικό από φιλοσοφική άποψη αριθμό 7, οι αστρονόμοι ερευνούσαν επιμελώς τους ουρανούς για νέα μέλη της οικογένειας του Ήλιου, που η ύπαρξή τους αναμενόταν, σύμφωνα με τον νόμο του Bode, ανάμεσα στις τροχιές του Άρη και του Δία.

Η έρευνα ήταν άκαρπη, μέχρι που ο Giuseppe Piazzi (1746–1826) από το Παλέρμο, την πρώτη μέρα του 19^{ου} αιώνα, παρατήρησε κάτι που στην αρχή το εξέλαβε ως μικρό κομήτη που πλησίαζε τον Ήλιο, αλλά που γρήγορα αναγνωρίστηκε ως ένας νέος πλανήτης, ονομάστηκε αργότερα Δήμητρα, ο πρώτος από το πλήθος των μικρότερων πλανητών που μας είναι γνωστοί σήμερα. Η ανακάλυψη της Δήμητρας συνέπεσε με τη δημοσίευση από τον διάσημο φιλόσοφο Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) μιας σαρκαστικής επίθεσης κατά των αστρονόμων που τολμούσαν να ψάχνουν για έναν 8^ο πλανήτη.

Η σύμπτωση αυτή είναι μια από τις πιο ειρωνικές ετυμηγορίες που έχουν διατυπωθεί ποτέ στην πανάρχαια διαμάχη ανάμεσα στα γεγονότα και στη θεωρητική σκέψη. Αν οι αστρονόμοι, ισχυριζόταν ο Hegel, πρόσεχαν λίγο τη φιλοσοφία, θα έβλεπαν αμέσως πως υπάρχουν ακριβώς 7 πλανήτες, ούτε περισσότεροι, ούτε λιγότεροι. Η έρευνά τους λοιπόν ήταν μια ανόητη σπατάλη χρόνου. Αναμφίβολα αυτό το ελαφρό ολίσθημα του Hegel έχει εξηγηθεί ικανοποιητικά από τους μαθητές του, χωρίς όμως να σβήσουν με τα λόγια, τις εκατοντάδες των μικρότερων πλανητών που βγάζουν τη γλώσσα στην από καθ' έδρας απαγόρευσή του.

Η άποψη του Gauss για τους φιλόσοφους που μπλέκονται σε επιστημονικά ζητήματα τα οποία δεν έχουν καταλάβει, αυτό ισχύει ιδιαίτερα για τους φιλόσοφους που ραμφίζουν τα θεμέλια των μαθηματικών χωρίς να έχουν πρώτα τροχίσει τα ράμφη τους σε δύσκολα μαθηματικά. Και αντίστροφα, δείχνει γιατί ο Bertrand A.W. Russell, ο Alfred North Whitehead & ο David Hilbert έχουν συμβάλει τα μέγιστα στη φιλοσοφία των μαθηματικών στην εποχή μας: αυτοί οι άνθρωποι ήταν μαθηματικοί. Γράφοντας στο φίλο του Schumacher την 01.11.1844, ο Gauss λέει: «Βλέπετε το ίδιο πράγμα (μαθηματική ανικανότητα) στους σύγχρονους φιλόσοφους Schelling, Hegel,

Nees von Essenbeck και στους οπαδούς τους· δεν κάνουν τις τρίχες σας να σηκώνονται όρθιες με τους ορισμούς τους;

Διαβάστε στην ιστορία της αρχαίας φιλοσοφίας τι είδους εξηγήσεις έδωσαν οι μεγάλοι άνδρες εκείνης της εποχής, ο Πλάτωνας και άλλοι (εξαιρώ τον Αριστοτέλη). Όμως, ακόμη και με τον Kant, συχνά τα πράγματα δεν είναι πολύ καλύτερα κατά την άποψή μου, η διάκριση που κάνει ανάμεσα σε αναλυτικές και συνθετικές προτάσεις είναι από εκείνα τα πράγματα που είτε καταντούν τετριμμένα είτε είναι λάθος». Όταν το έγραψε αυτό ο Gauss (1844) είχε από καιρό κατακτήσει τη μη-ευκλείδεια γεωμετρία, που και από μόνη της αποτελούσε μια επαρκή ανατροπή μερικών από όσα έλεγε ο Kant για το «χώρο» και τη γεωμετρία και ίσως για αυτό ήταν κάπως υπέρμετρα περιφρονητικός. Δε θα πρέπει κανείς, με βάση τα παραπάνω που αφορούσαν σε καθαρά μαθηματικά ζητήματα, να οδηγηθεί στο συμπέρασμα πως ο Gauss δεν εκτιμούσε τη φιλοσοφία.

Το αντίθετο, όλες οι νέες φιλοσοφικές ιδέες τον γοήτευαν, αν και συχνά δεν επιδοκίμαζε τον τρόπο με τον οποίο προέκυπταν. «Υπάρχουν προβλήματα», είχε πει κάποτε, «που τη λύση τους τη θεωρώ άπειρα σοβαρότερη υπόθεση από τα μαθηματικά, για παράδειγμα προβλήματα ηθικής, ή της σχέσης μας προς τον Θεό, ή όσα σχετίζονται με το πεπρωμένο και το μέλλον μας· η λύση τους όμως μας ξεπερνά και βρίσκεται τελείως έξω από την επικράτεια της επιστήμης». Η Δήμητρα ήταν καταστροφή για τα μαθηματικά. Για να καταλάβουμε γιατί αντιμετωπίστηκε με τέτοια σοβαρότητα από τον Gauss, πρέπει να αναλογιστούμε πως η κολοσσιαία φιγούρα του Νεύτωνα, πεθαμένου εδώ και περισσότερο από 70 χρόνια, ακόμη έριχνε τη σκιά της στα μαθηματικά του 1801. Οι «μεγάλοι» μαθηματικοί της εποχής ήταν εκείνοι που, όπως ο Laplace, αγωνίζονταν να ολοκληρώσουν το νευτώνειο οικοδόμημα της ουράνιας μηχανικής. Τα μαθηματικά τα συνέχεαν ακόμη με τη μαθηματική φυσική, τέτοια όπως ήταν τότε, και με τη μαθηματική αστρονομία.

Το όραμα των μαθηματικών ως αυτόνομης επιστήμης, όπως το είδε ο Αρχιμήδης τον 3^ο π.Χ. αιώνα, είχε χαθεί μέσα στη λάμψη του νευτώνειου μεγαλείου και έπρεπε να έλθει ο νεαρός Gauss για να συλλάβει ξανά το όραμα των μαθηματικών ως επιστήμης που το πρώτο καθήκον είναι προς τον εαυτό της. Όμως ο μικρός πλανήτης Δήμητρα, σαγήνευσε την απaráμιλλη διάνοια του Gauss όταν ήταν 24 χρόνων, πάνω που άρχισε για τα καλά να βαδίζει σε εκείνες τις ανεξιχνίαστες ερημιές που θα γινόντουσαν η αυτοκρατορία των σύγχρονων μαθηματικών.

Η ευθύνη δεν ήταν αποκλειστικά της Δήμητρας. Το μοναδικό χάρισμα του Gauss να εκτελεί πράξεις με το μυαλό του, χάρισμα που οδήγησε στο *Disquisitiones Arithmeticae*, έπαιξε επίσης μοιραίο ρόλο στην τραγωδία. Οι φίλοι του και ο πατέρας του ήταν ανυπόμονοι με το νεαρό Gauss, επειδή δεν είχε βρει μια θέση με καλό εισόδημα τώρα που τέλειωσε η εκπαίδευση που του εξασφάλισε ο Δούκας και μη έχοντας ιδέα για τη φύση της δουλειάς που είχε απομονώσει το νέο άνδρα, νόμισαν πως είχε διασαλευθεί το μυαλό του. Τώρα, στο χάραμα του νέου αιώνα, δόθηκε στον Gauss η χρυσή ευκαιρία. Ένας νέος πλανήτης είχε ανακαλυφθεί σε μια θέση που καθιστούσε εξαιρετικά δύσκολη την παρατήρησή του.

Το να υπολογίσεις μια τροχιά με τα πενιχρά δεδομένα που ήταν τότε διαθέσιμα, συνιστούσε ένα στόχο του επιπέδου ενός Laplace. Ο Νεύτων είχε δηλώσει πως τέτοια προβλήματα ήταν από τα δυσκολότερα της μαθηματικής αστρονομίας. Η αριθμητική που ήταν απαραίτητη για τον προσδιορισμό της τροχιάς με ακρίβεια και που θα εγγυόταν πως η Δήμητρα κατά την περιφορά της περί τον Ήλιο δε θα χανόταν από τα τηλεσκόπια, θα μπορούσε να μπλοκάρει μια υπολογιστική μηχανή ακόμη και σήμερα, όμως για το νέο άνδρα που η υπεράνθρωπη μνήμη του, του επέτρεπε να υπολογίζει χωρίς τη βοήθεια λογαριθμικού πίνακα όταν βιαζόταν ή βαριόταν να

ψάξει για κανέναν, όλη αυτή η ατέλειωτη αριθμητική, λογιστική όχι αριθμητική, ήταν νηπιακό σπορ. Γιατί να μην ικανοποιήσει το αγαπημένο του βίτσιο, κάνοντας υπολογισμούς όσο ποτέ άλλοτε, προσδιορίζοντας τη δύσκολη τροχιά, προς ειλικρινή τέρψη και θαυμασμό των υπαγορευτών της μαθηματικής μόδας και δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στους υπομονετικούς αστρονόμους, ένα χρόνο αργότερα, να ανακαλύψουν πάλι τη Δήμητρα στη θέση όπου, σύμφωνα με τον νευτώνειο νόμο της βαρύτητας έπρεπε να βρεθεί αν ο νόμος ήταν πραγματικά νόμος της φύσης;

Γιατί να μην τα κάνει όλα αυτά, γυρνώντας την πλάτη του στο άυλο όραμα του Αρχιμήδη και ξεχνώντας τις δικές του αξεπέραστες ανακαλύψεις που περίμεναν να αναπτυχθούν στο ημερολόγιό του; Γιατί να μη γίνει, με μια λέξη, δημοφιλής; Η γενναιοδωρία του Δούκα, πάντα αλόγυστη, είχε εν τούτοις πληγώσει την περηφάνια του νεαρού· τιμές, αναγνώριση, αποδοχή του ως «μεγάλου» μαθηματικού, σύμφωνα με τη μόδα της εποχής, με πιθανή συνέπεια την οικονομική του ανεξαρτησία όλα αυτά ήταν τώρα ευπρόσιτα. Ο Gauss, ο μαθηματικός θεός όλων των εποχών, άπλωσε το χέρι του και έδρεψε τους καρπούς μιας φτηνής και εφήμερης διασημότητας. Για μια εικοσαετία περίπου, τα υψηλά οράματα που τις μακρινές τους αναλαμπές ο έφηβος Gauss είχε αποτυπώσει με απεριόριστη αγαλλίαση στο ημερολόγιό του, έμειναν ανέγγιχτα και ξεχασμένα.

Η Δήμητρα παρατηρήθηκε και πάλι, ακριβώς εκεί όπου την ήθελαν οι ιδιοφυείς λεπτομερείς υπολογισμοί του νεαρού Gauss. Η Παλλάς, η Εστία και η Ήρα, ασήμαντοι αδελφοί πλανήτες της μικροσκοπικής Δήμητρας, εντοπίστηκαν γρήγορα από τηλεσκόπια, αψηφώντας τον Hegel και οι τροχιές τους βρέθηκαν να συμφωνούν επίσης με τους εμπνευσμένους υπολογισμούς του Gauss. Υπολογισμοί που θα μπορούσαν να κοστίσουν ένα τριήμερο δουλειάς στον Euler, λέγεται πως ένας τέτοιος υπολογισμός τον είχε τυφλώσει, ήταν τώρα απλές ασκήσεις που έπαιρναν λίγες ώρες. Ο Gauss είχε δώσει τη μέθοδο, τη ρουτίνα. Το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου του, επί μια εικοσαετία περίπου, αναλώθηκε σε αστρονομικούς υπολογισμούς.

Ακόμη όμως και μια τόσο μίζερη δουλειά όπως αυτή, δε θα μπορούσε να αμβλύνει τη δημιουργική μεγαλοφυΐα ενός Gauss. Το 1809, δημοσίευσε το 2^ο αριστούργημά του, **Try Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium** (Θεωρία της κίνησης των ουρανίων σωμάτων που περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο σε κωνικές τομές), όπου μια εξαντλητική μελέτη του προσδιορισμού των πλανητικών τροχιών από τα δεδομένα των παρατηρήσεων, συμπεριλαμβάνοντας και τη δύσκολη ανάλυση των διαταραχών, οδηγεί στο νόμο που επρόκειτο για πολλά χρόνια να κυριαρχήσει στην υπολογιστική και πρακτική αστρονομία. Ήταν μεγάλο έργο, όχι όμως τόσο μεγάλο όσο θα μπορούσε εύκολα να παραγάγει ο Gauss αν αξιοποιούσε τις νύξεις που έμεναν παραμελημένες στο ημερολόγιό του. Καμιά νέα ανακάλυψη για τα μαθηματικά δεν ήρθε στο φως με τη Theoria motus. Η αναγνώριση έφτασε με εντυπωσιακή ταχύτητα μετά την επανανακάλυψη της Δήμητρας.

Ο Laplace ανακήρυξε το νεαρό μαθηματικό αμέσως, ίσο του και λίγο αργότερα ανώτερό του. Ύστερα από κάποιο διάστημα, όταν ο Βαρόνος Alexander von Humboldt (1769–1859), ο διάσημος ταξιδευτής και ερασιτέχνης των επιστημών, ρώτησε τον Laplace ποιός ήταν ο μεγαλύτερος μαθηματικός της Γερμανίας, ο Laplace απάντησε «ο Pfaff». «Και ο Gauss;» ρώτησε γεμάτος έκπληξη ο von Humboldt, μιας και υποστήριζε τότε τον Gauss για τη θέση του διευθυντή στο Παρατηρητήριο Göttingen. «Ω!», είπε ο Laplace, «ο Gauss είναι ο μεγαλύτερος μαθηματικός στον κόσμο.» Η δεκαετία που ακολούθησε μετά το επεισόδιο με τη Δήμητρα υπήρξε πλούσια σε χαρές και λύπες για το Gauss.

Οι δυσφημιστές του, δεν έλειψαν ακόμη και τότε, στο ξεκίνημα της καριέρας του. Επιφανείς άνθρωποι που επηρέαζαν ένα εκλεπτυσμένο κοινό, κορόιδευαν το νέο άνδρα των 24 χρόνων πως έχανε το χρόνο του σε μια τόσο άχρηστη ενασχόληση, όπως ο υπολογισμός της τροχιάς ενός μικρού πλανήτη. Η Δήμητρα μπορεί να υπήρξε θεά των αγρών, ήταν όμως προφανές στους αστειολόγους πως κανένα καλαμπόκι από το νέο πλανήτη δε θα έφτανε στην αγορά του Brunswick κάποιο Σάββατο απόγευμα.

Χωρίς αμφιβολία είχαν δίκιο, γελούσαν όμως μαζί του και μετά 30 χρόνια, όταν έθετε τις βάσεις της μαθηματικής θεωρίας του ηλεκτρομαγνητισμού και επινοούσε τον ηλεκτρικό τηλεγράφο. Ο Gauss τους άφηνε να απολαμβάνουν τα αστεία τους. Δεν απάντησε ποτέ δημόσια, όμως σε στενό κύκλο εξέφρασε τη λύπη του που άνθρωποι αξιότιμοι και λειτουργοί της επιστήμης μείωναν τους εαυτούς τους με την επίδειξη τέτοιας μικροπρέπειας. Εν τω μεταξύ, συνέχιζε τη δουλειά του, ευγνώμων για τις τιμές που του επιδαψίλευαν οι διάφορες επιστημονικές εταιρείες της Ευρώπης, χωρίς όμως να ξεστρατίζει από το δρόμο του, προκειμένου να προκαλέσει τέτοιες τιμές. Ο Δούκας του Brunswick αύξησε το εισόδημα του νεαρού, επιτρέποντάς του έτσι να παντρευτεί (09.10.1805) σε ηλικία 28 χρόνων.

Η κυρία ήταν η Johan ne Osthof από το Brunswick. Γράφοντας στον παλιό του φίλο από το Πανεπιστήμιο, τον Wolfgang Bolyai, 3 ημέρες μετά τον αρραβώνα του, ο Gauss εξέφραζε την απίστευτη ευτυχία του: «Η ζωή στέκει μπροστά μου σαν αιώνια άνοιξη με καινούργια και λαμπρά χρώματα». Τρία παιδιά προέκυψαν από αυτό το γάμο: ο Joseph, η Minna και ο Louis, το πρώτο από τα οποία λέγεται πως κληρονόμησε το χάρισμα του πατέρα του για νοητικούς υπολογισμούς. Η Johanne πέθανε στις 11.10.1809 μετά τη γέννηση του Louis, αφήνοντας σε μαύρη απελπισία το νεαρό σύζυγό της. Η αιώνια άνοιξη έγινε χειμώνας.

Αν και για χάρη των μικρών παιδιών του ξαναπαντρεύτηκε τον επόμενο χρόνο (04.08.1810), χρειάστηκε να περάσει πολύς χρόνος, πριν μπορέσει να μιλήσει χωρίς συγκίνηση για την πρώτη του γυναίκα. Με τη δεύτερη γυναίκα του, τη Minna Waldeck, η οποία ήταν στενή φίλη της πρώτης, αποκτήσανε δυο γιούς και μία κόρη. Σύμφωνα με τα κουτσομπολιά, ο Gauss δεν τα πήγαινε καλά με τους γιούς του, εκτός ίσως με τον προικισμένο Joseph που δε δημιούργησε ποτέ πρόβλημα στον πατέρα του. Δύο από αυτούς λέγεται πως έφυγαν από το σπίτι και πήγαν στις Η.Π.Α.

Επειδή φημολογείται ότι ο ένας από αυτούς έχει αφήσει πολλούς απογόνους που είναι ακόμα εν ζωή στην Αμερική, ένας από τους γιούς έγινε πλούσιος έμπορος στο St. Louis την εποχή των ποταμόπλοιων και οι 2 ξεκίνησαν ως αγρότες στο Missouri. Με τις κόρες του, ο Gauss τα πήγαινε πολύ καλά. Μια τελείως αντίθετη εκδοχή, λέει πως ο Gauss ήταν ευγενικός με τους γιούς του, όμως κάποιοι από αυτούς ήταν μάλλον υπερβολικά ζωηροί, προξενώντας στον προβληματισμένο πατέρα τους ατέλειωτη ανησυχία. Θα περίμενε κανείς πως η ανάμνηση του δικού του πατέρα θα είχε κάνει τον Gauss καλότροπο με τους γιούς του.

Στα 1808 ο Gauss έχασε τον πατέρα του. Δύο χρόνια πριν, είχε υποστεί μια βαρύτερη απώλεια με το θάνατο του ευεργέτη του κάτω από τραγικές περιστάσεις. Ο Δούκας Φερδινάνδος δεν ήταν μόνο ένας φωτισμένος πάτρωνας της μάθησης και ευγενικός ηγεμόνας, αλλά και ένας πρώτης τάξεως στρατιώτης που είχε κερδίσει τη μεγάλη εκτίμηση του Φρειδερίκου του Μεγάλου για τη γενναιότητα και τη στρατιωτική ιδιοφυΐα του κατά τη διάρκεια του Επταετούς πολέμου (1756–1763).

Στα 70 του ο Φερδινάνδος τέθηκε επικεφαλής των Πρωσικών δυνάμεων, σε μια απέλπιδα προσπάθεια να αναχαιτιστούν οι Γάλλοι του Ναπολέοντα, μετά την αποτυχημένη αποστολή του Δούκα στην Αγία Πετρούπολη για εξασφάλιση Ρωσικής βοήθειας. Η μάχη του Austerlitz 02.12.1805 ανήκε πλέον στην ιστορία και η Πρωσία βρέθηκε σε εξαιρετικά δύσκολη θέση. Ο Φερδινάνδος αντιμετώπισε σε δύο μάχες στο

Auerstedt και στην Ιένα τους Γάλλους κατά την προέλασή τους προς το Saale, νικήθηκε κατά κράτος και πληγώθηκε θανάσιμα. Κινήθηκε προς το πατρικό του σπίτι. Ο Μέγας Ναπολέων έρχεται τώρα στο προσκήνιο. Την ώρα της ήττας του Φερδινάνδου, ο Ναπολέων είχε εγκαταστήσει το αρχηγείο του στο Halle.

Μια αντιπροσωπεία από το Brunswick περίμενε το νικητή Αυτοκράτορα για να τον παρακαλέσει να δείξει τη γενναιοδωρία του προς το γενναίο γηραιό άνδρα που είχε νικήσει. Θα ξεπερνούσε ο πανίσχυρος Αυτοκράτορας ένα σημείο της στρατιωτικής εθιμοτυπίας, αφήνοντας το νικημένο εχθρό να πεθάνει ειρηνικά στο πλευρό των δικών του; Ο Δούκας, τον διαβεβαίωναν, δεν ήταν πλέον επικίνδυνος. Πέθαινε. Όχι μόνο αρνήθηκε, αλλά το έκανε με ωμό και χυδαίο τρόπο. Δείχνοντας το πραγματικό πρόσωπό του, επαύξησε την άρνησή του με έναν περιττό εξευτελισμό του τιμημένου αντιπάλου του, κοροϊδεύοντας υστερικά τις στρατιωτικές ικανότητες του ανθρώπου που πέθαινε. Δεν έμενε άλλο στην ταπεινωμένη αντιπροσωπεία παρά να προσπαθήσει να σώσει τον ευγενικό διοικητή της από τον εξευτελισμό ενός θανάτου στη φυλακή. Δεν προκαλεί έκπληξη που οι Γερμανοί, περίπου 9 χρόνια αργότερα, πολέμησαν σαν μεθοδικοί διάβολοι στο Βατερλό για να ρίξουν στο λάκκο τον Αυτοκράτορα των Γάλλων. Ο Gauss εκείνη την εποχή ζούσε στο Brunswick.

Το σπίτι του βρισκόταν πάνω στον κεντρικό δρόμο. Ένα πρωινό προς το τέλος του φθινοπώρου, είδε μια νοσοκομειακή καρότσα να περνά βιαστικά. Μέσα της κείτονταν ο ετοιμοθάνατος Δούκας στη φυγή του προς την Αλτώνα. Με συγκίνηση υπερβολικά βαθιά για να εκφραστεί με λόγια, έβλεπε ο Gauss τον άνθρωπο που του είχε παρασταθεί περισσότερο απ' τον πατέρα του να φεύγει μακριά για να πεθάνει σαν κυνηγημένος εγκληματίας. Δεν είπε τίποτα τότε και ελάχιστα στη συνέχεια οι φίλοι του όμως πρόσεξαν πως κλείστηκε περισσότερο στον εαυτό του και η χαρακτηριστική του σοβαρότητα επιτάθηκε. Όπως ο Καρτέσιος στη νεότητά του, ο Gauss ένοιωθε τρόπο για το θάνατο και σε όλη του τη ζωή ο θάνατος ενός στενού φίλου τον πάγωνε. Ένοιωθε υπερβολικά ζωτικός για να πεθάνει ο ίδιος ή να είναι παρών στο θάνατο ενός άλλου. Ο Δούκας πέθανε στο πατρικό του στην Αλτώνα, στις 10.11.1806. Με το γενναιόδωρο πάτρωτά του νεκρό, ο Gauss επειγόταν να εξασφαλίσει τα προς το ζην για την οικογένειά του. Αυτό δεν ήταν δύσκολο, καθώς η φήμη του είχε πια εξαπλωθεί στις πιο απομακρυσμένες γωνιές της Ευρώπης.

Η Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης τον έβλεπε ως το διάδοχο του Euler, για τον οποίο δεν είχε βρεθεί άξιος αντικαταστάτης μετά τον θάνατό του το 1783. Το 1807 του έγινε μια συγκεκριμένη και δελεαστική προσφορά. Ο Alexander von Humboldt και άλλοι ισχυροί φίλοι, που δεν είχαν την παραμικρή διάθεση να δουν τη Γερμανία να χάνει το μεγαλύτερο μαθηματικό του κόσμου, κινήθηκαν δραστήρια και ο Gauss τοποθετήθηκε διευθυντής του Παρατηρητηρίου Göttingen, με το προνόμιο και την υποχρέωση, όταν ήταν απαραίτητο να παραδίδει μαθήματα μαθηματικών στους φοιτητές του Πανεπιστημίου.

Δεν χωρά αμφιβολία πως ο Gauss θα μπορούσε να βρει μια θέση καθηγητή μαθηματικών, προτίμησε όμως τη θέση στο Παρατηρητήριο μιας και του πρόσφερε περισσότερες δυνατότητες για αδιάκοπη ερευνητική δραστηριότητα. Αν και θα ήταν υπερβολή να πούμε πως μισούσε τη διδασκαλία, εν τούτοις η διδασκαλία σε μέτριους φοιτητές δεν του πρόσφερε καμιά ευχαρίστηση μόνο όταν είχε μπροστά του έναν πραγματικό μαθηματικό αφηνόταν και αποκάλυπτε τα μυστικά των μεθόδων του στα τέλεια προετοιμασμένα μαθήματά του.

Τέτοια κίνητρα όμως του δινόταν δυστυχώς σπάνια και στην πλειονότητά τους οι σπουδαστές με τους οποίους έχανε τον πολύτιμο χρόνο του θα ήταν καλύτερο να είχαν ασχοληθεί με κάτι διαφορετικό από τα μαθηματικά. Γράφοντας το 1810 στο στενό του φίλο, τον αστρονόμο και μαθηματικό Friedrich Wilhelm Bessel (1784–

1846), ο Gauss λέει: «Αυτό το χειμώνα παραδίδω 2 σειρές διαλέξεων σε 3 σπουδαστές, από τους οποίους ο ένας είναι μέτρια προετοιμασμένος, ο δεύτερος λιγότερο από μέτρια και ο τρίτος στερείται και προετοιμασίας και ικανότητας. Τέτοια είναι τα βάρη του μαθηματικού επαγγέλματος».

Τα χρήματα που μπορούσε να διαθέσει τότε το Göttingen για την πληρωμή του Gauss, οι Γάλλοι ήταν τότε απασχολημένοι με τη λεηλασία της Γερμανίας με πρόσχημα τη δήθεν καλή διακυβέρνησή της, δεν ήταν πολλά, αλλά αρκετά για την απλή ζωή του Gauss και της οικογενείας του. Η πολυτέλεια ποτέ δεν τράβηξε τον Πρίγκιπα των μαθηματικών, που η ζωή του είχε αφιερωθεί απροσποίητα στην επιστήμη πριν ακόμη γίνει 20 χρόνων.

Όπως γράφει ο φίλος του Sartorius von Waltershausen, όπως ήταν στα νιάτα του, έτσι παρέμεινε και στα γηρατειά του μέχρι την ημέρα του θανάτου του, ο ανεπηρέαστα απλός Gauss. Ένα μικρό γραφείο, ένα μικρό τραπέζι με πράσινο κάλυμμα όπου εργαζόταν, ένα ψηλό θρανίο για όρθιους βαμμένο άσπρο, ένας στενός σοφάς και, μετά τα 70 του, μια πολυθρόνα, μια λυχνία, ένα υπνοδωμάτιο χωρίς θέρμανση, απλή τροφή, μια ρόμπα και ένας βελουδένιος σκούφος, αυτές ήταν όλες του οι ανάγκες. Αν ο Gauss ήταν απλός και οικονόμος, οι Γάλλοι εισβολείς στη Γερμανία το 1807 ήταν άπληστοι. Για να κυβερνήσουν τη Γερμανία σύμφωνα με τις ιδέες τους, οι νικητές του Auerstedt και της Ιένας επέβαλαν στους νικημένους πρόστιμα υψηλότερα απ' όσο μπορούσαν να αντέξουν.

Ως καθηγητής και αστρονόμος στο Göttingen, ο Gauss κρίθηκε από τους εκβιαστές ικανός για υποχρεωτική συμβολή ύψους 2.000 φράγκων. Αυτό το ποσό ήταν πολύ μεγάλο για τον Gauss. Σχεδόν αμέσως ο Gauss έλαβε γράμμα από το φίλο του αστρονόμο Olbers, που του εσώκλειε το ποσόν του προστίμου και εξέφραζε την αγανάκτησή του για το ότι γινόταν τέτοιος εκβιασμός σε έναν επιστήμονα. Ευχαριστώντας το γενναιόδωρο φίλο του για τη συμπάθειά του, ο Gauss αρνήθηκε τα χρήματα και τα επέστρεψε αμέσως στο δωρητή.

Δεν ήταν όμως όλοι οι Γάλλοι παραδόπιστα όπως ο Ναπολέων. Λίγο αφού είχε επιστρέψει τα χρήματα στον Olbers, ο Gauss έλαβε ένα φιλικό σημείωμα από τον Laplace από το οποίο μάθαινε πως ο διάσημος Γάλλος μαθηματικός είχε πληρώσει το πρόστιμο για το μεγαλύτερο μαθηματικό του κόσμου, θεωρώντας το τιμή του να σηκώνει αυτό το άδικο φορτίο από τους ώμους του φίλου του. Μιας και ο Laplace είχε πληρώσει το πρόστιμο στο Παρίσι, ο Gauss δε μπορούσε να επιστρέψει και σε αυτόν τα χρήματα. Δε θέλησε όμως να δεχθεί τη βοήθεια του Laplace.

Μια απροσδόκητη (και που δεν την είχε επιδιώξει) θετική οικονομική εξέλιξη, του επέτρεψε να επιστρέψει τα χρήματα στον Laplace με τον ανάλογο τόκο. Θα πρέπει να είχε διαδοθεί εν τω μεταξύ πως ο Gauss αρνιόταν την ελεημοσύνη. Η επόμενη προσπάθεια για να τον βοηθήσουν πέτυχε. Ένας θαυμαστής του στη Φραγκφούρτη του έστειλε 1000 guilders κρατώντας την ανωνυμία του. Καθώς ο Gauss δε μπόρεσε να βρει τον αποστολέα, αναγκάστηκε να κρατήσει το δώρο.

Ο θάνατος του φίλου του Φερδινάνδου, η άσχημη κατάσταση της Γερμανίας κάτω από τη ληστρική κατοχή των Γάλλων, οι οικονομικές στενοχώριες και η απώλεια της πρώτης του γυναίκας, όλα συνέβαλαν στο να υποσκαφθεί η υγεία του και να γίνει η ζωή του δυστυχισμένη στο ξεκίνημα της τέταρτης δεκαετίας της. Ούτε βέβαια η οργανική προδιάθεσή του στην υποχονδρία, επιδεινωμένη από την ακατάπαυστη υπερβολική εργασία, βοήθησε την κατάσταση. Τη δυστυχία του δεν την μοιράστηκε ποτέ με τους φίλους του, για τους οποίους παρέμενε πάντα ο ήρεμος άνθρωπος που απαντούσε στις επιστολές τους. Την εκμυστηρεύεται όμως μία και μοναδική φορά, σε ένα ιδιωτικό μαθηματικό χειρόγραφο.

Επί μια τριετία μετά την ανάληψη της θέσης του διευθυντή στο Göttingen, ο Gauss επέστρεφε από καιρού εις καιρόν σε ένα από τα σημαντικά πράγματα που ήταν σημειωμένα στο ημερολόγιό του. Σε κάποιο σημείο ενός χειρογράφου του για τις ελλειπτικές συναρτήσεις, η επιστημονική έκθεση διακόπτεται άξαφνα από λέξεις γραμμένες όμορφα με μολύβι: «Καλύτερος ο θάνατος από μια τέτοια ζωή». Η δουλειά του έγινε το φάρμακό του. Τα χρόνια 1811–1812 (ο Gauss ήταν 34 χρόνων το 1811) ήταν καλύτερα. Με μια σύζυγο πάλι που φρόντιζε τα μικρά παιδιά του, ο Gauss άρχισε να βρίσκει κάποια ηρεμία. Τότε, σχεδόν ένα χρόνο μετά το δεύτερο γάμο του, ο μεγάλος κομήτης του 1811, που παρατηρήθηκε πρώτα από τον Gauss στο λυκόφως του δειλινού της 22.08 εμφανίστηκε απροειδοποίητα ολόφωτος.

Εδώ υπήρχε ένας αξιόμαχος αντίπαλος για να δοκιμαστούν τα όπλα που είχε επινοήσει ο Gauss, ώστε να υποτάξει τους μακρινούς πλανήτες. Τα όπλα του αποδείχθηκαν επαρκή. Ενώ οι προληπτικοί κάτοικοι της Ευρώπης παρακολουθούσαν το λαμπρό θέαμα με δέος, καθώς ο κομήτης απελευθέρωνε το φλεγόμενο γιγατόνι του πλησιάζοντας τον Ήλιο και έβλεπαν στη φωτεινή λεπίδα μια αυστηρή προειδοποίηση από τον Ουρανό ότι ο Βασιλεύς των Βασιλέων ήταν οργισμένος με τον Ναπολέοντα και απηυδισμένος με τον ανελέητο τύραννο, ο Gauss είχε την ικανοποίηση να διαπιστώσει πως ο κομήτης ακολουθούσε την πορεία που είχε ο ίδιος γρήγορα υπολογίσει μέχρι το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο. Τον επόμενο χρόνο, οι εύπιστοι είδαν επίσης τις προφητείες τους να επαληθεύονται με το κάψιμο της Μόσχας και την καταστροφή της μεγάλης στρατιάς του Ναπολέοντα στις παγωμένες πεδιάδες της Ρωσίας. Επρόκειτο για μια από τις σπάνιες περιπτώσεις όπου η λαϊκή ερμηνεία ταιριάζει με τα γεγονότα και οδηγεί σε σημαντικότερες συνέπειες απ' ό,τι η επιστημονική ερμηνεία. Ο Ναπολέων είχε ένα εντελώς εύπιστο μυαλό, πίστευε σε «προαισθήματα», συμβίβαζε τις μεγάλες σφαγές του με μια παιδιάστικη πίστη σε μια αγαθοεργό ανεξιχνίαστη πρόνοια, και θεωρούσε τον εαυτό του άνθρωπο του πεπρωμένου. Δεν είναι απίθανο το ουράνιο θέαμα ενός αβλαβούς κομήτη που επιδείκνυε την πλουμιστή ουρά του διασχίζοντας τους ουρανούς, να εντυπώθηκε στο υποσυνείδητο ενός ανθρώπου όπως ο Ναπολέων και να θόλωσε την κρίση του.

Ο σεβασμός ενός τέτοιου άνδρα για τα μαθηματικά και τους μαθηματικούς, σεβασμός που άγγιζε τα όρια της δεισιδαιμονίας, δεν εξυψώνει ούτε τα μεν ούτε τους δε, αν και έχει συχνά αναφερθεί ως μια από τις κύριες δικαιώσεις και των δύο. Πέρα από μια εύκολη εκτίμηση της αξίας των μαθηματικών για στρατιωτικά θέματα, όπου η χρησιμότητά τους είναι προφανής ακόμη και σε έναν ηλίθιο, ο Ναπολέων δεν είχε ιδέα για το τι ήταν τα μαθηματικά που καλλιεργούσαν κορυφαίοι επιστήμονες όπως οι σύγχρονοί του Lagrange, Laplace, Gauss.

Οντας καλός στα τετριμμένα στοιχειώδη μαθηματικά του σχολείου, στράφηκε πολύ νωρίς σε άλλα πράγματα, ώστε να μπορέσει να επαληθεύσει την υπόσχεσή του και από μαθηματικής απόψεως δεν ωρίμασε ποτέ. Αν και φαίνεται απίστευτο πως ένας άνδρας με τις αποδεδειγμένες ικανότητες του Ναπολέοντα θα μπορούσε να υποτιμά τόσο κατάφωρα τις δυσκολίες πραγμάτων που βρίσκονταν πέρα από την κατανόησή του, ώστε να κάνει επιστημονικές υποδείξεις στον **Laplace**, είναι γεγονός πως είχε το γελοίο θράσος να δηλώνει στο συγγραφέα της **Mécanique celeste**, πως θα διάβαζε το βιβλίο του τον πρώτο ελεύθερο μήνα που θα εύρισκε. Ο Νεύτων και ο Gauss θα μπορούσαν ίσως να το κάνουν ο Ναπολέων θα μπορούσε αναμφίβολα να φυλλομετρήσει το έργο χωρίς πολύ κόπο μέσα στον μήνα του.

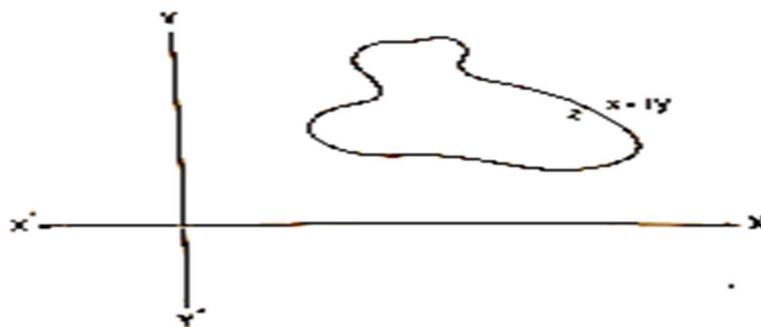
Προκαλεί ικανοποίηση που ο Gauss ήταν πολύ περήφανος για να δεχθεί να εκπορνεύσει τα μαθηματικά στο Μεγάλο Ναπολέοντα, πράγμα που θα είχε συμβεί αν εκμεταλλευόταν τη ματαιοδοξία του τελευταίου σχετικά με τα μαθηματικά, για να πετύχει την απόσυρση του προστίμου των 2.000 φράγκων, όπως κακώς του είχαν

υποδείξει κάποιοι φίλοι του. Το Ναπολέοντα κατά πάσα πιθανότητα θα τον κολάκευε η δυνατότητα να επιδείξει τη φιλευσπλαχνία του. Ο Gauss όμως δε μπορούσε να ξεχάσει το θάνατο του Φερδινάνδου και αισθανόταν ότι τόσο ο ίδιος όσο και τα μαθηματικά που λάτρευε, θα ήταν καλύτερα χωρίς τη συγκαταβατική καταδεκτικότητα ενός Ναπολέοντα. Τίποτε δε δείχνει καλύτερα τη διαφορά ανάμεσα στο μαθηματικό και στη στρατιωτική ιδιοφυΐα, από όσο η στάση τους απέναντι σε έναν ηττημένο εχθρό. Είδαμε πώς μεταχειρίστηκε ο Ναπολέων το Φερδινάνδο.

Όταν έπεσε ο Ναπολέων, ο Gauss δεν πανηγύρισε. Ήρεμα και αποστασιοποιημένα διάβασε ότι μπορούσε να βρει για τη ζωή του Ναπολέοντα, καταβάλλοντας κάθε προσπάθεια να καταλάβει τον τρόπο που δούλευε το μυαλό του τελευταίου. Η προσπάθεια του τον διασκέδαζε κιόλας. Διέθετε μια οξεία αίσθηση του χιούμορ και ο ρεαλισμός που του κληροδότησαν οι σκληρά εργαζόμενοι χωρικοί πρόγονοί του τον έκανε να γελά με τους ηρωισμούς. Η χρονιά του 1811 θα μπορούσε να είναι σταθμός για τα μαθηματικά, όπως το 1801, χρονιά εμφάνισης του *Disquisitiones Arithmeticae*, αν ο Gauss είχε φέρει στη δημοσιότητα μια ανακάλυψη που εμπιστεύτηκε στον Bessel.

Έχοντας καταλάβει πλήρως τους μιγαδικούς αριθμούς και τη γεωμετρική τους αναπαράσταση ως σημείων του επιπέδου της αναλυτικής γεωμετρίας, ο Gauss άρχισε να ασχολείται με τη μελέτη αυτών που καλούνται σήμερα αναλυτικές συναρτήσεις τέτοιων αριθμών. Ο μιγαδικός αριθμός $x+iy$, όπου το i δηλώνει τον $\sqrt{-1}$ αντιστοιχεί στο σημείο (x, y) . Για λόγους συντομίας, ο $x+iy$ θα δηλώνεται με το γράμμα z . Όταν τα x, y παίρνουν ανεξάρτητα πραγματικές τιμές με οποιονδήποτε καθορισμένο συνεχή τρόπο, το σημείο z θα κινείται στο επίπεδο, προφανώς όχι με τυχαίο τρόπο αλλά συμμορφούμενο προς τις τιμές των x, y . Κάθε έκφραση που περιλαμβάνει το z , όπως $z^3, 1/2$ κ.λπ., η οποία παίρνει μία μόνο τιμή όταν δίνεται μια τιμή στο z , καλείται μονότιμη συνάρτηση του z . Θα συμβολίζουμε μια τέτοια συνάρτηση με $f(z)$.

Έτσι, αν $f(z)$ είναι η συγκεκριμένη συνάρτηση $f(z) = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ (διότι $i^2 = -1$), είναι φανερό πως, όταν δίνεται κάποια τιμή στο z , δηλαδή στο $x+iy$, για παράδειγμα $x=2, y=3$, τουτέστιν $z=2+3i$, αυτή καθορίζει μια ακριβώς τιμή της $f(z)$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, για $z=2+3i$, παίρνουμε $f(z) = -5+12i$. Δεν μελετώνται όλες οι μονότιμες συναρτήσεις $f(z)$ στη θεωρία των συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής· ανάμεσα τους ξεχωρίζουν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις που εξετάζονται εξαντλητικά.



Μετακινούμε το z σε μια άλλη θέση, έστω z' . Η συνάρτηση $f(z')$ παίρνει άλλη τιμή, $f(z')$, που προκύπτει αν βάλουμε το z' στη θέση του z . Η διαφορά $f(z') - f(z)$ διαιρείται τώρα με τη διαφορά $z' - z$, δηλαδή $[f(z') - f(z)] / (z' - z)$ και ακριβώς όπως γίνεται στον υπολογισμό της κλίσης ενός γραφήματος για να βρεθεί η παράγωγος της

συνάρτησης που παριστάνει το γράφημα, αφήνουμε και εδώ το z' να πλησιάζει στο $=$ απερίοριστα, έτσι ώστε το $f(2)$ να πλησιάζει ταυτόχρονα στο $f(z)$.

Εδώ όμως εμφανίζεται ένα αξιοσημείωτο καινούργιο φαινόμενο. Δεν υπάρχει ένας μοναδικός δρόμος κίνησης του z καθώς τείνει να συμπίσει με το z , αφού το z μπορεί να περιπλανηθεί οπουδήποτε στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών ακολουθώντας κάποιο από τα άπειρα διαφορετικά μονοπάτια, πριν συμπίσει με το z . Δε θα έπρεπε να περιμένουμε η οριακή τιμή του $[f(z)-f(z)]/(z-z)$ όταν το z' τείνει να συμπίσει με το z , να είναι η ίδια για όλα αυτά τα μονοπάτια και γενικά δεν είναι.

Όμως, αν η $f(z)$ είναι τέτοια ώστε αυτή η οριακή τιμή να είναι η ίδια για όλα τα μονοπάτια από τα οποία το z' κινείται προς το z , τότε η $f(z)$ λέγεται παραγωγίσιμη στο $=$ (ή στο σημείο που αντιστοιχεί στο 2). Το μονότονο και η παραγωγισιμότητα είναι διακριτικά των αναλυτικών συναρτήσεων μας μιγαδικής μεταβλητής.

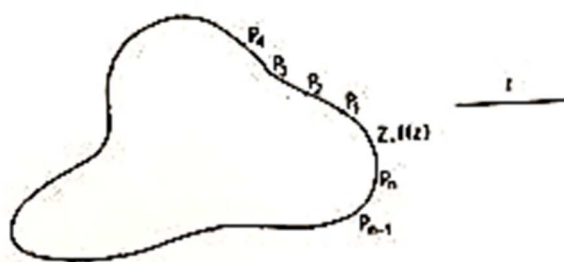
Κάποια ιδέα της σπουδαιότητας των αναλυτικών συναρτήσεων μπορούμε να πάρουμε από το γεγονός ότι μεγάλες περιοχές της θεωρητικής μηχανικής των ρευστών (επίσης του μαθηματικού ηλεκτρισμού και της αναπαράστασης με συναρτήσεις που δεν αλλοιώνουν τις γωνίες) χρησιμοποιούν ως βασικό εργαλείο τη θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής. Έστω ότι μια τέτοια συνάρτηση $f(z)$ χωρίζεται στο «πραγματικό» της μέρος (εκείνο το οποίο δεν περιέχει τη «φανταστική μονάδα» i) και στο «φανταστικό» της μέρος, ας πούμε $f(z) = U + iV$. Στην ειδική περίπτωση της αναλυτικής συνάρτησης z' , έχουμε $U = x^2 - y^2$, $V = 2xy$. Φανταστείτε μια λεπτή μεμβράνη ρευστού που απλώνεται πάνω σε ένα επίπεδο. Αν η κίνηση του ρευστού είναι αστρόβιλη, μια γραμμή ροής της κίνησης προκύπτει από κάποια αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ με το να χαράξουμε την καμπύλη $U=a$, όπου ο κάποιος τυχαίος πραγματικός αριθμός και όμοια παίρνουμε μια ισοδυναμική όταν χαράξουμε την $V=b$ (όπου ο τυχαίος πραγματικός αριθμός). Αφήνοντας στη συνέχεια τα a, b να μεταβάλλονται, παίρνουμε μια πλήρη εικόνα της κίνησης για όσο μεγάλη περιοχή θέλουμε.

Για μια δοθείσα κατάσταση ροής, για παράδειγμα, όταν το ρευστό απλώνεται γύρω από ένα εμπόδιο, το δύσκολο μέρος του προβλήματος είναι να βρούμε ποιά αναλυτική συνάρτηση πρέπει να επιλέξουμε. Έτσι, το όλο θέμα προσεγγίζεται με αντίστροφη πορεία: οι απλές αναλυτικές συναρτήσεις έχουν μελετηθεί και είναι υπό έρευνα τα προβλήματα στα οποία αυτές ταιριάζουν. Κατά περίεργο τρόπο, πολλά από αυτά τα τεχνικής σύλληψης προβλήματα έχουν αποδειχθεί άκρως εξυπηρετικά των αναγκών της αεροδυναμικής και άλλων πρακτικών εφαρμογών της μηχανικής των ρευστών. Η θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής αποτέλεσε έναν από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς θριάμβους του 19^{ου} αιώνα.

Ο Gauss στο γράμμα του προς τον Bessel, διατυπώνει αυτό που αποτελεί το θεμελιώδες θεώρημα αυτής της τεράστιας θεωρίας. Δεν το δημοσίευσε όμως ποτέ, με συνέπεια να ανακαλυφθεί εκ νέου από τον Cauchy και αργότερα από τον Weierstrass. Μιας και το θεώρημα αυτό αποτελεί σταθμό στην ιστορία της μαθηματικής ανάλυσης,

θα το περιγράψουμε σύντομα, παραλείποντας όλες τις λεπτομέρειες που θα απαιτούσε μια ακριβή διατύπωση.

Φανταστείτε τη μιγαδική μεταβλητή z να διαγράφει μια κλειστή καμπύλη πεπερασμένου



μήκους χωρίς βρόγχους ή κόμβους. Έχουμε μια διαισθητική αντίληψη του τι εννοούμε με τον όρο «μήκος» ενός τμήματος αυτής της καμπύλης. Σημειώστε τα σημεία, $P_1, P_2, \dots, P_n$, πάνω στην καμπύλη έτσι ώστε κάθε ένα από τα τμήματα $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_nP_1$, να μην έχει μήκος που να υπερβαίνει κάποιο πεπερασμένο μήκος l . Πάνω σε κάθε τμήμα, επιλέξτε ένα σημείο που να μην είναι ένα από τα δύο άκρα του τμήματος, σημειώστε την τιμή της $f(z)$ για το z που αντιστοιχεί στο σημείο, και πολλαπλασιάστε αυτή την τιμή με το μήκος του τμήματος στο οποίο ανήκει σημείο. Κάντε το ίδιο για όλα τα τμήματα και προσθέστε τα αποτελέσματα.

Στο τέλος, πάρτε την οριακή τιμή αυτού του αθροίσματος, όταν ο αριθμός των τμημάτων αυξάνει απεριόριστα. Αυτό δίνει το «**επικαμπύλιο ολοκλήρωμα**» της $f(z)$ για την καμπύλη. Πότε θα είναι μηδέν αυτό το ολοκλήρωμα; Ικανή συνθήκη για αυτό αποτελεί το να είναι η $f(z)$ αναλυτική (ομοιόμορφη και παραγωγίσιμη) σε κάθε σημείο z στο εσωτερικό της καμπύλης. Αυτό είναι το μεγάλο θεώρημα που γνωστοποίησε ο Gauss στον Bessel το 1811 και το οποίο, στα χέρια του Cauchy που το ανακάλυψε εκ νέου ανεξαρτήτως, σε συνδυασμό με ένα άλλο θεώρημα, επρόκειτο να δώσει ως πορίσματα πολλά από τα σπουδαία αποτελέσματα της ανάλυσης.

Η αστρονομία δεν απορροφούσε όλη την εκπληκτική ενέργεια του Gauss στα μέσα της τέταρτης δεκαετίας της ζωής του. Το 1812, όταν η μεγάλη στρατιά του Ναπολέοντα έδινε απελπισμένες μάχες στις παγωμένες στέπες, ήταν η χρονιά που δημοσιεύθηκε μια άλλη μεγάλη εργασία του Gauss, πάνω στην υπεργεωμετρική σειρά $1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)x^2}{c(c+1)1x^2} + \dots$ όπου οι τελείες σημαίνουν πως η σειρά συνεχίζεται απεριόριστα σύμφωνα με το νόμο που δηλώνεται ο επόμενος όρος είναι

$$\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} x^3$$

Πρόκειται για έναν ακόμη σταθμό. Ο Gauss υπήρξε ο πρώτος από τους σύγχρονους υποστηρικτές της αυστηρότητας στις μαθηματικές διαδικασίες. Σε αυτήν την εργασία καθόρισε τους περιορισμούς στους οποίους πρέπει να υπακούουν οι αριθμοί a, b, c, x για να συγκλίνει η σειρά (με την έννοια που εξηγήσαμε νωρίτερα σ' αυτό το κεφάλαιο). Η σειρά αυτή δεν ήταν μια άσκηση που θα μπορούσε να μελετήσει κανείς για να αποκτήσει επιδεξιότητα σε αναλυτικούς χειρισμούς και μετά να την ξεχάσει. Περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις, προκύπτουν δίνοντας συγκεκριμένες τιμές σε ένα ή περισσότερα από τα a, b, c, x , πολλές από τις πιο σημαντικές σειρές στην ανάλυση για παράδειγμα, εκείνες από τις οποίες υπολογίζονται και καταχωρούνται σε πίνακες οι λογάριθμοι, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και άλλες συναρτήσεις που εμφανίζονται στη νευτώνεια αστρονομία και τη μαθηματική φυσική.

Το **γενικό διωνυμικό θεώρημα** αποτελεί ειδική περίπτωση αυτής της σειράς αντιμετωπίζοντάς την στη γενική της μορφή, ο Gauss σκότωσε με ένα σμπάρο πολλά τρυγόνια. Από αυτή την εργασία, προέκυψαν πολλές εφαρμογές στις διαφορικές εξισώσεις της φυσικής του 19^{ου} αιώνα. Η επιλογή μιας τέτοιας έρευνας, που απαιτούσε σοβαρή προσπάθεια, είναι χαρακτηριστική του Gauss. Ποτέ δε δημοσίευσε τετριμμένα πράγματα. Όταν έβγαине κάτι στο φως, δεν ήταν μόνο ολοκληρωμένο αλλά και γεμάτο ιδέες, ώστε οι διάδοχοί του μπορούσαν να εφαρμόσουν αυτό που επινόησε σε νέα προβλήματα.

Η σπουδαιότητά της εργασίας πάνω στο νόμο της διτετραγωνικής αντιστροφής, έγκειται στο ότι έδωσε έναν νέο, τελείως απρόβλεπτο προσανατολισμό στην ανώτερη αριθμητική. Έχοντας μελετήσει την τετραγωνική (δευτέρου βαθμού)

αντιστροφή, ήταν φυσικό για τον Gauss να εξετάσει το γενικό ερώτημα των διωνυμικών ισοτιμιών οιοδήποτε βαθμού. Αν m είναι δεδομένος ακέραιος, μη διαιρετός από τον πρώτο p , αν η είναι δεδομένος θετικός ακέραιος και αν επιπλέον μπορεί να βρεθεί ακέραιος x , τέτοιος ώστε $x' = m \pmod{p}$, τότε ο m καλείται ένα η -οστό υπόλοιπο του p' όταν $\eta=4$, ο m είναι ένα διτετραγωνικό υπόλοιπο του p .

Η περίπτωση των τετραγωνικών διωνυμικών ισοτιμιών ($n=2$), υποδεικνύει πολύ λίγα πράγματα για την περίπτωση που ο η υπερβαίνει το 2. Ένα από τα θέματα που ο Gauss σκόπευε να περιλάβει στο ματαιωθέν όγδοο τμήμα (ή ίσως, όπως είπε στη Sophie Germain, στον υπό σκέψη αλλά απραγματοποίητο δεύτερο τόμο) των *Disquisitiones Arithmeticae*, ήταν μια πραγματέυση αυτών των ισοτιμιών ανώτερης τάξης, καθώς και μια έρευνα για τους αντίστοιχους νόμους αντιστροφής· συγκεκριμένα, για τη σχέση (ως προς την επιλυσιμότητα ή όχι) ανάμεσα στις ισοτιμίες $x^* = p \pmod{q}$, $x' = q \pmod{p}$, όπου p, q είναι πρώτοι. Επρόκειτο ιδιαίτερα να διερευνηθούν οι περιπτώσεις $n=3,4$. Η εργασία του 1825 άνοιξε, με όλη την τόλμη των μεγάλων πρωτοπόρων, νέους δρόμους. Ύστερα από πολλές λανθασμένες εκκινήσεις που οδήγησαν σε μια ανυπόφορη πολυπλοκότητα, ο Gauss ανακάλυψε το «φυσικό» δρόμο προς την καρδιά του προβλήματος.

Οι ρητοί ακέραιοι "1, 2, 3, ..., δεν είναι κατάλληλοι για τη διατύπωση του νόμου της διτετραγωνικής αντιστροφής, όπως είναι για την περίπτωση της τετραγωνικής, ένα τελείως διαφορετικό είδος ακεραίων πρέπει να εφευρεθεί. Ονομάστηκαν οι μιγαδικοί ακέραιοι του Gauss και είναι όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $a+bi$, όπου a, b είναι ρητοί ακέραιοι και το i συμβολίζει την τετραγωνική ρίζα του -1 . Για να διατυπωθεί ο νόμος της διτετραγωνικής αντιστροφής, είναι απαραίτητη μια εξαντλητική προκαταρκτική εξέταση των νόμων της αριθμητικής διαιρετότητας τέτοιων μιγαδικών ακεραίων. Ο Gauss το έκανε, εγκαινιάζοντας έτσι τη **θεωρία των αλγεβρικών αριθμών**, εκείνη που είχε κατά νου όταν έδινε την εκτίμησή του για το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Με ανάλογο τρόπο, βρήκε επίσης το σωστό τύπο για την κυβική αντιστροφή ($n=3$), εργασία που βρέθηκε στα χαρτιά του μετά το θάνατο του. Η σπουδαιότητα αυτού του μεγάλου βήματος θα γίνει πιο φανερή όταν παρακολουθήσουμε την καριέρα των Kummer και Dedekind.

Αρκεί να πούμε πως ο αγαπημένος μαθητής του Gauss, ο Eisenstein, ολοκλήρωσε τη μελέτη της κυβικής αντιστροφής. Ανακάλυψε επιπλέον μια καταπληκτική σχέση ανάμεσα στο νόμο της διτετραγωνικής αντιστροφής και σε ορισμένα μέρη της θεωρίας των ελλειπτικών συναρτήσεων, στην οποία ο Gauss είχε προχωρήσει πολύ, αλλά απέφυγε να αποκαλύψει τι είχε βρει.

Οι μιγαδικοί ακέραιοι του Gauss αποτελούν βέβαια μια υποκλάση όλων των μιγαδικών αριθμών και θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς πως η αλγεβρική θεωρία αριθμών θα έδινε την αριθμητική θεωρία των εμπεριεχομένων ακεραίων ως τετριμμένη λεπτομέρεια. Τα πράγματα όμως δεν είναι καθόλου έτσι. Συγκρινόμενη με την αριθμητική θεωρία, η αλγεβρική είναι απλούστατη. Ίσως μια κατανόηση του γιατί συμβαίνει αυτό να προσφέρουν οι ρητοί αριθμοί (αριθμοί της μορφής a/b , όπου a, b είναι ρητοί ακέραιοι). Μπορούμε πάντα να διαιρούμε ένα ρητό αριθμό με έναν άλλο και να παίρνουμε έναν άλλο ρητό αριθμό ο οποίος διαιρούμενος από τον cd δίνει το ρητό αριθμό ad/bc . Όμως, ένας ρητός ακέραιος, διαιρούμενος από έναν άλλο ρητό ακέραιο, δε δίνει πάντα ένα ρητό ακέραιο: 7 διά 8 δίνει $7/8$.

Για αυτό, αν πρέπει να περιοριστούμε στους ακεραίους, που αποτελούν ενδιαφέρουσα περίπτωση για τη θεωρία αριθμών, είμαστε δεμένοι χειροπόδαρα πριν ακόμη ξεκινήσουμε. Αυτός είναι ένας από τους λόγους που η ανώτερη αριθμητική είναι δυσκολότερη από την άλγεβρα, τη στοιχειώδη ή την ανώτερη. Εξίσου σημαντικές πρόοδοι επρόκειτο να σημειωθούν από τον Gauss στη γεωμετρία και στις

εφαρμογές των μαθηματικών στη γεωδαισία, τη νευτώνεια θεωρία της βαρυτικής έλξης και τον ηλεκτρομαγνητισμό.

Πώς στάθηκε δυνατόν ένας άνθρωπος να φέρει σε πέρας αυτή την κολοσσιαία ποσότητα έργου της υψηλότερης στάθμης; Με χαρακτηριστική μετριοφροσύνη ο Gauss δήλωνε πως «Αν άλλοι είχαν στοχαστεί πάνω στις μαθηματικές αλήθειες τόσο βαθιά και επίμονα όσο εγώ, θα έφταναν στις ανακαλύψεις μου». Ίσως. Η εξήγηση του Gauss θυμίζει εκείνη του Νεύτωνα. Όταν ο τελευταίος ρωτήθηκε πώς είχε πραγματοποιήσει ανακαλύψεις στην Αστρονομία που ξεπερνούσαν εκείνες όλων των προγενεστέρων του, αποκρίθηκε: «**Με το να σκέφτομαι διαρκώς πάνω σ' αυτές**».

Αυτό μπορούσε να ήταν σαφέστατο στο Νεύτωνα· δεν είναι όμως και για τους κοινούς θνητούς. Μέρος του «αινίγματος Gauss» εξηγείται από την ακούσια απασχόλησή του με μαθηματικές ιδέες, κάτι το οποίο βέβαια πρέπει να εξηγηθεί. Όταν ήταν νέος, ο Gauss «καταλαμβάνόταν» από τα μαθηματικά. Καθώς συζητούσε με φίλους ξαφνικά σώπαινε, κατακλυζόταν από ιδέες στις οποίες ήταν ανίκανος να κυριαρχήσει και έμενε να κοιτάζει παγερά αδιάφορος για ότι συνέβαινε γύρω του.

Αργότερα, απέκτησε έλεγχο πάνω στις σκέψεις του, ή αυτές έχασαν τον έλεγχο πάνω του και συνειδητά κατηύθυνε όλη του την ενέργεια στη λύση μιας δυσκολίας ώσπου να πετύχει. Από τη στιγμή που κάποιο πρόβλημα έμπαινε στο μυαλό του, δεν το εγκατέλειπε μέχρι να το λύσει, αν και περισσότερα προβλήματα μπορούσαν να βρίσκονται ταυτόχρονα στο προσκήνιο της προσοχής του. Σε μια τέτοια περίπτωση, διηγείται πως επί μία τετραετία σπάνια περνούσε εβδομάδα χωρίς να ξοδέψει κάποιο χρόνο προσπαθώντας να ξεκαθαρίσει αν ένα ορισμένο πρόσημο θα έπρεπε να είναι + ή -. Η λύση τελικά έλαμψε στο μυαλό του. Αλλά το να φανταστούμε πως ξεπήδησε ξαφνικά ως νεογέννητο άστρο χωρίς τη μεσολάβηση των «χαμένων» ωρών, θα σήμαινε ότι μας διαφεύγει τελείως η ουσία του πράγματος.

Συχνά, ύστερα από ημέρες ή εβδομάδες ξοδεμένες αναποτελεσματικά σε κάποια έρευνα και καθώς μετά από μια άγρυπνη νύχτα ξανάρχιζε πάλι να δουλεύει, διαπίστωνε πως η δυσκολία είχε εξαφανιστεί και ολόκληρη η λύση έλαμπε καθαρή στο μυαλό του. Η ικανότητα για έντονη και παρατεταμένη συγκέντρωση, αποτελούσε μέρος του μυστικού του. Ως προς την ικανότητα να ξεχνιέται μέσα στον κόσμο των σκέψεων του, ο Gauss μοιάζει στον Αρχιμήδη και στο Νεύτωνα.

Σε δύο ακόμη πράγματα τους συναγωνίζεται επάξια: στο χάρισμά του για ακριβή παρατήρηση και στην επιστημονική εφευρετικότητα που του επέτρεπε να επινοεί τα όργανα που ήταν απαραίτητα για τις επιστημονικές έρευνές του. Στον Gauss οφείλει η γεωδαισία την **εφεύρεση του ηλιοτροπίου**, ενός ιδιοφυούς επινοήματος με το οποίο μπορούσαν να μεταβιβάζονται σήματα σχεδόν στιγμιαία με τη βοήθεια ανακλώμενου φωτός. Για την εποχή του, το ηλιοτρόπιο ήταν ένα μεγάλο βήμα μπροστά. Τα αστρονομικά όργανα που χρησιμοποιούσε, βελτιώθηκαν σημαντικά από τον ίδιο. Προκειμένου να βοηθηθεί στις θεμελιώδεις έρευνές του για τον ηλεκτρομαγνητισμό, ο Gauss επινόησε έναν **ειδικό τύπο μαγνητομέτρου**.

Ως τελευταίο παράδειγμα της ιδιοφυίας του στο μηχανικό τομέα, αναφέρουμε πως ο Gauss εφεύρε το 1833 τον **ηλεκτρικό τηλεγράφο** και με το συνεργάτη του Wilhelm Weber (1804–1891) χρησιμοποίησαν για την αποστολή μηνυμάτων. Ο συνδυασμός μαθηματικής ιδιοφυίας με μια πρώτης τάξης πειραματική ικανότητα είναι από τους σπανιότερους στην επιστήμη. Ο Gauss νοιαζόταν ελάχιστα για τις πιθανές πρακτικές χρήσεις των επινοήσεών του. Όπως και ο Αρχιμήδης, προτιμούσε τα μαθηματικά από όλα τα βασίλεια της γης, άλλοι μπορούσαν να εκμεταλλευτούν τους υλικούς καρπούς της δουλειάς του. Ο **Weber** όμως, ο συνεργάτης του στις έρευνες στον ηλεκτρομαγνητισμό, είδε καθαρά τη σημασία του μικρού τηλεγράφου

του Göttingen για τον πολιτισμό. Θυμίζουμε πως άρχισαν να παραδέχονται τον σιδηρόδρομο στις αρχές του 1830.

«Όταν η υδρόγειος καλυφθεί με ένα δίκτυο σιδηροδρόμων και συρμάτων τηλεγράφου», προφήτευσε ο Weber το 1835, «αυτό το δίκτυο θα εκτελεί λειτουργίες ανάλογες με εκείνες του νευρικού συστήματος στο ανθρώπινο σώμα, τόσο ως μέσο μεταφοράς, όσο και ως μέσο διάδοσης ιδεών και εντυπώσεων με την ταχύτητα του φωτός». Γνωρίζοντας τι τεράστιες προσπάθειες χρειάστηκε να καταβάλει ο ίδιος για μερικά από τα αριστουργήματά του, ο Gauss εκτιμούσε αληθινά την μακρά προπαρασκευή και συνεχή σκέψη, που απαιτήθηκαν για το μεγαλύτερο έργο του Νεύτωνα. Η ιστορία για το Νεύτωνα και το μήλο που έπεσε, τον έκανε να αγανακτεί. «Τι ανόητο!» έλεγε.

«Πιστέψτε αυτή την ιστορία αν σας αρέσει, η αλήθεια όμως είναι η εξής: Ένας ανόητος αλλοτριοπράγμων ρώτησε το Νεύτωνα πώς ανακάλυψε το νόμο της βαρύτητας. Βλέποντας πως είχε να κάνει με άτομο νηπιακής νοημοσύνης και θέλοντας να απαλλαγεί από το μπελά, απάντησε πως ένα μήλο έπεσε και τον χτύπησε στη μύτη. Ο άνθρωπος απομακρύνθηκε απόλυτα ικανοποιημένος και πλήρως διαφωτισμένος.» Ο απόηχος της ιστορίας με το μήλο φτάνει μέχρι τις μέρες μας. Όταν κάποιος πείραζε τον Einstein σχετικά με το πώς οδηγήθηκε στη θεωρία για το βαρυτικό πεδίο, ο Einstein απάντησε ότι ρώτησε έναν εργάτη, που είχε πέσει από ένα κτίριο και προσγειωθεί σώος πάνω σε ένα σωρό άχυρα, αν είχε αντιληφθεί το τράβηγμα της «δύναμης» της βαρύτητας κατά την πτώση του. Ακούγοντας πως καμιά δύναμη τραβήγματος δεν έγινε αισθητή, ο Einstein είδε αμέσως πως η «βαρύτητα» σε μια αρκετά μικρή περιοχή του χωροχρόνου μπορεί να αντικατασταθεί από μια επιτάχυνση του συστήματος αναφοράς του παρατηρητή (του εργάτη που έπεφτε, εν προκειμένω). Αυτή η ιστορία, αν αληθεύει, είναι κατά πάσα πιθανότητα ένα ειρωνικό αστείο. Αυτό που οδήγησε τον Einstein στην ιδέα, ήταν μερικά χρόνια σκληρής δουλειάς, στην προσπάθειά του να κατακτήσει τον τανυστικό λογισμό δύο Ιταλών μαθηματικών, των Ricci και LeviCivita, μαθητών των Riemann και Christoffel, που με τη σειρά τους είχαν εμπνευστεί από το γεωμετρικό έργο του Gauss.

Κάνοντας ένα σχόλιο για τον Αρχιμήδη, τον οποίο επίσης θαύμαζε απεριόριστα, ο Gauss παρατήρησε ότι του ήταν αδύνατο να καταλάβει πώς ο Αρχιμήδης δε μπόρεσε να επινοήσει το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης ή ένα ισοδύναμό του (με βάση διαφορετική του 10). Η σαφώς μη ελληνικής νοοτροπίας πρόοδος του Αρχιμήδη στην επινόηση ενός τρόπου γραφής και χειρισμού των αριθμών που ξεπερνούσε κατά πολύ τις δυνατότητες του ελληνικού συμβολισμού, είχε σύμφωνα με τον Gauss βάλει στα χέρια του Αρχιμήδη το δεκαδικό συμβολισμό, βασισμένο στην αρχή της συσχέτισης θέσης-τιμής ($325 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5$).

Αυτή την παράλειψη, ο Gauss τη θεωρούσε ως τη μεγαλύτερη συμφορά στην ιστορία της επιστήμης. «Σε τι ύψη θα είχε φτάσει τώρα η επιστήμη αν ο Αρχιμήδης είχε κάνει την ανακάλυψη», αναφωνούσε, αναλογιζόμενος την τεράστια ποσότητα των δικών του αριθμητικών και αστρονομικών υπολογισμών που θα ήταν αδύνατο να εκτελέσει χωρίς το δεκαδικό συμβολισμό. Με πλήρη επίγνωση της σημασίας που έχουν για όλη την επιστήμη οι βελτιωμένες μέθοδοι υπολογισμού, ο Gauss δούλευε σκληρά πάνω στους υπολογισμούς του, μέχρι να πετύχει σελίδες υπολογισμών να αναχθούν σε λίγες γραμμές που μπορούσαν να διαβαστούν με μια ματιά.

Ο ίδιος, εκτελούσε μεγάλο μέρος των υπολογισμών με το μυαλό του, οι βελτιώσεις ήταν για τους λιγότερο προικισμένους από αυτόν. Αντίθετα απ' ότι συνέβη με το Νεύτωνα σε μεγάλη ηλικία, ο Gauss ποτέ δεν αισθάνθηκε έλξη για όσα θα του προσπόριζε η ανάληψη δημόσιας θέσης, παρ' όλο που το έντονο ενδιαφέρον και η αγχίνοια του σε όλα τα θέματα που σχετίζονται με τις επιστήμες της στατιστικής, της

ασφάλισης και της «πολιτικής αριθμητικής» θα τον είχαν κάνει ένα καλό υπουργό των οικονομικών. Ως την τελευταία του ασθένεια, εύρισκε πλήρη ικανοποίηση στην επιστήμη και στις απλές του ασχολίες δημιουργικού και ψυχαγωγικού χαρακτήρα. Η ανάγνωση πολυποίκιλων λογοτεχνικών κειμένων της Ευρώπης και της αρχαιότητας, το κριτικό ενδιαφέρον για την παγκόσμια πολιτική και η εκμάθηση των ξένων γλωσσών, μαζί με τη σπουδή νέων επιστημών (περιλαμβανομένης της βοτανικής και της ορυκτολογίας) αποτελούσαν τα χόμπι του.

Ιδιαίτερη έλξη αισθανόταν για την αγγλική λογοτεχνία, αν και η σκοτεινότερη πλευρά της, όπως στις τραγωδίες του Σαίξπηρ, καταπονούσε το μεγάλο μαθηματικό λόγω της ιδιαίτερης ευαισθησίας του σε όλες τις μορφές του ανθρώπινου πόνου και προσπαθούσε να επιλέγει τα πιο εύθυμα αριστουργήματα. Τα μυθιστορήματα του Sir Walter Scott (σύγχρονος του Gauss) τα διάβαζε με ενθουσιασμό μόλις πρωτοεμφανίζονταν, το θλιβερό όμως τέλος του Kenilworth καταρράκωσε τον Gauss για ημέρες, με αποτέλεσμα να μετανιώσει που διάβασε την ιστορία.

Ένα σφάλμα του Sir Walter προξένησε πολύ γέλιο στο μαθηματικό αστρονόμο: Έγραφε ο Sir Walter Scott: «Το φεγγάρι ανατέλλει στα βορειοδυτικά...», και τις επόμενες μέρες ο Gauss διόρθωνε όλα τα αντίγραφα που μπορούσε να βρει. Ιστορικά έργα γραμμένα στα αγγλικά, ιδιαίτερα το «Παρακμή & Πτώση της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας» του Gibbon και η «Ιστορία της Αγγλίας» του Macaulay του πρόσφεραν ξεχωριστή ευχαρίστηση. Για το σύγχρονό του νεαρό αιθεροβάμονα Λόρδο Βύρωνα, ο Gauss αισθανόταν σχεδόν αποστροφή. Η πόζα του Βύρωνα, η κούραση του από τα εγκόσμια στην οποία αναφερόταν διαρκώς, ο επιτηδευμένος μισανθρωπισμός και η ρομαντική ομορφιά του είχαν αιχμαλωτίσει τους συναισθηματικούς Γερμανούς ακόμη περισσότερο από ότι τους φλεγματικούς Βρετανούς, οι οποίοι, τουλάχιστον οι μεγαλύτερης ηλικίας, ήταν της γνώμης πως ο Βύρων ήταν ένας κόπανος. Στον Gauss δεν άρεσαν οι θεατρινισμοί του Βύρωνα.

Πώς είναι δυνατόν κάποιος που πίνει μεγάλες ποσότητες καλού μπράντι και αλλάζει τις γυναίκες σαν πουκάμισα, όπως ήταν η περίπτωση του Βύρωνα, να έχει κουραστεί απ' τη ζωή, κάτι που ο άτακτος ποιητής με το αστραφτερό βλέμμα και το χέρι που έτρεμε ήθελε να πιστεύει ο κόσμος. Όσο για τη λογοτεχνία της χώρας του, οι προτιμήσεις του Gauss ήταν κάπως ασυνήθιστες για ένα Γερμανό διανοούμενο. Ο Jean Paul ήταν ο αγαπημένος του Γερμανός ποιητής. Τους Goethe και Schiller, των οποίων η ζωή είχε, εν μέρει, κάτι κοινό με τη δική του, δεν τους είχε σε μεγάλη εκτίμηση. Ο Goethe, έλεγε, δεν ήταν ικανοποιητικός. Έχοντας τελείως διαφορετικές φιλοσοφικές απόψεις από τον Schiller, ο Gauss δεν εύρισκε του γούστου του ούτε την ποίηση του. Αποκάλεσε την «Παραίτηση» βλάσφημο, διεφθαρμένο ποίημα και σημείωσε τη λέξη «Μεφιστοφελής» στο περιθώριο του αντιγράφου του.

Η ευκολία με την οποία ο Gauss μάθαινε γλώσσες στα νιάτα του, διατηρήθηκε σε όλη τη ζωή του. Οι γλώσσες ήταν για αυτόν κάτι περισσότερο από ένα χόμπι. Για να ελέγχει την πλαστικότητα του μυαλού του καθώς γερνούσε, μάθαινε επί τούτου μια ξένη γλώσσα. Η άσκηση, πίστευε, βοηθούσε το μυαλό του να παραμείνει νεανικό. Στα 62 του, άρχισε να μελετά εντατικά Ρωσικά χωρίς βοήθεια. Μέσα σε 2 χρόνια διάβαζε άνετα ρωσική πρόζα και ποιητικά έργα και έγραφε στα ρωσικά επιστολές σε φίλους του επιστήμονες στην Αγία Πετρούπολη. Όπως έλεγαν οι Ρώσοι που τον επισκέφτηκαν στο Göttingen, μιλούσε τη γλώσσα εξίσου τέλεια.

Τη ρωσική λογοτεχνία τοποθετούσε στο ίδιο επίπεδο με την αγγλική. Είχε προσπαθήσει να μάθει σανσκριτικά, διαπίστωσε όμως ότι δεν του άρεσαν. Το τρίτο του χόμπι, η παγκόσμια πολιτική, απορροφούσε περίπου μια ώρα την ημέρα. Τακτικός επισκέπτης του λογοτεχνικού μουσείου, κρατούσε επαφή με τα γεγονότα διαβάζοντας όλες τις εφημερίδες στις οποίες το μουσείο ήταν συνδρομητής, από τους

Times του Λονδίνου μέχρι τις τοπικές του Göttingen. Στην πολιτική, ο αριστοκράτης της διανοήσης Gauss ήταν συντηρητικός, κατά κανένα όμως τρόπο αντιδραστικός.

Η εποχή του ήταν ταραγμένη, τόσο στη χώρα του όσο και στο εξωτερικό. Η οχλοκρατία και οι πράξεις πολιτικής βίας τον έκαναν να αισθάνεται, όπως αναφέρει ο φίλος του Von Waltershausen, «έναν απερίγραπτο τρόμο». Η παρισινή εξέγερση του 1848 τον πλημμύρισε φόβο. Παιδί φτωχών γονιών ο ίδιος, εξοικειωμένος από τη βρεφική ηλικία με την ευφυΐα και την ηθική των «μαζών», θυμόταν όσα είχε παρατηρήσει και η γνώμη του για τη νοημοσύνη, την ηθική και την πολιτική οξυδέρκεια του «λαού» όταν γίνεται μάζα την οποία άγουν και φέρουν οι δημαγωγοί, ήταν εξαιρετικά χαμηλή. Το *Mundus vult deceri* το θεωρούσε αληθινό.

Η δυσπιστία στην έμφυτη ηθικότητα, ακεραιότητα και ευφυΐα του «φυσικού ανθρώπου» του Rousseau όταν αυτός γίνεται μέρος ενός όχλου ή μπλέκει σε κοινοβούλια, διασκέψεις και γερουσίες, αναμφίβολα οφειλόταν εν μέρει στη γνώση του Gauss, ως ανθρώπου της επιστήμης, για το τι έκανε «ο φυσικός άνθρωπος» στους επιστήμονες της Γαλλίας κατά την πρώτη φάση της γαλλικής επανάστασης. Μπορεί να είναι αλήθεια, όπως διακήρυτταν οι επαναστάτες, ότι «οι άνθρωποι δεν έχουν ανάγκη την επιστήμη», όμως μια τέτοια δήλωση αποτελούσε πρόκληση για κάποιον με την ιδιοσυγκρασία του Gauss. Αποδεχόμενος την πρόκληση, ο Gauss με τη σειρά του εξέφρασε την καυστική περιφρόνησή του προς όλους τους «ηγέτες του λαού» που οδηγούν τους ανθρώπους σε ταραχές προς ίδιον όφελος.

Καθώς γερνούσε, έβλεπε την ειρήνη και την απλή ευδαιμονία ως τα μόνα καλά πράγματα σε κάθε χώρα. Αν ξεσπούσε εμφύλιος πόλεμος στη Γερμανία, έλεγε, αυτός θα πέθαινε αμέσως. Η κατάκτηση μιας ξένης χώρας από μία άλλη κατά το ναπολεόντειο τρόπο, ήταν γι' αυτόν ένας ακατανόητος παραλογισμός. Αυτά τα συντηρητικά συναισθήματα δεν ήταν η νοσταλγία ενός αντιδραστικού που διατάζει τον κόσμο να αψηφήσει τους νόμους της ουράνιας μηχανικής και να αρκεστεί στους ουρανούς ενός νεκρού και αμετάβλητου παρελθόντος.

Ο Gauss πίστευε σε μεταρρυθμίσεις, όταν ήταν λογικές. Και αν δεν είναι ο εγκέφαλος που αποφασίζει πότε οι μεταρρυθμίσεις είναι λογικές και πότε όχι, ποιό όργανο του ανθρώπινου σώματος θα το κάνει; Ο Gauss, είχε μυαλό για να δει πού οδηγούσαν την Ευρώπη οι φιλοδοξίες ορισμένων μεγάλων δημοσίων ανδρών της δικής του γενιάς. Το θέαμα δεν του ενέπνεε εμπιστοσύνη. Οι πιο ριζοσπάστες από τους φίλους του, απέδιδαν το συντηρητισμό του, στην προσήλωσή του στη δουλειά.

Αυτό μπορεί να έπαιξε κάποιο ρόλο. Τα 27 τελευταία χρόνια της ζωής του δεν κοιμήθηκε μακριά από το παρατηρητήριο του παρά μόνο μια φορά, όταν, κάνοντας το χατίρι του Leland von Humboldt που ήθελε να τον επιδείξει, παρακολούθησε τις εργασίες ενός επιστημονικού συνεδρίου στο Βερολίνο. Όμως δε χρειάζεται κανείς να γυρίζει την υδρόγειο για να καταλάβει τι τρέχει.

Η νοημοσύνη και η ικανότητα να διαβάζεις εφημερίδες (ακόμη και όταν γράφουν ψευτιές) και κυβερνητικά ανακοινωθέντα (ιδιαίτερα όταν ψεύδονται) κάνουν μερικές φορές καλύτερη δουλειά από το πηγαινέλα και τα κουτσομπολιά των ξενοδοχείων. Ο Gauss έμενε σπίτι, διάβαζε χωρίς να δίνει πίστη στο μεγαλύτερο μέρος αυτού που διάβαζε, σκεφτόταν και κατέληγε στην αλήθεια. Μια άλλη πηγή δύναμης του Gauss, ήταν η ήρεμη αντιμετώπιση της επιστήμης και το γεγονός ότι ήταν απελευθερωμένος από προσωπική φιλοδοξία.

Όλη του η φιλοδοξία είχε να κάνει με την πρόοδο της μαθηματικής επιστήμης. Όταν ανταγωνιστές αμφισβητούσαν έναν ισχυρισμό του, πως τους είχε προλάβει στην ανακάλυψη κάποιας μαθηματικής αλήθειας, κάτι που το δήλωνε χωρίς κομπορρημοσύνη, αλλά ως ένα γεγονός που έχει σχέση με το συγκεκριμένο θέμα, ο Gauss δεν έδειχνε το ημερολόγιό του για να κλείσει τα στόματα, αλλά αρκούσαν

απλώς στα λεγόμενά του. Μεταξύ αυτών που είχαν τις αμφιβολίες τους, ο πιο ανοικτά επικριτικός ήταν ο ντόμπρος Legendre.

Στο *Theoria motus* ο Gauss είχε αναφερθεί στη νεανική ανακάλυψή του της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Ο Legendre δημοσίευσε τη μέθοδο το 1806, πριν από τον Gauss. Με μεγάλη αγανάκτηση, έγραψε στον Gauss κατηγορώντας τον ουσιαστικά για ανεντιμότητα και διαμαρτυρόμενος γιατί ο τελευταίος, με τόσες ανακαλύψεις στο ενεργητικό του, δεν είχε την αξιοπρέπεια να μην οικειοποιηθεί τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, που ο Legendre θεωρούσε ως τη σιτευτή αμνάδα του". Ο Laplace, παρενέβη στον κανυά. Κατά πόσο πίστεψε στις διαβεβαιώσεις του Gauss ότι είχε προλάβει τον Legendre κατά μια δεκαετία περίπου, δεν το λέει, πάντως διατηρεί τη συνηθισμένη του ηπιότητα.

Καθώς φαίνεται, ο Gauss απέφυγε την παραπέρα αντιπαράθεση. Σε ένα γράμμα του όμως προς κάποιο φίλο, παρέχει τη μαρτυρία που ίσως θα είχε τελειώσει τη φασαρία μια και καλή, αν ο ίδιος δεν ήταν «υπερβολικά περήφανος για να καταδεχτεί να ανταγωνιστεί». «Είχα αποστείλει τη σχετική εργασία το 1802 στον Olbers», λέει και αν ο Legendre είχε τις αμφιβολίες του για αυτό, θα μπορούσε να ρωτήσει τον Olbers που είχε το χειρόγραφο.

Η φιλονικία αυτή, είχε δυσάρεστες συνέπειες για την περαιτέρω ανάπτυξη των μαθηματικών, καθώς ο Legendre μετέδωσε τις αδικαιολόγητες υποψίες του στον Jacobi και εμπόδισε έτσι το λαμπρό εκείνο νέο, με τις έξοχες ανακαλύψεις στη θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων, να αποκτήσει εγκάρδιες σχέσεις με τον Gauss. Την παρεξήγηση την έκανε θλιβερότερη το γεγονός ότι ο Legendre ήταν άνθρωπος εξαιρετικού χαρακτήρα και μεγάλης εντιμότητας. Ήταν της μοίρας του να ξεπεραστεί από μαθηματικούς με μεγαλύτερη φαντασία, σε πεδία όπου ξόδεψε το μεγαλύτερο μέρος της μακράς και γεμάτης εργασία ζωής του. Βλέποντας τους κόπους του να αποδεικνύονται περιττοί, από νεώτερους όπως οι Gauss, Abel, Jacobi.

Σε κάθε βήμα του ο Gauss πήγαινε πολύ μακρύτερα από τον Legendre. Όταν κατηγορήθηκε από τον Legendre για ανεντιμότητα, ο Gauss αισθάνθηκε να βρίσκεται αυτός σε άσχημη θέση. Γράφοντας στον Schumacher (30.07.1806), παραπονιέται ότι «είναι φαίνεται της μοίρας μου να πέφτω, σε κάθε σχεδόν θεωρητική δουλειά μου, πάνω στον Legendre. Έχει συμβεί στην ανώτερη αριθμητική, στην έρευνα των υπερβατικών συναρτήσεων που συνδέονται με την ευθειοποίηση [τη διαδικασία εύρεσης του μήκους ενός τόξου καμπύλης] της έλλειψης, στη θεμελίωση της γεωμετρίας και τώρα ξανά εδώ (στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) η οποία επίσης χρησιμοποιείται στην εργασία του Legendre και μάλιστα με άστοχο τρόπο».

Με τη λεπτομερή δημοσίευση των εργασιών του Gauss, μετά τον θάνατό του και τη δημοσίευση μεγάλου μέρους της αλληλογραφίας του, όλες αυτές οι παλιές φιλονικίες έχουν λήξει μια για πάντα υπέρ του Gauss. Μένει κάτι ακόμη για το οποίο του έχει ασκηθεί κριτική, η έλλειψη εγκαρδιότητας στο καλωσόρισμα των μεγάλων εργασιών άλλων, ιδιαίτερα νέων ανθρώπων.

Όταν ο Cauchy άρχισε να δημοσιεύει τις λαμπρές του ανακαλύψεις στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, ο Gauss τις αγνόησε. Κανένας έπαινος ή ενθάρρυνση δε δόθηκε στο νεαρό Γάλλο, από τον Πρίγκιπα των μαθηματικών. Ωστόσο, γιατί θα έπρεπε να δοθεί; Ο ίδιος ο Gauss είχε φτάσει στην καρδιά του ζητήματος, χρόνια πριν ξεκινήσει ο Cauchy. Μια δημοσιευμένη μελέτη στη θεωρία αυτή, θα είχε γίνει ένα από τα αριστουργήματα του Gauss. Και όταν υπέπεσε στην αντίληψή του η εργασία του Hamilton για τα quaternions το 1852, τρία χρόνια πριν από τον θάνατό του, ο Gauss πάλι δεν είπε τίποτα. Και γιατί θα έπρεπε;

Η ουσία του θέματος έμενε θαμμένη στις σημειώσεις του για περισσότερο από 30 χρόνια. Παρέμεινε ήρεμος και δε διεκδίκησε την προτεραιότητα. Όπως συνέβη και

με τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, τις ελλειπτικές συναρτήσεις και τη μη ευκλείδεια γεωμετρία, του αρκούσε πως είχε κάνει τη δουλειά. Κατ' ουσία, τα quaternions είναι η άλγεβρα η οποία για τις στροφές του τρισδιάστατου χώρου παίζει εκείνο το ρόλο που έχει η άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών για τις στροφές του επιπέδου. Όμως, στα quaternions (ο Gauss τα καλούσε μεταλλαγές) ένας από τους θεμελιώδεις νόμους της άλγεβρας δεν ισχύει:

Δεν αληθεύει πλέον ότι $axb = bxa$ και είναι αδύνατον να έχουμε μια άλγεβρα των στροφών στις 3 διαστάσεις για την οποία να ισχύει αυτός ο νόμος. Ο Hamilton, μια από τις μεγάλες μαθηματικές ιδιοφυίες του 19^{ου} αιώνα, καταγράφει με ιρλανδέζικη πληθωρικότητα, πως πάλευε για 15 χρόνια να επινοήσει μια συνεπή άλγεβρα που να πληροί τις απαιτήσεις, μέχρι που μια ευτυχής έμπνευση του έδωσε το κλειδί, στην άλγεβρα που έψαχνε, axb δεν ισούται με bxa κ.α. Ο Gauss δεν αναφέρει πόσο χρόνο χρειάστηκε για να φτάσει στον στόχο του, απλώς καταγράφει την επιτυχία του σε λίγες σελίδες άλγεβρας που δεν αφήνουν κανένα μαθηματικό κενό στη φαντασία. Αν ο Gauss ήταν κάπως ψυχρός στις τυπωμένες εκφράσεις εκτίμησης, υπήρξε μάλλον εγκάρδιος στην αλληλογραφία του και στις επιστημονικές του σχέσεις, με εκείνους που επιζητούσαν την αμερόληπτη κρίση του.

Μια από τις επιστημονικές του φιλίες παρουσιάζει κάτι περισσότερο από επιστημονικό ενδιαφέρον, μιας και δείχνει τον φιλελευθερισμό των απόψεων του σχετικά με τις γυναίκες επιστήμονες. Η ευρύτητα πνεύματος σε αυτό το σημείο θα ήταν εντυπωσιακή για κάθε άντρα της γενιάς του, για έναν Γερμανό ήταν σχεδόν χωρίς προηγούμενο. Πρόκειται για τη δεσποινίδα Sophie Germain (1776–1831) μόλις 1 χρόνο μεγαλύτερη από τον Gauss. Οι δυο τους δεν συναντήθηκαν ποτέ και εκείνη πέθανε (στο Παρίσι) προτού μπορέσει το Πανεπιστήμιο Göttingen να της απονείμει τον τίτλο του επίτιμου διδάκτορα, κατόπιν συστάσεως του Gauss. Κατά περίεργη σύμπτωση, η πιο διάσημη γυναίκα μαθηματικός του 19^{ου} αιώνα, μια άλλη Σοφία, πήρε το δίπλωμά της από το ίδιο φιλελεύθερο Πανεπιστήμιο, πολλά χρόνια αφ' ότου της το είχε αρνηθεί το Πανεπιστήμιο Βερολίνου λόγω φύλου. Το όνομα Σοφία φαίνεται πως είναι ένα τυχερό όνομα στα μαθηματικά για γυναίκες, αρκεί αυτές να έχουν να κάνουν με ανοικτόμυαλους δασκάλους.

Η κορυφαία γυναίκα μαθηματικός της εποχής μας, η **Emmy Noether** (1882–1935), προερχόταν επίσης από το Göttingen. Τα επιστημονικά ενδιαφέροντα της Sophie Germain περιελάμβαναν την ακουστική, τη μαθηματική θεωρία της ελαστικότητας, την ανώτερη αριθμητική και σε όλα προσέφερε αξιόλογο έργο. Ιδιαίτερα, μια συμβολή της στη μελέτη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat, οδήγησε το 1908, σε αξιόλογη πρόοδο σε αυτή την κατεύθυνση από τον Αμερικανό μαθηματικό Leonard Eugene Dickson (1874–1954). Καταγοητευμένη από το *Disquisitiones Arithmeticae*, η Sophie έγραψε στον Gauss ορισμένες από τις δικές της παρατηρήσεις πάνω στην αριθμητική. Φοβούμενη πως ο Gauss μπορεί να ήταν προκατειλημμένος επειδή ήταν γυναίκα, χρησιμοποίησε ανδρικό ψευδώνυμο.

Ο Gauss σχημάτισε εξαιρετική γνώμη για τον αποστολέα του γράμματος τον οποίο από καλεί σε έξοχα γαλλικά ως «Κύριο Leblanc». Ο Leblanc έβγαλε τη μάσκα του, ή τη μάσκα της, όταν αναγκάστηκε να αποκαλύψει το αληθινό της όνομα στον Gauss, σε μια περίπτωση που τον εξυπηρέτησε με τους Γάλλους που συνέρρεαν στο Αννόβερο. Γράφοντάς της στις 30.04.1807, ο Gauss την ευχαριστεί για την παρέμβασή της στη γαλλική διοίκηση, ελεεινολογώντας τον πόλεμο. Συνεχίζοντας, της κάνει μια μεγάλη φιλοφρόνηση και μιλά για τη δική του μεγάλη αγάπη, τη θεωρία αριθμών. Καθώς παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, δίνουμε ένα απόσπασμα από το γράμμα που δείχνει τον Gauss σε μια από τις εκδηλώσεις εγκαρδιότητας:

Όταν οι Ναζί έδιωξαν τη Fraulein Noether από τη Γερμανία διότι ήταν Εβραία, την πήρε το Bryn Mawr College της Πενσυλβάνιας. Υπήρξε η παγκοσμίως πιο δημιουργική μαθηματικός στην αφηρημένη άλγεβρα. Σε λιγότερο από μία εβδομάδα του νέου γερμανικού διαφωτισμού, το Göttingen έχασε το φιλελευθερισμό που αγάπησε και προσπάθησε να διατηρήσει μια ζωή ο Gauss. «Πώς όμως να σας περιγράψω το θαυμασμό και την έκπληξή μου, βλέποντας τον αξιότιμο επιστολογράφο μου κύριο Lellans να μεταμορφώνεται σε αυτήν την επιφανή προσωπικότητα στη Sophie Germain που προσφέρει ένα λαμπρό παράδειγμα για ότι δύσκολα θα μπορούσα να πιστέψω; Η αίσθηση για τις αφηρημένες επιστήμες γενικά και ιδιαίτερα για τα μυστήρια των αριθμών, είναι κάτι το εξαιρετικά σπάνιο, ο μέσος άνθρωπος δεν εκπλήσσεται μπροστά τους, η γοητεία αυτής της ανώτερης επιστήμης αποκαλύπτεται μόνο σε όσους έχουν το κουράγιο να προχωρήσουν βαθιά μέσα της.

Όταν όμως μια αντιπρόσωπο του γυναικείου φύλου, που σύμφωνα με τις συνθήκες και τις προκαταλήψεις πρέπει να αντιμετωπίσει απείρως περισσότερες δυσκολίες απ' ότι οι άνδρες, για να εξοικειωθεί με αυτές τις ακανθώδεις έρευνες, παρ' όλα αυτά πετυχαίνει να ξεπεράσει τα εμπόδια και να διεισδύσει στα σκοτεινότερα σημεία τους, τότε αναμφίβολα πρέπει να διαθέτει το ευγενέστερο φρόνημα, εξαιρετικό ταλέντο και ανώτερη ευφυΐα.

Πραγματικά, τίποτε δε θα μπορούσε να αποδείξει με τόσο κολακευτικό και ευθύ τρόπο πως οι ελκυστικές πτυχές αυτής της επιστήμης, που μου χάρισε τόσες χαρές, δεν είναι χίμαιρες, όσο η προτίμηση με την οποία εσείς την έχετε τιμήσει.» Και συνεχίζει μετά συζητώντας μαθηματικά μαζί της. Πολύ όμορφο είναι το κλείσιμο με την ημερομηνία: «Brunswick ce 30 Avril 1807 jour de ma naissance – Brunswick, αυτή την 30.04.1807, ημέρα των γενεθλίων μου». Το ότι ο Gauss δεν ήταν απλώς ευγενικός με μια νέα γυναίκα θαυμάστριά του, φαίνεται από ένα γράμμα της 21.07.1807 προς τον φίλο του Olbers: «... ο Lagrange δείχνει θερμό ενδιαφέρον για την αστρονομία και την ανώτερη αριθμητική, τα 2 θεωρήματα -κριτήρια (για ποιούς πρώτους αριθμούς είναι το 2 κυβικό ή διτετραγωνικό υπόλοιπο) τα οποία του γνωστοποίησα πριν από κάποιο διάστημα, τα θεωρεί «ως δύο από τα ωραιότερα και δυσκολότερα πράγματα για να αποδειχθούν».

Όμως η Sophie Germain μου έστειλε τις αποδείξεις τους, δεν έχω καταφέρει ακόμη να τις ελέγξω, αλλά πιστεύω πως είναι καλές, τουλάχιστον έχει πιάσει το θέμα από τη σωστή πλευρά, αν και κάπως εκτενέστερα απ' όσο χρειάζεται...». Τα θεωρήματα στα οποία αναφέρεται ο Gauss είναι εκείνα που δηλώνουν για ποιούς περιττούς πρώτους p επιλύονται οι ισοτιμίες $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$, $x \equiv 2 \pmod{p}$.

Θα χρειαζόμασταν ένα μεγάλο βιβλίο (ίσως μεγαλύτερο από αυτό που θα απαιτούσε η περίπτωση του Νεύτωνα) για η να περιγράψουμε όλες τις εξέχουσες συνεισφορές του Gauss στα μαθηματικά, καθαρά και εφαρμοσμένα. Εδώ μπορούμε απλώς να αναφερθούμε σε μερικές από τις σπουδαιότερες εργασίες για τις οποίες δε μιλήσαμε μέχρι τώρα και θα επιλέξουμε εκείνες που προσέθεσαν νέες μαθηματικές τεχνικές ή προώθησαν καθοριστικά τη λύση σπουδαίων προβλημάτων.

Σε έναν προσεγγιστικό αλλά βολικό χρονολογικό πίνακα (βασισμένο σε αυτόν που διαμόρφωσαν οι εκδότες των έργων του Gauss) δίνουμε συνοπτικά τους κύριους τομείς των ενδιαφερόντων του μετά το 1800:

1800–1820 αστρονομία,

1820–1830 γεωδαισία, θεωρία επιφανειών, σύμμορφες απεικονίσεις·

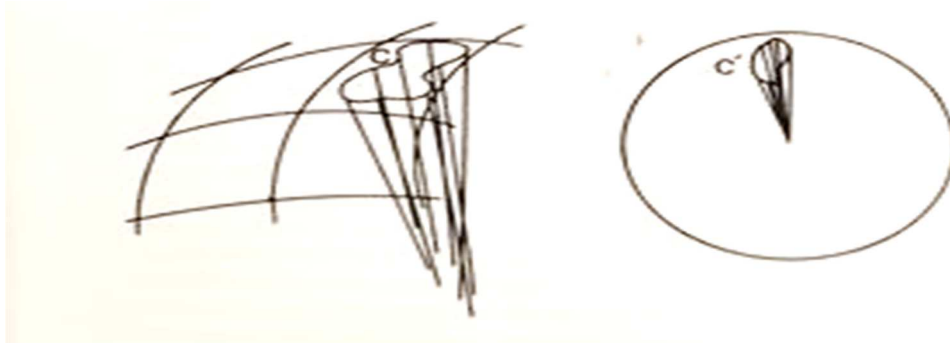
1830–1840 μαθηματική φυσική, ιδιαίτερα ηλεκτρομαγνητισμός, γήινος μαγνητισμός και θεωρία της έλξης σύμφωνα με το νευτώνειο νόμο,

1841–1855 analysis situs" και η γεωμετρία η συνυφασμένη με τις συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής.,

Κατά την περίοδο 1821–1848 ο Gauss διετέλεσε επιστημονικός σύμβουλος των κυβερνήσεων του Ανόβερου (το Göttingen ήταν τότε υπό την δικαιοδοσία της κυβέρνησης του Ανόβερου) και της Δανίας σε μια εκτεταμένη γεωδαιτική χωρομέτρηση. Ρίχτηκε στη δουλειά με όρεξη. Η μέθοδός του, των ελαχίστων τετραγώνων και η ικανότητά του να επινοεί τεχνάσματα για την επεξεργασία μεγάλου όγκου αριθμητικών δεδομένων, είχαν μπροστά τους πλούσιο έδαφος για να αξιοποιηθούν, πιο σημαντικό ήταν όμως ότι τα προβλήματα που σχετίζονταν με την ακριβή χωρομέτρηση ενός τμήματος της γήινης επιφάνειας, αναμφίβολα έθεταν βαθύτερα και γενικότερα ζητήματα, που είχαν να κάνουν με όλες τις καμπύλες επιφάνειες. Απότοκο αυτών των ερευνών θα ήταν τα μαθηματικά της σχετικότητας.

Το αντικείμενο δεν ήταν νέο, μερικοί πρόδρομοι του Gauss, ιδιαίτερα ο Euler, ο Lagrange και ο Monge, είχαν μελετήσει τη γεωμετρία πάνω σε ορισμένους τύπους καμπύλων επιφανειών, ο Gauss όμως ήταν εκείνος που αντιμετώπισε το πρόβλημα σε όλη τη γενικότητα και με τις δικές του έρευνες ξεκίνησε η πρώτη μεγάλη περίοδος της διαφορικής γεωμετρίας. Η διαφορική γεωμετρία μπορεί σε αδρές γραμμές να περιγραφεί ως η μελέτη των ιδιοτήτων των καμπυλών, των επιφανειών κ.λπ., στην άμεση περιοχή ενός σημείου, έτσι ώστε οι μεγαλύτερες από τη δεύτερη δυνάμεις των αποστάσεων να μπορούν να αγνοηθούν.

Εμπνευσμένος από αυτή την εργασία, ο Riemann το 1854 έδωσε την κλασική του διατριβή πάνω στις υποθέσεις που βρίσκονται στα θεμέλια της γεωμετρίας, εγκαινιάζοντας έτσι τη δεύτερη μεγάλη περίοδο στη διαφορική γεωμετρία, αυτήν που χρησιμοποιείται σήμερα στη μαθηματική φυσική, ιδιαίτερα στη θεωρία της γενικής σχετικότητας. Τρία από τα προβλήματα με τα οποία καταπιάστηκε ο Gauss, μελετώντας τις επιφάνειες, έδωσαν το έναυσμα για τη διατύπωση γενικών θεωριών μεγάλης μαθηματικής και επιστημονικής σημασίας, η μέτρηση της καμπυλότητας, η θεωρία της σύμμορφης αναπαράστασης (ή απεικόνισης) και το εφαρμοσίμο των επιφανειών. Η αδικαιολόγητα μυστικιστική έννοια ενός «καμπύλου» χωροχρόνου, που είναι μια καθαρά μαθηματική επέκταση της οικείας, παραστάσιμης καμπυλότητας από έναν «χώρο» δύο συντεταγμένων σε έναν τεσσάρων συντεταγμένων, υπήρξε φυσικό επακόλουθο της εργασίας του Gauss πάνω στις καμπύλες επιφάνειες. Ένας από τους ορισμούς του, θα κάνει καταφανή τη λογικότητα



του συνόλου. Το πρόβλημα είναι, να επινοηθεί ένας τρόπος περιγραφής της μεταβολής της «καμπυλότητας» μίας επιφάνειας, από σημείο σε σημείο της επιφάνειας. Η περιγραφή θα πρέπει να ικανοποιεί τη διαισθητική αντίληψη του τι σημαίνει «περισσότερο καμπύλο» και «λιγότερο καμπύλο».

Η ολική καμπυλότητα, ενός τμήματος μιας επιφάνειας που περικλείεται από μια κλειστή καμπύλη C χωρίς βρόγχους, ορίζεται ως εξής: Η κάθετη ευθεία προς μια επιφάνεια σε δοθέν σημείο είναι εκείνη η ευθεία γραμμή, η οποία περνά από το σημείο και είναι κάθετη στο επίπεδο, που εφάπτεται της επιφάνειας στο δοθέν

σημείο. Σε κάθε σημείο της C , υπάρχει μια κάθετη ευθεία προς την επιφάνεια. Φανταστείτε όλες αυτές τις κάθετες ευθείες.

Από το κέντρο μιας σφαίρας που έχει ακτίνα μοναδιαίου μήκους (και που μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε σε σχέση με τη θεωρούμενη επιφάνεια), φανταστείτε όλες τις ακτίνες που είναι παράλληλες προς τις κάθετες ευθείες της C . Αυτές οι ακτίνες, θα δώσουν μια καμπύλη CE πάνω στη σφαίρα με τη μοναδιαία ακτίνα. Το εμβαδόν εκείνου του τμήματος της σφαίρας που περικλείεται από τη C' ορίζεται ως η ολική καμπυλότητα του τμήματος της δοθείσης επιφάνειας, το οποίο περικλείεται από τη C . Αν τα δουλέψουμε όλα αυτά λίγο στο μυαλό μας, θα δούμε πως ο παραπάνω ορισμός συμφωνεί, όπως θα έπρεπε, με τις αντίστοιχες συνήθειες έννοιες. Μια άλλη θεμελιώδης ιδέα που εκμεταλλεύτηκε ο Gauss στη μελέτη των επιφανειών, ήταν εκείνη της **παραμετρικής παράστασης**.

Δύο συντεταγμένες απαιτούνται για τον προσδιορισμό ενός συγκεκριμένου σημείου πάνω στο επίπεδο. Το ίδιο συμβαίνει με την επιφάνεια μιας σφαίρας, ή ενός σφαιροειδούς όπως η $\Gamma\eta$. Ως συντεταγμένες σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να θεωρηθούν το γεωγραφικό πλάτος και γεωγραφικό μήκος.

Αυτό δείχνει τι εννοούμε μιλώντας για μια δισδιάστατη πολλαπλότητα. Γενικά, αν ακριβώς οι αριθμοί είναι αναγκαίοι και ικανοί για τον προσδιορισμό κάθε ξεχωριστού μέλους μιας κατηγορίας πραγμάτων (σημείων, ήχων, χρωμάτων, γραμμών κ.λπ.) η κατηγορία αυτή λέμε πως είναι η-διάστατη πολλαπλότητα. Σε τέτοιους προσδιορισμούς, εξυπακούεται πως μόνο ορισμένα χαρακτηριστικά των μελών της κατηγορίας αποδίδονται με αριθμούς. Έτσι, αν θεωρήσουμε μόνο το ύψος των ήχων, έχουμε μια μονοδιάστατη πολλαπλότητα, διότι ένας αριθμός, η συχνότητα της δόνησης που αντιστοιχεί στον ήχο, αρκεί για τον προσδιορισμό του ύψους· αν προσθέσουμε την ένταση, μετρημένη σε κάποια βολική κλίμακα, οι ήχοι συνιστούν τώρα μια δισδιάστατη πολλαπλότητα κ.λπ. Αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια ως συναπαρτισμένη από σημεία, βλέπουμε ότι είναι μια δισδιάστατη πολλαπλότητα (σημείων). Χρησιμοποιώντας γεωμετρική γλώσσα, βρίσκουμε βολικό να μιλάμε για οποιαδήποτε δισδιάστατη πολλαπλότητα σ να πρόκειται για μια «επιφάνεια», εφαρμόζοντας στην πολλαπλότητα τη γεωμετρική λογική και ελπίζοντας να βρούμε κάτι ενδιαφέρον. Τα παραπάνω, οδηγούν στην παραμετρική παράσταση των επιφανειών. Στη γεωμετρία του Καρτέσιου, μια εξίσωση ανάμεσα σε 3 συντεταγμένες παριστά μια επιφάνεια. Ας πούμε ότι οι (Καρτεσιανές) συντεταγμένες είναι x, y, z . Αντί να χρησιμοποιήσουμε μια εξίσωση που συνδέει τα x, y, z για να αποδώσουμε την επιφάνεια, τώρα αναζητούμε τρεις : $x=f(u, v), y=g(u, v), z=h(u, v)$, όπου οι $f(u, v), g(u, v), h(u, v)$ είναι τέτοιες συναρτήσεις (εκφράσεις) των νέων μεταβλητών u, v ώστε, όταν αυτές οι μεταβλητές απαλειφθούν, να παίρνουμε ως αποτέλεσμα ότι τα $*$ ικανοποιούν την εξίσωση της επιφάνειας.

Η απαλοιφή των v, u είναι δυνατή, διότι δύο από τις εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να λύσουμε ως προς u και v τα αποτελέσματα, τώρα, μπορούν να εισαχθούν στην τρίτη εξίσωση. Για παράδειγμα, αν $x=u+v, y=u-v, z=2$ παίρνουμε $u = \frac{1}{2}(x+y), v=\frac{1}{2}(x-y)$ από τις πρώτες δύο εξισώσεις, και στη συνέχεια, $4z = x^2 - y^2$ από την τρίτη. Καθώς τώρα οι μεταβλητές v, u διατρέχουν ανεξάρτητα κάποιο προκαθορισμένο σύνολο αριθμών, οι συναρτήσεις f, g, h θα παίρνουν αριθμητικές τιμές και το σημείο με συντεταγμένες x, y, z θα κινείται πάνω στην επιφάνεια που περιγράψαμε με τις παραπάνω 3 εξισώσεις.

Οι μεταβλητές v, u καλούνται παράμετροι για την επιφάνεια και οι 3 εξισώσεις $x=f(u,v), y=g(u,v), z=h(u,v)$ είναι οι παραμετρικές της εξισώσεις. Αυτή η μέθοδος περιγραφής των επιφανειών παρουσιάζει μεγάλα πλεονεκτήματα, σε σχέση με την Καρτεσιανή, όταν εφαρμοσθεί στη μελέτη της καμπυλότητας και άλλων

ιδιοτήτων των επιφανειών που μεταβάλλονται γρήγορα από σημείο σε σημείο. Η παραμετρική παράσταση είναι εσωτερική, αντλεί από την ίδια την επιφάνεια τις συντεταγμένες της και όχι από ένα εξωτερικό ή ξένο σύνολο αξόνων μη συνδεδεμένο με την επιφάνεια, όπως στην περίπτωση της μεθόδου του Descartes.

Οι δύο παράμετροι u , v δείχνουν αμέσως το δυσδιάστατο της επιφάνειας. Το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος στη Γη είναι παραδείγματα αυτών των εσωτερικών, «φυσικών» συντεταγμένων θα ήταν τελείως άβολο αν όλη η ναυσιπλοΐα μας αναφερόταν σε ένα σύστημα τριών αξόνων καθέτων μεταξύ τους και διερχομένων από το κέντρο της Γης, όπως θα απαιτούσε η Καρτεσιανή συνταγή. Ένα άλλο πλεονέκτημα της μεθόδου, είναι η εύκολη γενίκευση της σε χώρο οποιασδήποτε διάστασης. Αρκεί να αυξήσουμε τον αριθμό των παραμέτρων και να προχωρήσουμε όπως προηγουμένως.

Όταν φτάσουμε στον Riemann, θα δούμε πώς αυτές οι απλές ιδέες οδήγησαν αβιάστα σε μια γενίκευση της μετρικής γεωμετρίας του Πυθαγόρα και του Ευκλείδη. Τα θεμέλια αυτής της γενίκευσης έθεσε ο Gauss, χρειάστηκε όμως να φθάσουμε στον αιώνα μας για να εκτιμηθεί πλήρως η σημασία τους για τα μαθηματικά και τη φυσική επιστήμη. Οι γεωδαιτικές έρευνες, στάθηκαν η αφορμή για να αναπτύξει ο Gauss μια άλλη πανίσχυρη μέθοδο στη γεωμετρία, εκείνη της **σύμμορφης απεικόνισης**. Πριν από τη σχεδίαση ενός χάρτη, ας πούμε της Γροιλανδίας, είναι απαραίτητο να καθοριστεί τι πρόκειται να διατηρηθεί αναλλοίωτο. Πρόκειται να αλλοιωθούν οι αποστάσεις όπως συμβαίνει στην προβολή του Mercator, οπότε η Γροιλανδία θα φανεί υπερβολικά σπουδαία συγκρινόμενη με τη Βόρεια Αμερική; Ή θα διατηρηθούν οι αποστάσεις, ώστε μια ίντσα στον χάρτη, μετρημένη οπουδήποτε κατά μήκος των γραμμών αναφοράς (ας πούμε εκείνων του γεωγραφικού πλάτους και μήκους), να αντιστοιχεί πάντα στην ίδια απόσταση, μετρημένη πάνω στην επιφάνεια της Γης;

Στην τελευταία περίπτωση, απαιτείται ένα είδος συνάρτησης και αυτό το είδος δε θα διατηρεί κανένα άλλο χαρακτηριστικό γνώρισμα που μπορεί να θέλουμε να διατηρείται για παράδειγμα, αν δύο δρόμοι πάνω στη Γη τέμνονται υπό ορισμένη γωνία, οι γραμμές που αντιπροσωπεύουν αυτούς τους δρόμους πάνω στον χάρτη θα τέμνονται από διαφορετική γωνία. Εκείνο το είδος απεικόνισης το οποίο διατηρεί τις γωνίες καλείται σύμμορφη απεικόνιση. Για τέτοιες απεικονίσεις, η θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής που περιγράψαμε νωρίτερα είναι το χρησιμότερο εργαλείο. Ολόκληρο το αντικείμενο των σύμμορφων απεικονίσεων χρησιμοποιείται σταθερά στη μαθηματική φυσική και στις εφαρμογές της, επί παραδείγματι στην ηλεκτροστατική, την υδροδυναμική και την αεροδυναμική. Ένα άλλο πεδίο της γεωμετρίας που καλλιέργησε ο Gauss με τη γνωστή του ακρίβεια και επιτυχία, ήταν εκείνο του εφαρμόσιμου των επιφανειών, όπου ζητείται να προσδιοριστεί ποιές επιφάνειες μπορούν να εφαρμόζουν σε δοθείσα επιφάνεια με απλή κάμψη χωρίς να τεντωθούν ή να σκιστούν.

Και εδώ, οι μέθοδοι που επινόησε ο Gauss ήταν γενικές και ευρείας χρήσης. Θεμελιακή έρευνα έκανε ο Gauss και σε άλλους τομείς της επιστήμης, όπως για στις μαθηματικές θεωρίες του ηλεκτρομαγνητισμού, περιλαμβανομένου του γήινου μαγνητισμού, στην έλξη των ελλειψοειδών (οι πλανήτες είναι συγκεκριμένου είδους ελλειψοειδείς) με νόμο έλξης εκείνων του Νεύτωνα και στη διοπτρική, ιδιαίτερα στα συστήματα φακών.

Το τελευταίο θέμα του έδωσε την ευκαιρία να εφαρμόσει μέρος μιας αφηρημένης τεχνικής (συνεχή κλάσματα) που είχε αναπτύξει στα νιάτα του για να ικανοποιήσει την περιέργειά του αναφορικά με τη θεωρία αριθμών. Ο Gauss δεν έκανε μόνο σπουδαία μαθηματική δουλειά πάνω σε όλα αυτά τα πράγματα, χρησιμοποιούσε επίσης τα χέρια και τα μάτια του και ήταν ένας εξαιρετικά ακριβής

παρατηρητής. Πολλά από τα συγκεκριμένα θεωρήματα που ανακάλυψε, ιδιαίτερα στις έρευνές του στον ηλεκτρομαγνητισμό και στη θεωρία της έλξης, έχουν γίνει απαραίτητα εργαλεία για όλους όσους εργάζονται σοβαρά στη φυσική επιστήμη.

Για πολλά χρόνια ο Gauss, βοηθούμενος από τον φίλο του Weber, αναζητούσε μια θεωρία για όλα τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Αποτυγχάνοντας να βρει κάποια που να τον ικανοποιεί, παραιτήθηκε από την προσπάθειά του. Αν είχε βρει τις εξισώσεις του Clerk Maxwell (1831–1879) για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ίσως να έμενε ικανοποιημένος. Για να κλείσουμε αυτόν τον μακρύ αλλά κάθε άλλο παρά πλήρη κατάλογο των σπουδαιότερων πραγμάτων για τα οποία ο Gauss κέρδισε τον τίτλο του αναμφισβήτητα αδιαφιλονίκητου Πρίγκιπα των μαθηματικών, πρέπει να κάνουμε μνεία μιας περιοχής στην οποία δε δημοσίευσε τίποτε (εκτός από μια γρήγορη αναφορά στη διατριβή του, το 1799) αλλά για την οποία προφήτευσε πως θα εξελισσόταν σε ένα από τα κύρια ενδιαφέροντα των μαθηματικών, την *analysis situs*,

Ένας ακριβής ορισμός της, είναι αδύνατος εδώ (απαιτεί την έννοια της συνεχούς ομάδας), όμως κάποια ένδειξη για το είδος των προβλημάτων με τα οποία ασχολείται μπορεί να αποκτηθεί με ένα απλό παράδειγμα. Όλοι ξέρουμε πώς γίνονται οι κόμποι: δέστε λοιπόν έναν οποιονδήποτε κόμπο σε ένα σχοινί και ενώστε μετά τα άκρα του σχοινιού. Ένας «απλός» κόμπος διακρίνεται εύκολα με το μάτι από έναν «μπλεγμένο»: πώς όμως μπορούμε να δώσουμε έναν ακριβή, μαθηματικό προσδιορισμό της διαφοράς ανάμεσα στους δύο, και πώς μπορούμε να ταξινομήσουμε τους κόμπους με μαθηματικό τρόπο; Αν και δε δημοσίευσε τίποτε πάνω σε αυτό, ο Gauss είχε κάνει μια αρχή, όπως ανακαλύφθηκε στα μετά θάνατον δημοσιευμένα χαρτιά του. Ένας άλλος τύπος προβλήματος στην ίδια μαθηματική περιοχή, είναι το να βρούμε τον ελάχιστο αριθμό τομών που απαιτείται να γίνουν σε δοθείσα επιφάνεια, ώστε να μπορέσουμε να την εφαρμόσουμε πάνω σε επίπεδο.

Για μια κωνική επιφάνεια αρκεί μια τομή, για έναν αγκυρόσχημο δακτύλιο δύο, για μια σφαίρα κανένας πεπερασμένος αριθμός τομών δεν είναι αρκετός, αν δεν επιτρέπεται το τέντωμα της επιφάνειας. Αυτά τα παραδείγματα ίσως δώσουν την εντύπωση πως το όλο αντικείμενο είναι τετριμμένο. Αν όμως ήταν έτσι, ο Gauss δε θα του απέδιδε τη σπουδαιότητα που του απέδωσε. Η πρόβλεψή του για τον θεμελιώδη χαρακτήρα αυτού του αντικειμένου έχει βγει αληθινή στη γενιά μας.

Σήμερα, μια δυναμική σχολή (που περιλαμβάνει πολλούς Αμερικανούς, J.W. Alexander, S. Lefschetz, O. Veblen μεταξύ άλλων, ανακαλύπτει πως η *analysis situs* ή η «γεωμετρία θέσης» όπως την αποκαλούν μερικές φορές, έχει βαθιές διακλαδώσεις στη γεωμετρία και στην ανάλυση. Τι κρίμα που ο Gauss δε μπόρεσε να κλέψει ένα ή δύο χρόνια από τη Δήμητρα για να οργανώσει τις σκέψεις του πάνω σε αυτή την τεράστια θεωρία, που έμελλε να γίνει το όνειρο της γεροντικής του ηλικίας και η πραγματικότητα της δικής μας νεότητας. Τα τελευταία του χρόνια ήταν γεμάτα τιμές, όμως δεν ήταν τόσο ευτυχής όσο του άξιζε.

Δυνατός στο μυαλό και παραγωγικός σε επινοήσεις όπως πάντα, ο Gauss δεν έδειχνε διάθεση να ξεκουραστεί όταν τα πρώτα συμπτώματα της τελευταίας του αρρώστιας εμφανίστηκαν μερικούς μήνες πριν πεθάνει. Ένα παρ' ολίγον θανατηφόρο ατύχημα τον έκανε πιο μαζεμένο από όσο συνήθως και δε μπόρεσε ούτε να μιλήσει στον ξαφνικό χαμό ενός φίλου του.

Για πρώτη φορά σε μια εικοσαετία άφησε το Göttingen στις 16.06.1854 για να δει το σιδηρόδρομο που ήταν υπό κατασκευή και θα συνέδεε την πόλη του με το Cassel. Πάντοτε έδειχνε έντονο ενδιαφέρον για την κατασκευή και χρήση των σιδηροδρόμων, τώρα θα έβλεπε έναν να στήνεται. Τα άλογα αφήνιασαν, ο ίδιος βρέθηκε πεταγμένος έξω από το αμάξι άθικτος, αλλά το σοκ ήταν άσχημο. Συνήλθε και είχε την ευχαρίστηση να παρευρεθεί στις εκδηλώσεις των εγκαινίων όταν ο

σιδηρόδρομος έφτασε στο Göttingen, στις 31.07.1854. Ήταν η τελευταία μέρα που πέρασε ξένοιαστα. Με την έλευση του καινούργιου χρόνου άρχισε να υποφέρει πολύ από διόγκωση καρδιάς και δύσπνοια, ενώ παράλληλα εμφάνισε συμπτώματα υδρωπικίας. Παρ' όλα αυτά εργαζόταν όποτε μπορούσε, αν και το χέρι του έτρεμε και ο όμορφος, καθαρός γραφικός χαρακτήρας του χάλασε στο τέλος. Το τελευταίο γράμμα που έγραψε απευθυνόταν στον Sir David Brewster με την ευκαιρία της ανακάλυψης του ηλεκτρικού τηλεγράφου. Έχοντας πλήρη ενάργεια πνεύματος σχεδόν ως το τέλος και αφού έδωσε μια μεγάλη μάχη για να ζήσει, πέθανε ειρηνικά νωρίς το πρωί της 23.02.1855, σε ηλικία 78 χρόνων. Ζει όμως παντού στα Μαθηματικά.

Βιβλιογραφία

- Αναπολιτάνος, Δ. (1985). «Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών», Εκδόσεις Νεφέλη, Δ' έκδοση, Αθήνα.
- Αρτεμιάδης, Ν. (1988). «Η ζωή και το έργο του Ισαάκ Newton», Πρακτικά Ακαδημίας Αθηνών, τόμος 63, τεύχος 2, σελίδες 320–336.
- Γιαννακούλιας, Ε. (2002). «Σημειώσεις στη διδακτική του απειροστικού λογισμού», Αθήνα.
- Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας (1999). «Απειροστικός λογισμός», τόμος 1, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- Γ. Παντελίδης–Δ. Κραββαρίτης (1997). «Λεξικό μαθηματικών», Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα.
- E. Bell (2000). «Οι μαθηματικοί», τόμος 1, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 3^η έκδοση, Ηράκλειο.
- Karl B. Boyer – Uta C. Merzbach (1968). «Η ιστορία των μαθηματικών», Εκδόσεις Πνευματικού, 2^η έκδοση, Αθήνα.
- D. Davis (2001). «Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
- H. Evans (1990). «Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών μετά το 1650», τόμος 2, Εκδόσεις τροχαλία, Αθήνα.
- G. Loria, «Ιστορία των μαθηματικών», τόμος 3^A, Εκδόσεις Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα.
- R. Mankiewicz (2002). «Η ιστορία των μαθηματικών», Εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα.
- E. Maor (2002). «Τριγωνομετρικά λουκούμια», Εκδόσεις κάτοπτρο, Αθήνα.
- G. Polya (2001). «Η μαθηματική ανακάλυψη», τόμος 1, Εκδόσεις κάτοπτρο, Αθήνα.
- D. Smith (1951). “History of mathematics”, Volume 1, Dover publications, INC, New York.
- D. Struik (1980). «Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών», β' έκδοση, Εκδόσεις Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα.
- V. Tikhomirov (1999). «Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα», Εκδόσεις κάτοπτρο, 1^η έκδοση, Αθήνα.
- R. Westfall (1999). «Η ζωή του Ισαάκ Νεύτωνα», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.