



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Το θεώρημα του Fermat

$$x^n + y^n = z^n, n \geq 3$$

Σπουδαστής: Παπαχατζής Άγγελος –Αδαμάντιος (AM 7601)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2021–2022

Ημερομηνία ανάθεσης: 06 / 05/ 2020
Ημερομηνία κατάθεσης: ... / 09 / 2022
Ημερομηνία εξέτασης: ... / 09/ 2022

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
3	Αθανασία Χρηστίδου Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Τόπος γέννησης, οικογένεια και εκπαίδευση	4
2. Μαθηματικοί κύκλοι	4
3. Διοικητική και πολιτική σταδιοδρομία	5
4. Ο «Πρίγκιπας των ερασιτεχνών» και ο Πιερ ντε Καρκαβύ	6
5. Η αλληλογραφία με τον Fermat	7
6. Το πρόβλημα της κυκλοειδούς καμπύλης	8
7. Η μέθοδος των μεγίστων και των ελάχιστων	9
8. Πολλαπλά ενδιαφέροντα	10
9. Ένας ιδιόμορφος τρόπος εργασίας	12
10. Η διαμάχη με τον Καρτέσιο	13
11. Η θεωρία της διάθλασης	15
12. Νόμος του Snell	15
13. Η γέννηση του τελευταίου θεωρήματος	16
14. Τα Στοιχεία του Ευκλείδη	16
15. Τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου	17
15.1 Τα βιβλία των «Αριθμητικών» του Διόφαντου	19
15.2 Σημασία του έργου	19
15.3 Διάδοση της κληρονομιάς του Διόφαντου	20
15.4 Μια ξενάγηση στα προβλήματα των «Αριθμητικών» του Διόφαντου	22
15.5 Το πρόβλημα 32 του βιβλίου II	22
15.6 Η λύση του προβλήματος 32	22
15.7 Χαρακτηριστικά του προβλήματος	23
15.8 Παράλληλα σκεπτικά	23
15.9 Το πρόβλημα 29 του βιβλίου IV	24
15.10 Ένα αινιγματικό σημείωμα	25
15.11 Το πρόβλημα 8 του βιβλίου II	26
16. Η συνεισφορά του Fermat	27
17. Μια μεγαλοφυΐα χωρίς δημοσίευση	28
18. Ένας μαθηματικός στην πρώτη σελίδα	33

1. Τόπος γέννησης, οικογένεια και εκπαίδευση

Το **πρώτο αίνιγμα** που περιβάλλει τον Fermat είναι ότι δεν είναι γνωστό με ακρίβεια πότε γεννήθηκε. Συνήθως ημερομηνία γέννησης του ορίζεται **η 20.08.1601**, στο Μπομόν ντε Λομάνι (Beaumont de Lomagne) της περιφέρειας Ταρν-ε-Γκαρόν, στη νότια Γαλλία. Η ημερομηνία αυτή, που προστέθηκε το 1844 από τον Louis Tauriac, προϋποθέτει ότι ο Fermat είναι γιος του Dominic Fermat, εμπόρου και δεύτερου συμβούλου του Μπομόν και της Κλερ ντε Λον (Claire de Long), κόρης του Κλεμάν ντε Λον, Δεσπότη του Μπαρέζ.

Ωστόσο, σύμφωνα με το πιστοποιητικό θανάτου που διατηρείται στα αρχεία της πόλης ο Fermat πέθανε στην Καστρ στις **12.01.1665** και η επιτύμβια επιγραφή εκτίθενται στο μουσείο των Αυγουστίνων Πατέρων της Τουλούζης αναφέρεται ότι πέθανε σε ηλικία 57 ετών. Είναι προφανές ότι κάτι δεν ταιριάζει, επειδή αυτό θα τοποθετούσε το έτος γέννησης του γύρω στο 1608. Το 1980 ο ηγούμενος Dugros πρότεινε μία άλλη θεωρία.

Σύμφωνα με αυτόν, ο Fermat ήταν γιος του Dominic Fermat και της Φρανσουάζ Καζενέβ (françoise cazeneuve), κόρης ενός πλούσιου εμπόρου της περιοχής του Μπομόν. Η υπόθεση του βασίζεται στο ότι 1603 ο Dominic ήταν παντρεμένος με την Φρανσουάζ και το 1607 ήταν παντρεμένος με την Κλερ ντε Λον. Το 2002 ο Pierre Gairin έθεσε ξανά το ερώτημα και μελέτησε προσεκτικά το γενεαλογικό δέντρο του Fermat αναζητώντας μία πειστική απάντηση. Βρέθηκαν τότε νέα στοιχεία που άφησαν και πάλι το ζήτημα ανοιχτό. Αναμένοντας νεότερα στοιχεία, ο Fermat θα μπορούσε να ήταν ο γιος της Κλερ ντε Λον, κόρης μιας οικογένειας Γάλλων ευγενών και θα μπορούσε να έχει γεννηθεί γύρω στο 1605 ή πιο πιθανό το 1606. Ακόμα και έτσι, η επιτύμβια υπογραφή εξακολουθεί να μην έχει σαφή εξήγηση. Φαίνεται ότι ο Fermat είχε έναν αδερφό και δύο αδερφές και όταν ήταν μικρός έλαβε εκπαίδευση από τους φραγκισκανούς μονάχους του Grandselve. Όμως λίγα είναι γνωστά ακόμα για την παιδική του ηλικία. Και όμως, σε όλη τη ζωή του ένιωθε μεγάλη αγάπη για τη γενέτειρά του και δεν εντυπωσιάστηκε από τό εκθαμβωτικό Παρίσι.

Το **δεύτερο αίνιγμα** που περιβάλλει τον Fermat είναι της εκπαίδευσης του. Η πολυμαθία του ήταν πέρα από κάθε αμφιβολία. Μετέφρασε τους κλασικούς, είχε τέλεια γνώση λατινικών και ελληνικών και οι γνώσεις τους στα μαθηματικά ήταν αναμφισβήτητες. Όμως που έμαθε μαθηματικά; Τα έμαθε στο πανεπιστήμιο; Του τα δίδαξε κάποιος φίλος; Υπάρχουν αμφιβολίες σχετικά με το πρόγραμμα εκπαίδευσης και την επαγγελματική πορεία του Fermat, αν και μερικά σχόλια των επιστολών που μπορούν να συναχθούν κάποια πράγματα. Κατά τη νεότητα του φοίτησε στο πανεπιστήμιο της Τουλούζης για να ολοκληρώσει τις σπουδές του. Η πρόθεση του και σίγουρα αυτή της οικογένειάς του, ήταν να σπουδάσει νομική, μία καριέρα μεγάλου κύρους που ανοίγει πολλές πόρτες και παρείχε σοβαρή εκπαίδευση, προσφέροντας επίσης τη δυνατότητα να γίνει υπαλλήλου του δικαστηρίου.

2. Μαθηματικοί κύκλοι

Αργότερα, ο Fermat μετακόμισε στο Μπορντό, όπου σύμφωνα με ορισμένους βιογράφους άσκησε το επάγγελμα του δικηγόρου και γνώρισε κατά πάσα πιθανότητα τον Αύγουστο του 1626 τον Jean Beaugrand, ο οποίος ανήκει σε ένα κύκλο αναγνωρισμένων μαθηματικών που συναντιόνταν συχνά σε αυτή την πόλη. Στις αρχές του 17^{ου} αιώνα, η επιστημονική κοινότητα συνειδητοποίησε τα οφέλη που συνεπαγόταν η ανταλλαγή ιδεών και άρχισαν να δημιουργούνται δίκτυα μαθηματικών που διατηρούσαν συχνή επικοινωνία. Έθεταν ερωτήματα, πρότειναν λύσεις, εξηγούσαν μεθόδους, διατύπωναν νέες σκέψεις και έβαζαν νέες προκλήσεις. Και το Μπορντό ήταν ένα από αυτά τα κέντρα ιδεών, κερδίζοντας τα ταλέντα και εμφανίζοντας υψηλές δόσεις δημιουργικότητας. Το περιβάλλον αυτό σίγουρα προσέελκυσε την προσοχή του νερού Fermat.

Ο Beaugrand έδειχνε πάντα περήφανος μεταξύ των φίλων του που είχε ανακαλύψει τον Fermat και ήταν ένας από τους ανθρώπους που συνέβαλαν περισσότερο στη

γνωστοποίηση του έργου του. Ο Beaugrand έφτασε να γίνει μέρος της υψηλής πολιτικής κοινωνίας του Παρισιού και ήταν ευρέως αναγνωρισμένος για τις μαθηματικές δεξιότητες του και λέγεται ότι ήταν μαθητής του Vieta. Στο Παρίσι σύχναζε στην ομάδα μαθηματικών που συγκεντρωνόταν γύρω από τον Marin Mersenne, στον οποίο εξηγούσε πάντα ότι πρόκειται για τα δικά του ευρήματα και εκεί είναι του φίλου του Fermat. Και όταν κάποιος είναι ήταν γνωστός στον Mersenne ισοδυναμούσε με το να είναι γνωστός σε όλο το μαθηματικό κόσμο εκείνης της εποχής. Ο Beaugrand ταξίδεψε στην Ιταλία, προσκεκλημένος του Γάλλου πρεσβευτή Bellievre. Εκεί, ως ένας καλός μαθητικός τουρίστας, επισκέφτηκε τον Cavalieri στην Μπολόνια, τον Castelli στη Ρώμη και τον Γαλιλαίο στο Αρτσέτρι, κοντά στην Φλωρεντία. Με όλους τους διατήρησε μία γόνιμη αλληλογραφία μετά την επιστροφή του στο Παρίσι. Και όπως δεν θα μπορούσε να γίνει διαφορετικά, μίλησε με όλους για το φίλο του Fermat.

Στο Μπορντό ο Fermat συναναστρεφόταν με τους D'Espagnet, Filon, Prades. Συζητώντας μαζί τους διεύρυνε τους μαθητικούς του ορίζοντες και γνώσεις πολλές προσωπικότητες της επιστήμης. Από τον Ετιέν Ντ'Εσπανιέ, σύμβουλο του Κοινοβουλίου του Μπορντό, εξοικειώθηκε με το έργο και τους συμβολισμούς του Βιέτ. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι εκείνη την εποχή η μετάδοση της γνώσης εξαρτώνταν σε μεγάλο βαθμό από τις φιλίες και τις επαφές που υπήρχαν. Το Μπορντό ήταν η πόλη όπου εμφανίστηκαν οι πρώτες μαθηματικές γνώσεις του Fermat και την οποία γεννήθηκαν πολλά από τα έργα του, όπως η αποκατάσταση των Επίπεδων Τόπων του Απολλώνιου, «Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restructiti», η μέθοδος των μεγεθών και ελάχιστων «Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum» (Μέθοδος περί της ευρέσεως μελισσών και ελάχιστων και περί των εφαπτομένων καμπυλών) και μερικές έρευνες για τα μαγικά τετράγωνα.

Η Οικογένεια του Fermat.

Ενάμιση μήνα μετά την πρώτη εκλογή του ως επιτρόπου, ο Fermat παντρεύτηκε μία ξαδέρφη της μητέρας του, τη Λουίζ ντε Λον, την **01.06.1631**. Το ζευγάρι απέκτησε πέντε παιδιά: **Κλεμάν-Σαμουέλ** ο οποίος ήταν δικαστικός όπως ο ίδιος ο Fermat και στον οποίο οφείλεται η μερική έκδοση των έργων του πατέρα του, **Ζαν** ο οποίος ήτανε αρχιδιάκονος του Φιμαράνς, **Κλερ** η οποία παντρεύτηκε και ο εγγονός της Ζαν Γκαγιάρ, διαδέχθηκε ως σύμβουλος τον Ζαν Φρανσουάζ, γιο του Samuel και **Κατερίνα & Λουίζ**, που αφιερώθηκαν στη θρησκεία.

3. Διοικητική και πολιτική σταδιοδρομία

Μετά την παραμονή του στο Μπορντό ο Fermat μετακόμισε στην Ορλεάνη, όπου τελείωσε τις νομικές σπουδές του και τελικά στην Τουλούζη, όπου ξεκίνησε μία λαμπρή επαγγελματική σταδιοδρομία. Στις **14.05.1631** διορίστηκε σύμβουλος στο Κοινοβούλιο της Τουλούζης και επίτροπος του Συμβουλίου των αιτήσεων, στο οποίο συζητούσαν τις δημόσιες υποθέσεις. Στις 30.12.1634 διορίστηκε σύμβουλος του Συμβουλίου Συνοπτικών Διαδικασιών και το 1638 έλαβε μία θέση συμβούλου στο Δικαστήριο.

Τον Αύγουστο 1648 ονομάστηκε σύμβουλος του Συμβουλίου Διαταγμάτων και το 1654 διάβασε την πρώτη του έκθεση στο ανώτατο συμβούλιο. Με λίγα λόγια, ο Fermat ακολούθησε μία κοινωνική σταδιοδρομία δικαίου και κατείχε σημαντικές θέσεις ευθύνης. Ως αποσταγμένα αυτών των αξιωμάτων του δόθηκε το δικαίωμα να αλλάξει όνομα του με το πιο διακεκριμένο Πιερ ντε Fermat. Είναι πιθανό η σταδιοδρομία του να βοηθήθηκε από την επιδημία που έπληξε την περιοχή γύρω στο 1650 και προκάλεσε μεγάλο αριθμό θανάτων. Τόσοι θάνατοι σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα πρέπει να άφησαν κενές θέσεις στο δικαστικό σώμα, στο οποίο η εμπειρία έχει σημαντική αξία συνεπώς, τα αξιώματα καταλαμβάνουν συνήθως άτομα κάποιας ηλικίας. Η σύγχυση ήταν τόσο μεγάλη που το 1653

κυκλοφόρησε η λανθασμένη πληροφορία για το θάνατο του Fermat, ο οποίος υπέφερε επίσης από την επιδημία. Στη συνέχεια αυτή η πληροφορία διορθώθηκε. Σχετικά με την επιμέλεια με την οποία ο Fermat ασκούσε την εργασία του έχουμε διαφορετικές απόψεις. Από τη μία πλευρά, το 1664 ο δικηγόρος Pierre Saporita, δήλωνε «θα ήθελα να μιλήσω για την κρίση σας στις υποθέσεις του παλατιού, όπου περάσατε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής σας και όπου φαίνεται ότι έχετε δείξει τόσο ακεραιότητα και τόσο επάρκεια στη διαχείριση της δικαιοσύνης, που διερωτάται κανείς, που έχοντας αποκτήσει τις ιδιότητες ενός σπουδαίου δικαστή, ήσασταν ικανός να αποκτήσετε μία πλήρη κατανόηση τόσων πολλών άλλων πραγμάτων, τα οποία είναι τόσο διαφορετικά από αυτή την ειδικότητα». Πρέπει να σημειωθεί ότι ο Saporita ήταν φίλος του Fermat και του αφιέρωσε τη γαλλική μετάφραση της εργασίας του Torricelli για την κίνηση του νερού, που δημοσιεύτηκε την ίδια χρονιά. Από την άλλη πλευρά του 1963 ο Zean Baptiste Colbert, δήλωνε στο Κοινοβούλιο της Τουλούζης για τον Fermat, «πολύ μορφωμένο άτομα, έχει γνωριστεί παντού με τους σοφούς, αλλά αδιάφορος. Δεν είναι ιδιαίτερα καλός ομιλητής».

Αυτή η αναφορά ήταν μέρος μιας μυστικής έκθεσης σχετικά με το δικαστικό σώμα που προετοίμαζε ο τότε Υπουργός Οικονομικών του Λουδοβίκου ΙΔ', Colbert ο οποίος σε γενικές γραμμές φάνηκε αρκετά σκληρός με όλους τους δικαστές. Δεδομένου ότι ο Fermat δεν ήταν μέλος των φίλων του Πρωθυπουργού Gaspard de Fieubet, δεν αποτελεί έκπληξη το ότι η έκθεση αυτή δεν τον επαινούσε. Σε κάθε περίπτωση, φαίνεται βέβαιο ότι ο Fermat εκτελούσε ικανοποιητικά την εργασία του και στο μέτρο του δυνατού προσπαθούσε να μην μπλέκει σε μπελάδες. Δεν ήταν εύκολο έργο, Αφού εκείνη την εποχή η Γαλλία ζούσε σε μία περίοδο πολιτικών αναταραχών, από τη μία πλευρά, οι εντάσεις μεταξύ καθολικών και Ουγενότων, από την άλλη οι συνεχείς μάχες για την εξουσία. Είναι η εποχή καρδινάλιου Μαζαρέν, η εποχή των σωματοφυλάκων. Ήταν εύκολο να υποστηρίξεις κάποιον σήμερα για να βρεθείς στη δυσμένεια των άλλων αύριο. Το πιο δύσκολο ήταν να διατηρήσεις ισορροπία μεταξύ των δύο. Και αυτό είναι που κατά πάσα πιθανότητα οδηγούσε τη δραστηριότητα του Fermat. Ποτέ δεν αναζήτησε την εξουσία και ίσως γι'αυτό απέφυγε να πάει στο Παρίσι και επικέντρωσε τη δραστηριότητά του σε μικρές πόλεις. Ήταν πάντα κοντά στον τόπο της παιδικής του ηλικίας και για εννέα δικαστικά έτη (1638, 1644, 1645, 1648, 1649, 1655, 1656, 1663, 1664) ήταν δικαστής στο Καστρ, μία μικρή πολύ λίγα χιλιόμετρα από το Μπομόν ντε Λομάνι.

Από την άλλη πλευρά, ο Fermat δεν είχε ιδιαίτερες σχέσεις με την αστική τάξη της εποχής. Η θέση του ως δικαστής τον υποχρέωνε να διατηρεί ασφαλή απόσταση από εκείνους που κάποια μέρα ίσως θα έπρεπε να καταφύγουν στη δικαιοσύνη για την επίλυση των ζητημάτων τους. Κατά μία έννοια, ο Fermat αναγκάστηκε να ζήσει τη μοναξιά του αξιώματος του. Ενώ αλλά άτομα του επαγγέλματος του, αφιέρωναν τον ελεύθερο χρόνο τους για να γράφουν για την Αυλή και το δικαστικό σώμα, αυτός αφιέρωνε όλο τον ελεύθερο χρόνο του στα μαθηματικά.

4. Ο «Πρίγκιπας των ερασιτεχνών» και ο Πιερ ντε Καρκαβύ

Ο Fermat διαμαρτυρόταν συνεχώς για την έλλειψη χρόνου που είχε. Τον Ιούνιο 1640, έγραφε στον φίλο του Mersenne «αισθάνομαι πίεση από πολλές ασχολίες που δεν με αφήνουν πολύ χρόνο για να ασχοληθώ με αυτά τα πράγματα», και αργότερα, το Μάρτιο 1641, «οι ασχολίες με τις οποίες οι δικαστικές υποθέσεις μας γεμίζουν το κεφάλι με εμποδίζουν να μπορέσουν να διαβάσω με ησυχία τις εκθέσεις που κάνετε τη χάρη να μου στείλετε». Παρόλα αυτά, όποτε μπορούσε, έβρισκε το χρόνο για τα μαθηματικά και μοιραζόταν αυτό το πάθος με άλλους συναδέλφους του επαγγέλματος και με άλλους μαθηματικούς του κόσμου. Ο Fermat είναι ένα καθαρό παράδειγμα ότι είναι δυνατό να συνδυαστούν επαγγέλματα και ενδιαφέροντα στο υψηλότερο επίπεδο. Υπό την έννοια αυτή ήταν μοναδικός στην εποχή του. Πολλοί από τους συναδέλφους του ήταν καλοί μαθηματικοί

και έκαναν αξιόλογες ανακαλύψεις. Το αξιοσημείωτο στην περίπτωση του είναι η ποσότητα και η ποιότητα των ανακαλύψεων του, που του χάρισαν τον τίτλο του «**πρίγκιπα των ερασιτεχνών**» και είναι ο λόγος που ο αμερικανικός συγγραφέας Julian Coolidge δεν τον συμπεριέλαβε στο περίφημο λεξικό των ερασιτεχνών μαθηματικών, αφού πρέπει να τον θεώρησε «μεταξύ των επαγγελματιών». Στην Τουλούζη ο Fermat γνώρισε τον Πιερ ντε Καρκαβύ, σύμβουλο του κοινοβουλίου της Τουλούζης μεταξύ 1632 και 1636 και μεγάλο λάτρη των μαθηματικών. Αυτή η φιλία έπαιξε βασικό ρόλο στην πραγματική ζωή του Fermat. Αν και ο Καρκαβύ δεν είχε ειδική πανεπιστημιακή εκπαίδευση ούτε τα αποτελέσματα του στα μαθηματικά ήταν ιδιαίτερα σημαντικά, αξίζει ειδικής μνείας η αλληλογραφία που διατηρούσε με πολλούς επιστήμονες της εποχής του και ότι σήμαινε αυτό για τη διάδοση της γνώσης. Σε όλη τη ζωή του ο Καρκαβύ διατηρούσε τακτική αλληλογραφία με τον Fermat, Huygens, Pascal, Descartes, Mersenne, Γαλιλαίο, Torricelli.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι πολλές ανακαλύψεις δεν δημοσιεύονταν ποτέ και ο μόνος τρόπος για να τις γνωρίσει κανείς ήταν μέσα από τα γράμματα που έγραφαν οι εμπνευστές τους. Για την πρόοδο των μαθηματικών είναι πολύ σημαντικοί οι άνθρωποι που δημιουργούσαν νέα πράγματα, αλλά και εκείνοι που αφιερώνουν μεγάλο μέρος του χρόνου τους για να τα διασώσουν. Αυτές οι επιστολές δεν προοριζόταν στη διαβίβαση αποτελεσμάτων, αλλά έκαναν σχόλια και πρότειναν νέες εισφορές που αργότερα λαμβάνει υπόψη και ενσωματώνονταν σε άλλα έργα.

Πρέπει να ήταν πολύ συναρπαστικό να ζει κανείς σε μία εποχή στην οποία κάθε επιστολή που παραλάμβανε θα μπορούσα να σημαίνει μια πλημμύρα νέων ιδεών και ένα ανανεωμένο ερέθισμα δραστηριότητας. Οι επιστολές μπορούσαν να αργήσουν εβδομάδες για να φτάσουν στον προορισμό τους, αν δεν χάνονταν στο δρόμο. Ο χρόνος λειτουργούσε με διαφορετικό ρυθμό, το ρολόι της ταχυδρομικής υπηρεσίας δεν είχε καμία σχέση με τα σημερινά ηλεκτρονικά ταχυδρομεία. Το 1636 ο Καρκαβύ αγόρασε μία θέση συμβούλου στο Μεγάλο Συμβούλιο του Παρισιού και μετακόμισε στην πρωτεύουσα. Ο Fermat συνέχισε την αλληλογραφία του με αυτόν και του έστειλε πολλά από τα έργα του. Μόλις έφτασε στο Παρίσι, ο Καρκαβύ συναντηθεί προσωπικά με τον Mersenne, ένα βασικό χαρακτήρα στην ιστορία των μαθηματικών.

5. Η αλληλογραφία με τον Fermat

Όταν ο Πιερ ντε Καρκαβύ μετακόμισε στο Παρίσι το 1636 και εξήγησε στον Mersenne τις ιδέες του Fermat σχετικά με την θεωρία του Γαλιλαίου για την ελεύθερη πτώση των σωμάτων, ο Mersenne εννοείτε αμέσως με μεγάλη περιέργεια για τις απόψεις του μαθηματικού του έγραψε μία επιστολή. Ο Fermat απάντησε λεπτομερώς στις 26 Απριλίου του ίδιου έτους. Εκτός από την εξήγηση για ότι ζητούσε, του γνωστοποίησε την εργασία του για τις σπείρες, που προέκυψε από τη μελέτη της τροχιάς της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων εφαρμόζοντας μεθόδους εμπνευσμένες από το έργο του Αρχιμήδη «Περί ελίκων».

Του μίλησε για το έργο του της αποκατάστασης των «Επιπέδων Τόπων» του Απολλώνιου. Στην επιστολή του έγραφε *«Έχω βρει επίσης πολλούς τρόπους ανάλυσης για διάφορα πρόβλημα, τόσο αριθμητικά όσο και γεωμετρικά, για τη λύση των οποίων η ανάλυση του Βιέτ δεν θα ήταν αρκετή. Θα τα μοιραστώ όλα αυτά μαζί σας όποτε θέλετε και θα το κάνω χωρίς καμία φιλοδοξία, από την οποία είναι πιο ελεύθερος και πιο απομακρυσμένος από οποιοδήποτε άλλο άτομο στον κόσμο»*. Ο Fermat επωφεληθείτε από την ευκαιρία για να θέσει στον Mersenne δύο προβλήματα σχετικά με τα μέγιστα και του ζητά να βάλει στους μαθηματικούς του Παρισιού την πρόσκληση να τα επιλύσουν.

Σε αυτή την πρώτη επιστολή του Fermat στον Mersenne έχουμε ήδη ένα Fermat σε καθαρή κατάσταση. Από τη μία πλευρά, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα η αλληλογραφική σχέση με την επιστημονική κοινότητα της εποχής του, επειδή οι επιστολές θα είναι χωρίς αμφιβολία ένα από τα βασικά οχήματα της έκφρασης των ιδεών του. Από την

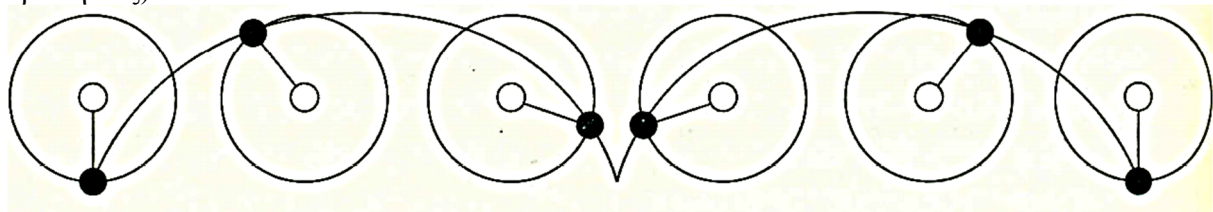
άλλη πλευρά, αποφεύγει κάθε είδους πρωταγωνιστικό ρόλο. Ο Fermat υπηρετεί τις ιδέες και την επιστήμη, πέρα από την ιδιότητα του συγγραφέα. Και τέλος τέλος, φαίνεται η αγάπη του για να προτείνει νέα προβλήματα, νέες μαγνητικές προσκλήσεις, μέσω των οποίων μέτρα τη σοφία των σύγχρονων του. Ακριβώς επειδή έχει την απάντηση, οι προσκλήσεις που έθετε ο μαθηματικός γινότανε δίπλα συναρπαστικές. Αν κάποιος κατάφερνε να της λύσει θα μπορούσε να θέσει υπό αμφισβήτηση την αξία του που έχει την πρώτη λύση, αλλά αν κανείς δεν μπορούσε τις λύσει η αξία της απάντησης αυξανόταν πάρα πολύ καθώς επίσης και η δόξα αυτού την κατείχε. Και φυσικά, ο Mersenne κοινοποιούσε με ευχαρίστηση τις προσκλήσεις που έθετε ο Fermat για τους σύγχρονους του.

6. Το πρόβλημα της κυκλοειδούς καμπύλης

Το 1632 έφτασες στο Παρίσι ο Ζιλ Περσόν ντε Ρομπερβάλ και να διδάξει στο Βασιλικό Κολλέγιο. Ο Mersenne εκτίμησε αμέσως το εξαιρετικό ταλέντο του για τα μαθηματικά και ήρθε σε επαφή μαζί για να του προτείνει κάποιες ερωτήσεις στις οποίες δεν είχε βρει ακόμα τη λύση, μεταξύ των οποίων αυτή που αφορούσε το κυκλοειδές. Άρχιζε να οργανώνεται της συνενοχής για την επίλυση προβλημάτων. Το 1599 ο Γαλιλαίος είχε ορίσει το κυκλοειδές πώς το γεωμετρικό τόπο που περιγράφει ένα σημείο του κύκλου όταν αυτός κυλάει πάνω σε μία ευθεία.

Ο Mersenne γοητεύτηκε αμέσως από μία τόσο όμορφη καμπύλη και αποφάσισε να την μελετήσει. Ενδιαφέρθηκε να μάθει μερικές από τις ιδιότητές της, το μήκος ενός τόξου καμπύλης, την περιοχή που περιβάλλει, κλπ. Για να προσδιορίσει το εμβαδόν αυτής της καμπύλης ο Γαλιλαίος είχε κατασκευάσει προσεκτικά ένα μεταλλικό μοντέλο και το έχει ζυγίσει σε μία ζυγαριά. Με αυτό είχε πετύχει μία καλή προσέγγιση αλλά δεν ήταν ικανοποιημένος. Ήθελε μία ακριβή απάντηση. Οι παθητικές μέθοδοι ζουν στον παράδεισο των ιδεών και μπορούν να προσβλέπουν στην τελειότητα. Δεν περιορίζονται από τις ατέλειές του μεταλλικού μοντέλου ούτε από τις ανακρίβειες της ζυγαριάς.

Ο Mersenne μελέτησε το κυκλοειδές για χρόνια, δημοσιεύοντας αποτέλεσμα του σε διάφορα έργα, *Quaestiones in genesim* (1623, Ερωτήσεις περί της Γεννήσεως), *Synopsis mathematica* (1626, Μαθηματική σύνοψη) και *Questions inouies* (1634, Πρωτοφανείς ερωτήσεις).



Μοντέλο του κυκλοειδούς

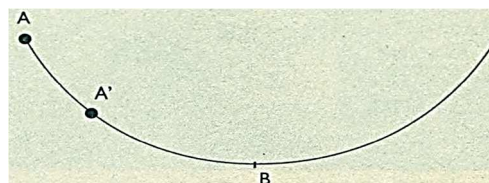
Ως συνήθως, έθεσε σε λειτουργία το μηχανισμό των επιστολών και ενημέρωσέ τους άλλους αλληλογράφους του για τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν και για τα θέματα που παρέμειναν άλυτα. Ο Torricelli, ο Fermat ο Descartes, ο Roberval, υπολόγισαν όλη σωστά ότι η περιοχή που υπάρχει κάτω από ένα τόξο του κυκλοειδούς είναι τριπλάσια το εμβαδόν του κύκλου. Ο Roberval και ο Wren υπολόγισαν ότι το μήκος του τόξου είναι ίσο με οκτώ φορές στην ακτίνα. Με αυτό το νέο τρόπο εργασίας που έστησε ο Mersenne, όλα τα ταλαντούχα μυαλά προσκαλούνταν να λύσουν τις ενδιαφέρουσες ερωτήσεις που τους παρουσιάζονταν. Τα αποτελέσματα δεν ήταν καρπός της απομόνωσης των στοχαστών, αλλά της συνεργασίας και της ανταλλαγής ιδεών. Ποιος μπορούσε να φανταστεί ότι αυτή η τόσο ωραία καμπύλη την οποία μία μέρα ορίσε ο Γαλιλαίος από ένα κύκλο που κυλάει πάνω σε μία ευθεία, θα προτεινόταν μερικά χρόνια αργότερα από τον Ζεράρ Ντεζάργκ για το

σχεδιασμό των δοντιών στα γρανάζια των μηχανών, και τελικά θα έλυνε το πρόβλημα της βραχυστόχρονης και τις ταυτόχρονης καμπύλης!

Το πρόβλημα της ταυτόχρονης και της βραχυστόχρονης.

Έστω ότι θέλουμε να πάμε από το A στο B με το πιο γρήγορο δυνατό τρόπο ενώ υποβαλλόμαστε αποκλειστικά στη δράση της βαρύτητας, ή πράγμα που είναι το ίδιο, θέλουμε να βρούμε τη μορφή που πρέπει να έχει η καμπύλη πάνω στην οποία γλιστράμε ώστε φεύγοντας από το A να φτάσουμε το συντομότερο στο B. Αυτή η καμπύλη ονομάζεται βραχυστόχρονη (από τις ελληνικές λέξεις βράχυστος– συντομότερος– και χρόνος).

Στην αρχή, η διαίσθησή λέει ότι ο γρηγορότερος τρόπος για να γλιστρήσουμε από το A στο B είναι η μικρότερη απόσταση, δηλαδή η ευθεία γραμμή. Ωστόσο, δεν είναι έτσι. Η ταχύτερη γραμμή είναι το αντεστραμμένο τόξο κυκλοειδούς που διέρχεται από το A και έχει το ελάχιστο του στο B.



Το 1696 ο Johann Bernoulli γνωρίζει ήδη τη λύση στο πρόβλημα και προκάλεσε τους επιστήμονες της εποχής να το λύσουν και αυτοί. Το πρόβλημα λύθηκε ανεξάρτητα από τον Leibniz, τον Newton, τον Johann Bernoulli και τον De L' Hospital. Το 1673 ο Huygens ανακάλυψε ότι αν ένα αντικείμενο αφεθεί να πέσει σε ένα τόξο κυκλοειδούς, δεν έχει σημασία από ποιο ύψος, κάνει πάντα τον ίδιο χρόνο για να φτάσει στη βάση. Ως εκ τούτου, το κυκλοειδές λύνει επίσης το πρόβλημα της ταυτόχρονης (από τις ελληνικές λέξεις το αυτό και χρόνος).

7. Η μέθοδος των μεγίστων και των ελάχιστων

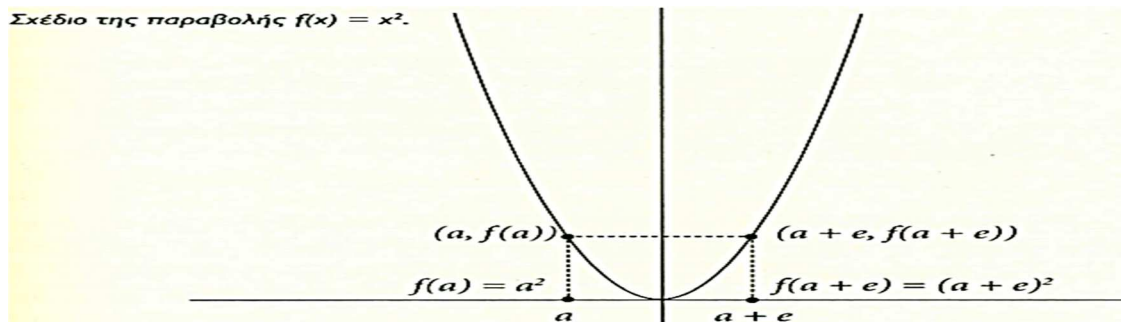
Ο Roberval και ο Mersenne ήταν περίεργοι για τα αποτελέσματα του Fermat περί των μεγίστων των ελάχιστων. Οι προσκλήσεις που έθετε και έλυνε ο Fermat στις επιστολές του δεν μπορούσαν να είναι αποτελέσματα συμπτώσεων, έπρεπε να είναι το αποτέλεσμα μαθηματικών μεθόδων αγνώστων μέχρι τότε. Συνειδητοποιήσαν ότι ο Fermat έφτανε πολύ μακρύτερα από τους σύγχρονους του όταν έλυνε τα προβλήματα των μεγεθών και των ελάχιστων, και του ζήτησαν να εξηγήσει τις μεθόδους του. Η απάντηση του Fermat δεν άργησε καθόλου και έστειλε τρία κείμενα, Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum, Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti και Ad locos planos et solidos isagoge (Εισαγωγή στους επίπεδους και στερεούς τόπους), για να τα εξετάσουν οι μαθηματικοί του Παρισιού. Με αυτό ο Fermat κερδίζει τη φήμη ενός μαθηματικού πρώτης γραμμής.

Στη μέθοδο μεγίστων και ελαχίστων ο Fermat παρατηρεί ότι όταν μία συνάρτηση φτάσει σε ένα γνωστό όριο, τότε μία ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων τέμνει τη συνάρτηση σε ένα μόνο σημείο και ότι στις τιμές ακριβώς κάτω από μέγιστο, μία ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων τέμνει τη συνάντηση σε δύο πολύ κοντινά σημεία, το ένα στα δεξιά και το άλλο στα αριστερά του μέγιστου σημείου. Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη την τιμή της συνάντησης στο ανώτατο όριο, $f(a)$ και μία πολύ κοντινή τιμή $f(a + e)$ όπου e είναι μία πολύ μικρή ποσότητα, προκύπτει ότι οι τιμές αυτές θα πρέπει να είναι πρακτικά ίσες, και συνεπώς, σύμφωνα με τον Fermat, πρέπει να «παρισούνται». Ως αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας παίρνουμε μία εξίσωση η οποία, μετά την αφαίρεση της τιμής e επειδή είναι αμελητέα, επιτρέπεται να υπολογιστεί το a .

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Η γραφική παράστασή της φαίνεται στην εικόνα. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο αυτής της συναρτήσεως $f(a) = a^2$. Γι' αυτό θεωρείται μία πολύ κοντινή τιμή $f(a + e) = (a + e)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot e + e^2$. Μετά

«παρισούνται», δηλαδή θεωρούνται τόσο κοντινές που ισούται με $a^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot e + e^2$. Υστερα λύνεται η εξίσωση που προκύπτει. Εξαιρίζοντας το a^2 από τα δύο μέλη της ισότητας έχουμε $2 \cdot a \cdot e + e^2 = 0$ και διαιρώντας με e προκύπτει ότι $2 \cdot a \cdot e = 0$. Τέλος το e θεωρείται τόσο κοντινό στο 0 που παραλείπεται και παραμένει $2 \cdot a = 0$ άρα $a = 0$, το οποίο υπολογίζει σωστά το ελάχιστο της δεδομένης συνάρτησης.

Σχέδιο της παραβολής $f(x) = x^2$.



Όπως μπορούμε να δούμε, μετά την «παρισότητα» (adégalité) έχουμε μία εξίσωση ισοδύναμη με το να πάρουμε την παράγωγο της συνάρτησης και να την εξισώσουμε με το μηδέν, σε μία εποχή στην οποία δεν γνώριζαν ούτε τι ήταν παράγωγος ούτε τι ήταν υπολογισμός των ορίων συναρτήσεων. Άρα, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι ορισμένοι μαθηματικοί είδαν με επιφυλάξεις τη διαδικασία της «παρισότητας». Όμως, η διαίσθηση του Fermat σε αυτό τον συλλογισμό αποδεικνύεται απόλυτα λαμπρή.

8. Πολλαπλά ενδιαφέροντα

Η αποκατάσταση των χαμένων έργων του Απολλώνιου ήταν μέρος ενός φιλόδοξου μαθηματικού σχεδίου που ξεκινάει ο Vieta και ο Marino Ghetaldi, στο οποίο στη συνέχεια προστέθηκαν ο Willebrord Snell και ο Fermat ο οποίος ήταν σπουδαίος γνώστης των κλασικών γλωσσών και οι ευρείες γνώσεις του στα μαθηματικά του επέτρεπαν να αντιμετωπίζει με εξαιρετικό τρόπο το δύσκολο έργο της μετάφρασης των ελληνικών και λατινικών επιστημονικών έργων των κλασικών συγγραφέων. Άρα, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι, όταν ένας μεταφραστής συναντούσε ένα δυσνόητο απόσπασμα που είχε σχέση με συλλογισμούς επιστημονικού ή μαθηματικού τύπου, κατέφευγε σε αυτόν για να το επιλύσει. Στην Τουλούζη γνώρισε τον Charles de Montchal, ελληνιστή και μεγάλο βιβλιόφιλο, η συλλογή χειρογράφων του οποίου θα αποτελούσε με την άροδο του χρόνου τμήμα της Bibliothèque du Roi. Ο Fermat είχε πρόσβαση σε αυτό το εξάισιο αρχείο.

Ο Montchal του έδειξε το Les Harmoniques (μετ. Αρμονικά), ένα έργο μουσικής που γράφτηκε από τον Μανουήλ Βρυέννιο, Βυζαντινό δάσκαλό της θεωρίας της μουσικής του 14^{ου} αιώνα. Ο Fermat διάβασε αυτό το κείμενο και έγραψε μερικές σημειώσεις στα περιθώρια. Είναι το στυλ του, καθώς διαβάζει η φαντασία του πετά, του έρχονται πολλές ιδέες και τις σημειώνει για να συλλογιστεί γι' αυτές αργότερα και να μην τις ξεχάσει.

Στην Καστρ συναντήθηκε με τον Πιερ Saporita, ο οποίος το 1664 έγραψε το Traité de la mesure des eaux courantes, μετάφραση στα γαλλικά του έργου του Βενεδικτίνου Πατέρα Benedetto Castelli. Έκανε επίσης μία γαλλική μετάφραση του έργου του Torricelli που εξέταζε το ίδιο θέμα και στη μετάφραση αυτή αποφάσισε να περιλάβει την περιγραφή που έκανε ο Fermat για ένα όργανο μέτρησης της πυκνότητας των υγρών που περιγράφεται από τον Συνέσιο επίσκοπο της Κυρήνης, σύγχρονου της Υπατίας της Αλεξανδρινής. Ο ίδιος ο Castelli σημείωνε ότι άλλοι πριν από τον Fermat είχαν προσπαθήσει ανεπιτυχώς να κατανοήσουν τη λειτουργία μιας τέτοιας μοναδικής συσκευής. Ο Saporita θαύμαζε την ευρυμάθεια του Fermat και εκτός από το ότι του αφιέρωσε το έργο, ήταν γεμάτος επαίνους για αυτόν «Όλοι οι σοφοί κάθε είδους λογοτεχνίας σας συμβουλεύονται για τα δύσκολα

αποσπάσματα που συναντούν στα βιβλία. Θα μπορούσα να προτείνω μία σειρά από εξαιρετικές παρατηρήσεις που έχετε κάνει για τον Συνέσιο, τον Φροντίνο τον Αθήναιο και πολλούς άλλους συγγραφείς και τις διευκρινίσεις που έχετε δώσει στα σκοτεινά αποσπάσματα που δεν μπορούν να γίνουν κατανοητά από τους Scaliger, τους Casaubon, τους Petau και τους Saummaise. Με λίγα λόγια, φαίνεται, κύριε, ότι έχετε γεννηθεί για να κυβερνάται την αυτοκρατορία των γραμμάτων και να είστε ο κυρίαρχος νομοθέτης όλων των σοφών». Η ευρυμάθεια του Fermat, συνεπώς, ήταν αναγνωρισμένη από πολλούς από τους ανθρώπους που τον ήξεραν. Τα ενδιαφέροντα του περιλάμβαναν όλη τη γνώση, με βαθύ εγκυκλοπαιδικό ύφος που δεν διέκρινε τα όρια μεταξύ των επιστήμων και των γραμμάτων. Όλοι θεωρούσαν τον Fermat ως ένα σοφό πρόθυμο να ακούει και να δίνει τη γνώμη του. Έτσι, ήταν πολλοί αυτοί που τον πλησίαζαν και ζητούσαν τη συνεργασία του.

Ο Fermat έγραψε σημειώσεις σε πολλά από τα βιβλία που διάβαζε, αφήνοντας καταγραφές των παρατηρήσεων, των σκέψεών του. Όλα χωρούσαν στα περιθώρια των βιβλίων που διάβαζε. Πράγματι, τα λογοτεχνικά έργα του Fermat είναι γνωστά μόνο από τις σημειώσεις που έκανε στα περιθώρια των προσωπικών του βιβλίων. Συνέθεσε ακόμα και ένα ποίημα με περίπου εκατό εξаметρικούς στίχους στα λατινικά, Cede Deo seu, Christus moriens (Μακριά από το Θεό, αν ο Χριστός ήταν θνητός), που αφιέρωσε στον Guez de Balzac, το οποίο διαβιβάστηκε στην Académie de Castres το 1656. Εν κατακλείδι, ο Fermat ένιωθε μεγάλο σεβασμό και θαυμασμό και τους κλασικούς, ενώ ταυτόχρονα ζούσε έντονα την περιπέτεια του να φέρνει νέες ιδέες «που δεν είναι στα βιβλία», αρχαία ή σύγχρονα. Ήταν ένθερμος αναγνώστης του Francis Bacon και ζούσε με ενθουσιασμό το ξεκίνημα της νέας επιστήμης.

Το παγκόσμιο πνεύμα του τον οδηγούσε να υποστηρίζει την ενότητα όλων των γνώσεων, και συμφωνούσε με τον Mersenne στην ιδέα ότι όση περισσότερη επικοινωνία υπάρχει και όσες περισσότερες ιδέες καταγράφονται, τόσο περισσότερο θα προχωρήσει η επιστήμη. Έτσι, το 1657 πρότεινε στον Cureau de la Chambre, σχετικά με την διάθλαση, ότι «αν μπορείτε να μου επιτρέψετε να ενώσω λίγα από τη γεωμετρία μου στη φυσική σας, θα κάνουμε μία πρωτότυπη κοινή εργασία».

Πορτρέτο του Francis Bacon. Ο Άγγλος φιλόσοφος, υπερασπιστής της επιστημονικής μεθόδου, ήταν ιδιαίτερα αγαπητός στον Fermat



Ο Fermat απολάμβανε την ομορφιά των μαθηματικών. Ήξερε ότι πίσω από τις αποδείξεις και τα θεωρήματα κρυβόταν μια αισθητική και μια φιλοσοφία της γνώσης. Ο τρόπος με τον οποίο παρουσίαζε τα αποτελέσματα του και έθετε τις προκλήσεις του, δείχνει ένα ενθουσιώδες άτομο που επηρεάζει τους φίλους του. Στις **25.12.1640** έγραψε στον Mersenne «Για όσα μου γράφει ο κύριος Φρενίκλ, θα του στείλω μερικές προτάσεις που πιστεύω ότι θα εκτιμήσει, και το λέω με κάθε σεμνότητα, πολύ πιο όμορφες από όλα αυτά που έχουν συζητήσει προηγουμένως». Αργότερα, στις **02.08.1641**, ο Φρενίκλ έγραψε στον Fermat «Οι μέθοδοι που δίνετε [...] είναι πραγματικά πολύ όμορφες και έχετε τον τρόπο να

εκθέτετε καλά τους κανόνες σας και αυτό τους δίνει μια κάποια χάρη που τους κάνει ακόμα πιο ευπρόσδεκτους».

9. Ένας ιδιόμορφος τρόπος εργασίας

Πολλοί ιστορικοί αναρωτιούνται γιατί ο Fermat σημείωσε τόσα πολλά πράγματα και έγραψε τόσα λίγα. Γιατί να μην γράψει βιβλία που να εξηγούν τις ιδέες και τις ανακαλύψεις του. Όμως καθώς γνωρίζουμε περισσότερο τον Fermat καταλαβαίνουμε ότι απλά αυτός ήταν ο τρόπος της εργασίας του. Δεν ήταν επαγγελματίας μαθηματικός. Του άρεσε να σκέφτεται για τα μαθηματικά, τη φυσική, τη λογοτεχνία, τη φιλοσοφία, τη μουσική και να κάνει σχόλια. Ήταν σα να κάνει μια συνομιλία με το βιβλίο που διάβαζε και να δίνει τη γνώμη του στο στενό περιθώριο που του επέτρεπε η σελίδα. Ήταν σαν να σκέφτεται φωναχτά. Όμως, τις πλήρεις και αυστηρές αποδείξεις όλων των πιθανών περιπτώσεων τις άφηνε για άλλα άτομα, ίσως πιο έμπειρα ή ίσως με περισσότερο χρόνο.

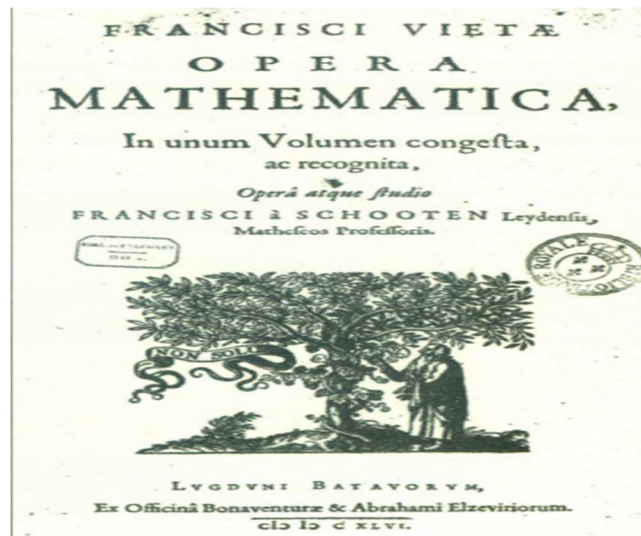
Το γράψιμο ενός βιβλίου θα συνεπαγόταν μια αφοσίωση και ένα χρόνο που δεν διέθετε. Αφιέρωνε τον χρόνο του για να σκέφτεται και να εμβαθύνει σε καινούργια πράγματα. Τα ενδιαφέροντά του ήταν τόσα που δεν μπορούσε να σταματήσει για να γράψει ένα βιβλίο με όλες τις εισαγωγές, τις βασικές εξηγήσεις και τις λεπτομέρειες των αποδείξεων του. Μόλις ένα θέμα ήταν σαφές γι' αυτόν, έκανε μια σημείωση και περνούσε σε ένα άλλο ζήτημα. Όλα αυτά θα μπορούσαν να δώσουν την εικόνα ενός Fermat χωρίς σκοπό, ο οποίος καταπιανόταν με θέματα πότε ένα εδώ, πότε είναι εκεί, εντελώς αποκομμένα και χωρίς κανένα βασικό στόχο. Το έργο του δεν αποσκοπεί να θέσει τις βάσεις για νέα μαθηματικά στο ύφος του «Introduction en l'art analytique» (Εισαγωγή Αναλυτική Τέχνη) του Vieta που αποσκοπεί να δώσει λύση σε όλα τα προβλήματα, ή του «Géométrie» του Descartes το οποίο προσπαθεί να εξηγήσει όλα τα φαινόμενα της φύσης. Όμως γνώριζε πολύ καλά ότι οι μέθοδοι του χρησίμευαν για την πρόοδο της επιστήμης και έφεραν την επανάσταση στον τρόπο εργασίας, παρέχοντας στη σκέψη νέα εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων που προηγουμένως, με τις παλιές μεθόδους, δεν είχαν βρει καμία λύση.

Ο τρόπος εργασίας του Fermat είναι αναμφίβολα ένα από τα συστατικά που αποτελεί μέρος του θρύλου του. Ο τρόπος του για την επίλυση προβλημάτων αποπνέει πρωτοτυπία και δημιουργικότητα, όμως μερικές φορές είναι δύσκολο να αφομοιωθεί και δεν ικανοποιεί αρκετά όλες τις μαθηματικές λεπτομέρειες που του ζήτησαν ορισμένοι από τους σύγχρονους του. Το είδος της γραφής που ταιριάζει καλύτερα στον τρόπο της σκέψης του ήταν ακριβώς οι επιστολές. Σε αυτές μπορούσε να μιλήσει ελεύθερα για την επιστήμη, χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα να ακολουθεί μία επίσημη ομιλία. Ήταν επίσης ο ιδανικός τρόπος για να θέτει νέες προκλήσεις στους αλληλογράφους του, καθώς επίσης και να αποδέχεται αυτές που του έθεταν εκείνοι. Αν το απαιτούσε η περίπτωση, μπορούσε να εμβαθύνει σε κάποια λεπτομέρεια, αν και συνήθως έδινε μόνο πινελιές των λύσεων, ως ενδείξεις ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να ακολουθήσει τη δική του σκέψη σχετικά με τα πραγματευόμενα θέματα και ως απόδειξη ότι είχε πραγματικά τη λύση, αλλά ότι δεν ήταν πρόθυμος να την παραχωρήσει εύκολα. Αυτή η αντίσταση για να εξηγήσει τις μεθόδους του αποτελούσε κομμάτι του του συναρπαστικού παιχνιδιού προκλήσεων, που θα κορυφωνόταν λαμπρά με την πρόκληση του τελευταίου θεωρήματος του.

Παρόλα αυτά, οι επιστολές, παρά τις αρετές του, είχαν επίσης τα προβλήματά τους. Μερικές φορές οδηγούσαν σε κάποια παρεξήγηση, η οποία αργούσε χρόνια να επιλυθεί, ή απλά δεν επιλυόταν ποτέ. Μερικές φορές δημιουργούνταν ατέρμονες συζητήσεις για το αν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα το έλυσε αυτός που πρώτος το είπε ή αυτός που πρώτος το έγραψε. Μερικές φορές οι ιδέες προερχόταν από διάφορα άτομα, και στη συνέχεια διάφορα άτομα διεκδικούσαν την πατρότητά τους ή ακόμα ένα ερώτημα λυνόταν ανεξάρτητα από διάφορα άτομα και στη συνέχεια συζητούσαν για το ποιος άξιζε την δόξα του να είναι ο πρώτος. Όλα αυτά χωρίς να αναφέρουμε ότι ορισμένοι αλληλογράφοι έβρισκαν απόλαυση σε

όλα αυτά τα θέματα, ή ότι μερικές φορές συνέβαινε κάποια αδιακρισία που έχει καταστροφικές συνέπειες για όποιον εμπλεκόταν σε αυτήν. Σίγουρα ο Fermat προσπάθησε να μείνει στο περιθώριο όλων αυτών των ζητημάτων, ωστόσο, δεν μπόρεσε να το καταφέρει παρά τη θέλησή του.

Προμετωπίδα ενός από τα βιβλία του Vieta τον οποίο ο Fermat μελέτησε πολύ, αν και οι δύο μαθηματικοί είχαν πολύ διαφορετικές φιλοδοξίες και μεθόδους εργασίας.



10. Η διαμάχη με τον Καρτέσιο

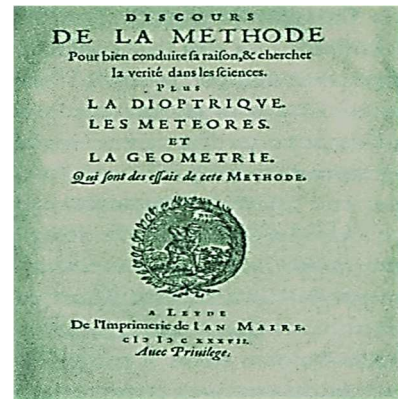
Στις αρχές του 1637 και μέσω του Mersenne, ο Descartes ζήτησε από τον Βασιλιά της Γαλλίας το προνόμιο να δημοσιεύσει το «Discours de la methode» (Συζητήσεις περί της μεθόδου) και τις τρεις Essais (μετ. Εκθέσεις). Ο Μπογκράν κατείχε εκείνη την εποχή τη θέση του γραμματέα του καγκελάριου και ως εκ τούτου είχε μια υπεύθυνη θέση που του επέτρεπε να επηρεάσει το ζήτημα. Ο καγκελάριος Pierre Segurier, διατήρησε ένα αντίγραφο της πρώτης έκθεσης του Descartes, «La Dioptrique» (Η διόπτρα), για να την υποβάλει σε εκτίμηση. Ο Μπογκράν, χωρίς την άδεια του δημιουργού και χωρίς να ενημερώσει τον Mersenne, απέστειλε ένα αντίγραφο της έκθεσης στον φίλο του Fermat για να του δώσει τη γνώμη του. Ο Mersenne έμαθε γι' αυτό αργότερα και έγραψε μια επιστολή στον Fermat ζητώντας του να είναι διακριτικός και οποιαδήποτε παρατήρηση που θα ήθελε να κάνει γι' αυτό να τη γνωστοποιήσει απευθείας στον ίδιο και σε κανέναν άλλο.

Στις **22.09.1637** ο Fermat έγραψε στον Mersenne «Μου ζητήσατε την άποψή μου σχετικά με την έκθεση της Οπτικής του κ. Descartes. Εδώ είναι οι εντυπώσεις μου για αυτές τις νέες προτάσεις, επειδή αν και οι συνέπειες που αυτός συμπεραίνει, όταν εξετάζει τη μορφή που πρέπει να έχουν οι φακοί, είναι όμορφες, θα ήταν επιθυμητό οι βάσεις στις οποίες στηρίζονται να είχαν ελεγχθεί καλύτερα, επειδή αυτό δεν συμβαίνει. Όμως, φοβάμαι ότι η αλήθεια απουσιάζει τόσο όσο και η απόδειξη». Στην ίδια επιστολή ο Fermat ανέφερε τους λόγους στους οποίους βάσιζε την άποψή του. Στο «La Dioptrique» προτείνεται ένα μοντέλο για τη φύση του φωτός για να εξηγήσει το νόμο της διάθλασης. Όμως αυτό το μοντέλο κάνει υποθέσεις που για τον Φερμά δεν ήταν επαρκώς αιτιολογημένες. Ο Fermat επισήμανε ότι υπήρχε αντίφαση μεταξύ της ιδέας της στιγμιαίας διάδοσης του φωτός και ότι η ταχύτητα του φωτός εξαρτάται από το μέσο στο οποίο διαδίδεται. Και ούτε έβλεπε προφανές ότι το φως διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα όσο πυκνότερο ήταν το μέσο.

Ο Mersenne διαβίβασε στον Descartes τις γνώμες του Fermat, και όπως μπορεί να υποθέσει κανείς του Descartes του κακοφάνηκαν πολύ. Έτσι, τον Οκτώβριο του 1637 ανταποκρίθηκε στην Mersenne «Το σφάλμα που ο κ. Fermat βρίσκει στην απόδειξή μου (στην διάθλαση) δεν είναι παρά φανταστικό και δείχνει αρκετά καλά ότι δεν έκανε περισσότερο από μια πρόχειρη εξέταση της έκθεσής μου». Όμως ο Fermat δεν επιδίωκε την αντιπαράθεση, αλλά την ανακάλυψη της αλήθειας. Σε μια επιστολή που έγραψε στον Mersenne τον Δεκέμβριο του 1637 πρότεινε ένα νέο μοντέλο για τη διάθλαση. Στην ίδια

επιστολή έγραψε: «[...] δεν είναι ούτε από ζήλια, ούτε από άμιλλα που συνεχίζω αυτόν τον μικρό αντίλογο, αλλά μόνο για να κάνω την αλήθεια να λάμψει. Αυτό που είμαι σίγουρος ότι θα ευχαριστήσει τον κ. Descartes, η αξία του οποίου είναι επίσης πολύ γνωστή, και την οποία αναγνωρίζω ρητώς εδώ». Αλλά η διαμάχη είχε ήδη αρχίσει. Για τον Descartes οι απόψεις του Fermat ήταν μια πρόκληση για το πρόσωπό του και τις ιδέες του. Το «Discours de la methode» και οι τρεις Essais ήταν η βάση της φιλοσοφίας του και το θεμέλιο της σκέψης του. Έτσι αποφάσισε να προετοιμαστεί για μια κανονική μάχη. Στις **18.01.1638** έγραψε στον Mersenne «Αν αυτός ο συγγραφέας έχει εκπλαγεί που δεν έχω τέτοιους κανόνες στη γεωμετρία μου, εγώ έχω πολύ περισσότερους λόγους να εκπλήσσομαι που αυτός θέλησε να αγωνιστεί με κακά όπλα.

Αρχική σελίδα του περίφημου «Λόγου περί της μεθόδου» του Descartes, που περιλαμβάνει το δοκίμιο για τη δίοπτρα που προκάλεσε την αντιπαράθεση με τον Fermat.



Όμως θέλω ακόμα να του δώσω χρόνο να ανέβει ξανά στο άλογο και να πάρει όλες τις βελτιώσεις που μπορεί να επιλέξει για αυτόν τον αγώνα». Όταν ο Fermat έστειλε στους μαθηματικούς του Παρισιού το «Methodius ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum» για να το εκτιμήσουν, ο Descartes βρήκε την ευκαιρία και τον κατηγόρησε για αμφίβολη συλλογιστική. Ο Roberval και ο Pascal βγήκαν να υπερασπίσουν τον Fermat, ενώ αρχικά ο Μυντόρζ και ο Ντεζάργκ στάθηκαν στο πλευρό του Descartes. Τον Απρίλιο του 1638 ο Roberval έγραψε: «Όταν ο κ. Descartes καταλάβει καλά τη μέθοδο μεγίστων και ελαχίστων του κ. Fermat, και την inventionem tangentium linearum curvarum, τότε θα πάψει να εκπλήσσεται που αυτή η μέθοδος έχει τους υπερασπιστές της, και θα θαυμάσει τη μέθοδο ο ίδιος, η οποία είναι εξαιρετική και αντάξια του συγγραφέα της». Είναι περίεργος ο ρόλος του Mersenne σε αυτή την ιστορία, επειδή στην πραγματικότητα όλα συμβαίνουν μέσω αυτού.

Τόσο ο Descartes όσο και ο Fermat απευθύνουν τις επιστολές τους στον Mersenne, θεωρώντας ως δεδομένο ότι στη συνέχεια αυτός θα τις εξηγήσει στην άλλη πλευρά. Τελικά, ο Descartes έδωσε δίκιο στον Fermat και ο Descartes αποδέχτηκε την ετυμηγορία των αποδεικτικών στοιχείων και αναγνώρισε ότι «βλέποντας την τελευταία μέθοδο που χρησιμοποιεί για να βρει τις εφαπτόμενες των καμπυλών, δεν μπορώ να απαντήσω με άλλο τρόπο παρά λέγοντας ότι είναι πολύ καλή, και ότι αν το είχε εξηγήσει με τον τρόπο αυτό από την αρχή, δεν θα τον είχα αντικρούσει καθόλου».

Σιγά-σιγά τα πνεύματα ηρέμησαν. Στις **29.06.1638** ο Descartes έγραψε στον Mersenne «Είδα αυτά που είχατε την ευγένεια να μου στείλετε σχετικά με τις επιστολές που σας έγραψε ο κ. Fermat. Και πρώτα σχετικά με αυτό που είπε ότι στο πρώτο μου άρθρο συνάντησε πιο πικρά λόγια από ότι ανέμενε, του ζητώ πολύ ταπεινά συγγνώμη, και να σκεφτεί ότι δεν τον γνώριζα». Τέλος, τον Οκτώβριο 1638, ο Descartes έγραψε για πρώτη φορά μια επιστολή προς τον Fermat, ως ένδειξη συγγνώμης: «Πρέπει να ομολογήσω εδώ ότι ειλικρινά δεν έχω γνωρίσει ποτέ κανέναν που μου έδωσε την εντύπωση ότι γνωρίζει τόσο τη γεωμετρία όσο εσείς. Ωστόσο, όπως επιδιωχθόνουμε προσεκτικότερα τα μικρά ελαττώματα ενός διαμαντιού παρά τα μεγάλα μιας κοινής πέτρας, έτσι σκέφτηκα ότι έπρεπε να εξετάσω πιο προσεκτικά αυτό που

προέρχεται από την πλευρά σας από αυτό που θα προερχόταν από ένα άλλο άτομο που θα εκτιμούσα λιγότερο». Ωστόσο, το περιστατικό δεν τέλειωσε εδώ.

Παρά τα λόγια του, ο Descartes αναγνώρισε στον Fermat μια ιδιοφυΐα και έναν αντίπαλο, και γι' αυτό τον φοβόταν και προσπαθούσε να τον δυσφημίσει όποτε μπορούσε. Σε μια περίπτωση, αφού ανέλυσε την εργασία του Fermat για τον καθορισμό της εφαπτομένης σε μια κυκλοειδή καμπύλη, η οποία ήταν πράγματι σωστή, ο Descartes έγραψε στον Mersenne λέγοντας ότι η εργασία περιείχε σφάλματα και ότι ο Fermat ήταν ανεπαρκής ως μαθηματικός και ως στοχαστής. Το βάρος του Descartes ανάμεσα στην επιστημονική Κοινότητα της εποχής του συνέβαλε σίγουρα ώστε πολλοί επιστήμονες να έχουν μια παραπλανητική εικόνα για τον Fermat.

Αλλά η ιδιοφυΐα του Fermat συνέχιζε να λάμπει. Πράγματι, ήταν ο πρώτος που έθεσε τις βάσεις της αλγεβρικής γεωμετρίας, πριν ο Descartes δημοσιεύσει τη «Γεωμετρία» του. Μαζί με τον Pascal θεμελίωσε τη θεωρία των πιθανοτήτων. Στην αριθμητική, τα αποτελέσματά του και οι μέθοδοι των αποδείξεών του σηματοδότησαν την αρχή της σύγχρονης θεωρίας των αριθμών. Και αυτά μόνο για να αναφέρουμε μερικά παραδείγματα.

Τέλος, ως μαθηματικός δεν υπήρχε καμία αμφιβολία ότι ο Fermat εκτόπιζε πραγματικά τον Descartes. Ακόμα κι έτσι ο Fermat προσπάθησε να κατευνάσει την κατάσταση και με λεπτή αίσθηση του χιούμορ, σχετικά με ένα λάθος που είχε παρατηρήσει στο «La Geometrie», είπε ότι θαύμαζε τόσο την ιδιοφυΐα του Descartes, ώστε ακόμα και όταν έκανε λάθη, η εργασία του ήταν πιο πολύτιμη από άλλων που δεν διέπρατταν κανένα.

11. Η θεωρία της διάθλασης

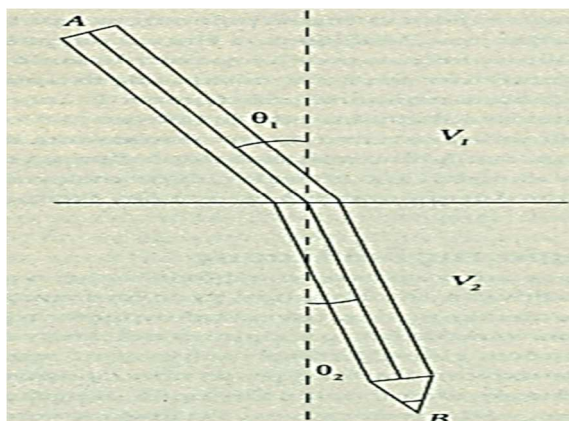
Αναφορικά με τη θεωρία της διάθλασης, η ιστορία είχε επίσης τη συνέχειά της. Μετά το θάνατο του Descartes, ένας από τους μαθητές του θέλησε να ετοιμάσει μια δημοσίευση με όλη την αλληλογραφία του. Ζήτησε τη συνεργασία του Fermat για να συλλέξει τα γράμματα που είχαν ανταλλάξει οι δυο τους. Αυτό ώθησε τον Fermat να επανεξετάσει την εργασία του για τη διάθλαση και μη μένοντας απόλυτα ικανοποιημένος με τα επιχειρήματά του μελέτησε και πάλι αυτό το θέμα. Τότε ήταν που όρισε την αρχή σύμφωνα με την οποία το φως ακολουθεί τις πορείες ελάχιστου χρόνου, γνωστή ως «αρχή του Fermat», δημοσιεύθηκε στο «Analyse pour les réfractions et Synthese pour les refractions» (Ανάλυση περί των διαθλάσεων και σύνθεση περί των διαθλάσεων), που χρονολογείται περίπου στο 1660 και από αυτή δίνεται μια μαθηματική εξήγηση του νόμου του Snell. Πρόκειται για άλλο ένα παράδειγμα της επιμονής του Fermat για την επίλυση των ζητημάτων που έθετε. Δεν τον πείραζε να επιστρέφει ξανά και ξανά για να συνεισφέρει νέα στοιχεία. Την ίδια επιμονή περίμενε από τους συγχρόνους του για να λύνουν τις προκλήσεις που έθεταν μεταξύ τους.

12. Νόμος του Snell

Όταν βάζουμε ένα ραβδί στο νερό δίνει την εντύπωση ότι είναι σπασμένο. Η κλίση του μέσα στο νερό φαίνεται διαφορετική από αυτήν που έχει έξω. Αυτό το οπτικό φαινόμενο, που ονομάζεται **διάθλαση**, οφείλεται στο ότι η ταχύτητα του φωτός αλλάζει ανάλογα με την πυκνότητα του μέσου που διασχίζει. Ο αέρας είναι λιγότερο πυκνός από το νερό και η ταχύτητα του φωτός είναι μεγαλύτερη στον αέρα παρά στο νερό επειδή συναντά μικρότερη δυσκολία στο πέρασμά του. Ο Snell ανακάλυψε έναν τύπο, γνωστό ως νόμο του Snell ο οποίος σχετίζει την ταχύτητα του φωτός στα δύο μέσα, και τις γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης $\sin \theta_1 / V_1 = \sin \theta_2 / V_2$. Η αρχή του Fermat δίνει μια μαθηματική εξήγηση για αυτό το φαινόμενο. Σύμφωνα με αυτή την αρχή το φως ακολουθεί τις πορείες ελάχιστου χρόνου.

Έστω όπως φαίνεται στο διπλανό γράφημα, ότι ένα πουλί ήθελε να πάει από το σημείο A στην άκρη του ραβδιού που βγαίνει έξω από το νερό, στο σημείο B στην άκρη του ραβδιού που είναι βυθισμένο. Έστω ότι στον αέρα πετά με ταχύτητα V_1 και στο νερό βουτάει με ταχύτητα V_2 . Ο Fermat απέδειξε ότι ο γρηγορότερος τρόπος για να πάει από το A στο B

δεν ήταν η ευθεία γραμμή, αλλά η γραμμή που ακολουθούσε η κλίση του ραβδιού. Συνεπώς, το πουλί θα έπρεπε να ακολουθήσει τη γραμμή του ραβδιού για να φτάσει στο B το συντομότερο δυνατό.



13. Η γέννηση του τελευταίου θεωρήματος

Είναι αδύνατο ένας κύβος να είναι το άθροισμα δύο κύβων, μια τέταρτη δύναμη να είναι το άθροισμα δύο τετάρτων δυνάμεων, ή γενικά οποιοσδήποτε αριθμός που είναι μια δύναμη μεγαλύτερη από δύο να είναι το άθροισμα δύο δυνάμεων όπως αυτές. Ανακάλυψα μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη την οποία το περιθώριο αυτό είναι πολύ μικρό για να χωρέσει.

Και μια μέρα έπεσε στα χέρια του Fermat ένα αντίγραφο των «Αριθμητικών» του Διόφαντου. Καθώς διάβαζε αυτό το βιβλίο ζωγραφίζονταν στο μυαλό του μαθηματικά τοπία εκπληκτικής ομορφιάς, ενώ ταυτόχρονα επινοούσε μερικά από τα πιο διαβολικά προβλήματα που ο Fermat έθεσε στη μαθηματική κοινότητα. Ανάμεσά τους, και το περίφημο τελευταίο θεώρημα, από όλες τις προκλήσεις του, είναι με διαφορά αυτή που άργησε περισσότερο να επιλυθεί. Ο Fermat το έγραψε στο περιθώριο της σελίδας με το πρόβλημα 8 του δεύτερου τόμου. Οι αναφορές για το αίνιγμα του Fermat στη θεωρία των αριθμών ανάγονται στην αλεξανδρινή εποχή. Από τη μία πλευρά, είναι τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που χρονολογούνται περίπου από τον 2^ο αιώνα π.Χ., και από την άλλη, τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου, τα οποία είναι περίπου πέντε ή έξι αιώνες αργότερα. Με βάση αυτά τα δύο βιβλία οικοδομήθηκε για περίπου 1.500 χρόνια πρακτικά όλη η μαθηματική έρευνα στον κόσμο της Μεσογείου και της Μέσης Ανατολής.

14. Τα Στοιχεία του Ευκλείδη

Τα «Στοιχεία της Γεωμετρίας» του Ευκλείδη περιέχουν τρία βιβλία αριθμητικής. Σε αυτά τα τρία βιβλία (τόμοι 5, 6 και 7) εμφανίζεται η πρώτη γενική θεωρία της διαιρετότητας. Γίνεται λόγος ήδη για τον μέγιστο κοινό διαιρέτη και δίνεται ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό του, ο οποίος είναι γνωστός με το όνομα «Ευκλείδειος αλγόριθμος». Ορίζονται επίσης οι πρώτοι αριθμοί, και αποδεικνύεται ότι υπάρχουν άπειροι. Γίνεται λόγος για αριθμούς πρώτους μεταξύ τους και ορίζονται οι τέλει αριθμοί ως εκείνοι που υπολογίζονται ως το άθροισμα των διαιρετών τους. Το 1650 ο Fermat έθεσε στη μαθηματική κοινότητα μια από τις πιο γνωστές προκλήσεις της ιστορίας διαβεβαιώνοντας ότι όλοι οι αριθμοί της $F_n = 2^{2^n} + 1$ ήταν πρώτοι. Η αλήθεια είναι ότι όλα φαίνονταν να δείχνουν ότι είχε δίκιο. Για $n = 0$ λαμβάνεται $F_0 = 3$, που είναι πρώτος. Για $n = 1$ λαμβάνεται $F_1 = 5$ που είναι επίσης πρώτος. Και επίσης $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65.537$ είναι πρώτοι.

Δεν έγιναν άλλες πρόοδοι έως ότου το 1732 ο Euler απέδειξε ότι $F_5 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$ και επομένως δεν είναι πρώτος. Στη συνέχεια

χρειάστηκε να περιμένουμε το 1880 όταν ο Landry βρήκε μια παραγοντοποίηση για το $F_6 = 274.177 \cdot 67.280.421.310.721$, ένα κατόρθωμα για μια εποχή στην οποία όλοι οι υπολογισμοί γίνονται με το χέρι. Το 1975 οι Morrison & Brillhart έκαναν ένα βήμα μπροστά παραγοντοποιώντας το $F_7 = 59.649.589.127.497.217 \cdot 5.704.689.200.685.129.054.721$, ήδη στην εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Μέχρι σήμερα δεν έχουν βρεθεί περισσότεροι πρώτοι του Fermat και ούτε έγινε δυνατό να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν άλλοι. Όμως ο υπολογισμός των πρώτων παραγόντων που τους παραγοντοποιούν είναι ένα titάνιο έργο. Τι ενδιαφέρον μπορεί να έχει ότι οι αριθμοί αυτής της μορφής είναι πρώτοι ή όχι;



Πορτρέτο του Καρλ Φρίντριχ Γκάους.

Ο Gauss έδωσε μια απάντηση, αποδεικνύοντας ότι για να μπορεί ένα κανονικό πολύγωνο να εγγραφεί σε κύκλο χρησιμοποιώντας μόνο χάρακα και διαβήτη, ο αριθμός των πλευρών του πρέπει να είναι τέτοιος ώστε η παραγοντοποίηση του να περιέχει μόνο δυάρια και διαφορετικούς αριθμούς του Fermat. Έτσι, με χάρακα και διαβήτη μπορεί να εγγραφεί ένα τρίγωνο (3 πλευρές), ένα τετράγωνο ($4 = 2^2$ πλευρές), ένα πεντάγωνο (5 πλευρές), ένα εξάγωνο ($6 = 2 \cdot 3$ πλευρές), ένα οκτάγωνο ($8 = 2^3$ πλευρές) ή ένα δεκάγωνο ($10 = 2 \cdot 5$ πλευρές), αλλά όχι ένα επτάγωνο (7 πλευρές δεν είναι πρώτος του Fermat), ούτε ένα εννεάγωνο ($9 = 3^2$ πλευρές είναι το γινόμενο δύο ίσων πρώτων του Fermat). Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν κατά προσέγγιση διαδικασίες σχεδίασης για αυτές τις περιπτώσεις, δεν θα υπάρξουν ποτέ ακριβείς διαδικασίες.

15. Τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου

Για τη ζωή του Διόφαντου δεν γνωρίζουμε σχεδόν τίποτα, ούτε καν ξέρουμε πολύ καλά μεταξύ ποιων ημερομηνιών έζησε. Ωστόσο, υπάρχουν ορισμένα στοιχεία. Από τη μία πλευρά, ο Διόφαντος αναφέρεται στο έργο του Υψικλή όταν δίνει τον ορισμό του πολυγωνικού αριθμού και επομένως, το έργο του γράφτηκε μετά το έτος 150 π.Χ.

Από την άλλη πλευρά ο Θέων ο Αλεξανδρέας, ο πατέρας της Υπατίας, αναφέρει στα έργα του έναν από τους ορισμούς του Διόφαντου, από το οποίο προκύπτει ότι έγραψε τα «Αριθμητικά» πριν από το 350 μ.Χ. Έτσι, προς το παρόν, υπάρχει ακόμη περιθώριο αμφιβολίας περίπου 500 ετών για να τοποθετήσουμε κατά προσέγγιση τις ημερομηνίες γέννησης και θανάτου του Διόφαντου. Η επόμενη πληροφορία που έχουμε για να τοποθετήσουμε καλύτερα τον Διόφαντο είναι μια επιστολή του Μιχαήλ Ψελλού, Βυζαντινού

συγγραφέα του 11ου αιώνα. Η μετάφραση που προτείνει ο Sir Thomas Little Heath είναι η εξής: «Ο Διόφαντος τη χειριζόταν την αιγυπτιακή αριθμητική] πιο κατάλληλα, αλλά ο σοφός Ανατόλιος συγκέντρωνε τα πιο βασικά μέρη της θεωρίας όπως τα ανέφερε ο Διόφαντος με διαφορετικό τρόπο και πιο συνοπτικά, αφιερώνοντας το έργο του στον Διόφαντο».

Ο Paul Tannery δημοσίευσε αυτή την επιστολή σε μια από τις έρευνές του και πρότεινε ότι ο Ψελλός αναφερόταν σε ένα σχόλιο για τον Διόφαντο το πρωτότυπο του οποίου χάθηκε και πιθανώς είχε γραφεί από την Υπατία. Εφόσον ο Ανατόλιος ο οποίος αναφέρεται στην επιστολή είναι ο επίσκοπος της Λαοδικείας, συγγραφέας και καθηγητής μαθηματικών που έζησε κατά τον 3^ο αιώνα, συμέρανε ότι ο Διόφαντος έγραψε τα «Αριθμητικά» γύρω στο 250 μ.Χ. Ωστόσο, δεν συμφωνούν όλοι οι ερευνητές με αυτήν τη μετάφραση, για αυτό η ημερομηνία που αναφέρθηκε παραπάνω δεν μπορεί να θεωρηθεί οριστική. Όπως και στην περίπτωση του Fermat, είναι διαθέσιμη αντίθετα μια επιτύμβια επιγραφή με την ακριβή ηλικία του Διόφαντου. Προέρχεται από την ελληνική ανθολογία, που συντάχθηκε από τον Μητρόδωρο γύρω στο 500 μ.Χ. Αυτή η συλλογή γρίφων περιέχει έναν για το συγγραφέα των «Αριθμητικών» που λέει: «Η παιδική ηλικία του διήρκεσε το $1/6$ της ζωής του. Παντρεύτηκε μετά το άλλο $1/7$. Η γενειάδα του μεγάλωσε μετά από ακόμη $1/12$ και ο γιος του γεννήθηκε 5 χρόνια αργότερα. Ο γιος έζησε τα μισά χρόνια του πατέρα και ο πατέρας πέθανε 4 χρόνια μετά το γιο». Αν ορίσουμε ως x την ηλικία του Διόφαντου, σύμφωνα με το κείμενο έχουμε ότι η παιδική ηλικία του διήρκεσε $x/6$ χρόνια, παντρεύτηκε μετά από $x/7$ χρόνια, η γενειάδα του μεγάλωσε για $x/12$ χρόνια, ο γιος του γεννήθηκε 5 χρόνια μετά και ο γιος του έζησε $x/2$ χρόνια και ο πατέρας πέθανε 4 χρόνια αργότερα. Επομένως $x = x/6 + x/7 + x/12 + 5 + x/2 + 4$.

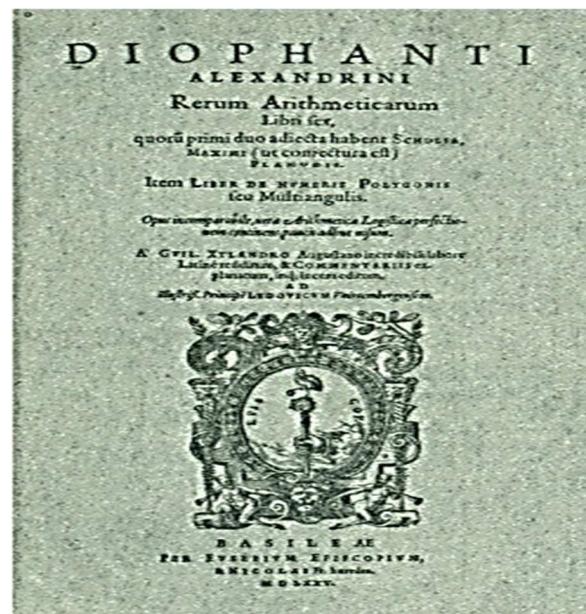
Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της ισότητας με 84, παίρνουμε:

$$84x/6 + 84x/7 + 84x/12 + 84 - 5 + 84x/2 + 844.$$

Απλουστεύοντας, έχουμε: $84x = 14x + 12x + 7 : x + 420 + 42x + 336$.

Με την ομαδοποίηση των x λαμβάνεται $84 - x - 14 : x - 12x - 7x - 42x = 420 + 336$.

Από την οποία προκύπτει ότι $9 : x = 776$ και συνεπώς, $x = 756/9 = 84$. Έτσι, ο Διόφαντος παντρεύτηκε σε ηλικία 26 ετών και απέκτησε ένα γιο σε ηλικία 38 ετών, ο οποίος έζησε 42 χρόνια, τα μισά από αυτά που έζησε ο ίδιος. Ωστόσο, είναι άγνωστο αν το πρόβλημα αυτό είναι καθαρή επινόηση ή, αντίθετα, βασίζεται πραγματικά στην ζωή του μαθηματικού.



15.1 Τα βιβλία των «Αριθμητικών» του Διόφαντου

Τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου αποτελούνται από 13 βιβλία, από τα οποία διατηρούνται 6, ελληνικής προέλευσης. Επίσης, το 1972 εμφανίστηκε ένα αραβικό χειρόγραφο που περιέχει άλλα 4 βιβλία, αραβικής πηγής, που δεν ταιριάζουν με κανένα από τα βιβλία της ελληνικής πηγής. Σε αυτά περιγράφεται μια σειρά προβλημάτων που επιχειρούν να βρουν ρητές λύσεις για πολυωνυμικές εξισώσεις με ρητούς συντελεστές. Από την πλευρά τους, τα 6 βιβλία της ελληνικής πηγής περιλαμβάνουν συνολικά 189 προβλήματα. Η κατανομή τους είναι η εξής:

Βιβλίο 1: Αποτελείται από 25 προβλήματα πρώτου βαθμού και 14 δευτέρου βαθμού.

Βιβλίο 2: Αποτελείται από 35 προβλήματα. Το πρόβλημα 8, αναμφισβήτητα το πιο γνωστό, οδήγησε στο λεγόμενο «θεώρημα του Fermat».

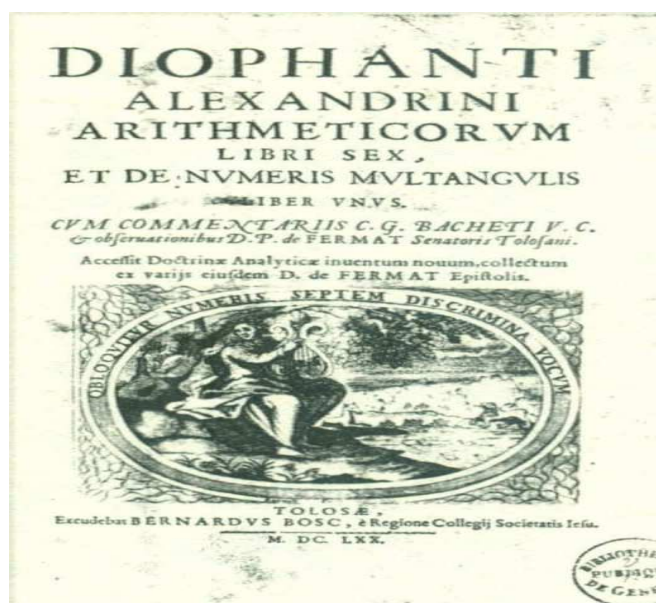
Βιβλίο 3: Αποτελείται από 21 προβλήματα. Το πιο γνωστό είναι το 19, στο οποίο για πρώτη φορά καταφεύγει στη γεωμετρία για την επίλυσή του.

Βιβλίο 4: Αποτελείται από 40 προβλήματα, τα περισσότερα από τα οποία αναφέρονται σε κυβικούς αριθμούς.

Βιβλίο 5: Αποτελείται από 30 προβλήματα. Τα περισσότερα από αυτά (28) είναι προβλήματα δευτέρου και τρίτου βαθμού. Στο τελευταίο, το 30, ο Διόφαντος προτείνει ένα πρόβλημα μειγμάτων.

Βιβλίο 6: Αποτελείται από 24 προβλήματα. Είναι αφιερωμένο στην επίλυση ορθογώνιων τριγώνων με ρητές πλευρές.

Εξώφυλλο έκδοσης των «Αριθμητικών» που εκδόθηκε το 1670 από τον γιο του Fermat μετά το θάνατο του πατέρα του και η οποία περιλαμβάνει τα σχόλια του διάσημου μαθηματικού



15.2 Σημασία του έργου

Είναι δύσκολο να σταθμιστεί η σημασία του έργου του Διόφαντου. Τα προβλήματα που προτείνει είναι μια πρόκληση για την εφευρετικότητα και τη δημιουργικότητα και είναι μια ωδή για την αισθητική ομορφιά των μαθηματικών. Αν και ο Διόφαντος δεν χρησιμοποίησε πολύπλοκη αλγεβρική σημειογραφία, εισήγαγε έναν αλγεβρικό συμβολισμό, χρησιμοποιώντας μια συντομογραφία για τον άγνωστο και για τις δυνάμεις του αγνώστου.

Αυτό του επέτρεπε να εκφράζει τις εξισώσεις πιο εύκολα. Χρησιμοποιούσε επίσης μια συντομογραφία για τη λέξη ίσον. Επομένως, με το έργο του γίνεται ένα αποφασιστικό βήμα από τη λεκτική άλγεβρα προς τη συμβολική άλγεβρα.

Από τα θέματα που τίγονται στα «Αριθμητικά» φαίνεται επίσης ότι ο Διόφαντος απασχολούταν περισσότερο με τις ιδιαίτερες περιπτώσεις παρά τις γενικές περιπτώσεις. Προφανώς, η πρόοδος που αυτό συνεπαγόταν ήταν ήδη ένα γιγαντιαίο βήμα, αλλά και

ορισμένες από τις ιδιαίτερες μεθόδους επίλυσης μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε γενικότερες περιπτώσεις. Ωστόσο, είναι φανερό ότι του έλειπε μια πιο ισχυρή αλγεβρική σημειογραφία για να εκφράζει γενικότερες μεθόδους. Για παράδειγμα, ο Διόφαντος είχε συμβολισμό μόνο για έναν άγνωστο και όταν ένα πρόβλημα περιείχε την εμφάνιση πολλών αγνώστων το όνομα που έπαιρναν ήταν «πρώτος άγνωστος», «δεύτερος άγνωστος», «τρίτος άγνωστος»... Ούτε είχε σύμβολο για να εκφράζει έναν οποιονδήποτε αριθμό η και έτσι η έκφραση $(6n + 1) / (n + n)$, εκφράζεται με λόγια: «Ένας αριθμός επί έναν παράγοντα έξι αυξημένος κατά ένα, ο οποίος διαιρείται δια του αθροίσματος του τετραγώνου και του ίδιου του αριθμού».

Βλέπουμε εύκολα ότι με αυτόν τον τρόπο ήταν δύσκολο να αναπτυχθούν σύνθετες εκφράσεις. Θα πρέπει να περιμένουμε τον Vieta για να κάνει το οριστικό βήμα μεταξύ της συντομευμένης σημειογραφίας του Διόφαντου και της σύγχρονης αλγεβρικής σημειογραφίας.

Αλγεβρική σημειογραφία του Vieta

Τα μαθηματικά σήμερα θα ήταν αδιανόητα χωρίς μια καλή συμβολική σημειογραφία. Όμως η εξέλιξη αυτής της σημειογραφίας είναι το αποτέλεσμα χιλιάδων χρόνων προσπάθειας. Ο Διόφαντος και ο Ευκλείδης χρησιμοποιούσαν ήδη γράμματα για να σημειώνουν τις αποδείξεις τους. Όμως το οριστικό άλμα προς την αλγεβρική σημειογραφία έγινε με τον Vieta. Στο βιβλίο του «In artem analyticam isagoge» (Εισαγωγή στην αναλυτική τέχνη), του 1591, ο Vieta τόνισε το ενδιαφέρον των αλγεβρικών μεθόδων και προσπάθησε να κάνει μια συστηματική έκθεση. Ο σκοπός του ήταν να αντιπαρατάξει στη συνθετική μέθοδο για την απόδειξη θεωρημάτων που χρησιμοποιούσαν οι Έλληνες μια νέα μέθοδο για να ανακαλύψει πώς να λύνονται τα προβλήματα. Η τελευταία ήταν μια νέα προσέγγιση σε ότι είναι γνωστό μέχρι τότε και είχε σκοπό να μην αφήνει κανένα μαθηματικό πρόβλημα άλυτο. Ο ίδιος ο Vieta δεν δίσταζε να βεβαιώνει ότι χάρη στην άλγεβρα θα μπορούν να επιλυθούν όλα τα προβλήματα. Η εξέλιξη της σημειογραφίας μπορεί να φανεί στο παρακάτω παράδειγμα ενός πολυωνύμου γραμμένου με τη συντομευμένη σημειογραφία του Διόφαντου, τη συμβολική σημειογραφία του Vieta και τη σύγχρονη σημειογραφία: $K^Y K \bar{a} \Delta^Y \bar{\Delta} \bar{a} \Delta^Y \bar{a} M a \uparrow K^Y \bar{\Delta} a K^Y \bar{a} \zeta \alpha$
Σημειογραφία του Vieta: $CC - CQ + QQ - C + Q - N + I$.

Σύγχρονη σημειογραφία: $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

15.3 Διάδοση της κληρονομιάς του Διόφαντου

Οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί άρχισαν να ανακαλύπτουν την μαθηματική κληρονομιά του Διόφαντου μέσω του Γερμανού μαθηματικού και αστρονόμου Johann Miller, γνωστού και ως **Ρεγιομοντάνου**, ο οποίος γύρω στο 1463 ανακάλυψε στη Βενετία ένα αντίγραφο των «Αριθμητικών» και σημείωσε ότι «κανείς δεν έχει μεταφράσει ακόμα από τα ελληνικά στα λατινικά τα 13 βιβλία του Διόφαντου, στα οποία βρίσκεται κρυμμένος ο πραγματικός ανθός όλων των μαθηματικών». Γύρω στο 1570 ο Rafael Bombelli μετέφρασε ένα μέρος των «Αριθμητικών», αλλά αυτό δεν εκδόθηκε ποτέ. Ωστόσο, δανείστηκε πολλά από τα προβλήματα του Διόφαντου για το δικό του έργο με τίτλο «Άλγεβρα».

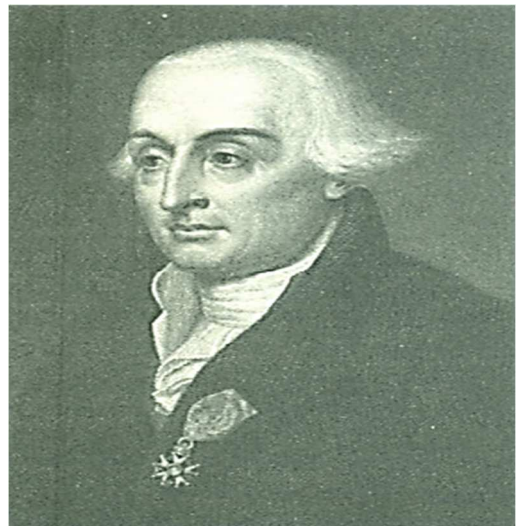
Το 1575 ο Wilhelm Holzmann, γνωστός και ως Γουλιέλμος Ξυλάντερ, δημοσίευσε στη Βασιλεία το «Diophanti Alexandrini Rerum libri sex» (Η πραγματεία του Διόφαντου του Αλεξανδρινού σε έξι βιβλία), την πρώτη λατινική μετάφραση του έργου του Διόφαντου. Το 1621 ο Bachet de Meziriac προχώρησε ένα βήμα παραπέρα και δημοσίευσε στο Παρίσι μια νέα μετάφραση με τον ακόλουθο τίτλο «Diophanti Alexandrini Arithmeticonum libri sex, et

de Numeris multangulis liber unus. Nunc primum graece et latini editi, atque absolutissimis commentariis illustrati» (Διόφαντου Αλεξανδρινού έξι βιβλία των «Αριθμητικών», μαζί με το πρώτο βιβλίο των πολυγωνικών αριθμών. Τώρα το πρωτότυπο ελληνικό εκδομένο μαζί με το λατινικό, πλήρη σχολιασμό και σχήματα). Σε αυτή την έκδοση εμφανιζόταν το ελληνικό κείμενο δίπλα στη λατινική μετάφραση, και περιείχε επίσης μια σειρά από σημειώσεις και σχόλια. Η μετάφραση του Μπασέ έδωσε εξαιρετική ώθηση στην θεωρία των αριθμών.

Ο ίδιος ο Μπασέ έλυνε τις διοφαντικές εξισώσεις πρώτου βαθμού $ax + by = cz$. Αργότερα ο Albert Giraud χαρακτήρισε τέλεια τους ακέραιους που είναι αθροίσματα δύο τετραγώνων. Τέλος ο Fermat επινόησε μια νέα γενική μέθοδο απόδειξης που ονομάζεται της κατάβασης εις άπειρο, την οποία χρησιμοποίησε με επιτυχία για να αποδείξει το θεώρημά του στην περίπτωση $n = 4$. Πριν από τη μετάφραση του Μπασέ, η θεωρία των αριθμών θεωρούνταν από τους μαθηματικούς ως μικρού ενδιαφέροντος. Πίστευαν ότι τα προβλήματα που επέλυε ήταν απλά μαθηματικά αξιοπερίεργα, όμορφα αλλά πολύ ιδιαίτερα.

Οι ειδικότητες που εκτιμούσαν ήταν τότε η γεωμετρία και η ανάλυση, Όμως μετά τις εργασίες του Fermat η θεωρία των αριθμών βρέθηκε στην πρώτη γραμμή του ενδιαφέροντος των πιο σημαντικών ιδιοφυιών των μαθηματικών Vieta, Fermat, Descartes, Gauss, Euler, Jacobi, Lagrange, Legendre, Dirichlet, Dedekind, Kronecker ανήκαν στην ομάδα μαθηματικών που διερεύνησαν τα πιο απομακρυσμένα τοπία της **θεωρίας των αριθμών**, την οποία ο Gauss ονόμασε **βασιλίτσα των μαθηματικών**.

Πορτραίτο του μαθηματικού του 18^{ου} αιώνα Lagrange, ο οποίος μελέτησε διάφορα προβλήματα που τέθηκαν από τον Fermat



Το 1885 ο Sir Thomas Little Heath δημοσίευσε την πρώτη μετάφραση των «Αριθμητικών» στα αγγλικά. Ήταν μια εξαιρετική έκδοση που αναθεωρήθηκε το 1910 και περιελάμβανε τα σχόλια που έκαναν ο Μπασέ, ο Fermat κ.λπ. Ο σχολιασμός ενός έργου ήταν κοινή πρακτική μεταξύ των συγγραφέων της αρχαιότητας και οι διάφορες εκδόσεις ή μεταφράσεις περιλάμβαναν συχνά σχόλια από τον εκδότη ή τον μεταφραστή, αν και συνήθως δεν εξηγούσαν τι ανήκε στο πρωτότυπο και ποια ήταν η προσωπική συμβολή αυτού που έγραφε. Ίσως θεωρούσαν ως δεδομένο ότι ένα έργο ήταν κάτι που χτιζόταν με τον χρόνο και ότι όλοι καλούνταν να το κατανοήσουν, να το μελετήσουν και να το συμπληρώσουν με νέες εισφορές. Επομένως είναι πολύ σημαντικό από ιστορική άποψη να διαθέτουμε όσες περισσότερες εκδόσεις μπορούμε, για να δούμε έτσι πώς έχει εξελιχθεί το έργο με την πάροδο του χρόνου.

Από τη μελέτη των χειρογράφων που υπάρχουν σήμερα, ο Tannery πρότεινε ότι όλα προέρχονται από μια κοινή πηγή. Φαίνεται ότι αυτή η κοινή πηγή είναι η έκδοση των «Αριθμητικών» σχολιασμένη από την Υπατία την Αλεξανδρινή. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, αυτή η έκδοση περιλάμβανε μόνο τα 6 βιβλία που έφτασαν ως εμάς. Τα χαμένα

βιβλία θα ήταν αυτά που δεν σχολίασε η Υπατία. Αν είναι έτσι, οφείλεται στην Υπατία η μεταβίβαση αυτού του μέρους της κληρονομιάς του Διόφαντου. Είναι επίσης πολύ πιθανό ότι αυτό το μέρος περιλαμβάνει δικές της συνεισφορές. Σήμερα όλα αυτά είναι θέμα έρευνας, και δεν υπάρχει ακόμα μια οριστική απάντηση.

15.4 Μια ξενάγηση στα προβλήματα των «Αριθμητικών» του Διόφαντου

Ένα από τα αντίγραφα της σχολιασμένης από τον Μπασέ έκδοσης έπεσε στα χέρια του Fermat. Ο Fermat γνώριζε άριστα τα λατινικά και τα ελληνικά, έτσι ώστε μπορούσε να διαβάσει το έργο και στις δύο γλώσσες. Επιπλέον, ήταν μια σχολιασμένη έκδοση. Ήταν ένα τέλειο σημείο εκκίνησης για να προσθέσει τα δικά του σχόλια.

15.5 Το πρόβλημα 32 του βιβλίου II

Το πρόβλημα αυτό έχει την ακόλουθη διατύπωση: «Βρείτε τρεις αριθμούς έτσι ώστε το τετράγωνο οποιουδήποτε από αυτούς αν προστεθεί στον επόμενο, να μας δίνει ένα τετράγωνο». Για να το λύσουμε μπορούμε να κάνουμε μια σειρά από δοκιμές και με λίγη τύχη μπορεί να βρούμε μια λύση. Μπορούμε να ξεκινήσουμε επιλέγοντας ως πρώτο αριθμό το 1. Τώρα, όπως λέει η διατύπωση, υψώνεται στο τετράγωνο και προστίθεται στον επόμενο αριθμό για να δώσει ένα άλλο τετράγωνο. Για παράδειγμα $12+3=4=2^2$.

Έχουμε ήδη επιλέξει το 1 και 3. Τώρα υψώνεται το 3 στο τετράγωνο και προστίθεται ένας άλλος αριθμός για να δώσει και πάλι ένα τετράγωνο. Για παράδειγμα, $32+7=16=4^2$.

Ήδη έχουμε το 1, το 3 και 7. Τώρα πρέπει μόνο να ολοκληρωθεί ο κύκλος και να ελέγξουμε αν υψώνοντας το 7 στο τετράγωνο και προσθέτοντας το 1 θα πάρουμε επίσης ένα τετράγωνο: $7^2+1=50$. Κρίμα, το 50 δεν είναι τετράγωνο! Θα πρέπει, επομένως, να αρχίσουμε ξανά προσπαθώντας με άλλους αριθμούς. Το πρόβλημα είναι σαν ένα παζλ: πρέπει να ταιριάζουν όλα τα κομμάτια. Ο Fermat περνούσε πολλές ώρες διασκεδάζοντας με αυτό το είδος των προβλημάτων. Γι' αυτόν ήταν σαν μια πρόκληση στη φαντασία, το ίδιο είδος πρόκλησης που στη συνέχεια πρότεινε στους συγχρόνους του.

15.6 Η λύση του προβλήματος 32

Ο Διόφαντος είχε μια λύση για το παραπάνω πρόβλημα, και δεν φαινόταν να την έχει βρει κατά τύχη! Έμοιαζε περισσότερο σαν να είχε έναν μαγικό τρόπο να το πετύχει. Η λύση που προτείνει ο Διόφαντος είναι η εξής: «Εστω X ο πρώτος, $2x+1$ ο δεύτερος και $2 \cdot (2x+1)+1$ ή, ισοδύναμα, $4x+3$ ο τρίτος, έτσι ώστε να πληρούνται οι δύο συνθήκες. Η τελευταία συνθήκη δίνει $(4x+3)^2 + x =$ τετράγωνο και έστω τετράγωνο $= (4x-4)^2$. Τότε $x = 7/57$ και οι αριθμοί είναι $7/57$, $71/57$, $199/57$ ». Αλλά πώς είναι δυνατό να λειτουργεί όλο αυτό; Δίχως αμφιβολία, το ταλέντο του Διόφαντου ήταν εξαιρετικό.

Τον πρώτο αριθμό τον ονόμασε x . Τον δεύτερο αριθμό θα μπορούσε να τον ονομάσει με πολλούς τρόπους, αλλά αποφάσισε να τον ονομάσει $2-x+1$ επειδή ήξερε $x^2 + 2 \cdot x + 1 = (x+1)^2$, και συνεπώς είχε ήδη ικανοποιηθεί η πρώτη συνθήκη. Στη συνέχεια, τον τρίτο αριθμό θα μπορούσε να τον ονομάσει επίσης όπως ήθελε, αλλά αποφάσισε να τον ονομάσει $2 \cdot (2 \cdot x + 1) + 1$ δηλαδή $4 \cdot x + 3$, επειδή ήξερε ότι $(2 \cdot x + 1)^2 + 2 \cdot x + 1 = (2 \cdot x + 2)^2$, και συνεπώς ικανοποιείται επίσης η δεύτερη συνθήκη. Του έμενε μόνο να ικανοποιήσει την Τρίτη συνθήκη, ήτοι: $(4 \cdot x + 3)^2 + x =$ τετράγωνο. Και εδώ εμφανίζεται ένα νέα ιδιοφυές άγγιγμα, αφού ο Διόφαντος σκέφτηκε ότι αυτό το τετράγωνο θα μπορούσε να είναι της μορφής $(4 \cdot x - 4)$, επειδή έτσι θα μπορούσε να λύσει εύκολα το πρόβλημα με την επίλυση μιας απλής εξίσωσης.

$$(4 \cdot x + 3)^2 + x = (4x - 4)^2.$$

Αναπτύσσοντας τα τετράγωνα παίρνουμε:

$$16 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 9 + x = 16 \cdot x^2 - 32 \cdot x + 16.$$

Απλουστεύοντας το $16 \cdot x^2$ από τα δύο μέλη της ισότητας παίρνουμε:

$$24 \cdot x + 9 + x = -32 \cdot x + 16.$$

Επιλύοντας για το x παίρνουμε τελικά

$$24 \cdot x + x + 32 \cdot x = 16 - 9 =$$

$$57 \cdot x = 7 =$$

$$x = 7/57,$$

που είναι η τιμή του πρώτου αριθμού που αναζητούσαμε. Από εκεί είναι εύκολο να πάρουμε τον δεύτερο αριθμό $2 \cdot x + 1 = 71/57$, και το τρίτο αριθμό $4 \cdot x + 3 = 199/57$. Τέλος επαληθεύεται εύκολα ότι:

$$(7/57)^2 + 71/57 = 4.096/3.249 = (64/57)^2 \text{ (πρώτη συνθήκη),}$$

$$(71/57)^2 + 199/57 = 16.384/3.249 = (128/57)^2 \text{ (δεύτερη συνθήκη),}$$

$$(199/57)^2 + 7/57 = 40.000/3.249 = (200/57)^2 \text{ (Τρίτη συνθήκη).}$$

15.7 Χαρακτηριστικά του προβλήματος

Στο πρόβλημα αυτό μπορεί να εκτιμηθεί όλη η αίσθηση και το ύφος του Διόφαντου, που πρέπει να κατέπληξε τον Fermat. Από τη μία πλευρά το είδος του προβλήματος που επιλύει, αισθητικά όμορφο, αλλά φαινομενικά άχρηστο. Ποιός μπορεί να ενδιαφερθεί για την επίλυση αυτού του προβλήματος; Δεν χρησιμεύει για την καταμέτρηση των σοδειών, ούτε για τη μέτρηση της Γης, ούτε για την εύρεση της θέσης των άστρων. Είναι απλά ένα άσμα στις ιδιότητες των ρητών αριθμών. Η χρησιμότητά του βρίσκεται στην συμφωνία των αριθμών, στην αιώνια επιθυμία για την κατανόηση της εσωτερικής αρμονίας και των αναμειγμένων μέτρων τους. Ωστόσο, η επίλυσή του είναι μια τόσο βαθιά πρόκληση για το μυαλό που δοκιμάζει όλον τον μαθηματικό μηχανισμό και τα όργανα εργασίας.

Πράγματι, ο Vieta συλλογιζόμενος για τα «Αριθμητικά», ήταν αυτός που έθεσε τις βάσεις της αλγεβρικής σημειολογίας που χρησιμοποιείται σήμερα. Η πρόθεσή του ήταν να κάνει πιο κατανοητό το έργο του Διόφαντου και να λύνει όλο και πιο σύνθετα προβλήματα.

Ο Fermat επίσης, από τα «Αριθμητικά», σκέφτηκε νέα προβλήματα και επινόησε νέες μεθόδους απόδειξης που έφεραν στην πρώτη γραμμή το ενδιαφέρον για τη θεωρία των αριθμών, η οποία με τον καιρό έχει γίνει ένας από τους πιο γόνιμους κλάδους των μαθηματικών. Από τη μεριά τους, οι πρώτοι αριθμοί οι οποίοι τόσο απασχόλησαν τους Έλληνες, αποτελούν σήμερα τη βάση των πιο εξελιγμένων συστημάτων που χρησιμοποιούνται για την κρυπτογράφηση των πληροφοριών και για την κατασκευή μοντέλων του σύμπαντος.

Από την άλλη πλευρά, το πρόβλημα που επιλύθηκε έχει μια καθαρά αριθμητική αναφορά. Αν υπήρχε μια γεωμετρική αναφορά, η πρόσθεση ενός αριθμού στο τετράγωνο με έναν άλλο αριθμό για να δώσει ως αποτέλεσμα ένα τετράγωνο, θα ήταν για παράδειγμα η πρόσθεση ενός εμβαδού και ενός μήκους, για να δώσει ένα εμβαδόν, το οποίο γεωμετρικά θα ήταν μια πρόσθεση μεγεθών διαφορετικών μονάδων. Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι διαφορετικό, γιατί λέει ότι τα τετράγωνα που κατασκευάζονται πάνω στις καθέτους έχουν άθροισμα το τετράγωνο που κατασκευάζεται πάνω στην υποτείνουσα.

Δηλαδή δύο εμβαδά που προστίθενται δίνουν ένα ευρύτερο εμβαδόν. Γεωμετρικά, οι ποσότητες που εμπλέκονται στην εξίσωση είναι οι ίδιες. Επίσης, στο θεώρημα του Fermat τα μεγέθη που εμπλέκονται είναι του ίδιου βαθμού, $x+y=z^n$. Για τον εκθέτη $n=3$ θα μπορούσε να φανταστεί κανείς ότι προστίθενται δύο όγκοι για να δώσουν έναν μεγαλύτερο. Για μεγαλύτερους εκθέτες θα μιλούσαμε για υπερόγκους σε χώρους ανώτερης διάστασης.

15.8 Παράλληλα σκεπτικά

Ένα άλλο χαρακτηριστικό του προβλήματος είναι ότι η λύση δεν είναι καθόλου

ασήμαντη. Δεν φαίνεται εύκολο να βρεθεί κατά τύχη. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι παρόν σε πολλά από τα προβλήματα των «Αριθμητικών». Φαίνεται επίσης ότι ο Διόφαντος αρκείται αρχικά να βρίσκει μόνο μια συγκεκριμένη λύση, συλλογιζόμενος στην πορεία, Χωρίς να ασχολείται για την επίλυση του γενικότερου πρόβλημα της εύρεσης όλων των λύσεων.

Ωστόσο, οι αναλύσεις του ανοίγουν τις πόρτες σε ένα σύμπαν παράλληλων συλλογισμών που επιτρέπουν να βρεθούν νέες λύσεις που δεν εμφανίζονται στο βιβλίο. Για παράδειγμα, αν αντί να εξισώσει την τελευταία προϋπόθεση με $4x-4$ την είχε κάνει ίση με $4x-5$, θα είχε προκύψει μια άλλη λύση απολύτως έγκυρη:

$$\begin{aligned}(4 \cdot x + 3)^2 + x &= (4 \cdot x - 5)^2 = \\16 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 9 + x &= 16 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 25 = \\24 \cdot x + 9 + x &= -40 \cdot x + 25 = \\24 \cdot x + x + 40 \cdot x &= 25 - 9 = \\65 \cdot x &= 16 = \\x &= 16/65.\end{aligned}$$

Επομένως, θα είχε μια άλλη λύση, αποτελούμενη από τους αριθμούς $16/65, 97/65, 259/65$.

Αν αντί να εξισώσει την τελευταία προϋπόθεση σε $4x - 4$ την είχε κάνει ίση με $5x - 3$, θα είχε επίσης αποκτήσει μια άλλη λύση απολύτως έγκυρη:

$$\begin{aligned}(4 \cdot x + 3)^2 + x &= (5 \cdot x - 3)^2 = \\16 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 9 + x &= 25 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 9.\end{aligned}$$

Απλουστεύοντας τώρα το 9 από τα δύο μέλη της ισότητας παίρνουμε:

$$16 \cdot x^2 + 24 \cdot x + x = 25 \cdot x^2 - 30 \cdot x.$$

Διαιρώντας τα δύο μέλη με και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}16 \cdot x + 24 + 1 &= 25 \cdot x - 30 = \\24 + 1 + 30 &= 25 \cdot x - 16 \cdot x = \\x &= 55/9.\end{aligned}$$

Επομένως, θα είχε μια άλλη λύση, αποτελούμενη από τους αριθμούς $55/9, 119/9, 247/9$.

Επίσης, ανοίγονται τώρα οι πόρτες για νέες προκλήσεις. Για παράδειγμα, υπάρχουν ακέραιες λύσεις που ικανοποιούν επίσης αυτές τις ίδιες συνθήκες;

15.9 Το πρόβλημα 29 του βιβλίου IV

Ένα από τα προβλήματα των «Αριθμητικών» με τη μεγαλύτερη ιστορία είναι το πρόβλημα 29 του βιβλίου IV. Η διατύπωσή του είναι η εξής: «Βρείτε τέσσερα τετράγωνα το άθροισμα των οποίων, συν το άθροισμα των πλευρών τους, είναι ένας δεδομένος αριθμός. Παίρνει και πάλι το λόγο η ιδιοφυΐα του Διόφαντου:

«Εστω ο αριθμός 12. Το $x^2 + x + 1/4$ είναι ένα τετράγωνο. Επομένως, το άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων + το άθροισμα των πλευρών τους +1 = το άθροισμα άλλων τεσσάρων τετραγώνων = 13 από την υπόθεση. Επομένως, θα πρέπει να γράψουμε το 13 ως άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Τότε, εάν αφαιρέσουμε $1/2$ από κάθε πλευρά, παίρνουμε τις πλευρές των τετραγώνων που ζητούνται. Τώρα, $13 = 4 + 9 = (64/25 + 36/25) + (144/25 + 81/25)$, και οι πλευρές των ζητούμενων τετραγώνων είναι $11/10, 7/10, 19/10, 13/10$, τα τετράγωνά τους είναι $121/100, 49/100, 361/100, 169/100$ ». Μια άψογη λογική για μια συγκεκριμένη περίπτωση $\eta = 12$. Το πρόβλημα που έχει ως στόχο να επιλύσει ο Διόφαντος, με σύγχρονη σημειογραφία, θα μπορούσε να εκφραστεί ως εξής «Βρείτε x_1, x_2, x_3, x_4 έτσι ώστε

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n,$$

όπου n είναι ένας δεδομένος αριθμός». Προσθέτοντας 1 σε κάθε μέλος της ισότητας, έχουμε:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = n + 1.$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους, και υποθέτοντας ότι $n = 12$ έχουμε:

$$x_1^2 + x_1 + 1/4 + x_2^2 + x_2 + 1/4 + x_3^2 + x_3 + 1/4 + x_4^2 + x_4 + 1/4 = 12 + 1.$$

Δεδομένου ότι $x^2 + x + 1/4 = (x + 1/2)^2$, αυτό μπορεί να γραφτεί:

$$(x_1 + 1/2)^2 + (x_2 + 1/2)^2 + (x_3 + 1/2)^2 + (x_4 + 1/2)^2 = 13.$$

Επομένως, πρέπει να εκφράσουμε το 13 ως άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι εύκολο να δούμε ότι το 13 είναι το άθροισμα δύο τετραγώνων, $4 + 9$, και από το Πυθαγόρειο θεώρημα ήταν εύκολο να εκφράσουμε καθένα από αυτά τα δύο τετράγωνα ως άθροισμα δύο άλλων τετραγώνων, όπως εξηγούσε ο ίδιος ο Διόφαντος σε ένα άλλο από τα προβλήματα των Αριθμητικών.

Οι αριθμοί 4, 3, 5 είναι μια Πυθαγόρεια τριάδα, δηλαδή, $4^2 + 3^2 = 5^2$. Από εκεί, διαιρώντας με 5^2 , παίρνουμε $(4/5)^2 + (3/5)^2 = 1$. Τώρα, αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της ισότητας με 2^2 , παίρνουμε $(8/5)^2 + (6/5)^2 = 2^2$, δηλαδή, $(64/25) + (36/25) = 4$. Και αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της ισότητας 33, παίρνουμε $(12/5)^2 + (9/5)^2 = 3^2$, δηλαδή $(144/25) + (81/25) = 9$, η οποία είναι η ανάλυση που προτείνεται από τον Διόφαντο.

Επομένως, έχουμε τη λύση:

$$(x_1 + 1/2) = 8/5,$$

$$(x_2 + 1/2) = 8/5,$$

$$(x_3 + 1/2) = 8/5,$$

$$(x_4 + 1/2) = 8/5.$$

Αφαιρώντας $1/2$ παίρνουμε τη λύση που προτείνει ο Διόφαντος. Το απίστευτο με αυτή τη λύση είναι ότι $13 = 1 + 4 + 4 + 4$, δηλαδή, ότι δεν υπήρχε ανάγκη να πάμε τόσο μακριά και να διασπάσουμε το 13 ως άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων! Αυτή η διάσπαση θα έδινε την λύση $3/2, 3/2, 3/2, 3/2$.

15.10 Ένα αινιγματικό σημείωμα

Ο Μπασέ συνειδητοποίησε ότι ο Διόφαντος φαίνεται να θεωρεί σε αυτό και σε άλλα προβλήματα των «Αριθμητικών» ότι κάθε αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων, προσθέτοντας ότι ο ίδιος είχε επαληθεύσει αυτό το γεγονός για τους αριθμούς έως το 325, αλλά θα ήθελε να έχει μια απόδειξη. Τότε κινητοποιήθηκε η ιδιοφυία του Fermat και έγραψε: «Είμαι ο πρώτος που ανακάλυψε ένα ακόμα πιο ωραίο γενικότερο θεώρημα, το εξής: κάθε αριθμός είναι ένας τριγωνικός αριθμός ή το άθροισμα δύο ή τριών τριγωνικών αριθμών. Κάθε αριθμός είναι ένα τετράγωνο ή το άθροισμα δύο, τριών ή τεσσάρων τετραγώνων. Κάθε αριθμός είναι ένας πενταγωνικός αριθμός ή το άθροισμα δύο, τριών, τεσσάρων ή πέντε πενταγωνικών αριθμών. Και ούτω καθεξής επ' άπειρον, για εξάγωνα, επτάγωνα, ή οποιοδήποτε άλλο πολύγωνο, αλλάζοντας τη διατύπωση αυτού του γενικού και υπέροχου θεωρήματος ανάλογα με τον αριθμό των γωνιών».

Και καταλήγει λέγοντας: «Την απόδειξη γι' αυτό, η οποία εξαρτάται από πολλά και περίπλοκα μυστήρια των αριθμών, δεν μπορώ να τη δώσω εδώ, αφού έχω αποφασίσει να αφιερώσω μια ξεχωριστή και ολοκληρωμένη εργασία για το θέμα αυτό και με τον τρόπο αυτό να προωθήσω την αριθμητική σε αυτή την περιοχή της έρευνας με εξαιρετικό τρόπο πέρα από τα γνωστά παλαιότερα όριά της». Όμως, ποτέ αυτό το έργο δεν είδε το φως. Κατάφερε να το γράψει ποτέ; Είχε πραγματικά κάποια απόδειξη; Δεν είναι γνωστό. Αυτό είναι άλλο ένα από τα μυστήρια του Fermat. Το σίγουρο είναι ότι κατόρθωσε μαθηματικοί του μεγέθους του Λεζάντρ, του Lagrange, του Euler και του Gauss να συλλογιστούν για το πρόβλημα αυτό και να δώσουν τη μερική συμβολή τους στο ζήτημα.

Πορτρέτο του Cauchy, ο οποίος ολοκλήρωσε τις αποδείξεις που πρότεινε ο Fermat σχετικά με το πρόβλημα.



Το 1770 ο Lagrange απέδειξε την περίπτωση του τετραγώνου, δηλαδή ότι κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Η απόδειξη της τριγωνικής υπόθεσης οφείλεται στον Gauss, ο οποίος στις 10.07.1796 σημείωσε στο ημερολόγιό του: ****EYRHKΑ num=Δ+Δ+Δ** (Εύρηκα κάθε αριθμός=τριγωνικός + τριγωνικός +τριγωνικός). Η περίπτωση αυτή κατέληξε να είναι ισοδύναμη με την απόδειξη ότι κάθε αριθμός της μορφής $8 \cdot m + 3$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τριών περιττών τετραγώνων. Ο Ντίρικλετ, από την πλευρά του, μελέτησε με πόσους τρόπους μπορεί να εκφραστεί ένας δεδομένος αριθμός ως άθροισμα τριών τριγωνικών αριθμών. Τέλος, ο Cauchy παρουσίασε το 1813 μια πλήρη απόδειξη. Είχαν χρειαστεί σχεδόν 150 χρόνια για να λυθεί μια σημείωση στο περιθώριο.

15.11 Το πρόβλημα 8 του βιβλίου II

Το πρόβλημα 8 του Βιβλίου II είναι σίγουρα ένα βασικό ορόσημο στην ιστορία που μας απασχολεί. Σε αυτό ο Διόφαντος θέτει το εξής πρόβλημα «Γράψε έναν τετραγωνικό αριθμό ως το άθροισμα δύο τετραγώνων». Στη συνέχεια, ο μαθηματικός δίνει την ακόλουθη λύση:

«Δίνεται ο τετραγωνικός αριθμός 16. Έστω x^2 ένα από ζητούμενα τετράγωνα. Τότε, $16 - x^2$ θα είναι ίσο με ένα τετράγωνο. Πάρε ένα τετράγωνο της μορφής $(m \cdot x - 4)^2$, όπου η είναι οποιοσδήποτε ακέραιος και 4 ο αριθμός που είναι η τετραγωνική ρίζα του 16. Πάρε για παράδειγμα $(2 \cdot x - 4)^2$ και εξίσωσέ το με $16 - x^2$. Τότε $4 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 16 = 16 - x^2$, ή $5 \cdot x^2 = 16 \cdot x$, και $x = 16/5$. Τα ζητούμενα τετράγωνα είναι λοιπόν $256/25$, $144/25$ ».

Η τεχνική είναι η ίδια που χρησιμοποιήθηκε για το πρόβλημα 32 του βιβλίου II. Ως τιμή του m θα μπορούσε να είχε επιλέξει οποιαδήποτε άλλη, δημιουργώντας άπειρες λύσεις, όλες εύκολες να βρεθούν. Στο περιθώριο της σελίδας που αφιερώνεται σε αυτό το πρόβλημα ο Fermat έγραψε ένα σχόλιο που θα μείνει στην ιστορία:

«*Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet*».

Η μετάφραση είναι ως εξής: «Είναι αδύνατο ένας κύβος να είναι το άθροισμα δύο κύβων, μια τέταρτη δύναμη να είναι το άθροισμα δύο τέταρτων δυνάμεων, ή γενικά οποιοσδήποτε αριθμός που είναι δύναμη μεγαλύτερη του δύο να είναι το άθροισμα δύο δυνάμεων όπως αυτές. Ανακάλυψα μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη την οποία το περιθώριο αυτό είναι πολύ μικρό για να τη χωρέσει».

Με άλλα λόγια, εδώ λέει ότι η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει ρητές λύσεις με x, y, z, διαφορετικούς από το μηδέν και $n > 2$, και ο Fermat δίνει τη δικαιολογία ότι η θαυμάσια απόδειξη που είχε στο μυαλό του δεν χωρούσε στο περιθώριο της σελίδας. Αυτή η

δικαιολογία της έλλειψης χώρου θυμίζει τη σημείωση του προβλήματος 29 του Βιβλίου IV.

Φυσικά, αυτή η πολυαναμενόμενη απόδειξη δεν είδε ποτέ το φως. Αυτό και άλλα σχόλια του Fermat δεν παύουν ποτέ να εκπλήσσουν. Από τη μία πλευρά φαίνεται ότι δεν είχε ποτέ πρόθεση να τα δημοσιεύσει. Γι' αυτό δεν αναμένονταν από αυτόν κανενός είδους αποδείξεις. Μοιάζουν περισσότερο με προσωπικές σημειώσεις που θα του χρησίμευαν αργότερα για να θυμηθεί τι είχε σκεφτεί και να συνεχίσει να εμβαθύνει περαιτέρω στο θέμα.

Από την άλλη πλευρά όμως φαίνεται σαν να είναι γραμμένα σε ύφος που υποθέτει ότι πίσω από αυτά υπάρχει ένας αναγνώστης. Διαφορετικά, τι νόημα έχει να εξηγή στον εαυτό του ότι έχει μια θαυμάσια απόδειξη που το περιθώριο της σελίδας δεν χωράει να τη γράψει, ή ότι δεν μπορεί να δώσει μια απόδειξη επειδή αποφάσισε να δημοσιεύσει μια πλήρη και ξεχωριστή εργασία για το θέμα αυτό; Οι σημειώσεις φαίνονται σαν να του χρησίμευαν ως προσωπικό βιβλίο εργασιών, όμως ταυτόχρονα είχε στο μυαλό του να ετοιμάσει μια σχολιασμένη έκδοση των Αριθμητικών με σκοπό να τη δημοσιεύσει κάποια μέρα.

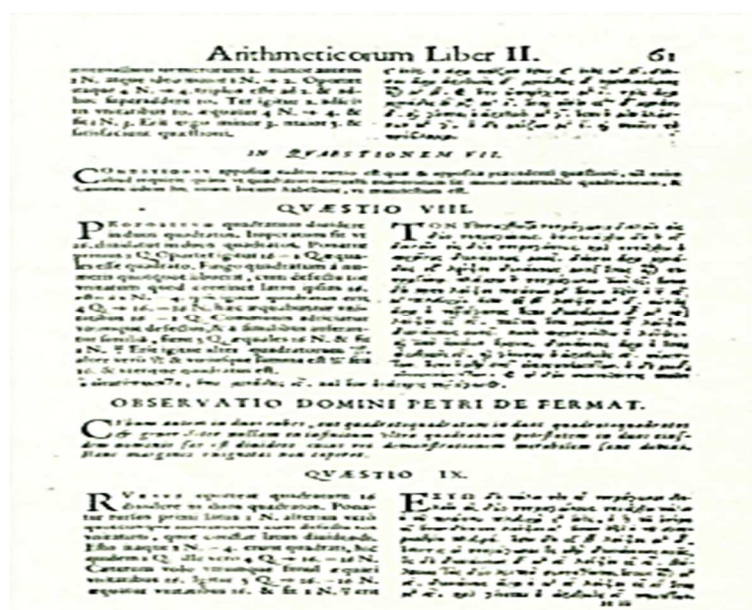
16. Η συνεισφορά του Fermat

Όπως και να 'χει, το σχόλιο δεν χάνεται στο κενό. Ο Fermat επέστρεψε σε αυτό σε πολλές περιπτώσεις, και προσπάθησε πραγματικά να βάλει σε τάξη και να γράψει αυτή την «υπέροχη απόδειξη». Το πρώτο που συνειδητοποιεί Ο Fermat είναι ότι κάθε ρητή λύση έχει ως αποτελέσματα, πολλαπλασιάζοντας με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών, μια ακέραια λύση. Επομένως, αρκεί να αποδειχθεί ότι η εξίσωση δεν επιδέχεται ακέραιες λύσεις.

Από την άλλη πλευρά, είναι εύκολο να δούμε ότι χρειάζεται μόνο να αποδειχθούν οι περιπτώσεις $n = p$, με p πρώτο και $n = 4$. Όλες οι άλλες περιπτώσεις θα έχουν αποδειχθεί αυτόματα. Επειδή, αν $n = p \cdot m$, τότε η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ μετατρέπεται στην εξίσωση $x^{m \cdot p} + y^{m \cdot p} = z^{m \cdot p}$, από την οποία συνεπάγεται ότι $(x^m)^p + (y^m)^p = (z^m)^p$. Αν για τον εκθέτη p δεν υπάρχει λύση, δεν θα υπάρχει ούτε για τον εκθέτη που είναι πολλαπλάσιο του p . Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι αν δεν υπάρχει λύση για τον εκθέτη $n = 4$, δεν θα υπάρχει λύση για τους εκθέτες που είναι πολλαπλάσια του 4. Επειδή $n > 2$, ο n διαιρείται είτε από το 4 είτε από έναν πρώτο αριθμό μεγαλύτερο του 2. Συνεπώς έχουμε εξαντλήσει όλες τις περιπτώσεις.

Έτσι, ο Fermat επικεντρώθηκε στο να αποδείξει ότι η εξίσωση δεν έχει ακέραιες λύσεις για $n = p$, με p πρώτο, και για $n = 4$.

Η σελίδα του βιβλίου 2 των «Αριθμητικών» με το πρόβλημα 8 στην έκδοση του 1670, που περιλαμβάνει το σχόλιο του Fermat

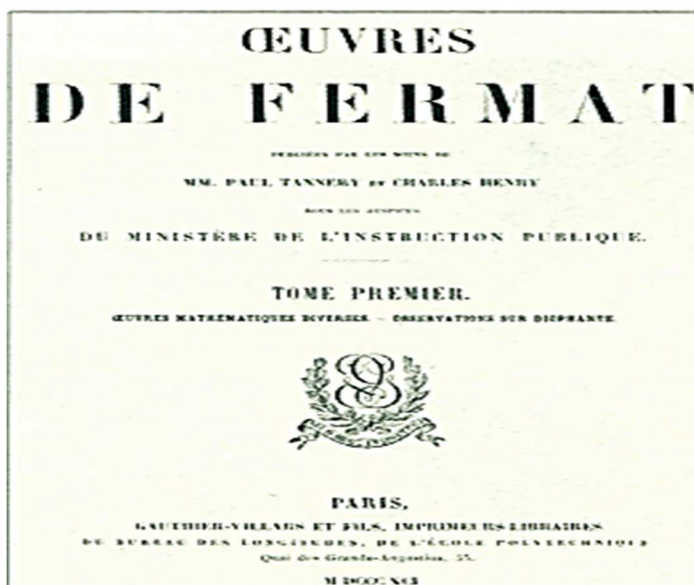


Όλα φαίνονται να δείχνουν ότι είχε πράγματι επιλύσει τις περιπτώσεις $n = p$, και $n = 4$. Η απόδειξη της περίπτωσης $n = 3$ δεν έχει φτάσει σ' εμάς, αλλά ο Fermat αναφέρεται σε αυτή σε μία από τις επιστολές του. Η υπόθεση $n = 4$ έχει φτάσει σ' εμάς, και είναι υπέροχη. Σε αυτή επινοεί τη μέθοδο της κατάβασης εις άπειρο δείχνει ότι, αν υπάρχουν τρεις αριθμοί $x + y + z$, φυσικοί και διαφορετικοί από το μηδέν, που επαληθεύουν την εξίσωση $x^4 + y^4 = z^4$, τότε μπορούν να βρεθούν άλλο τρεις μικρότεροι φυσικοί και μη μηδενικοί x', y', z' που επαληθεύουν επίσης τη ίδια εξίσωση. Με τον τρόπο αυτό, με διαδοχικούς συλλογισμούς, αποκτούνται ολοένα και μικρότερες λύσεις, όλες φυσικές και μη μηδενικές.

Όμως αυτό οδηγεί σαφώς σε παραλογισμό, επειδή οι φυσικοί αριθμοί δεν μπορούν να γίνονται άπειροι μικροί. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αυτές οι λύσεις δεν υπάρχουν. Με την απόδειξη της κατάβασης εις άπειρο ο Fermat πίστευε ότι είχε βρει μια γενική μέθοδο που θα του επέτρεπε να αποδείξει οποιοδήποτε θέμα σχετικό με τη θεωρία των αριθμών, όπως ο Descartes πίστευε ότι με τη βοήθεια της αναλυτικής γεωμετρίας θα μπορούσε να λύσει όλα τα προβλήματα της φύσης. Αλλά η πραγματικότητα αποδεικνύεται πάντα πιο φευγαλέα. Ο πλούτος της δεν επιτρέπει να τιθασευτεί από μια μοναδική μέθοδο, όσο ισχυρή κι αν είναι. Πάντα θα αναφαίνονται εξαιρέσεις που θα δοκιμάζουν εκ νέου την ανθρώπινη επινοητικότητα, και θα απαιτούν να ξεπερνά συνεχώς τον εαυτό της για να φτάνει σε ολοένα υψηλότερα και βαθύτερα σημεία. Και αυτό ακριβώς ήταν αυτό που συνέβη με το τελευταίο θεώρημα του Fermat.

Η κατάβαση εις άπειρο επέτρεψε σίγουρα στον Fermat να αποκτήσει μια απόδειξη για την περίπτωση $n = 3$, αλλά μάλλον συνειδητοποίησε ότι οι ανώτερες περιπτώσεις δεν μπορούσαν να επιλυθούν με τον ίδιο τρόπο. Ακόμα κι έτσι, η συμβολή του Fermat ήταν θαυμαστική. Επειδή, αποδεικνύοντας την περίπτωση $n = 4$, είχε φέρει στο φως μια νέα μέθοδο απόδειξης στα μαθηματικά η οποία αποδείχθηκε εξαιρετικά γόνιμη. Και είχε επίσης αποδείξει το θεώρημά του για το ήμισυ των εκθετών, που δεν είναι και λίγοι! Όμως με τη σειρά του είχε αφήσει ανοικτή την επίλυση όλων των άλλων περιπτώσεων, ένα καθήκον στο οποίο θα αφιερωθούν στη συνέχεια οι πιο επιφανείς μαθηματικοί κάθε εποχής, χωρίς επιτυχία.

Τα έργα του Fermat δημοσιεύθηκαν μετά το θάνατο του, όπως ο τόμος της εικόνας, που ανήκει σε μια έκδοση του 19^{ου} αιώνα



17. Μια μεγαλοφυΐα χωρίς δημοσίευση

Έχει ειπωθεί πολλές φορές ότι ο Fermat δεν ήθελε να δημοσιεύει τις εργασίες του. Όμως αυτό δεν είναι αλήθεια. Στην πραγματικότητα, ήδη το 1636 έστειλε στον Μερσέν τη «Μέθοδο των μεγίστων και ελαχίστων» και του ζήτησε να την κάνει γνωστή στους

μαθηματικούς του Παρισιού. Επιπλέον, στην αλληλογραφία του, σε όλη τη διάρκεια της ζωής του, δεν έθετε μόνο προκλήσεις, αλλά έδινε επίσης ενδείξεις για τις λύσεις, και σε ορισμένες περιπτώσεις εξηγούσε με μεγάλη λεπτομέρεια ορισμένες από τις μεθόδους τους.

Το 1654 ο Fermat ξανάρχισε την αλληλογραφία του με τους μαθηματικούς του Παρισιού. Ο Blaise Pascal επικοινωνήσε μαζί του για να του ζητήσει τη γνώμη του για τις ιδέες του σχετικά με τις πιθανότητες, και ο Fermat απάντησε ευγενικά σχετίζοντάς τις με την συνδυαστική ανάλυση. Μέσα από τις επιστολές του έθετε τα θεμέλια ενός νέου κλάδου των μαθηματικών: της θεωρίας των πιθανοτήτων και ο Fermat επωφελήθηκε από την ευκαιρία για να δημοσιοποιήσει ορισμένα από τα τελευταία αποτελέσματά του.

Από τη μία πλευρά, ο Fermat έθεσε νέες προκλήσεις στη θεωρία των αριθμών στους Μπλεζ Pascal, Ζιλ Περσόν ντε Ρομπερβάλ, John Wallis, William Brouncker, Μπερνάρ Φρενίκλ ντε Μπεσύ... Ανάμεσα στις προκλήσεις που πρότεινε ήταν να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $Nx^2 + 1 = y^2$, όπου το N να μην είναι τετράγωνο.

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + 2 = y^3$ έχει μόνο μία λύση στο σύνολο των φυσικών αριθμών και να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + 4 = y^3$ έχει μόνο δύο φυσικές λύσεις. Ο Fermat είχε επίγνωση ότι για να επιτευχθεί πρόοδος σε αυτά και σε παρόμοια προβλήματα χρειαζόταν να τελειοποιηθούν νέες μέθοδοι απόδειξης που θα έκαναν να προχωρήσουν πολύ τα μαθηματικά. Ωστόσο, οι σύγχρονοί του είδαν αυτές τις προκλήσεις ως πολύ ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων, για τις οποίες ενδεχομένως να μην άξιζε να αφιερώσουν πολύ χρόνο. Ωστόσο, σιγά-σιγά κατάφερε να πείσει ορισμένους από τους αλληλογράφους του να αφιερώσουν ένα μέρος του χρόνου τους στην έρευνα αυτών των θεμάτων.

Από την άλλη πλευρά, ο Fermat ζήτησε από τον Pascal και τον Ντε Καρκαβύ να τον βοηθήσουν να βρει εκδότη για την πραγματεία του «*Novus secundarum et ulterioris radicum in analyticis usus*» (Νέες δεύτερες και παραπάνω τάξεως ρίζες σε αναλυτικές χρήσεις). Για το σκοπό αυτό στις **09.08.1654** έγραψε στον Ντε Καρκαβύ: *«αν δεν διαφωνείτε μ' αυτό, θα μπορούσατε εσείς οι δύο [αναφερόμενος στον Ντε Καρκαβύ και τον Pascal] να κάνετε δυνατή την εκτύπωση του έργου), για το οποίο συναινώ να προσθέσετε και να αναιρέσετε, αποσαφηνίζοντας τις έννοιες που θεωρείτε ότι παρουσιάζονται με πολύ συνοπτικό τρόπο, απαλλάσσοντάς με έτσι από κοπιώδες έργο που οι άλλες εργασίες με εμποδίζουν να πραγματοποιήσω. Η επιθυμία μου είναι το έργο να εμφανιστεί χωρίς το όνομά μου, και αφήνω σε εσάς να αποδώσετε την πατρότητά του σε όποιον θεωρείτε φίλο σας»*. Ο Ντε Καρκαβύ με τη σειρά του επικοινωνήσε με τον Χόιχενς. Όμως το σίγουρο είναι ότι κανένας από αυτούς δεν κατάφερε να πραγματοποιήσει τη δημοσίευση. Έτσι περνούσε ο καιρός και τα έργα του Fermat κινδύνευαν να μείνουν στη λήθη.

Ο Fermat, γνωρίζοντας αυτή την κατάσταση, βρήκε μια λύση με τον καλύτερο τρόπο που ήξερε: γράφοντας επιστολές. Δεν ήθελε να εμφανίζεται το όνομά του στις εργασίες του. Το σημαντικό γι' αυτόν ήταν η κληρονομιά που άφηνε στην επιστήμη ώστε να εξακολουθεί να προχωρά. Το 1659 ζήτησε στον Ντε Καρκαβύ να στείλει στον Χόιχενς το «*Relation des nouvelles decouvertes en la science des nombres*» (Σχετικά με καινούριες ανακαλύψεις στην επιστήμη των αριθμών). Στο έργο αυτό, εξηγούσε με περισσότερες λεπτομέρειες απ' ότι συνήθως πολλές από τις μεθόδους του, αλλά όχι με όλες τις λεπτομέρειες που θα επιθυμούσαν οι συνάδελφοί του.

Ο Fermat πέθανε πριν βρει έναν εκδότη που θα δημοσίευε τις εργασίες του. Αν και μερικές από αυτές είδαν το φως εν μέρει μέσω των επιστολών του, ή μέσω των εκδόσεων άλλων σύγχρονων μαθηματικών που γνώριζαν τα αποτελέσματά του, το γεγονός είναι ότι οι περισσότερες από αυτές πιθανότατα θα είχαν χαθεί αν δεν υπήρχαν οι προσπάθειες του γιου του Σαμουέλ, ο οποίος μοιραζόταν το πάθος του για τα μαθηματικά. Το 1670 ο Σαμουέλ Fermat κατάφερε να δημοσιεύσει μια έκδοση της μετάφρασης του Μπασέ των «Αριθμητικών» του Διόφαντου με τις παρατηρήσεις που έκανε ο πατέρας του.

Οι μέθοδοι που πρότεινε ο Fermat εξέπληξαν άλλη μια φορά τους συγχρόνους του. Η ιστορία απέδειξε ότι οι συνεισφορές του βρίσκονταν στην αρχή μιας σειράς από νέες θεωρίες που γεννιόνταν ακριβώς εκείνη την τόσο γόνιμη για τη σκέψη εποχή. Για την επίλυση των προβλημάτων μεγίστων και ελαχίστων επινόησε κάτι που ισοδυναμεί με το μηδενισμό της παραγώγου. Επέλυσε προβλήματα γεωμετρίας μέσω της άλγεβρας πριν από τον Ντεκάρτ, και μπορεί να θεωρηθεί ο πατέρας της αναλυτικής γεωμετρίας. Επέλυσε προβλήματα πιθανοτήτων και συνδυαστικής, και θεωρείται μαζί με τον Pascal ως ένας από τους ιδρυτές αυτών των νέων θεωριών. Επιπλέον, ο Fermat θεωρείται ο πατέρας της σύγχρονης θεωρίας των αριθμών, όπου η έξοχη λάμψη του και η αξία των συνεισφορών του ήταν τεράστια. Όμως έχουμε επίσης τον Fermat που ερευνά στην οπτική και τη μηχανική.

Όπως ο Μίδας που μετατρέπει τα πάντα σε χρυσό, κάθε ζήτημα που άγγιξε ο Fermat περιέχει κάποια βασική συμβολή του για την πρόοδο της επιστήμης. Και όλα αυτά ενώ το επάγγελμά του είναι δικηγόρος! Αν του τύχαινε να εξετάσει την εξίσωση της δικαιοσύνης, και πάλι θα μπορούσε να βρει τη λύση. Σε ένα επεισόδιο του 1997 του προγράμματος επιστημονικής εκλαΐκευσης NOVA, ο Άντριου Γουάιλς απαντούσε έτσι στην ερώτηση για το πώς θα περιέγραφε τα επτά χρόνια έντονης, σχεδόν έμμονης, έρευνας που χρειάστηκαν για να αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Φερμά, την πιο διάσημη εικασία της ιστορίας των μαθηματικών:

«Μπαίνεις στο πρώτο δωμάτιο ενός μεγάρου και βρίσκεσαι στο σκοτάδι. Στο απόλυτο σκοτάδι. Προχωράς σκοντάφτοντας και χτυπώντας τα έπιπλα, αλλά σταδιακά μαθαίνεις πού βρίσκεται κάθε αντικείμενο της επίπλωσης. Τελικά, μετά από περίπου έξι μήνες, βρίσκεις τον διακόπτη του φωτός και ξαφνικά όλα φωτίζονται. Μπορείς να δεις ακριβώς πού βρίσκεσαι. Στη συνέχεια πηγαίνεις στο επόμενο δωμάτιο και περνάς άλλους έξι μήνες στο σκοτάδι». Αυτό το «σκοτάδι» για το οποίο μιλούσε ο Βρετανός μαθηματικός ήταν το ίδιο που είχε κάνει να μπερδευτούν και τελικά να χαθούν αμέτρητοι άντρες και γυναίκες μαθηματικοί τους τελευταίους τρεις αιώνες. Η εικασία, που διατυπώθηκε σε κάποια απροσδιόριστη χρονική στιγμή της δεκαετίας του 1630 από τον Fermat αναφέρει το εξής: Αν η είναι ένας ακέραιος μεγαλύτερος του 2, τότε δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y και z , διαφορετικοί από το 0, ώστε να ισχύει η ισότητα $x^n + y^n = z^n$.

Παρά τις φιλότιμες προσπάθειες του Σαμουέλ, δεν βρέθηκε σε κανένα άλλο γραπτό του πατέρα του η λύση που υποσχόταν, και θα πρέπει να αρκεστούμε σε μια απόδειξη που είχε παρουσιάσει ο ίδιος ο Fermat για την περίπτωση όπου $n = 4$. Η «πραγματικά θαυμάσια απόδειξη» του ιδιοφυούς Γάλλου είχε χαθεί για πάντα.

Φτάνοντας σε αυτό το σημείο της συναρπαστικής ιστορίας του τελευταίου θεωρήματος είναι δύσκολο να αποφύγουμε το κλισέ ότι «η πραγματικότητα συχνά ξεπερνά την φαντασία». Αν ο Fermat γνώριζε τα εκατομμύρια ώρες ερευνών και τις εκατοντάδες χιλιάδες σελίδες επιστημονικών περιοδικών που επρόκειτο να επιδιώξουν αυτή την ίδια απόδειξη! Και ότι πάνω από 300 χρόνια αργότερα, η αθώα εικασία του θα αποτελούσε το πιο σχολιασμένο, συναρπαστικό και υποβλητικό ανοιχτό πρόβλημα της ιστορίας του κλάδου!

Και ότι «το θεώρημα που δεν χωρούσε στο περιθώριο της σελίδας», όπως ονομάζεται μερικές φορές, θα προσέλκυε με την κομψότητά του αμέτρητους μαθηματικούς χωρίς να αποκαλύψει το μυστικό του σε κανέναν. Φωτισμένα πνεύματα όπως ο Carl Friedrich Gauss, ο Leonhard Euler, ο Adrien-Marie Legendre, ο Ernst Kummer και πολλοί άλλοι καταπιάστηκαν με το πρόβλημα με, υποθέτουμε, επιμέλεια και εμπιστοσύνη στις σημαντικές ικανότητές τους, αλλά οι προσπάθειές τους χρησίμευσαν μόνο για να βρουν μερικές αποδείξεις για τις περιπτώσεις όπου $n = 3, 5$ ή 7 . Επιπλέον, όσο εμβάθυνε κανείς μέσα του, οι διακλαδώσεις αυτού του ακόρεστου προβλήματος εκτείνονταν όλο και περισσότερο μέχρι να αποκαλύψουν απρόσμενα βάθη, με βάσεις που έφταναν στην άλγεβρα της θεωρίας των αριθμών. Ένα δίκτυο με τέτοια πολυπλοκότητα ώστε, τις πρώτες δεκαετίες του περασμένου

αιώνα, ο κλάδος φάνηκε ότι παραιτούνταν μαζικά από την εύρεση μιας λύσης και ήταν σχεδόν έτοιμος να το υποβιβάσει στην κατηγορία του ιστορικού αξιοπερίεργου. Παρά τις δυσκολίες που προσέφερε, ή μάλλον εξαιτίας αυτών, ο θρύλος του τελευταίου θεωρήματος στο σημείο αυτό είχε ξεπεράσει τον στενό κόσμο των ειδικευμένων μαθηματικών.

Σελίδα 85 έκδοσης των «Αριθμητικών» σε μετάφραση Bachet de Méziriac που αντιστοιχεί στο πρόβλημα και του 2^{ου} βιβλίου, στην οποία μπορεί να εκτιμηθεί το πλάτος του περιθωρίου που δεν ήταν αρκετό ώστε ο Fermat να εκθέσει τη «θαυμάσια απόδειξή του



Όπως και να έχει, μερικοί πεισματάρηδες ιδιοφυείς μαθηματικοί, στα αυτιά των οποίων αντηχούσε ακόμη δυνατά η ηχώ της πρόκλησης που είχε θέσει ο Fermat πριν από τόσα πολλά χρόνια, συνέχισαν να αφιερώνουν ώρες έμμονης εργασίας για να ξεκαθαρίσουν το πυκνό δίκτυο σχέσεων που φαινόταν να πολλαπλασιάζεται ολοένα και περισσότερο και παρέπεμπε την ποθητή απόδειξη σε ένα μακρινό και αβέβαιο μέλλον.

Πορτρέτο του Fermat από τον Francois de Poilly για το εξώφυλλο του βιβλίου «Varia Opera Mathematica», που συντάχθηκε από τον γιο του διάσημου μαθηματικού και δημοσιεύθηκε το 1679



Όλοι αυτοί, σε κάποια στιγμή της ανιδιοτελούς εργασίας τους για να αναρριχηθούν σε αυτό το αληθινό όρος Έβερест των μαθηματικών –ίσως αφού πρώτα πέταξαν στο καλάθι των αχρήστων τις γεμάτες με πρόχειρες σημειώσεις σελίδες στις οποίες είχαν ανακαλύψει ένα νέο και μοιραίο λάθος-, έκαναν στον εαυτό τους αυτό το τρομερό ερώτημα: ήταν ίσως μια από αυτές τις προτάσεις που θέτουν από καιρό σε καιρό τα μαθηματικά, αυτή η «θεϊκή τρέλα του ανθρώπινου πνεύματος» όπως έλεγε ο φιλόσοφος A.N. Whitehead, και η απάντηση της οποίας στην πραγματικότητα βρίσκεται πέρα από την πνευματική ικανότητα του ανθρώπου; Μαθηματικοί όπως ο Barry Mazur, ο Ken Ribet, ο Gerhard Frey ή ο Gerd Faltings αρνούνταν να το πιστέψουν. Ανάμεσα σε αυτούς τους κατοίκους του στοιχειωμένου μεγάρου από το παιχνιδιάρικο φάντασμα του Γάλλου δικηγόρου και την εξαφανισμένη «θαυμάσια απόδειξη» του, τα δωμάτια του οποίου εξακολουθούσαν να μένουν στο σκοτάδι,

ήταν ο Άντριου Γουάιλς, ένας μαθηματικός σχεδόν διόλου αναγνωρισμένος πέρα από τον στενό κόσμο των ειδικών, ένας άνθρωπος του οποίου η φυσική σεμνότητα και δειλία είχαν αυξηθεί από το καλοκαίρι του 1986 λόγω της εκούσιας απομόνωσης, που οφειλόταν, σύμφωνα με μερικά από τα λίγα άτομα του στενού περιβάλλοντός του, στην έντονη εργασία του για ένα σημαντικό, πολύ σημαντικό πρόβλημα, η φύση του οποίου παρέμενε μυστική. Δευτέρα, Τρίτη...

Τον Ιούνιο του 1993, το Τμήμα Θεωρητικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου του Κέμπριτζ, υπό τη διεύθυνση του Αυστραλού John H. Coates, φιλοξένησε ένα διεθνές συνέδριο για τη λεγόμενη θεωρία του Iwasawa, μια περιοχή μελέτης εντός της θεωρίας των αριθμών που ασχολείται με τις ημιελλειπτικές καμπύλες, έναν όρο αναμφίβολα εκφοβιστικό αλλά πολύ σημαντικό στην ιστορία μας. Μεταξύ των ομιλητών ήταν ένας πρώην μαθητής του Κόουτς, ο οποίος παλαιότερα είχε εργαστεί μαζί του για την απόδειξη μιας μερικής περίπτωσης της περίφημης εικασίας Swinnerton-Dyer (τόσο περίφημης που στις αρχές του 2010, το Ινστιτούτο Clay αντάμειβε την απόδειξή της με ένα εκατομμύριο δολάρια).

Αν και είχε τάσεις απομόνωσης, ήταν ένας εξαιρετικός μαθηματικός ο οποίος, λίγο μετά το διδακτορικό του, είχε αφήσει το Κέμπριτζ για να εγκατασταθεί τελικά στο περίφημο πανεπιστήμιο του Πρίνστον στις Ηνωμένες Πολιτείες. Παρά την οικειότητα που αναπόφευκτα επιφέρει κάθε σχέση μεταξύ ενός δασκάλου και του μαθητή του, και ακόμη περισσότερο στην περίπτωση ενός τόσο προσωπικού και εξατομικευμένου πανεπιστημίου όπως το Κέμπριτζ, πριν από πολλά χρόνια –επτά, ίσως και περισσότερα– ο Κόουτς είχε χάσει την επαφή. Φαινόταν σαν να τον είχε καταπιεί η γη. Στην πραγματικότητα, αυτά τα επτά χρόνια συνέπιπταν, αν και είναι σχεδόν βέβαιο ότι ο Coates αγνοούσε αυτό το σκοτεινό στοιχείο, με το χρόνο που έχει παρέλθει από τότε που ο Αμερικανός Ken Ribet είχε αποδείξει τη λεγόμενη «εικασία έψιλον», η οποία είχε τεθεί ως αίτημα από τον Γάλλο Jean-Pierre Serre πάνω σε μια λαμπρή διαίσθηση του Γερμανού Gerhard Frey. Επιβεβαιώθηκε τότε, στα μάτια των ειδικών, ότι το θρυλικό τελευταίο θεώρημα του Fermat είχε στενή σχέση με ένα σημαντικό αποτέλεσμα της δεκαετίας του 50, την εικασία Taniyama-Shimura, η οποία με τη σειρά της σχετιζόταν με ορισμένες ιδιότητες των ημιελλειπτικών καμπυλών.

Μετά από τόσα χρόνια ουσιαστικού εξοστρακισμού, ήταν λοιπόν μια ευχάριστη έκπληξη που αυτός ο πρώην φοιτητής, ο οποίος δεν ήταν άλλος από τον Άντριου Γουάιλς, αποδέχτηκε την πρόσκληση. Η έκπληξη μετατράπηκε σε ειλικρινή περιέργεια όταν στην ερώτηση του Κόουτς πόσο χρόνο θα ήθελε να δεσμεύσει για την παρέμβασή του, ο Γουάιλς, τον οποίο θυμόταν ως έναν άνθρωπο με μεγάλη συστολή και αξιοσημείωτη απροθυμία να μιλά μπροστά στο κοινό, ζήτησε τρεις ολόκληρες ώρες. Ο Κόουτς, φυσικά περίεργος, τον ρώτησε ποια σημαντική εξέλιξη άξιζε μια τρίωρη παρουσίαση, και ο Γουάιλς απάντησε, ακριβώς όπως είχε κάνει με άλλους συναδέλφους που συμμετείχαν επίσης στο συνέδριο: «Ελάτε ο ίδιος να δείτε».

Ο επίσημος τίτλος της διάλεξης, «Τύποι υπολοίπων, ελλειπτικές καμπύλες και παραστάσεις Galois», περιλάμβανε μια σειρά μαθηματικών όρων σίγουρα γνωστών, αλλά για τη μεταξύ τους σχέση ο Γουάιλς διατηρούσε την πιο απόλυτη σιωπή, όπως θα έκανε κάποιος που κατείχε ένα ανομολόγητο μυστικό. Αυτή η ακραία εχεμύθεια ήταν αρκετά ασυνήθιστη, ακόμη και στην περίπτωση των επαγγελματιών μαθηματικών, μιας ομάδας ανθρώπων ως επί το πλείστον συντηρητικών και επιφυλακτικών, που όμως συνήθως κρατούσαν ενήμερους τους συναδέλφους της ειδικότητάς τους για τις έρευνές τους, έστω και μόνο για να ζητήσουν μια έμπειρη συμβουλή. Συνεπώς, συνοδευόμενος από σχετικά μετριασμένη, αλλά ακόμα κι έτσι αδιαμφισβήτητη προσδοκία, ο Γουάιλς μπήκε τη Δευτέρα στην αίθουσα συνεδριάσεων του αξιοσέβαστου ιδρύματος εφοδιασμένος με σημειώσεις. Υπό το άγρυπνο βλέμμα μιας εικοσάδας συμμετεχόντων, αυτός ο ψιλόλιγνος άνδρας μόλις σαράντα ετών, στον οποίο μια αρχόμενη φαλάκρα έδινε αυτή την όψη του egghead («αυγοκέφαλος», στα αγγλικά), τόσο χαρακτηριστική των επιστημόνων, παρουσίασε κατά τη

διάρκεια της συνεδρίας διάφορα μερικά αποτελέσματα μεγάλου επιστημονικού ενδιαφέροντος. Τα νέα δεν άργησαν να διαδοθούν, και για την επόμενη συνεδρία, που είχε προγραμματιστεί για την Τρίτη, η αίθουσα είχε γεμίσει μέχρι και το τελευταίο κάθισμα.

Μόλις τελείωσε τη 2^η παρουσίαση, και αφού συνόδευσαν την έξοδο του μαθηματικού από την αίθουσα με σεβάσμια σιωπή, οι συμμετέχοντες ξέσπασαν σε ζωηρές συζητήσεις, ηλεκτρισμένοι από αυτό που μόλις είχαν παρακολουθήσει. Σε αυτό το σημείο ήταν σαφές ότι ο Γουάιλς δεν είχε ως μόνη πρόθεση να παρουσιάσει μια απλή επίτευξη των αποτελεσμάτων, όσο αξιοσημείωτα κι αν ήταν αυτά, αλλά το σύνολο της ομιλίας του σκόπευε σε κάτι. Ήταν, στην πραγματικότητα, μια επιχειρηματολογία τεράστιας πολυπλοκότητας και δομημένη προσεκτικά το συμπέρασμα της οποίας ήταν... ποιο; Ο Ken Ribet, ο οποίος ήταν μεταξύ των συμμετεχόντων, δεν είχε καμία αμφιβολία γι' αυτό. «Η παρουσίαση του Γουάιλς θα μπορούσε να έχει μόνο μία κορύφωση, ένα μοναδικό τελικό στόχο.», είπε αργότερα.

Στις 23 Ιουνίου, ο διάδρομος που οδηγούσε στην αίθουσα όπου ο Γουάιλς θα έδινε την 3^η και τελευταία παρέμβασή ήταν κλεισμένος από ένα μικρό πλήθος. Μερικοί από τους παρευρισκόμενους είχαν φέρει φωτογραφικές μηχανές στην εκδήλωση, και δεν δίστασαν να τραβήξουν πολλές φωτογραφίες του ψηλόλινου μαθηματικού, ο οποίος ατένιζε τον αναβρασμό που είχε δημιουργηθεί γύρω του με υπερφυσική ηρεμία. Όταν τελικά έγινε δυνατό να υπάρξει μια ελάχιστη σιωπή, ο Γουάιλς άρχισε την τρίτη ώρα της παρουσιάσής του, μιας από τις πιο γεμάτες με νόημα στην πρόσφατη ιστορία της επιστήμης.

Τη μία σημείωση στον πίνακα την ακολουθούσε μια άλλη, και η προσδοκία του κοινού ολοένα και μεγάλωνε. Τέλος, η κιμωλία στο χέρι του Γουάιλς σχεδίασε τις τελευταίες γραμμές συμβόλων, οι οποίες παρά το γεγονός ότι ήταν διατυπωμένες με όρους των πιο σύγχρονων μαθηματικών, εξέφραζαν ουσιαστικά το ίδιο με την αινιγματική σημείωση που κάποιος Γάλλος μαθηματικός είχε γράψει στο περιθώριο ενός βιβλίου στα λατινικά πριν από περισσότερο από τρεις αιώνες. «Και αυτό αποδεικνύει το τελευταίο θεώρημα του Φερμά», είπε ο Γουάιλς. «Νομίζω ότι θα σταματήσω εδώ». Και σε ένα παλιό σκοτεινό μέγαρο άναβε ένα τελευταίο φως, και το φάντασμα που το στοίχειωνε είχε, τελικά, εξορκιστεί.

18. Ένας μαθηματικός στην πρώτη σελίδα

Ο απόηχος του κατορθώματος του Γουάιλς άρχισε να διαδίδεται σε όλη τη μαθηματική κοινότητα με τέτοια ταχύτητα που η κοινωνία στο σύνολό της δεν είχε άλλη επιλογή παρά να δώσει προσοχή. Το εξώφυλλο του New York Times στις 24 Ιουνίου είχε τον ακόλουθο τίτλο: «Επιτέλους, μια κραυγή «Εύρηκα!» για ένα παμπάλαιο μαθηματικό μυστήριο», και οι περισσότερες μεγάλες εφημερίδες σε όλο τον κόσμο αφιέρωσαν στην είδηση παρόμοιες προνομιούχες θέσεις. Η εκπληκτική ιστορία του Φερμά και του τελευταίου θεωρήματός του έγινε το αντικείμενο κυρίων άρθρων και τηλεοπτικών αφιερωμάτων, και ο συνεσταλμένος και μοναχικός Γουάιλς έπρεπε να συνηθίσει, σχεδόν από τη μια μέρα στην άλλη, να απολαμβάνει την κατάσταση μιας μικρής διασημότητας. «Μετά από επτά χρόνια, η επίλυση του προβλήματος με γέμιζε με ένα υπέροχο συναίσθημα –θυμόταν ο Βρετανός μαθηματικός το 1997–. Επιτέλους το είχα πετύχει». Το απόσπασμα συνεχίζει, ωστόσο: «Δεν ήταν παρά αργότερα που αποκαλύφθηκε ότι υπήρχε ένα πρόβλημα».

Πράγματι, αυτό που θα έπρεπε να είναι μια ευχάριστη πορεία προς τη δόξα και την επαγγελματική αναγνώριση είχε μετατραπεί, σε λίγους μόλις μήνες μετά την ένδοξη εμπειρία του Κέμπριτζ, σε αληθινό εφιάλτη, η αιτία του οποίου θα μπορούσε να συνοψισθεί ως εξής:

Το παλιό φάντασμα αντιστεκόταν να αναπαυθεί. Αλλά για να καταλάβουμε ακριβώς τι συνέβη μετά την έκσταση του Ιουνίου 1993, και να αξιολογήσουμε με σωστό τρόπο τόσο την πορεία του Γουάιλς μέχρι εκείνες τις μαγικές ημέρες του Κέμπριτζ όσο και την εξαντλητική διάβαση της ερήμου που αναγκάστηκε να ταξιδέψει μέχρι την τελική και χαρούμενη αποζημίωσή του δύο χρόνια αργότερα, δεν έχουμε επιλογή παρά να γυρίσουμε

στη ρίζα του προβλήματος και, στο μέτρο του δυνατού, να το κατανοήσουμε σε όλη την έκταση και πολυπλοκότητά του. Γι' αυτό πρέπει να γυρίσουμε χιλιάδες χρόνια πίσω στο χρόνο και να εξερευνήσουμε μια συναρπαστική ιδιαίτερη οδύσσεια που θα μας οδηγήσει από την αυγή των μαθηματικών, 2.000 χρόνια προ Χριστού, μέχρι το πολύπλοκο οικοδόμημα της σύγχρονης άλγεβρας και της θεωρίας των αριθμών.

Επιστρέφοντας στην όμορφη Ιθάκη, με την περιέργειά μας κατευνασμένη και τη δίψα μας για περιπέτεια ικανοποιημένη, θα ευχαριστήσουμε το γέρικο φάντασμα του Fermat και του τελευταίου θεωρήματός του για το ταξίδι που κάναμε και για τα τοπία που περιηγηθήκαμε, τα οποία δεν είναι άλλα από την ανθρώπινη ευφυΐα και περιέργεια στο μέγιστο μεγαλείο τους.