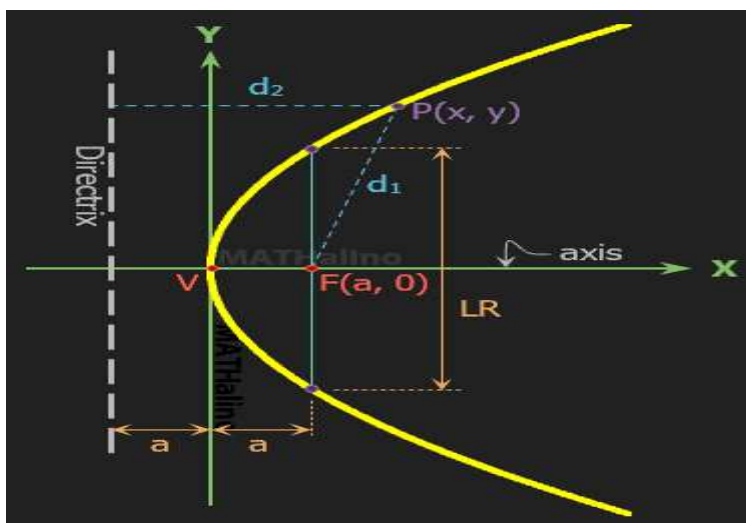




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Η παραβολή και οι ιδιότητες της



Σπουδαστές: Κεραμίδας Βασίλειος (AM8443)
Κότορος Ιωάννης (AM 8449)

Επιβλέπων Καθηγητής : Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2022 – 2023

Ημερομηνία ανάθεσης: **24.05 .2021**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **27.06.2023**
 Ημερομηνία εξέτασης: **03.07.2023**

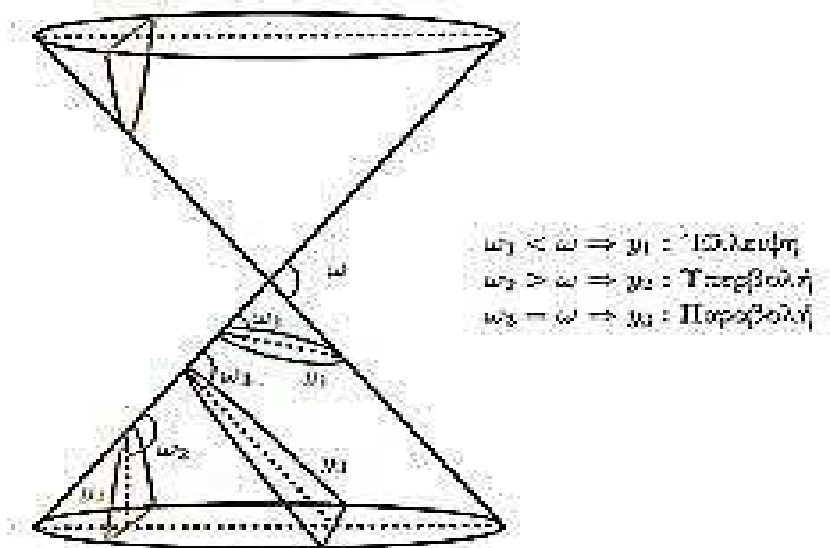
A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Ικανοποιητική	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	3
1. Εξισώσεις της παραβολής.....	6
2. Αναλυτική εξίσωση της παραβολής	6
3. Κατασκευή παραβολής δεδομένης εστίας και διευθετούσας	7
4. Στοιχεία της παραβολής.....	7
5. Ιδιότητες της παραβολής (C): $y^2 = 2px$	8
6. Μορφές της εξίσωσης της παραβολής.....	9
7. Εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής (C): $y^2 = 2px$	10
8. Παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής.....	10
9. Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής I.....	11
10. Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής II	11
11. Ανάκλαση παράλληλων ακτίνων	11
12. Καθημερινές εφαρμογές της παραβολής	12
13. Η παραβολή στα αθλήματα.....	13
14. Η παραβολή στην κατασκευή γεφυρών και στην αρχιτεκτονική	14
15. Παρατηρήσεις	16
16. Μεθοδολογία για τη λύση των ασκήσεων	18
17. Σχετικές θέσεις ευθείας $(\varepsilon): y = \lambda x + k$ και παραβολής (C): $y^2 = 2px$, $p > 0$...	18
18. Η παραβολή με Geogebra	18
Βιβλιογραφία	18

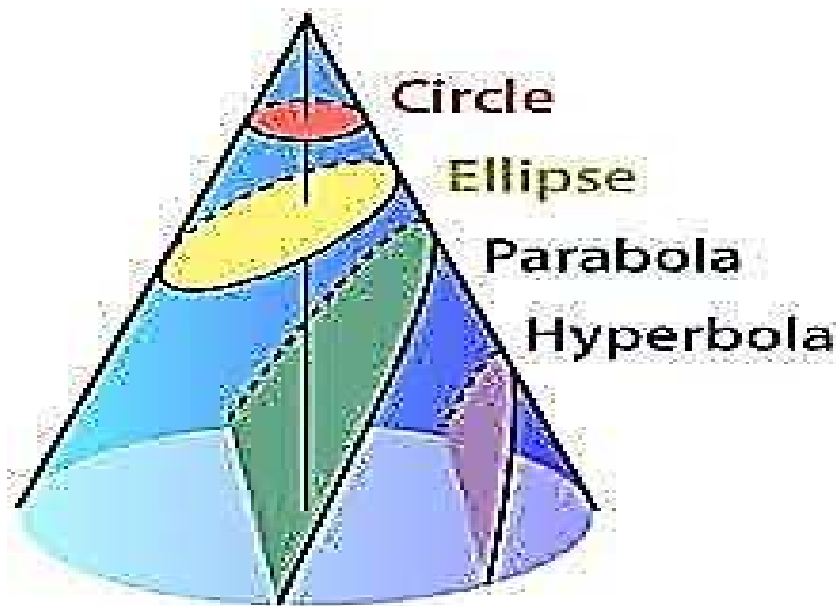
Εισαγωγή

Ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή λέγονται κωνικές τομές, γιατί μπορούν να προκύψουν από την τομή μιας ορθής κωνικής επιφάνειας με ένα επίπεδο, το οποίο δε διέρχεται από την κορυφή της. Η σημασία αυτών των καμπύλων φαίνεται ότι αρχικά σχετίζονταν με ορισμένα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, όπως για παράδειγμα το περίφημο πρόβλημα του **διπλασιασμού του κύβου**. «Αν δοθεί ένας κύβος, να κατασκευαστεί μόνο με τον κανόνα και διαβήτη, ένας άλλος κύβος με διπλάσιο όγκο». Με αλγεβρικό συμβολισμό, αυτό σημαίνει ότι αν a είναι το μήκος της ακμής του αρχικού κύβου, τότε ζητείται να κατασκευαστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους x τέτοιο, ώστε $x^3 = 2a^3$. Οι καμπύλες αυτές γύρω στο 300 π.Χ. ταυτίστηκαν για πρώτη φορά με τις τομές που δημιουργούνται στην επιφάνεια ενός κώνου από ένα επίπεδο κάθετο σε μια γενέτειρά του. Ανάλογα με τη γωνία της κορυφής του κώνου, οι καμπύλες αυτές ορίστηκαν ως «οξυγωνίου κώνου τομή» (έλλειψη), «ορθογωνίου κώνου τομή» (παραβολή) και «αμβλυγωνίου κώνου τομή» (υπερβολή), όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Τα ονόματα «παραβολή», «έλλειψη» και «υπερβολή», έχουν άμεση σχέση με το νέο τρόπο ορισμού των κωνικών τομών που εισήγαγε ο Απολλώνιος, σύμφωνα με τον οποίο, σε κάθε τομή του κώνου από το επίπεδο αντιστοιχεί ένα σταθερό μήκος (παράμετρος), το οποίο εξαρτάται από το είδος του κώνου και από τη θέση του επιπέδου. Ο Απολλώνιος έδειξε ότι για κάθε καμπύλη, τα δύο γραμμοσκιασμένα εμβαδά σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Το ένα από αυτά είναι το τετράγωνο με πλευρά την κάθετη y από ένα σημείο της καμπύλης προς τον άξονα συμμετρίας της το άλλο είναι ένα ορθογώνιο, με μια πλευρά την απόσταση x του ίχνους αυτής της κάθετης από την κορυφή της καμπύλης.

Η σχέση της άλλης πλευράς του ορθογωνίου προς τη σταθερή παράμετρο της τομής καθορίζει τη μορφή και το όνομα της καμπύλης. Αν η άλλη πλευρά ισούται («παραβάλλεται») με την παράμετρο, τότε η καμπύλη είναι μια παραβολή. Αν η άλλη πλευρά είναι μικρότερη («ελλείπει») από την παράμετρο, η καμπύλη είναι έλλειψη. Όταν η άλλη πλευρά είναι μεγαλύτερη («υπερβάλλει»), η καμπύλη είναι μια υπερβολή.



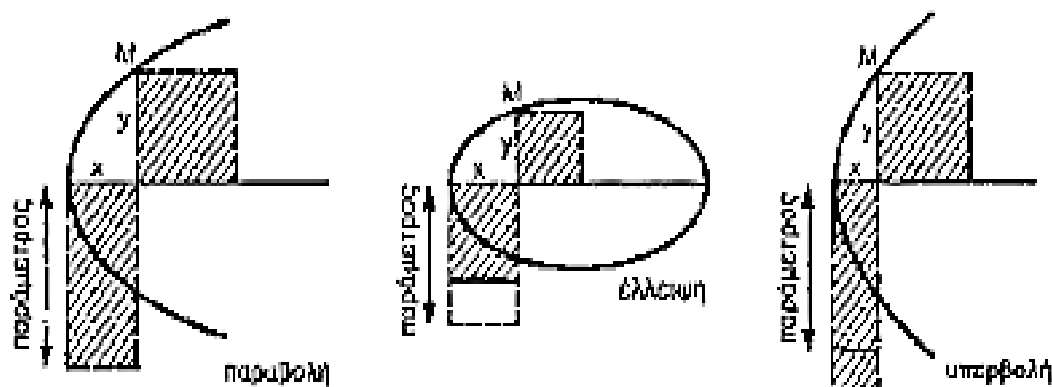
ια΄

Ἐὰν κώνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ
 H38 καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐ-
 θεϊαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τρι-
 10 γώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ἢ μιᾷ
 πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς
 τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος
 ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου μέχρι τῆς διαμέτρου
 τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς ἀπολαμ-
 15 βανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ
 τῆς τομῆς καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας, ἣ λόγον ἔχει πρὸς τὴν
 μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς,
 ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος
 τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώ-
 20 νου δύο πλευρῶν· καλεῖσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ πα-
 ραβολή.

(Κωνικά του Απολλώνιου του Περγαίου , Βιβλίο α΄, Πρόταση 11)

“Ο Απολλώνιος (...) ήταν λίγο νεώτερος από τον Αριστοτέλη και τον Αρχιμήδη, και η περίοδος ακμής της δραστηριότητάς του τοποθετείται μεταξύ 220 και 190 π.Χ. Γεννήθηκε στην Πέργη της Παμφυλίας και επισκέφθηκε την Έφεσο και την Πέργαμο. Οι πληροφορίες μας λένε ότι έζησε επίσης στην Αλεξάνδρεια, όπου πιθανότατα παρήγαγε και μεγάλο μέρος του έργου του. Οι πηγές μας αναφέρουν αρκετά μαθηματικά και αστρονομικά συγγράμματα, αλλά το μοναδικό σωζόμενο

μείζον έργο του είναι το σύγγραμμά του *Κωνικά*. Περιελάμβανε 8 βιβλία, εκ των οποίων τα πρώτα τέσσερα σώζονται στα ελληνικά και τα επόμενα τρία σε αραβική μετάφραση – το όγδοο βιβλίο έχει χαθεί. Πρόκειται για ένα από τα αριστουργήματα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Με το πρόβλημα των κωνικών τομών είχαν ασχοληθεί αρκετοί προγενέστεροι μαθηματικοί: υπάρχουν, π.χ., πληροφορίες για ένα σχετικό σύγγραμμα του Ευκλείδη. Αλλά το έργο του Απολλωνίου υπήρξε η πρώτη ολοκληρωμένη και συστηματική προσέγγισή του. Η ίδια η ορολογία που έχει επικρατήσει για τα τρία είδη κωνικών τομών, έλλειψη, παραβολή και υπερβολή, οφείλεται σε εκείνον.



Οι ονομασίες τους πριν τον Απολλώνιο αντιστοιχούσαν στον τρόπο με τον οποίο χαράσσονταν οι καμπύλες: θεωρούνταν τομές τριών ειδών ορθών κυκλικών κώνων, συγκεκριμένα κώνων των οποίων η γωνία κορυφής είναι οξεία, ορθή και αμβλεία αντίστοιχα, η δε τομή σχηματιζόταν, στην κάθε περίπτωση, από ένα επίπεδο κάθετο προς μια γενέτειρα του κώνου. Οι νέοι όροι, έλλειψη, παραβολή και υπερβολή, που επινόησε ο Απολλώνιος, εισάγονται ήδη από τα πρώτα θεωρήματα του πρώτου βιβλίου και βασίζονται στις κατασκευές που υποδεικνύουν τις θεμελιώδεις ιδιότητες των τριών καμπυλών. Μετά την απόδειξη των παραπάνω, ο Απολλώνιος προχωρά σε μια πλήρη διερεύνηση των προβλημάτων που συνδέονται με τις κωνικές τομές, την κατασκευή κωνικών τομών από ορισμένα δεδομένα, τις εφαπτόμενες, τις ιδιότητες των εστιών, τις τεμνόμενες κωνικές τομές, κ.οκ.

Το έργο των μαθηματικών του τρίτου και δεύτερου αιώνα π.Χ. αποτελεί ίσως το μεγαλύτερο -και αναμφισβήτητο το πιο διαχρονικό- επίτευγμα της αρχαίας ελληνικής επιστήμης.

Απολλώνιος ο Περγαίος.





- αρχή Ο των αξόνων το μέσο ΚΕ,
- άξονα των τετμημένων την ευθεία ΚΕ και
- άξονα των τεταγμένων τη μεσοκάθετη του τμήματος ΚΕ. Έστω ότι $\overline{KE} = p$. Είναι

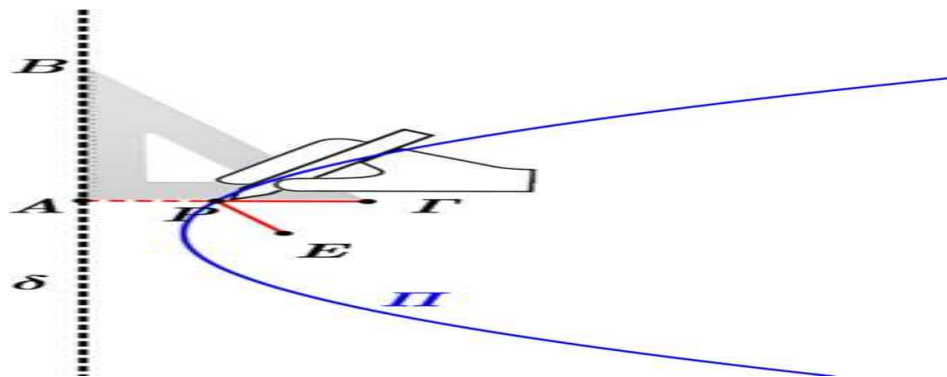
6

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{\left|x + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px \text{ που είναι η εξίσωση της παραβολής, ως προς το σύστημα αξόνων που επέλεξα.}$$

3. Κατασκευή παραβολής δεδομένης εστίας και διευθετούσας

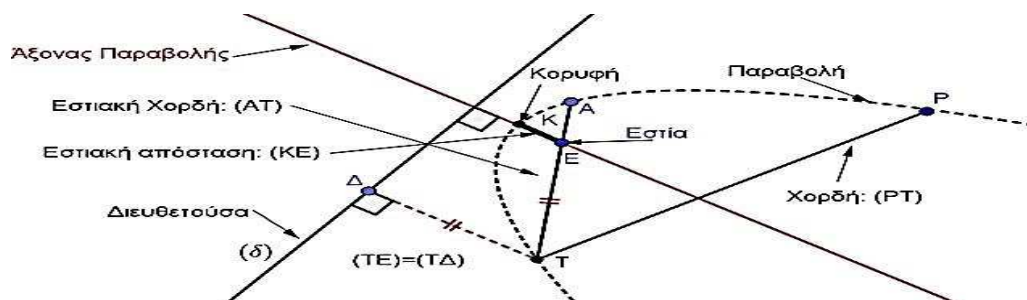
Όταν δοθεί η διευθετούσα (δ) και η εστία E μιας παραβολής μπορώ να κατασκευάσω την παραβολή ως εξής: Παίρνω νήμα τόσου μήκους, όσο το μήκος μιας κάθετης πλευράς ΑΓ ενός γνόμονα ΑΒΓ και το στερεώνω στην κορυφή Γ. Το άλλο άκρο του νήματος το στερεώνω στην εστία. Με τη μύτη του μολυβιού τεντώνω μέρος του νήματος πάνω στην πλευρά ΑΓ. Στη συνέχεια, τοποθετώ την κάθετη πλευρά ΑΒ πάνω στη διευθετούσα και μετακινώ το γνόμονα κατά μήκος της (δ). Τότε, η μύτη του μολυβιού διατρέχει το τόξο μιας παραβολής, αφού ισχύει (PE) + (PΓ) = (ΑΓ) και (AP) + (PΓ) = (ΑΓ) $\Rightarrow$ (PE) = (AP).



4. Στοιχεία της παραβολής

- Η ευθεία που διέρχεται από την εστία E και είναι κάθετη προς τη διευθετούσα (δ) ονομάζεται **άξονας** της παραβολής.
- Το σημείο τομής της παραβολής με τον άξονά της (K) ονομάζεται **κορυφή** της παραβολής.
- Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία της παραβολής ονομάζεται **χορδή**, ενώ η ευθεία που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία ονομάζεται **τέμνουσα** της παραβολής.
- Κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής ονομάζεται **διάμετρος** της παραβολής.
- **Εστιακή χορδή** ονομάζεται κάθε χορδή που διέρχεται από την εστία E της παραβολής.
- Η εστιακή χορδή που διέρχεται από την εστία της παραβολής και είναι παράλληλη προς τη διευθετούσα (κάθετη στον άξονα της παραβολής) ονομάζεται **latus rectum**.

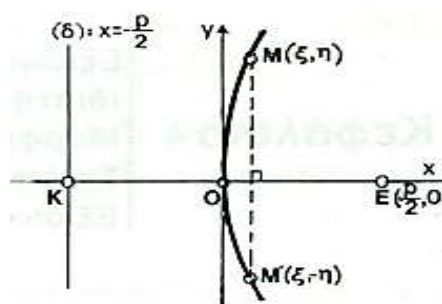
- Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος (KE), που συνδέει την κορυφή K με την εστία E της παραβολής ονομάζεται **εστιακή απόσταση**.



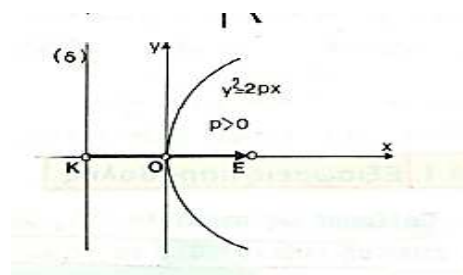
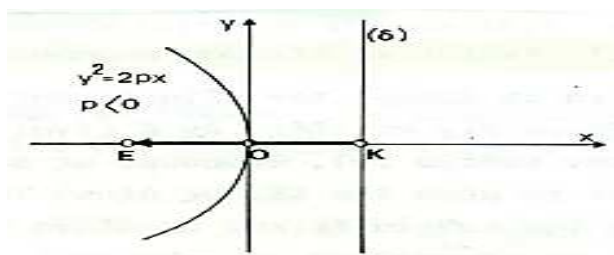
5. Ιδιότητες της παραβολής (C): $y^2 = 2px$

• Η εξίσωση της παραβολής επαληθεύεται για $(x=0, y=0)$ άρα το γράφημα της παραβολής διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων. Το O (μέσο του EK) ονομάζεται **κορυφή** της παραβολής

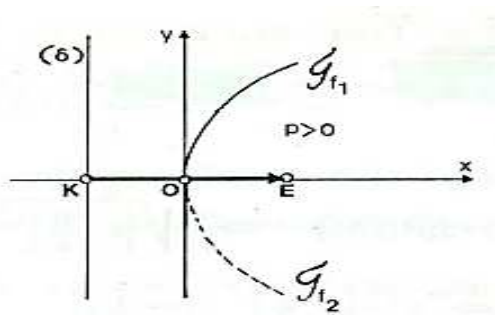
• Αν το σημείο $M(\xi, \eta) \in (C)$
 $\Leftrightarrow \eta^2 = 2p\xi \Leftrightarrow (-\eta)^2 = 2p\xi$ άρα και το σημείο $M'(\xi, -\eta) \in (C)$ δηλαδή το γράφημα της παραβολής είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα xx' .



Επειδή πρέπει να είναι πάντα $px > 0$ (για σημεία της παραβολής διάφορα του O $(0,0)$), παρατηρώ ότι $\overline{KE} = p > 0$ άξονας συμμετρίας της παραβολής είναι ο θετικός ημιάξονας του xx' , ενώ αν $\overline{KE} = p < 0$ άξονας συμμετρίας της παραβολής είναι ο αρνητικός ημιάξονας του xx' .

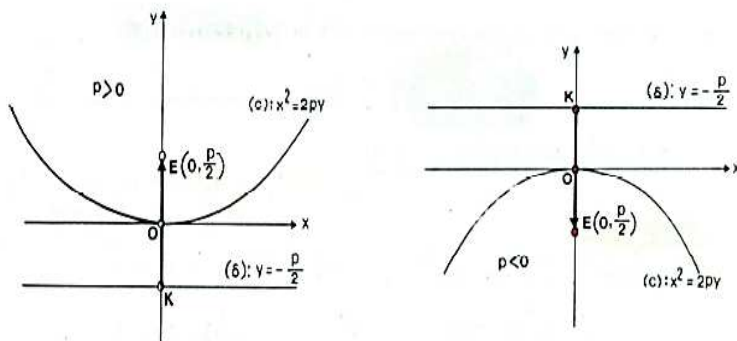


• Το γράφημα της παραβολής $y^2 = 2px$ είναι η ένωση των γραφημάτων των συναρτήσεων: $f_1(x) = \sqrt{2px}$ και αν $f_2(x) = -\sqrt{2px}$ με $D(f_1) = D(f) = [0, +\infty)$ αν $p > 0$ ή $D(f_1) = D(f) = (-\infty, 0]$ αν $p < 0$ και $R(f_1) = [0, +\infty)$, $R(f_2) = (-\infty, 0]$.



6. Μορφές της εξίσωσης της παραβολής

• Αν ζητώ την εξίσωση της παραβολής με εστία E και διευθετούσα (δ) και θεωρήσω την ευθεία KE ως άξονα των τεταγμένων, τη μεσοκάθετη του KE ως άξονα των τετμημένων και ονομάσω $\overline{KE} = p$ (όπου K είναι η ορθή προβολή του E στην (δ)) τότε ως εξίσωση της παραβολής βρίσκω την $x^2 = 2py$. Η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 2py$ έχει κορυφή το $O(0,0)$ και είναι συμμετρική ως προς τον άξονα yy' .



Ειδικά αν $p > 0$ άξονα συμμετρίας είναι ο θετικός ημιάξονας του yy' , ενώ αν $p < 0$ άξονας συμμετρίας είναι ο αρνητικός ημιάξονας του xx' . Ακόμη είναι $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και $(\delta): y = -\frac{p}{2}$.

• Θεωρώ την παραβολή (C) του επιπέδου των αξόνων Oxy που ο άξονας συμμετρίας της είναι παράλληλος προς τον άξονα xx' και η κορυφή της $O'(x_0, y_0)$ είναι διάφορη του O. Κάνω παράλληλη μεταφορά του συστήματος Oxy στο $O'X\Psi$. Αν M είναι σημείο της παραβολής (C) με συντεταγμένες (x,y) ως προς το Oxy και (X,Ψ) ως προς το $O'X\Psi$ ξέρω ότι είναι:

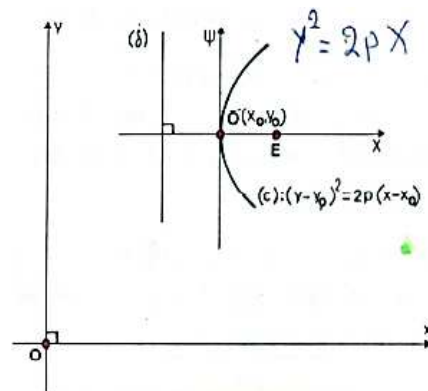
$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

Όμως η παραβολή (C) ως προς το σύστημα $O'X\Psi$, έχει εξίσωση $Y^2 = 2pX$ άρα ως προς το αρχικό σύστημα Oxy θα έχει εξίσωση, $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Επιπλέον είναι $E\left(\frac{p}{2} + x_0, y_0\right)$ και

$\delta: x = -\frac{p}{2} + x_0$. Άρα, η εξίσωση $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ είναι εξίσωση παραβολής με

κορυφή $O'(x_0, y_0)$, εστία $E\left(\frac{p}{2} + x_0, y_0\right)$, διευθετούσα $(\delta): x = -\frac{p}{2} + x_0$ και άξονα συμμετρίας παράλληλο στον xx' . Ανάλογα συμπεράσματα έχω και για την παραβολή (C) που ο άξονας συμμετρίας της είναι παράλληλος προς τον άξονα yy' . Άρα, η

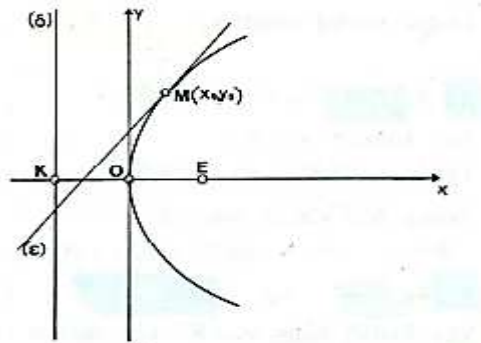


εξίσωση $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ είναι εξίσωση παραβολής με κορυφή $O'(x_0, y_0)$, εστία $E\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$, διευθετούσα $(\delta): y = -\frac{p}{2} + y_0$ και άξονα συμμετρίας παράλληλο στον yy' .

7. Εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής (C): $y^2 = 2px$

Θεωρώ το σημείο $M(x_0, y_0)$ της (C):

$y^2 = 2px$ και ζητώ την εξίσωση της εφαπτομένης της (C) στο M. Αν το M είναι η κορυφή της (C) τότε η εφαπτομένη της παραβολής είναι ο άξονας yy' με εξίσωση $x=0$. Έστω ότι $M \neq 0$. Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο $M(x_0, y_0)$ θα έχει εξίσωση $(y - y_0) = \lambda(x - x_0)$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Έστω το σύστημα:



$$\begin{cases} (y - y_0) = \lambda(x - x_0) \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x - (\lambda x_0 - y_0) \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \lambda x - (\lambda x_0 - y_0) \\ \lambda^2 x^2 - 2[\lambda(\lambda x_0 - y_0) + p]x + (\lambda x_0 - y_0)^2 = 0 \end{cases}.$$

Για να εφάπτεται η (ε) στο σημείο $M(x_0, y_0)$ της (C) πρέπει και αρκεί η δεύτερη εξίσωση να έχει διπλή ρίζα την x_0 άρα

$$x_0 = \frac{2[\lambda(\lambda x_0 - y_0) + p]}{2\lambda^2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{p}{y_0}.$$

Τότε είναι $(\varepsilon): (y - y_0) = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$ άρα $yy_0 = y_0^2 - px_0 + px$. Επειδή $M(x_0, y_0) \in (C)$ είναι $y_0^2 = 2px_0$ άρα $yy_0 = 2px_0 - px_0 + px$ συνεπώς $yy_0 = p(x_0 + x)$.

Σχόλιο. Η ευθεία (u) ορίζεται ως κάθετη στο σημείο M της παραβολής αν και μόνο αν είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο M.

8. Παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής

Οι συναρτήσεις $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ αν αντικατασταθούν στην αναλυτική εξίσωση

$y^2 = 2px$ της παραβολής προκύπτει ταυτότητα ως προς t , άρα είναι παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής (C): $y^2 = 2px$.

Παρατήρηση. Για την παραβολή $x^2 = 2py$ παραμετρικές εξισώσεις είναι οι

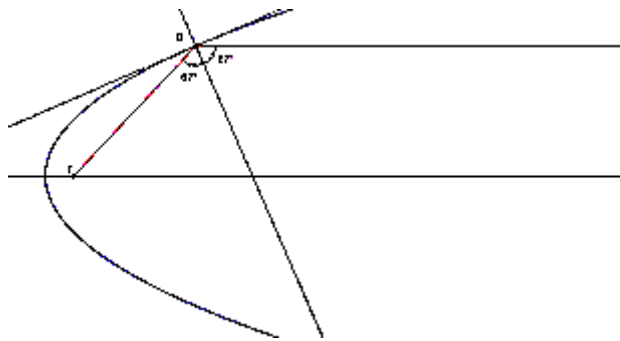
$$\begin{cases} x = 2pt \\ y = 2pt^2 \end{cases} \quad \text{με } t \in \mathbb{R}.$$

Για την παραβολή $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ παραμετρικές εξισώσεις είναι οι $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + 2pt \\ y = y_0 + 2pt^2 \end{array} \right\}$ με $t \in \mathbb{R}$.

Για την παραβολή $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ παραμετρικές εξισώσεις είναι οι $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + 2pt \\ y = y_0 + 2pt^2 \end{array} \right\}$ με $t \in \mathbb{R}$.

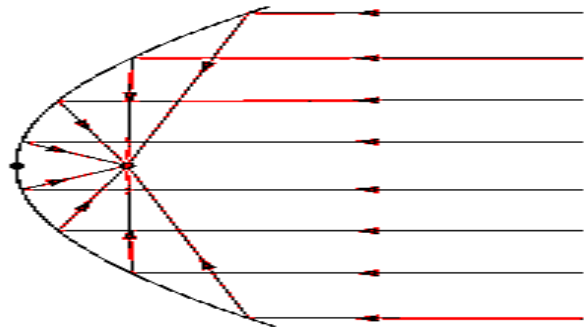
9. Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής I

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η πολική ευθεία και η παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής που διέρχονται από το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της παραβολής. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής και έχει χρήση στα παραβολικά τηλεσκόπια, στα ραντάρ, στα φανάρια των αυτοκινήτων κτλ.



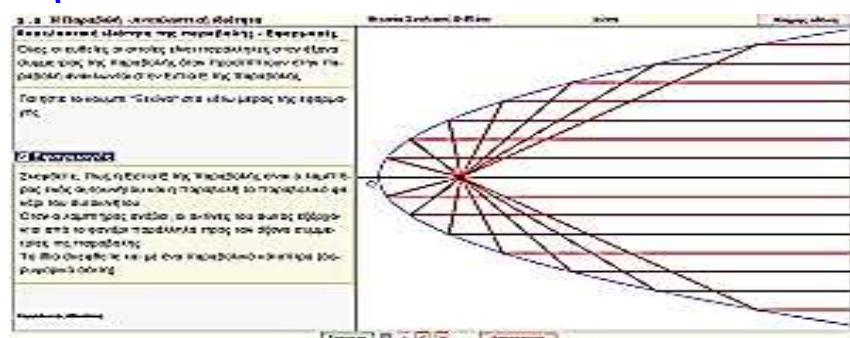
10. Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής II

Φωτεινή δέσμη παράλληλη προς τον άξονα παραβολής ανακλώμενη στην επιφάνεια της παραβολής, διέρχεται από ένα σημείο, την εστία της παραβολής. Στα φανάρια των αυτοκινήτων που έχουν παραβολικά κάτοπτρα, οι λαμπτήρες τοποθετούνται στην εστία τους. Έτσι οι φωτεινές ακτίνες ανακλώμενες στο κάτοπτρο εξέρχονται παράλληλα προς τον άξονά του.



11. Ανάκλαση παράλληλων ακτίνων

Όλες οι ευθείες, που είναι παράλληλες στον άξονα συμμετρίας της παραβολής, όταν προσπίπτουν στην παραβολή, ανακλώνται στην Εστία της



παραβολής. Αυτή είναι η αρχή λειτουργίας των παραβολικών τηλεσκοπίων και των ραντάρ. Συγκεκριμένα: Όσες ακτίνες φωτός είναι παράλληλες προς τον άξονα ενός παραβολικού κατόπτρου, όταν προσπίπτουν στο κάτοπτρο, ανακλώμενες, συγκεντρώνονται στην εστία.

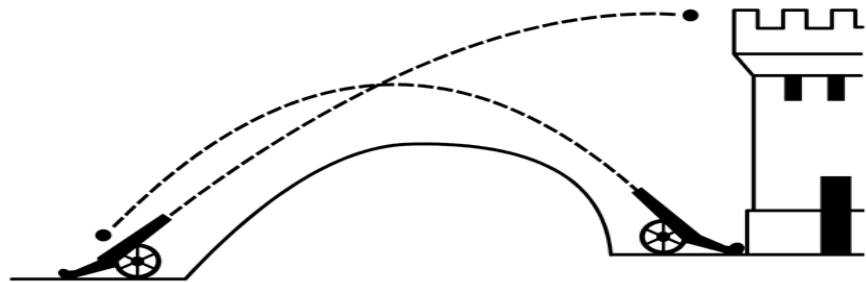
12. Καθημερινές εφαρμογές της παραβολής

Όταν ένα σώμα εκτοξεύεται υπό γωνία και κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους του, τότε η τροχιά που διαγράφει είναι παραβολική.

Πίδακας νερού



Βολή
βλήματος



Κάτοπτρο αφής της ολυμπιακής
φλόγας



Κοίλο παραβολικό κάτοπτρο



Δίδυμες παραβολές στο σήμα
κατατεθέν της γνωστότερης αλυσίδας
γρήγορου φαγητού.



13. Η παραβολή στα αθλήματα

Σε ποια άλλα αθλήματα σχηματίζονται παραβολές; Σε όλα εκείνα που κάτι "αποσπάται" από κάτι άλλο. Γκολφ, τένις, πινγκ-πονγκ, μπάσκετ, βόλεϊ, αθλήματα ρίψεων κλπ. Στα αθλήματα αυτά η παραβολή άλλοτε είναι εμφανής και άλλοτε όχι. Πάντως το αντικείμενο φτάνει σε ένα μέγιστο ύψος και μετά αρχίζει την κάθοδο. Το σημείο αυτό ονομάζεται κορυφή της παραβολής. Στο μπάσκετ η καμπύλη που θα δώσει ο παίκτης πρέπει να είναι τέτοια ώστε αφ' ενός η μπάλα να καταλήξει στο καλάθι, αφ' ετέρου να αποφύγει το σταμάτημα της μπάλας από χέρι του αντιπάλου. Οι πιο κοντοί παίκτες δίνουν μεγαλύτερο ύψος στην μπάλα άρα πιο κλειστή καμπύλη, δηλαδή μικρότερο p .

Βολή στο basket.



Επικίνδυνο
circus



Άλμα σκιέρ



14. Η παραβολή στην κατασκευή γεφυρών και στην αρχιτεκτονική

Γέφυρες με
ένα ή
περισσότερα
παραβολοειδή
τόξα



Παραβολικά τόξα
– αψίδες στήριξης
στήριξης στη
βάση του πύργου
του Eiffel



Παραβολικά τόξα
στο Ολυμπιακό
στάδιο της
Καλογρέζας



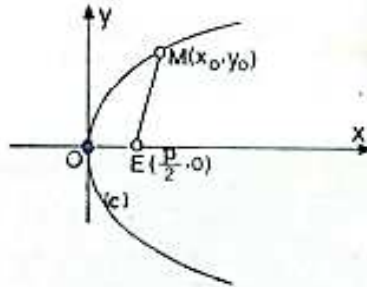
15. Παρατηρήσεις

- Αν $M(x_0, y_0)$ σημείο της παραβολής (C): $y^2 = 2px$, τότε $\|\overline{EM}\| = \left|x_0 + \frac{p}{2}\right|$.

Πράγματι, αν $M(x_0, y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0^2 = 2px_0$ είναι $\|\overline{EM}\| = d(E, M) =$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2} &= \sqrt{x_0^2 - px_0 + \frac{p}{4} + y_0^2} = \\ &= \sqrt{x_0^2 - px_0 + \frac{p}{4} + 2px_0} = \sqrt{x_0^2 + px_0 + \frac{p}{4}} = \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x_0 + \frac{p}{2}\right|$$



- Από το σημείο $M(-3, 2)$ φέρνω τις εφαπτόμενες MA, MB στην παραβολή (C): $y^2 = 8x$. Να βρεθεί η $d(M, AB)$.

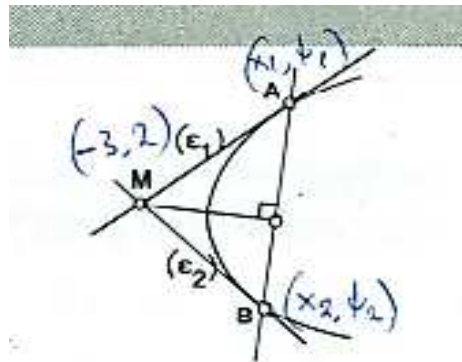
Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ τότε είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_1): yy_1 = 4(x + x_1) \\ (\varepsilon_2): yy_2 = 4(x + x_2) \end{array} \right\} \text{ και επειδή το σημείο}$$

$M(-3, 2)$ ανήκει στις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y_1 = 4(-3 + x_1) \\ 2y_2 = 4(-3 + x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow AB: 2y = 4(-3 + x) \Rightarrow AB: y = 2(-3 + x) \Rightarrow$$

$$AB: 2x - y - 6 = 0, \text{ άρα } d(M, AB) = \frac{|-6 - 2 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{14}{\sqrt{5}}.$$



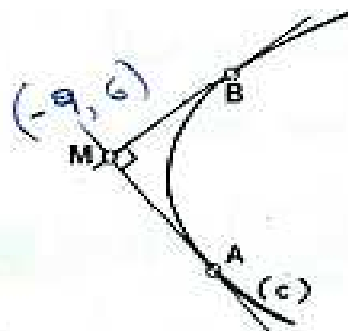
- Από το σημείο $M(-9, 6)$ φέρνω τις εφαπτόμενες MA, MB στην παραβολή (C): $y^2 = 36x$. Βρείτε τη γωνία μεταξύ των MA, MB.

Οι ευθείες που διέρχονται από το $M(-9, 6)$ είναι οι $x = -9$ και $y - 6 = \lambda(x + 9)$

με $\lambda \in \mathbb{R}$. Επειδή το σύστημα $\begin{cases} x = -9 \\ y^2 = 36x \end{cases}$ δεν

έχει διπλή λύση στο $\mathbb{R}^2$, η ευθεία $x = -9$ δεν εφάπτεται στην παραβολή. Η ευθεία $(\varepsilon): y - 6 = \lambda(x + 9) \Leftrightarrow y = \lambda x + (9\lambda + 6)$ εφάπτεται στην (C): $y^2 = 2 \cdot 18x \Leftrightarrow 18 - 2\lambda(9\lambda + 6) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι τα $\lambda_{MA}, \lambda_{MB}$ ισχύει ότι



$$\lambda_{MA} \cdot \lambda_{MB} = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow MA \perp MB, \text{ άρα η ζητούμενη γωνία είναι ορθή.}$$

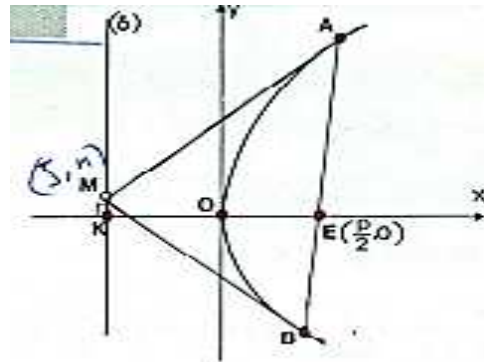
• Έστω χορδή AB της παραβολής (C): $y^2 = 2px$ που διέρχεται από την εστία E της παραβολής. Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα A, B τέμνονται σε σημείο της διευθετούσας της.

Αν $M(\xi, \eta)$ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της παραβολής στα σημεία A, B είναι $AB: y\eta = p(x + \xi)$.

Επειδή η εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ είναι σημείο της

AB, ισχύει ότι $y \cdot 0 = p\left(\frac{p}{2} + \xi\right) \Leftrightarrow \frac{p}{2} + \xi = 0 \Leftrightarrow \xi = -\frac{p}{2}$. Άρα, για το σημείο M είναι

$M\left(-\frac{p}{2}, \eta\right)$, συνεπώς το σημείο M είναι σημείο της διευθετούσας $(\delta): x = -\frac{p}{2}$ της παραβολής.



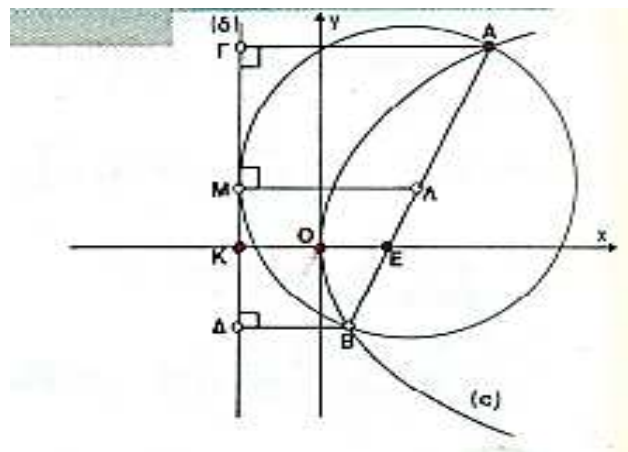
• Αν η AB είναι μεταβλητή χορδή της παραβολής (C): $y^2 = 2px$ που διέρχεται από την εστία της E, δείξτε ότι η περιφέρεια διαμέτρου AB εφάπτεται στη διευθετούσα (δ) της παραβολής.

Ονομάζω Λ το μέσο του AB και Γ, Δ, Μ τις ορθές προβολές των A, B, Λ

στη διευθετούσα (δ). Από το τραπέζιο ΑΓΔΒ που έχει διάμεσο την ΛΜ έχω

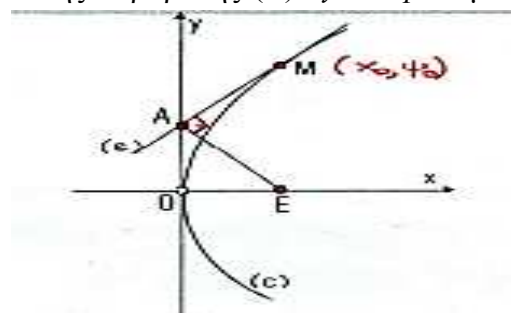
$$ΛΜ = \frac{(Γ + ΒΔ)}{2}. \text{ Αλλά } ΑΓ = ΑΕ, ΒΔ = ΒΕ \text{ άρα}$$

$$ΛΜ = \frac{(ΑΕ + ΕΒ)}{2} = \frac{ΑΒ}{2}, \text{ συνεπώς η περιφέρεια διαμέτρου } ΑΒ \text{ εφάπτεται στη διευθετούσα } (δ) \text{ της παραβολής.}$$



• Η εφαπτομένη (ε) στο τυχαίο σημείο της παραβολής (C): $y^2 = 2px$ τέμνει τον

άξονα yy' στο A. Δείξτε ότι $ΕΑΜ=1$ ορθή όπου E η εστία της παραβολής.



Επειδή M τυχαίο σημείο της (C) : $y^2 = 2px$ ($M \neq O$), αν υποθέσω ότι είναι $M(x_0, y_0)$ τότε $y_0^2 = 2px_0$ και $yy_0 = p(x + x_0)$. Οι συντεταγμένες του A είναι η λύση του $\begin{cases} x = 0 \\ yy_0 = p(x + x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{px_0}{y_0} \end{cases}$. Άρα, $A\left(0, \frac{px_0}{y_0}\right)$. Αφού $\lambda_{AM} = \lambda_\varepsilon = \frac{p}{y_0}$ και $\lambda_{AE} = \frac{-2x_0}{y_0}$, είναι $\lambda_{AM} \cdot \lambda_{AE} = \frac{p}{y_0} \cdot \frac{-2x_0}{y_0} = \frac{-2px_0}{y_0^2} = -1$, άρα $MA \perp EA$ άρα η ζητούμενη γωνία είναι ορθή.

16. Μεθοδολογία για τη λύση των ασκήσεων

Για να βρω την εξίσωση μιας παραβολής, το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό του πραγματικού p (της παραμέτρου της παραβολής). Αν είναι γνωστή η εστία και η διευθετούσα μιας παραβολής η εξίσωση της μπορεί να βρεθεί άμεσα με βάση τον ορισμό της παραβολής.

17. Σχετικές θέσεις ευθείας $(\varepsilon): y = \lambda x + k$ και παραβολής $(C): y^2 = 2px$, $p > 0$

Αν έχω $(C): y^2 = 2px$ με $p > 0$ τότε:

- Αν $p - 2\lambda k > 0$ η (ε) και η (C) έχουν δύο κοινά σημεία.
- Αν $p - 2\lambda k < 0$ η (ε) και η (C) δεν έχουν κοινό σημείο.
- Αν $p - 2\lambda k = 0$ η (ε) και η (C) εφάπτονται.

Παρατήρηση: Αν έχω $(C): y^2 = 2px$ με $p < 0$ τότε:

- Αν $p - 2\lambda k > 0$ η (ε) και η (C) δεν έχουν κοινό σημείο.
- Αν $p - 2\lambda k < 0$ η (ε) και η (C) έχουν δύο κοινά σημεία.
- Αν $p - 2\lambda k = 0$ η (ε) και η (C) εφάπτονται.

18. Η παραβολή με Geogebra

- <https://www.geogebra.org/m/vJaVuxJn> (παραβολή)
- <https://www.geogebra.org/m/Y75KZ5V7> (παράλληλη μεταφορά παραβολής)
- <https://www.geogebra.org/m/f9ge2Ssx> (ανακλαστική ιδιότητα παραβολής)
- <https://www.geogebra.org/m/GtGHVWYn> (κατασκευή παραβολής)
- <https://www.geogebra.org/m/SCu4mm6R> (γεωμετρικός τόπος της παραβολής)

Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης, Σ. (1969). «Μαθήματα αναλυτικής γεωμετρίας», Αθήνα
- Κυριακόπουλος, Ν. (1984). «Διανυσματικός λογισμός – αναλυτική γεωμετρία», τεύχος Β', Παπαδημητρόπουλος, Αθήνα.
- Μπρίκας, Μ. (1961). «Μαθήματα αναλυτικής γεωμετρίας», Αθήνα.
- Τσάγκας, Γ. (1979). «Στοιχεία αναλυτικής γεωμετρίας», Ίδρυμα Ευγενίδου, Αθήνα.
- Artzy, R. (1965). "Linear geometry", Addison–Wesley reading, Massachusetts.
- Mamelak, J.S. (1964). "Analytic geometry", Pergamon press.
- Morril, W.K. (1965). "Analytic geometry", International textbook company.
- Rees, Paul K. (1963). "Analytic geometry", Prentice Hall.
- Salmon, G. "Conic sections", 6th edition, Chelsea publishing company, New York.

- Schaaf, W.L. (1962). “Analytic geometry”, Doubleday company, Inc., New York.
- Walker, R. (1962). “Analytical Geometry”, London.