



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Η συμμετρία στα μαθηματικά



Σπουδαστής: Κοτρότσος Δημήτριος (ΑΜ 7994)

**Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (Μ.Εδ.),
Επίκουρος Καθηγητής**

Ακαδημαϊκό έτος: 2021–2022

Ημερομηνία ανάθεσης: **17.05.2020**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **02.12.2021**
 Ημερομηνία εξέτασης: **....12.2021**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Τι είναι η συμμετρία	3
2. Η έννοια της συμμετρίας	3
3. Μια επιπρόσθετη διάσταση	4
4. Joseph–Louis De Lagrange (1736–1813)	9
5. Συμμετρικά σύμβολα	10
6. Arthur Caley (1821–1895).....	11
7. Η συμμετρία σε πολλές διαστάσεις	11
8. Καθρέφτη, καθρεφτάκι	12
9. Το καλειδοσκόπιο	15
10. Μερικά παραδείγματα στο χώρο	16
11. Τα πλατωνικά στερεά	17
12. Ένας κύβος χωρίς συμμετρία.....	18
13. Τα μη κυρτά και μη κανονικά πολύεδρα	18
14. Harold Scott Macdonald Coxeter (1907–2003).....	19
15. Jacques Tits (1930–)	20
16. Η ελικοειδής συμμετρία.....	20
17. Camille Jordan (1838 – 1922).....	22
18. Η συμμετρία στα μαθηματικά.....	22
19. Η άλγεβρα σαν παιχνίδι	23
20. Οι θόλοι, τα φουλερένια και τα μπαλάκια του γκολφ	24
21. Τα πλέγματα.....	26
22. Ταπετσαρίες, μωσαϊκά, φρίξες και διακοσμητικά στοιχεία.....	27
23. Οι κρύσταλλοι και πέρα από τους κρυστάλλους	31
24. Μία συμμετρία αντισυμμετρική	33
25. Ο κόσμος του Escher και τα υπόλοιπα έργα τέχνης	34

προχωρήσουμε πάρα πέρα. Αν το σκεφτούμε, υπάρχει ένα αντικείμενο με διάσταση που επιτρέπει μια πιο μεγάλη συμμετρία. Η απόλυτη ευθεία είναι πιο πλούσια απ' όσο φαίνεται, διότι όποια κι αν είναι η μετατόπιση αριστερά ή δεξιά κι άσχετα από το μήκος της, διατηρεί την ευθεία όπως ήταν, αμετάβλητη. Υπάρχουν άπειρες μετατοπίσεις που είναι συμμετρίες ευθείας. Αν δώσουμε ένα αρχικό σημείο στην ευθεία (το σημείο μηδέν) και ονοματίσουμε τα σημεία πάνω στην ευθεία με τη βοήθεια των πραγματικών αριθμών R , η μετατόπιση t , $x \rightarrow (x+t)$ που μετασχηματίζει κάθε σημείο x σε $x+t$ είναι μια συμμετρία της ευθείας A , εφόσον πραγματοποιεί μία ή άλλη πλευρά (μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν ακόμα περισσότερες συμμετρίες στο R). Παρακάτω, όταν ο αναγνώστης θα έχει μάθει περισσότερα για τη συμμετρία, θα αναγνωρίσει σ' αυτή τη μετατόπιση ένα στοιχείο της ομάδας Lie που ονομάζεται $GL(1,R)$.

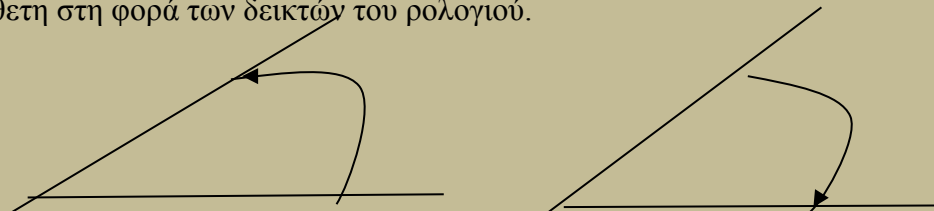
Ακτίνια ή μοίρες;

Η αντιστοιχία ανάμεσα στις εξηκονταδικές μοίρες και τα ακτίνια προκύπτει από τον ορισμό του ακτινίου (rad): η γωνία της οποίας το τόξο είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου που χρησιμοποιείται για τη μέτρησή της. Δηλαδή: $1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$, $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

Μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Ακτίνια	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Χρησιμοποιούμε την έννοια των ακτινίων. Η χρήση των εξηκονταδικών μοιρών εξακολουθεί να είναι ευρέως διαδεδομένη (κυρίως στη στοιχειώδη γεωμετρία), από παθητικότητα και από την επιρροή που ασκούν οι κατασκευαστές οπτικών οργάνων.

Αν στιγμή είμαστε υποχρεωμένοι να λάβουμε υπόψη μας τον προσανατολισμό της γωνίας, θα θεωρήσουμε ως θετική την αντίστροφη φορά- τη φορά που είναι αντίθετη στη φορά των δεικτών του ρολογιού.



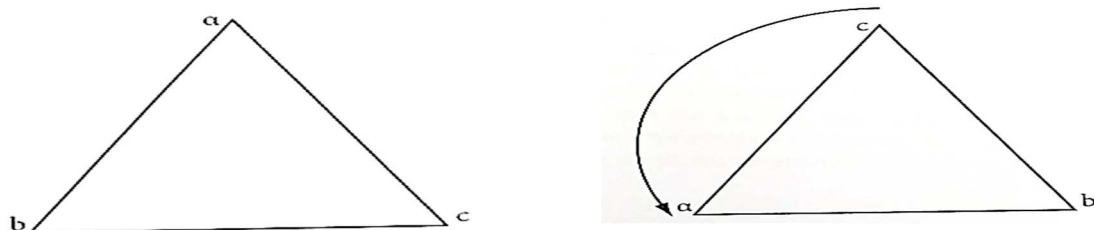
Το ακτίνιο, μονάδα μέτρησης γωνίας πολύ πιο φυσική από τη μοίρα, εμφανίστηκε το 1714 από τον Roger Cotes (1682-1716), Άγγλο μαθηματικό με εφήμερη καριέρα και φίλο του Νεύτωνα.

3. Μια επιπρόσθετη διάσταση

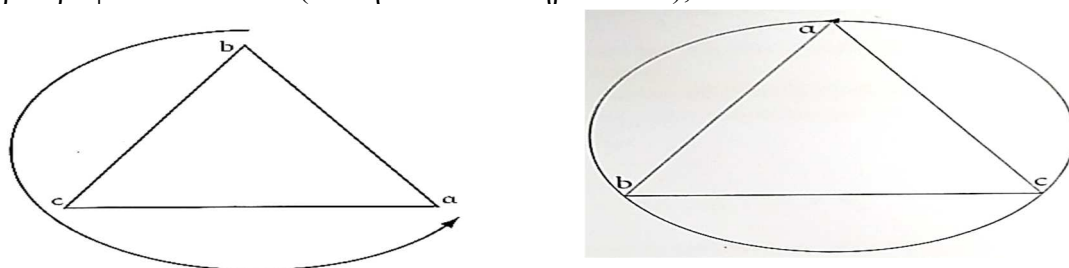
Στα δισδιάστατα σχήματα του επιπέδου ανακαλύπτουμε παραδείγματα συμμετρικών κινήσεων που διατηρούν τις διαστάσεις, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στα παρακάτω σχήματα.



Ας εφαρμόσουμε τώρα αυτές τις κινήσεις σε ένα απλό σχήμα σαν το τρίγωνο με πλευρές είναι a , b και c . Ας μελετήσουμε στη συνέχεια τη συμμετρία ενός ισόπλευρου τριγώνου με κορυφές a , b και c που περιέχει ένα κεντρικό σημείο που αποτελεί το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου βαρύκεντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

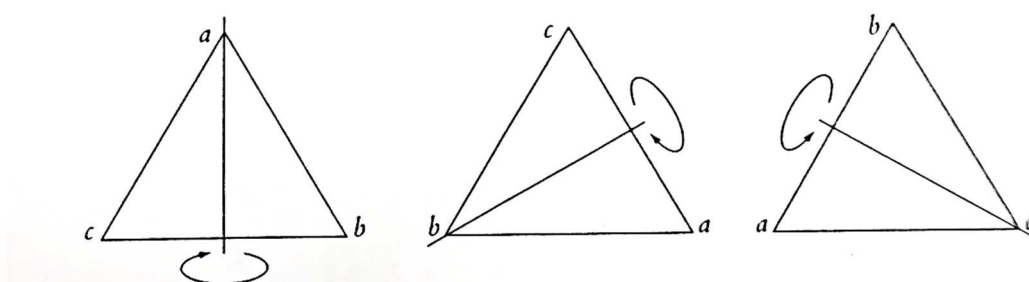


Αν περιστραφεί κατά $2\pi/3$ rad (ή $1/3 * 2\pi$), δηλαδή μία περιστροφή 120° ή $1/3$ του κύκλου, γύρω από το κέντρο του, ή μία περιστροφή $4\pi/3$ rad ($2/3 * 2\pi$ rad) ήτοι 240° ή $2/3$ του κύκλου, το τρίγωνο παραμένει αμετάβλητο. Αλλά τι θα συμβεί αν περιστραφεί κατά 2π rad (360° ή έναν ολόκληρο κύκλο);



Καθώς περιστρέφουμε στο σημείο αφετηρίας, το ισόπλευρο τρίγωνο είναι όχι μόνο αμετάβλητο όταν υφίσταται αυτή την κίνηση αλλά τα γράμματα των κορυφών του μένουν ως είχαν στην αρχή. Η περιστροφή 2π rad (4π , 6π , 8π , κλπ.) είναι μία μηδενική περιστροφή, αφομοιώσιμη από την ταυτότητα, από μία μη μετακίνηση.

Εδώ βρισκόμαστε αντιμέτωποι με τρεις συμμετρίες που είναι τρεις περιστροφές 0 , $2\pi/3$ και $4\pi/3$ τις οποίες θα ονομάσουμε g_0 , g_1 και g_2 . Αν αντί να περιστρέψουμε το τρίγωνο, το υποβάλλουμε σε μία κίνηση κατοπτρισμού, παίρνοντας ως άξονα τη μεσοκάθετο που περνά από τα a , b , c , παίρνουμε τρεις άλλες συμμετρίες ή κινήσεις που δεν τροποποιούν το τρίγωνο. Διαπιστώνουμε πως αυτές οι συμμετρίες, εκτός από το ότι δεν αντιστοιχούν στις προηγούμενες περιστροφές, παρουσιάζουν μία ιδιαιτερότητα (που ονομάζεται «στρέψη»). Τα πάντα γίνονται σαν οι άξονες να ήταν καθρέφτες στους οποίους κατοπτρίζεται το τρίγωνο, κάτι που συμβαίνει όταν το αρχικό σχήμα αλλάζει προσανατολισμό. Αυτές οι συμμετρίες που εξαρτώνται από τον επιλεγμένο άξονα συμμετρίας θα ονομαστούν e_1 , e_2 , e_3 . Έτσι παίρνουμε 6 διαφορετικές συμμετρίες για ένα ισόπλευρο τρίγωνο (g_0 , g_1 , g_2 , e_1 , e_2 , e_3) 3 περιστροφές και 3 αξονικές συμμετρίες. Χρησιμοποιώντας τη σύγχρονη ονοματολογία της θεωρίας συνόλων, μπορούμε να πούμε ότι $D_3 = \{ g_0, g_1, g_2, e_1, e_2, e_3 \}$ είναι το σύνολο των συμμετριών D_3 του ισόπλευρου τριγώνου.



Όταν εφαρμόζουμε 2 οποιεσδήποτε κινήσεις από τις 6 προηγούμενες, έστω τις m_i, m_j , το αποτέλεσμα είναι μία άλλη κίνηση, η m_k , που ανήκει εξίσου στο σύνολο D_3 . Στην έκφραση $m_j * m_i = m_k$ το σύμβολο $*$ είναι ένας σύντομος τρόπος να δείξουμε ότι η 1^η κίνηση που εφαρμόζουμε στο τρίγωνο είναι η m_j , η 2^η κίνηση είναι η m_i και η κίνηση που προκύπτει είναι η m_k . Οι μαθηματικοί τις γράφουν με αυτή τη σειρά που φαίνεται αντίστροφη από αυτό που μας υπαγορεύει η κοινή λογική, αλλά αυτό είναι πιο βολικό στις τελευταίες φάσεις. Έτσι αν κάναμε e_3 και μετά g_1 , το αποτέλεσμα θα εκφράζονταν ως εξής: $g_1 * e_3 = e_2$. Οι μαθηματικοί συνοψίζουν τα ανωτέρω, δηλώνοντας πως το $*$ είναι μία πράξη του D_3 δηλαδή το D_3 είναι ένα κλειστό σύνολο για την πράξη $*$ και εκφράζεται το με πιο περίπλοκο τρόπο. Αν παρουσιάσουμε τις κινήσεις του D_3 με τη μορφή πίνακα, έτσι ώστε το κελί της γραμμής n και τη στήλης p να αντιστοιχεί σε $m_n * m_p$, παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα:

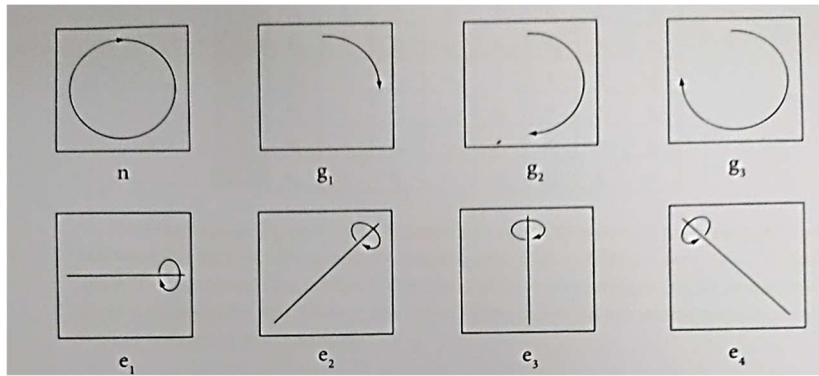
*	g_0	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_0	g_0	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	g_1	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	g_1	g_0	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	g_0	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	g_0	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	g_0

Σημειώσαμε τις περιστροφές ξεκινώντας από το δείκτη 0 καθώς g_0 αποτελεί μία όχι ιδιαίτερη περιστροφή, μία εντελώς ξεχωριστή κίνηση του τριγώνου. Ας δούμε γιατί. Για κάθε συμμετρία ή κίνηση m του ισοπλεύρου τριγώνου, επαληθεύουμε $m * g_0 = g_0 * m = m$. Τα πάντα γίνονται σαν η κίνηση g_0 να συμπεριφέρονταν σαν ουδέτερη κίνηση που δεν αλλάζει τίποτα, είτε πραγματοποιηθεί σε 1^η είτε σε 2^η φάση, αριστερά ή δεξιά. Εν συντομία, μια ουδέτερη κίνηση, όπως λέγαμε στην αρχή. Αυτό μπορούμε να το παρατηρήσουμε κοιτάζοντας τον πίνακα: οι γραμμές και οι στήλες που περιέχουν το g_0 παραμένουν αμετάβλητες. Ένα στοιχείο που συμπεριφέρεται έτσι στα πλαίσια μιας πράξης ονομάζεται: «ουδέτερο στοιχείο».

Στα πλαίσια της στοιχειώδους αριθμητικής, διαθέτουμε ήδη ένα πολύ συνηθισμένο παράδειγμα ουδετέρου στοιχείου, αν η πράξη είναι η πρόσθεση. Σε αυτό το πλαίσιο $m + 0 = 0 + m = m$, όποιος και αν είναι ο αριθμός m , το 0 θα είναι το ουδέτερο στοιχείο για την πράξη $+$ στον κόσμο της αριθμητικής. Ομοίως, αν πάρουμε για παράδειγμα τον πολλαπλασιασμό, $m * 1 = 1 * m = m$ και το 1 αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$ ανάμεσα στους αριθμούς. Ας πάμε μερικές παραγράφους πίσω κι ας αντικαταστήσουμε τη σημειογραφία g_0 με το n . Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε τον πίνακα της πράξης $*$:

*	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
n	n	g_1	g_2	e_1	e_2	e_3
g_1	g_1	g_2	n	e_3	e_1	e_2
g_2	g_2	n	g_1	e_2	e_3	e_1
e_1	e_1	e_2	e_3	n	g_1	g_2
e_2	e_2	e_3	e_1	g_2	n	g_1
e_3	e_3	e_1	e_2	g_1	g_2	n

Αυτός θα είναι ο πίνακας του συνόλου D_3 των συμμετριών του ισοπλεύρου τριγώνου. Τι θα συμβεί με ένα τετράγωνο που είναι σαφώς πιο συμμετρικό από το τρίγωνο; Το τετράγωνο παρουσιάζει 8 βασικές συμμετρίες, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στα παρακάτω σχήματα:



Μεταξύ αυτών, 4 μεταβάλλουν τη φορά ανάγνωσης ή παρουσιάζουν στρέψη.



Το γραμματόσημο αποτελεί το τέλει παράδειγμα παρουσίασης των βασικών συμμετριών ενός τετραγώνου

Αυτές οι συμμετρίες μπορούν να υποβληθούν στη πράξη και ως αποτέλεσμα να έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

*	n	g ₁	g ₂	g ₃	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄
n	n	g ₁	g ₂	g ₃	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄
g ₁	g ₁	g ₂	g ₃	n	e ₄	e ₃	e ₁	e ₂
g ₂	g ₂	g ₃	n	g ₁	e ₂	e ₁	e ₄	e ₃
g ₃	g ₃	n	g ₁	g ₂	e ₃	e ₄	e ₂	e ₁
e ₁	e ₁	e ₄	e ₂	e ₃	n	g ₂	g ₃	g ₁
e ₂	e ₂	e ₃	e ₁	e ₄	g ₂	n	g ₁	g ₃
e ₃	e ₃	e ₁	e ₄	e ₂	g ₁	g ₃	n	g ₂
e ₄	e ₄	e ₂	e ₃	e ₁	g ₃	g ₁	g ₂	n

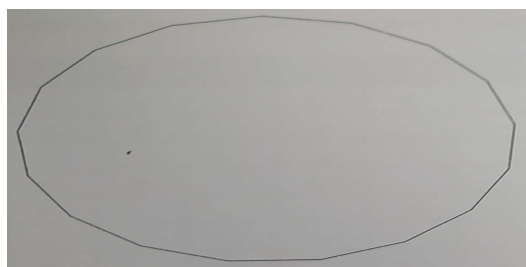
στις γραμμές.

Θα ονομάσουμε D_4 το σύνολο συμμετριών του τετραγώνου. Παρατηρούμε μία λεπτομέρεια που δε θα περάσει απαρατήρητη από το βλέμμα ενός ειδικού: όχι μόνο οι συμμετρίες σχηματίζουν ένα κλειστό σύνολο κινήσεων, αλλά υπάρχουν μέρη ή υποσύνολα του πίνακα που είναι εξίσου κλειστά και επισημαίνονται με έντονα γράμματα

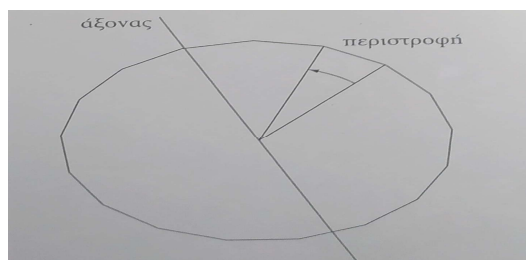
*	n	g ₁	g ₂	e ₁	e ₂	e ₃
n	n	g ₁	g ₂	e ₁	e ₂	e ₃
g ₁	g ₁	g ₂	n	e ₃	e ₁	e ₂
g ₂	g ₂	n	g ₁	e ₂	e ₃	e ₁
e ₁	e ₁	e ₂	e ₃	n	g ₁	g ₂
e ₂	e ₂	e ₃	e ₁	g ₂	n	g ₁
e ₃	e ₃	e ₁	e ₂	g ₁	g ₂	n

*	n	g ₁	g ₂	g ₃	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄
n	n	g ₁	g ₂	g ₃	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄
g ₁	g ₁	g ₂	g ₃	n	e ₄	e ₃	e ₁	e ₂
g ₂	g ₂	g ₃	n	g ₁	e ₂	e ₁	e ₄	e ₃
g ₃	g ₃	n	g ₁	g ₂	e ₃	e ₄	e ₂	e ₁
e ₁	e ₁	e ₄	e ₂	e ₃	n	g ₂	g ₃	g ₁
e ₂	e ₂	e ₃	e ₁	e ₄	g ₂	n	g ₁	g ₃
e ₃	e ₃	e ₁	e ₄	e ₂	g ₁	g ₃	n	g ₂
e ₄	e ₄	e ₂	e ₃	e ₁	g ₃	g ₁	g ₂	n

Ας παρατηρήσουμε τις συμμετρίες ενός κανονικού κυρτού πολυγώνου με p πλευρές. Έστω ότι το παρακάτω πολύγωνο παρουσιάζει p πλευρές (στην πραγματικότητα έχει μόνο 17).



Το σύνολο συμμετριών πού έχει p περιστροφές, κάθε μία εκ των οποίων $2\pi/p$ rad ($\sim 360^\circ/p$) και p αξονικές συμμετρίες εκ των οποίων ένας αριθμός $p/2$ αξόνων πέρνα από το κέντρο και από κάθε μία από τις κορυφές του πολυγώνου και ένας άλλος $p/2$ πώς πέρνα από το κέντρο και τις διαμέσους των πλευρών. Μετράμε συνολικά $2p$ περιστροφές και p αξονικές συμμετρίες.



Αν ονομάσουμε g_i τις περιστροφές (εκτός από την ουδέτερη περιστροφή, αποκαλούμενη n) και τις αξονικές συμμετρίες e_i , παίρνουμε ένα σύνολο $2p$ στοιχείων, το οποίο θα ονομάσουμε D_p . $D_p = \{n, g_1, \dots, g_{p-1}, \dots, e_1, \dots, e_p\}$ δεν θα μπορέσουμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα του, διότι αυτό είναι αδύνατο (το p δεν είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός). Ωστόσο μπορούμε τουλάχιστο να σημειώσουμε ένα κλειστό υποσύνολο για την πράξη $*$ (Αν και υπάρχουν πολλά περισσότερα).

$\cdot$	n	g_1	$\dots$	g_{p-1}	e_1	$\dots$	e_p
n	n	g_1	$\dots$	g_{p-1}	e_1	$\dots$	e_p
g_1	g_1	g_2	$\dots$	n		$\dots$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
g_{p-1}	g_{p-1}	n	$\dots$	g_{p-2}		$\dots$	
e_1	e_1		$\dots$		n	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
e_p	e_p		$\dots$		$\dots$	$\dots$	n

Στη φύση, υπάρχουν πολλά στοιχεία που σχετίζονται με τα κανονικά πολύγωνα και με τις διεδρικές ομάδες. Μεταξύ αυτών, το πιο γνωστό είναι ο κρύσταλλος του πάγου που παρουσιάζει την ομάδα συμμετριών D_6 .



4. Joseph–Louis De Lagrange (1736–1813)

Ο Lagrange, προερχόμενος από στρατιωτική οικογένεια, γεννήθηκε στο Τορίνο και απέκτησε γρήγορα μεγάλη επιστημονική φήμη χάρη στις προσωπικές προσπάθειες του και στη διδασκαλία του Leonard Euler τον οποίο θαύμαζε πάντα ως δάσκαλο, αν και δεν υπήρξε ποτέ άμεσα μαθητής του. Όταν ο Euler εγκατέλειψε τη θέση του στην Ακαδημία του Βερολίνου, ο Lagrange τον αντικατέστησε, ίσως γοητευμένος από τη φήμη του προστάτη των τεχνών και των επιστημών που είχε ο βασιλιάς Φρειδερίκος Β', κατεξοχήν πεφωτισμένος βασιλιάς.

Ο Lagrange πέρασε 20 χρόνια στο Βερολίνο, αλλά μετά το θάνατο του μονάρχη, εγκαταστάθηκε στη Γαλλία και διορίστηκε μέλος της Ακαδημίας επιστημών των Παρισίων από το Λουδοβίκο ΙΣΤ'. Συνέχισε να διευρύνει τη λαμπρή του καριέρα ως μαθηματικός, ενώ παντρεύτηκε για δεύτερη φορά μία νεαρή γυναίκα αφοσιωμένη στο σύζυγό της, και κατέληξε να υπερνικηθεί από κατάθλιψη.

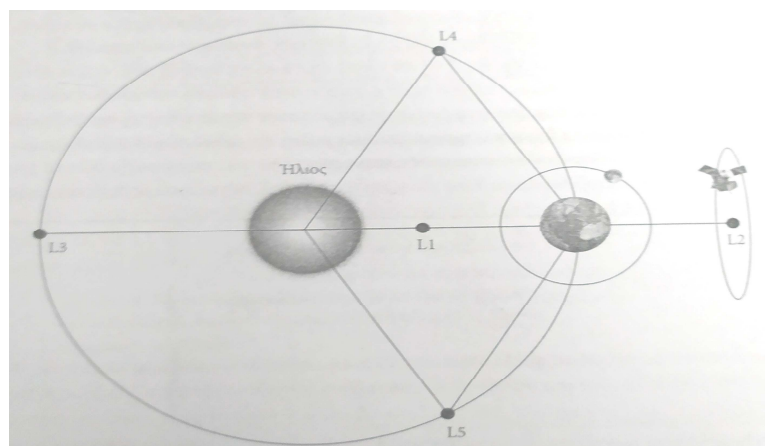
Ενώ όλα φαίνονταν να του πηγαίνουν περίφημα, ήρθε η τρομοκρατία το 1792, στην πρώτη φάση της γαλλικής επανάστασης και ο Lagrange φοβήθηκε για τη ζωή και το μέλλον του. Ωστόσο η φήμη και η διακριτική του στάση εξασφάλισαν τη ζωή και τη συνέχεια των μελετών του. Ανακηρύχθηκε πρόεδρος της επιτροπής μονάδων ζύγισης και μέτρησης και από τότε ο μαθηματικός αφιέρωσε όλη την ενέργειά του στην καθιέρωση του δεκαδικού μετρικού συστήματος. Δεν ανησύχησε ποτέ σε πολιτικό επίπεδο και η κατάστασή του βελτιώθηκε με την έλευση του Ναπολέοντα ο οποίος του απένειμε τον τίτλο του κόμη. Θεωρούμενος ως πρόσωπο εθνικής υπερηφάνειας και έχοντας κερδίσει πολλές τιμές, ενταφιάστηκε στο πάνθεον μετά το θάνατό του. Η συνεισφορά του στη φυσική και τα μαθηματικά υπήρξε τεράστια, ενώ η ανθρωπότητα του οφείλει αναρίθμητες ανακαλύψεις. Ο Lagrange ήταν παραγωγικός και σχολαστικός ερευνητής και τα άρθρα του, ωρίμαζαν για πολύ καιρό

στο μυαλό του προτού αποτυπωθούν στο χαρτί, χαρακτηρίζονται από παραδειγματική σαφήνεια. Λέγεται πως ακόμα και οι πιο αφηρημένες σελίδες πήγαιναν κατευθείαν στο τυπογραφείο όπως ακριβώς είχαν συνταχθεί, χωρίς την παραμικρή διόρθωση.

Ο Lagrange είναι γνωστός ως ένας εκ των δημιουργών της κλασικής μηχανικής. Σε αυτόν και τον Euler οφείλουμε κυρίως την εφαρμογή της αρχής του λογισμού των μεταβολών στη μηχανική, λογισμό τον οποίο απλοποίησε με ευφυή τρόπο λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις.

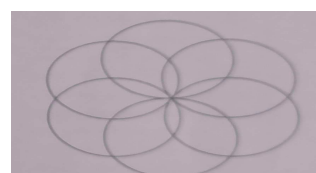
Η συνεισφορά του στην αστρονομία είναι εξίσου αξιοσημείωτη: κυρίως είναι διάσημος για την ανακάλυψη των σημείων που φέρουν το όνομά του. Γενικά, μπορούμε να πούμε πως ο Lagrange, ως σύγχρονος βασιλιάς Μίδα, μετέτρεψε όλα τα πολύπλοκα και μη προσβάσιμα ζητήματα του κλάδου της μηχανικής σε ζητήματα που αντιμετωπίζονταν από τη μαθηματική ανάλυση. Η συνεισφορά του στη θεωρία των αριθμών και την πιθανότητα είναι εξίσου αξιοθαύμαστη, αλλά οι επαναστατικές ανακαλύψεις του Lagrange είναι αυτές που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της άλγεβρας και στη γέννηση της θεωρίας ομάδων. Στα πλαίσια των μελετών του πάνω στις πολυωνυμικές εξισώσεις, αφοσιώθηκε σε αυτές τις έννοιες και σε πολλές περιπτώσεις προέβλεψε τις κινήσεις μιας άλλης ιδιοφυΐας, του Evariste Galois.

Τα σημεία Lagrange (ή σημεία ισορροπίας), που αποδεικνύονται στο γράφημα από τα L, βρίσκονται σε σχέση με δύο αστέρες (όπως στη Γη και τη Σελήνη) με τέτοιο τρόπο που τα σώματα που βρίσκονται σε αυτές τις θέσεις να είναι σε ισορροπία, άρα αποτελούν ιδανικές θέσεις για τους γεωστατικούς τεχνητούς δορυφόρους

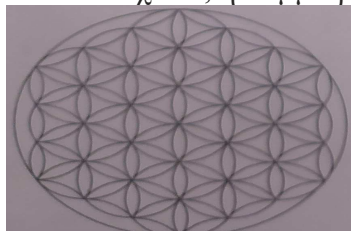


5. Συμμετρικά σύμβολα

Η πλειονότητα των συμβόλων που χρησιμοποιούνται από τον άνθρωπο είναι συμμετρικά. Ανεξάρτητα από τα γράμματα και τα σήματα κυκλοφορίας, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα διακριτικά σύμβολα ως ξεχωριστό κλάδο μελέτης. Το μυθιστόρημα «Κώδικας Da Vinci» έφερε ξανά στο φως της επικαιρότητας μία παραλλαγή του σταυρού, τον τετράγωνο σταυρό που ονομάζεται ελληνικός και διαθέτει μία συμμετρία τύπου D^4 . Παρατηρήστε ότι αυτό το σχήμα επιτρέπει κάλυψη του επιπέδου αν τα άκρα του έχουν τις κατάλληλες διαστάσεις. Το άστρο του Δαβίδ, εβραϊκό σύμβολο, δεν πρέπει να συγχέεται με το ινδουιστικό άστρο της Λακσμί. Οι κινηματογραφόφιλοι θα θυμούνται την εμφάνισή του στο Ροζ Πάνθηρα. Η συμμετρία του είναι D^8 . Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δημιούργησαν αυτό το διακοσμητικό ονομάζεται «σπόροι της ζωής» που παρουσιάζει ομοίως εξαγωνική συμμετρία.



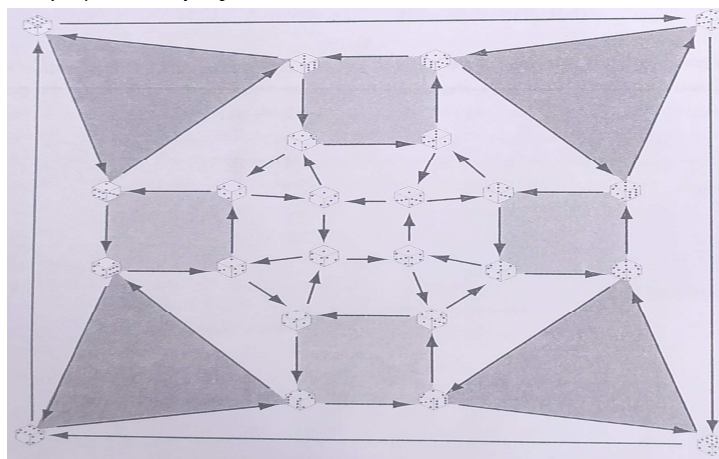
Αυτό το σύμβολο υιοθετήθηκε από τους Φοίνικες οι οποίοι το ανέπτυξαν σε τέτοιο σημείο που το μετέτρεψαν σε ένα «άνθος της ζωής». Αν και πρόκειται για πιο σύνθετο σχέδιο, η συμμετρία είναι η ίδια.



6. Arthur Cayley (1821–1895)

Ένας από τους πιο αξιόλογους μαθηματικούς στην ιστορία. Εργάστηκε επί 13 χρόνια δικηγόρος και όλα αυτά για να κερδίσει τα προς το ζην σε μία εποχή και μία κοινωνία αρκετά ανεπτυγμένη όπως εκείνη της βικτοριανής Αγγλίας. Ο Cayley γεννήθηκε στη Μεγάλη Βρετανία αλλά πέρασε την παιδική του ηλικία στη Ρωσία όπου εργάζονταν ο πατέρας του. Σπούδασε στο Κέιμπριτζ, είχε κλίση στα μαθηματικά και απεδείκνυε ιδιαίτερο ταλέντο στις γλώσσες, ήξερε ιταλικά, γερμανικά, γαλλικά, ελληνικά και φυσικά αγγλικά. Ολοκλήρωσε τις σπουδές του στο δίκαιο και εξάσκησε το επάγγελμα του δικηγόρου με μία προοπτική που φαινόταν πολλά υποσχόμενη. Τα χρόνια πέρασαν και τα κεφάλαια που αφιερώνονταν στη διάσημη λουκασιανή έδρα του πανεπιστημίου Κέιμπριτζ, πού τότε κατείχε ο Νεύτων, γνώρισαν σημαντική αύξηση. Οι πανεπιστημιακοί μισθοί που ήταν πολύ χαμηλοί βελτιώθηκαν κι ο Cayley έβαλε τέλος στην επικερδή δικηγορική του καριέρα για να αφιερωθεί στο πολύ πενιχρά αμειβόμενο πάθος του.

Τα πεδία εργασίας του περιλάμβαναν την ανάλυση, τα τετράκτυα (quaternions), τους πίνακες, τις ορίζουσες και την η-διάσταση γεωμετρία, αν και σήμερα θαυμάζεται για το έργο του στη θεωρία ομάδων. Τις μελέτησέ με αφηρημένο τρόπο και τις έβγαλε από το οχυρό τους για να τις βάλει στον κόσμο των εξισώσεων, προσφέροντάς τους ανεξάρτητη ύπαρξη και παγκόσμιο ορισμό. Μαζί με τον συνάδελφο και φίλο του Joseph Sylvester (1814–1897), δημιούργησε μία επιστημονική ομάδα με πολύ μεγάλο κύρος.



7. Η συμμετρία σε πολλές διαστάσεις

Picture yourself in a boat on a river, with tangerine trees and marmalade skies somebody calls you, you answer quite slowly, A girl with kaleidoscope eyes. Lucy in the Sky with Diamonds (The Beatles).

Το βιβλίο «Μεσ τον καθρέφτη (Through the looking glass)» είναι ένα γνωστό λογοτεχνικό έργο, το 2^ο μέρος των περιπετειών της Αλίκης στη χώρα των θαυμάτων (Alice in Wonderland). Ο συγγραφέας του, ο αγγλικανός διάκονος και ερασιτέχνης φωτογράφος Lewis Carroll, ήταν επίσης ειδικός στη μαθηματική λογική και αυτό διαφαίνεται στη γραφή του που δεν αντανακλά απλά και μόνο τους μύθους, τους θρύλους, τα τραγούδια και τα και τα ποιήματα της αμίμητης βικτωριανής Αγγλίας. Τα κείμενα του είναι γεμάτα δισυπόστατα νοήματα, λογικά παράδοξα και καταστάσεις τόσο παράξενες όσο και αξιοθαύμαστα φανταστικές, γεγονός που εξασφάλισε σε αυτά τα δύο βιβλία εισιτήριο διαρκείας στα ράφια των βιβλιοθηκών και στην καρδιά των αναγνωστών, παρά το χρόνο που έχει περάσει. Στο «Μεσ τον καθρέφτη», η Αλίκη περνά συμβολικά σε μία άλλη πραγματικότητα με τη βοήθεια ενός απλού καθρέφτη.

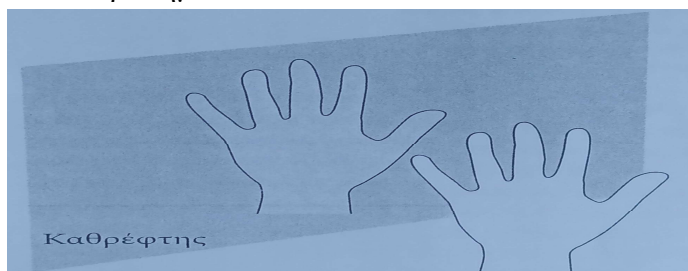


8. Καθρέφτη, καθρεφτάκι

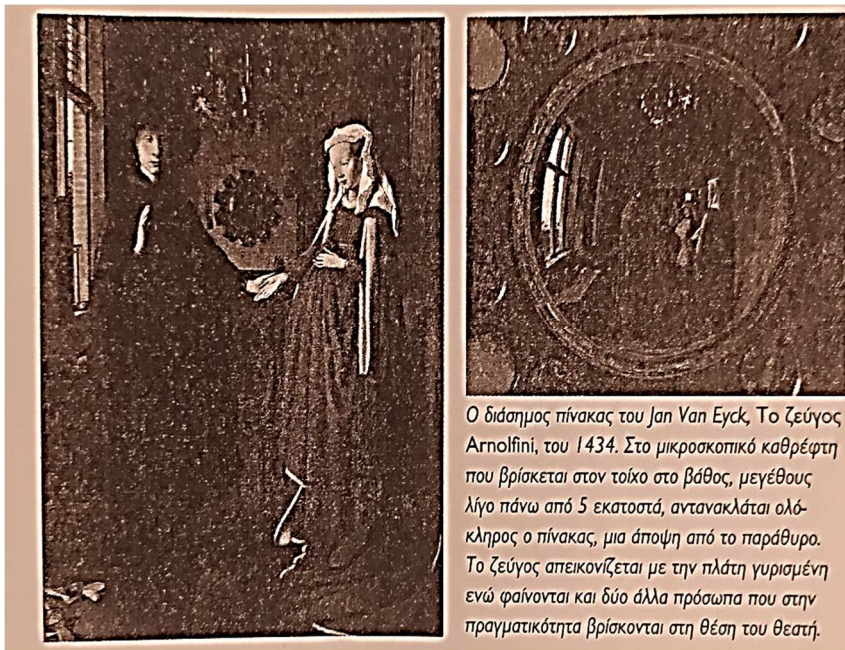
Ο καθρέφτης βρίσκεται στη βάση της χωρικής συμμετρίας πιο συγκεκριμένα της κατοπτρικής συμμετρίας, που μεταμορφώνει κάθε σημείο στην αντανάκλασή του στον καθρέφτη. Η κατοπτρική συμμετρία είναι μία έννοια λίγο πολύ καινούργια, ο χειρομορφισμός που οι γεωμέτρες αποκαλούν μερικές φορές «στρέψη» και της οποίας το πιο καταφανές παράδειγμα είναι ένα απλό ζευγάρι γάντια: Το ένα είναι η κατοπτρική εικόνα του άλλου και τα δύο μαζί, το αριστερό και το δεξί, δεν είναι ίδια.

Δεν μπορούμε να φορέσουμε ένα δεξί γάντι στο αριστερό μας χέρι (και το αντίθετο στο άλλο χέρι), καθότι τα γάντια ή τα χέρια είναι χειρομορφικά αντικείμενα που δε συμπίπτουν με την κατοπτρική τους εικόνα. Αν και έχουν το ίδιο σχήμα, ωστόσο δεν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό: το ένα είναι αριστερόστροφο (προσανατολισμένο προς τα αριστερά) και το άλλο δεξιόστροφο (προσανατολισμένο δεξιά). Κάθε γάντι είναι κατά κάποιο τρόπο το «αντι-γάντι» του άλλου γαντιού.

Οι πρωτεΐνες είναι χειρομορφικά μόρια και το ανθρώπινο σώμα, παραδείγματος χάρη, περιέχει αριστερόστροφες πρωτεΐνες (καθώς και αριστερόστροφα λιπαρά και γλυκίδια). Ο λόγος αυτής της αποκλειστικότητας βρίσκεται πέραν του πεδίου της θεωρίας των ομάδων και για αυτό θα αφήσουμε τους βιολόγους να απαντήσουν σε αυτό το ερώτημα.



Ο διάσημος πίνακας του Jan Van Eyck, «Το ζεύγος Arnolfini» του 1434. Στο μικροσκοπικό καθρέφτη που βρίσκεται στον τοίχο στο βάθος, μεγέθους λίγο πάνω από 5 cm, αντανακλάται ολόκληρος ο πίνακας, μία άποψη από το παράθυρο. Το ζεύγος απεικονίζεται με την πλάτη γυρισμένη ενώ φαίνονται και δύο άλλα πρόσωπα που στην πραγματικότητα βρίσκονται στη θέση του θεατή.



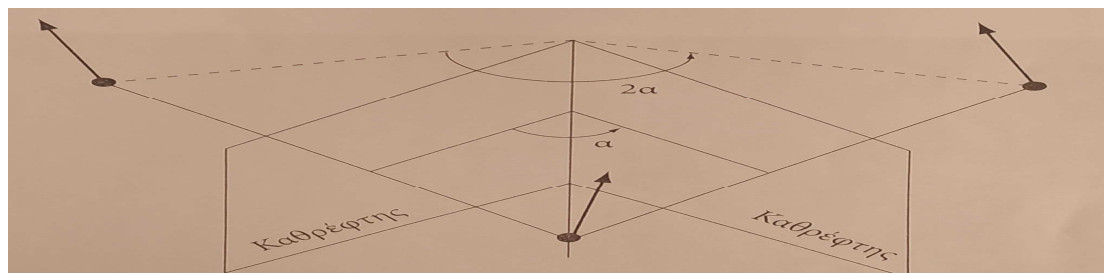
Ο διάσημος πίνακας του Jan Van Eyck, Το ζεύγος Arnolfini, του 1434. Στο μικροσκοπικό καθρέφτη που βρίσκεται στον τοίχο στο βάθος, μεγέθους λίγο πάνω από 5 εκατοστά, αντανακλάται ολόκληρος ο πίνακας, μια άποψη από το παράθυρο. Το ζεύγος απεικονίζεται με την πλάτη γυρισμένη ενώ φαίνονται και δύο άλλα πρόσωπα που στην πραγματικότητα βρίσκονται στη θέση του θεατή.

Έστω μία καθημερινή κατάσταση: όταν οι άνθρωποι πηγαίνουν στο κομμωτήριο, ο κομμωτής τους κόβει τα μαλλιά συνήθως μπροστά σε έναν τοίχο γεμάτο καθρέφτες. Στο τέλος, ζητά την έγκριση του πελάτη ως προς τη δουλειά του: για να του δείξει πώς έκοψε τα μαλλιά στο πίσω μέρος, ο κομμωτής τοποθετεί έναν καθρέφτη κοντά στο κεφάλι του πελάτη και πίσω από αυτό. Αυτή η εικόνα αντανακλάται στον καθρέφτη μπροστά στον πελάτη (εφόσον δεν έχει μάτι στον αυχένα του) που μπορεί να παρατηρήσει ολόκληρο το κούρεμα, καθώς και την εικόνα του κεφαλιού του στον βοηθητικό καθρέφτη. Ένας γεωμέτρης θα μπορούσε να θέσει ένα απρομελέτητο ερώτημα: θεωρεί άραγε ο πελάτης του κομμωτή, τον αυχένα του ως «αντί αυχένα»; Αν παρατηρήσουμε τον αυχένα του πελάτη στον καθρέφτη του κομμωτή, η δεξιά και η αριστερή πλευρά είναι αντιστραμμένες. Αλλά καθώς η σκηνή αντανακλάται από έναν άλλο καθρέφτη, αυτόν που κρατά στο χέρι του ο κομμωτής που είναι μία χειρομορφική εικόνα της πραγματικότητας μετατρέπεται στο μεγάλο καθρέφτη σε αληθινή εικόνα, καθότι η χειρομορφική εικόνα μιας χειρομορφικής εικόνας είναι, όπως επιβάλλει η κοινή λογική, μία κανονική εικόνα.

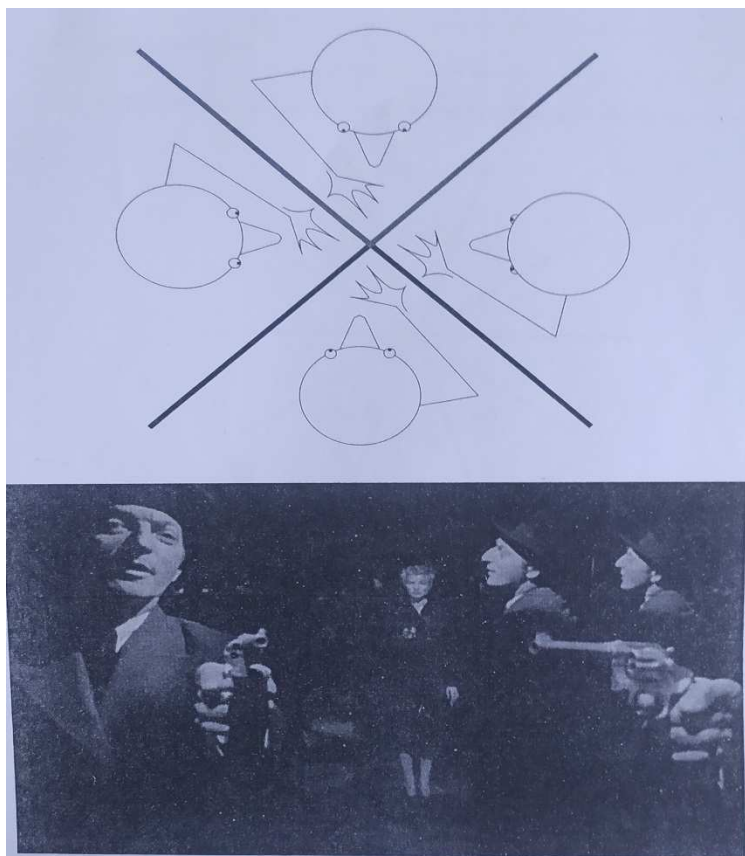
Όπως γνωρίζουν ήδη οι πελάτες του κομμωτηρίου που αυτό τους έχει συμβεί ήδη τουλάχιστον μία φορά: όταν ο κομμωτής τους ρώτα αν τους αρέσει το κούρεμα, τους δείχνει τον πραγματικό τους αυχένα. Όχι αυτόν «Μες στον καθρέφτη» αλλά τον αληθινό αυχένα αυτόν που βλέπει όλος ο κόσμος. Και ποιά είναι η μαθηματική συνέπεια αυτής της κατάστασης; Μπορούμε να πούμε πώς δύο κατοπτρικές συμμετρίες που παρουσιάζουν μία τάση, μετασχηματίζονται αν αντανακλώνται η μια μέσα στην άλλη, σε μία απλή συμμετρία χωρίς στρέψη σε μία μετατόπιση της οποίας η απόσταση είναι το άθροισμα των αποστάσεων που τις χωρίζουν από κάθε άξονα.



Όταν συσχετίζουμε τη μία μετά την άλλη δύο παράλληλες κατοπτρικές συμμετρίες, παίρνουμε μετατοπίσεις στη διεύθυνση της κίνησης. Όταν οι κατοπτρικές συμμετρίες δεν είναι παράλληλες, τότε αν τα επίπεδα συμμετρίας διασταυρώνονται σε μία ευθεία R με γωνία α έχουμε περιστροφές σε σχέση με την R , μεγέθους 2α .

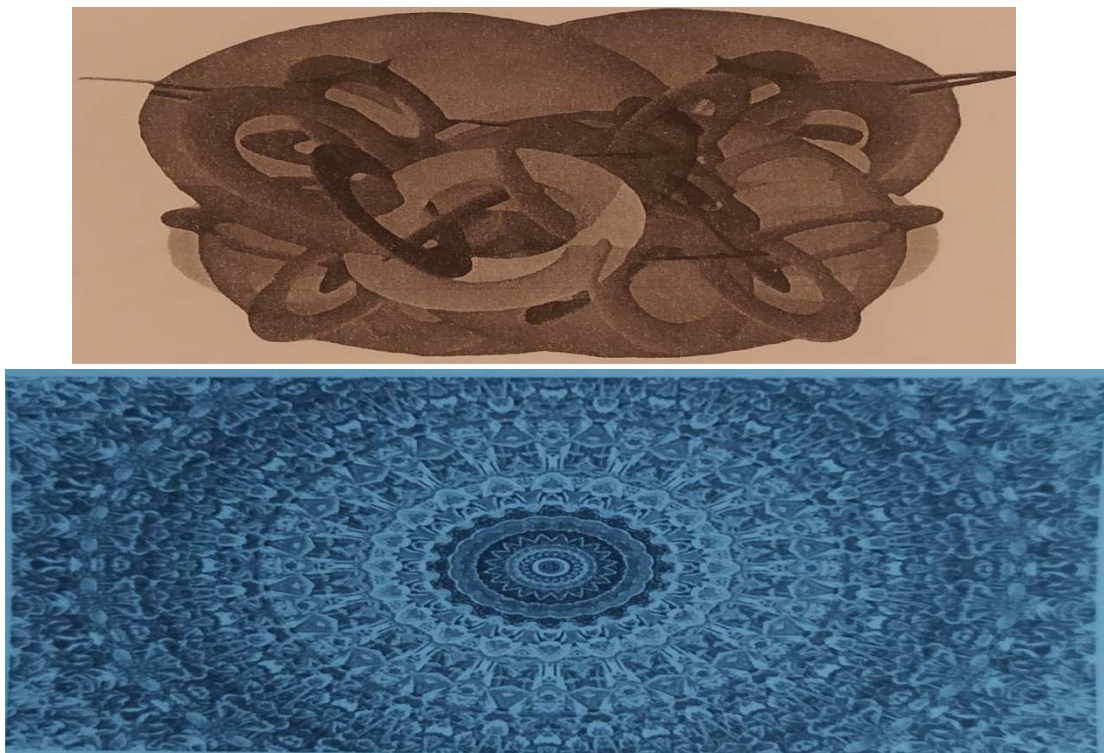


Ένα παράξενο χαρακτηριστικό της κάτοπτρικής συμμετρίας αφορά τους ίδιους τους καθρέφτες στην πραγματικότητα τους συνδυασμούς δύο καθρεφτών που δεν αντιστρέφουν την εικόνα, όπως θα παρατηρήσουμε αν κοιταχτούμε σε καθρέφτες που είναι τοποθετημένοι με τον τρόπο που δείχνει το διάγραμμα της επόμενης σελίδας:



Τα «παιχνίδια» με τις κατοπτρικές συμμετρίες οδήγησαν σε μεγαλοφυείς σκηνές όπως αυτές που έχει κινηματογραφήσει ο Orson Welles στην ταινία «Η Κυρία από τη Σαγκάη» *The Lady from Shanghai*.

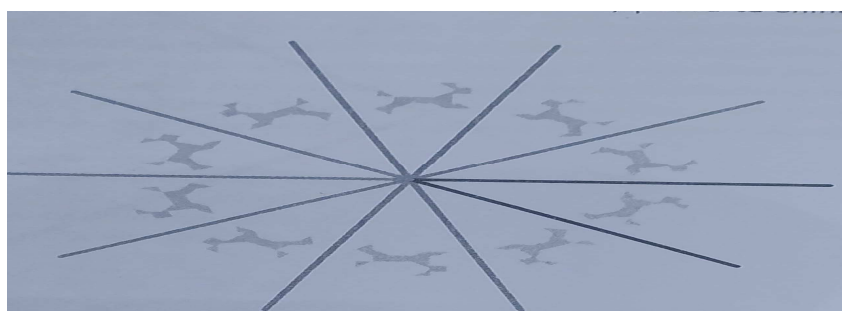
Περιέργως, η κατοπτρική συμμετρία είναι δύσκολο μερικές φορές να ανιχνευθεί και για αυτό χρειάζονται λεπτά όργανα μαθηματικής ανάλυσης: μερικές φορές η κατοπτρική συμμετρία είναι αόρατη, ακόμα και για τους δημιουργούς της σύνθετης θεωρίας των χορδών που αντιμετωπίζουν τα εσωτερικά αντικείμενα ως πολλαπλότητες Κάλαμπι-Γιαου. Αυτές δεν αντιπροσωπεύουν μία επιφάνεια αλλά μία προβολή, καθότι η πολλαπλότητα Κάλαμπι-Γιαου είναι πολυδιάστατη και διαθέτει περισσότερες από τρεις διαστάσεις, αν και δεν μας είναι προσβάσιμες παρά μόνο με την μορφή μιας αποδυναμωμένης δισδιάστατης προβολής. Οι πολυπλοκότητες Κάλαμπι-Γιαου παρουσιάζονται από ζεύγη που ονομάζονται κατοπτρικά ζεύγη εκ των οποίων καθένα είναι εναντίομορφο του άλλου.



9. Το καλειδοσκόπιο

Το καλειδοσκόπιο είναι ένα παιχνίδι ή οπτικό όργανο που εξερευνά τα επίπεδα συμμετρίας. Ενόψει 2 επιπέδων συμμετρίας που σχηματίζουν γωνία ανοίγματος $\pi/3$ ή $\pi/4$, παίρνουμε 6 ή 8 εικόνες ενός αντικειμένου που βρίσκεται ανάμεσα τους (καθότι η εικόνα αντανακλάται και στους 2 καθρέφτες). Η συσκευή λειτουργεί ομοίως με άνοιγμα π/n που δίνει $2n$ εικόνες. Πρόκειται για ένα πολύ απλό όργανο, το οποίο δίνει ωστόσο εκπληκτικά αποτελέσματα: χάρη στην κατοπτρική συμμετρία και τη φύση των αντανακλωμένων αντικειμένων, μπορεί να δημιουργήσει εικόνες εκπληκτικά πολύπλοκες και πάντα διαφορετικές.

Σχήμα που εξηγεί τα επίπεδα συμμετρίας που επιτρέπουν την λειτουργία ενός καλειδοσκοπίου)



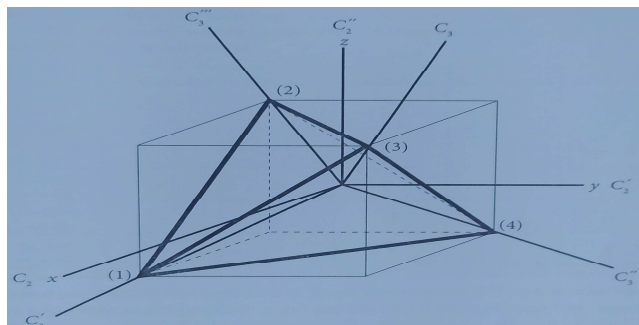
10. Μερικά παραδείγματα στο χώρο

Είδαμε τις βασικές συμμετρίες των κανονικών πολυγώνων. Ας δούμε τώρα αυτή των κανονικών πολυέδρων. Καταρχήν δεν πρόκειται για ιδιαίτερα δύσκολη υπόθεση, καθώς αν τα κανονικά πολύγωνα είναι άπειρα, τα κανονικά πολύεδρα είναι μόλις 5 και ονομάζονται «στερεά του Πλάτωνα»: το 4εδρο, το 6εδρο(κύβος), το 8εδρο, το 12άεδρο και το 20άεδρο. Δυστυχώς, οι συμμετρίες ενός πολυέδρου δεν αποτελούν εύκολο θέμα μελέτης και θα καταλάβουμε γρήγορα πώς να κάνουμε με πολύ σημαντικές και πολύ περίπλοκες ομάδες.

Ας ξεκινήσουμε με το 4εδρο, το πιο απλό πολύεδρο, καθώς έχει 4 κορυφές, 6 ακμές και 4 έδρες. Η ομάδα συμμετρίας του θα είναι ίση με τον αριθμό των μεταθέσεων των κορυφών του. Το τετράεδρο δεν παρουσιάζει πάνω από 24 συμμετρίες. Διαθέτει πολλούς άξονες γύρω από τους οποίους περιστρέφονται αυτές, παρότι μερικοί άξονες βρίσκονται δύσκολα.

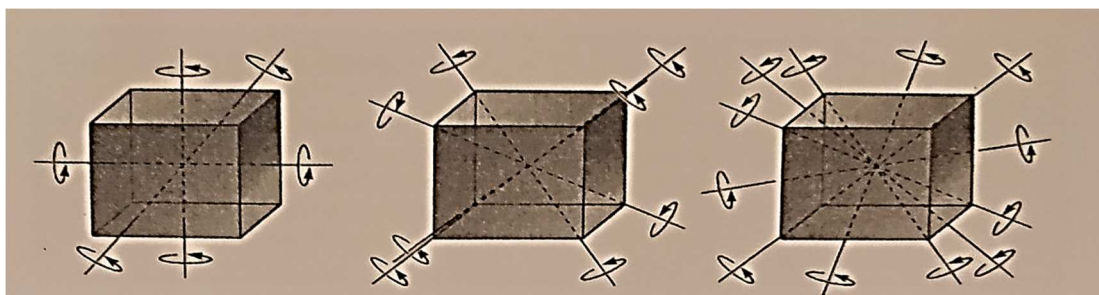
Οι περιστροφές γύρω από τους άξονες(4 στον αριθμό) που περνούν από τις κορυφές του τετράεδρου έχουν πλάτος $2\pi/3$ και αυτές που γυρνούν γύρω από άξονες που περνούν από τα κεντρικά σημεία κάθε ακμής (υπάρχουν 3) έχουν πλάτος π . Υπολογίζουμε στο σύνολο μία ομάδα 12 κανονικών (ή γνήσιων), περιστροφών ονομασία που δίνεται στη γεωμετρία στις περιστροφές γύρω από έναν άξονα.

Για να βρούμε όλες τις συμμετρίες που ανέρχονται στις 24, πρέπει να υπολογίσουμε αυτές που ονομάζονται αντίμετακινήσεις: 6 κατοπτρισμοί σε ένα επίπεδο (ισομετρίες που προκύπτουν από έναν κατοπτρισμό σε έναν καθρέφτη) και 6 στροφοκατοπτρισμοί (ισομετρίες που αντιστοιχούν στην αντανάκλαση σε έναν καθρέφτη με μία ταυτόχρονη περιστροφή γύρω από έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο).



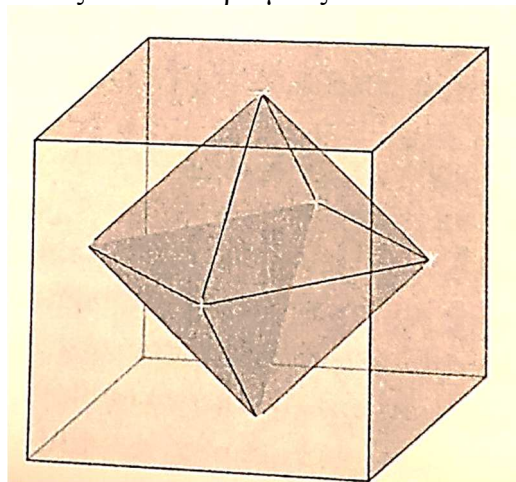
Συνολικά έχουμε δύο ομάδες $T \subset T_d$ με την πρώτη (T) να αποτελείται από τις 12 κανονικές περιστροφές και η πιο μεγάλη (T_d) από το σύνολο των συμμετρίων:24.

Ο κύβος αποτελεί ένα πολύεδρο πιο κατανοητό, πιο εύκολο να το αντιληφθείς κάνεις με εμπειρικό τρόπο. Η γεωμετρική δομή του αντιστοιχεί ακριβώς στις μαθηματικές έννοιες των τριών διευθύνσεων του χώρου με τους τρεις άξονες συντεταγμένων του τους οποίους γνωρίζουμε. Οι ισομετρίες του κύβου είναι κανονικές περιστροφές και το συμπλήρωμα τους μία αντί –περιστροφή. Οι κανονικές περιστροφές έχουν πλάτος $2\pi/3$ γύρω από τους άξονες (4) που περνούν από τις κορυφές, περιστροφές πλάτους $\pi/2$ γύρω από τους άξονες (3) που περνούν από τα κέντρα των εδρών και τέλος περιστροφές πλάτους π γύρω από τους άξονες (6) που περνούν από τη διάμεσο κάθε ακμής.

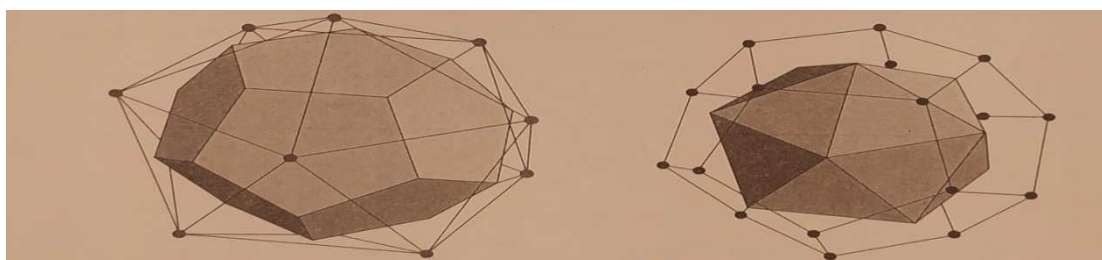


Από αριστερά προς δεξιά οι κανονικές (ή γνήσιες) περιστροφές του κύβου: 3 περιστροφές γύρω από τους άξονες που περνούν από τα κέντρα των εδρών, 4 γύρω από τους άξονες που περνούν από τις κορυφές και 6 περιστροφές γύρω από τους άξονες που περνούν από τις διαμέτρους κάθε ακμής.

Αυτό δίνει σύνολο 24 κανονικών περιστροφών, δηλαδή μία ομάδα αποκαλούμενη O . Αν μετρήσουμε τους κατοπτρισμούς και τους στροφοκατοπτρισμούς φτάνουμε σε 48 πιθανές συμμετρίες και σε ομάδα αποκαλούμενη O_h που επαληθεύει τη σχέση $O \subset O_h$. Η κατάσταση περιπλέκεται στο οκτάεδρο που φαίνεται περίπλοκο και θα έπρεπε να έχει περισσότερες συμμετρίες από τον κύβο. Δεν είναι καθόλου έτσι.



Στο τρισδιάστατο βασίλειο τα πράγματα λειτουργούν με το δικό τους τρόπο και αποδεικνύεται πως ο κύβος και το οκτάεδρο είναι **συζυγή στερεά**, δηλαδή αν ενώσουμε τα κέντρα των εδρών ενός κύβου, παίρνουμε ένα οκτάεδρο και αντίστροφα. Μία απόρροια αυτής της συζυγίας είναι πως τα δύο στερεά διαθέτουν ακριβώς την ίδια ομάδα συμμετριών. Η κατάσταση αποδεικνύεται παράδοξη για τα σχήματα που ακολουθούν, καθώς αν και μπορούμε να χαρούμε επειδή **το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο είναι συζυγή**, ωστόσο αυτό δεν μας γλιτώνει από την αναζήτηση της ομάδας συμμετριών ενός εξ αυτών. Δε θα υπολογίσουμε τις συμμετρίες. Θα αρκεστούμε να μάθουμε πως η ομάδα παρουσιάζει 60 κανονικές περιστροφές και 120 στοιχεία. Ο αριθμός αξόνων περιστροφής του εικοσάεδρου, είναι 10 πλάτους $2\pi/3$, 6 πλάτους $2\pi/5$ και 15 πλάτους π .



11. Τα πλατωνικά στερεά

Τα στερεά του Πλάτωνα είναι κανονικά κυρτά πολύεδρα σε 3 διαστάσεις.

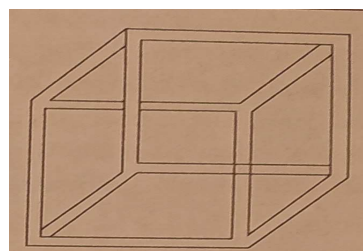
Οφείλουν το όνομά τους στην αναφορά τους στο διάλογο «Τίμαιος» του Πλάτωνα, η οποία τους αποδίδει μαγικές ιδιότητες: η φωτιά, για παράδειγμα, αποτελείται από τετράεδρα, ο αέρας από οκτάεδρα, το νερό από εικοσάεδρα, η Γη από εξάεδρα και ο ουρανός από δωδεκάεδρα. Σε καθεμία από τις κορυφές τους αντιστοιχεί ο ίδιος αριθμός ακμών που έχουν όλες ίδιο μήκος, Ενώ οι έδρες τους

σχηματίζουν κανονικά πολύγωνα. Τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Στερεά του Πλάτωνα	Τετράεδρο	Εξάεδρο	Οκτάεδρο	Δωδεκάεδρο	Εικοσάεδρο
Αριθμός εδρών	4	6	8	12	20
Αριθμός ακμών	6	12	12	30	30
Αριθμός κορυφών	4	8	6	20	12

12. Ένας κύβος χωρίς συμμετρία

Υπάρχει μία συμμετρική συλλογή του εξάεδρου: πρόκειται για το διάσημο κύβο Escher που αποτελεί ένα αντικείμενο απίθανο για το δικό μας τρισδιάστατο ευκλείδειο κόσμο. Σε ένα από τα έργα του συγκεκριμένου καλλιτέχνη με τίτλο Belvedere αυτός ο κύβος φαίνεται να περιβάλλεται από άλλες απίθανες προοπτικές.

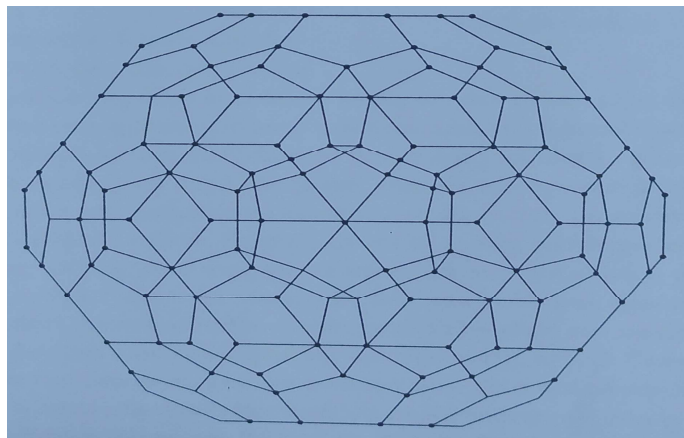


13. Τα μη κυρτά και μη κανονικά πολύεδρα

Υπάρχουν μόνο 5 πλατωνικά στερεά, αλλά θα ήταν λάθος να σκεφτούμε πώς με αυτό ολοκληρώνεται η μελέτη των ομάδων χωρικών συμμετριών. Υπάρχουν πολλές άλλες συλλογές πολύεδρων εκτός των κανονικών, μολονότι είναι σίγουρο πώς τραβώντας πλευρές και γωνίες ίσες, χάνουμε συμμετρία με τέτοιο τρόπο που η μελέτη των υπολοίπων πολύεδρων αποδεικνύεται λιγότερο πλούσια. Τα στερεά του Πλάτωνα είναι κανονικά πολύεδρα, αλλά δεν είναι παρά ένα μικρό κομμάτι των στερεών που οι γεωμέτρες χαρακτηρίζουν πολύεδρα. Υπάρχουν τα ημικανονικά πολύεδρα τα πολύεδρα Kepler–Poisnot, τα κολουρα πολύεδρα, τα πολύεδρα αστέρες, τα πολύεδρα Catalan, τα κυρτά πολύεδρα με κανονικές έδρες, τα πολύεδρα Johnson, τα άκαμπτα ή εύκαμπτα πολύεδρα όπως ρομβικοδιωδεκάεδρο, κυβοκτάεδρο, ρομβοεικοκυβοκτάεδρο ή τετραδεκάεδρο. Όλα έχουν συμμετρίες, κάποια πρωτοφανούς αριθμού και οι ομάδες συμμετριών τους μπορεί να αποδειχτούν κολοσσιαίες. Πολύ μεγάλα μυαλά, όπως ο H.S.M. Coxeter (1907–2003) περιπλανήθηκαν σε αυτό το σύμπαν με μια ευκολία εξοργιστική για όσους από εμάς είναι προικισμένοι με μία πιο περιορισμένη γεωμετρική ικανότητα.

Αυτή η απεριόριστη ικανότητα «όρασης» του Coxeter του επέτρεπε να βλέπει τα πολύεδρα σε περισσότερες από 3 διαστάσεις, τα οποία θα ονομάζονται «πολύτοπα». Μελέτησε τις συμμετρίες του κυττάρου 120, ενός τετραδιάστατου κανονικού πολύεδρου που απαντά στο όνομα εκατονεικοσάχωρο (ή υπερδωδεκάεδρο) και που έχει 600 κορυφές, 1200 ακμές, 720 πενταγωνικές έδρες και 120 δωδεκαεδρικές κυψέλες. Το τετραδιάστατο πολύεδρο εκτός από κορυφές ακμές και έδρες, διαθέτει τρισδιάστατα συστατικά στοιχεία και σε αυτή την περίπτωση δωδεκαεδρικές κυψέλες. Η όψη του προβαλλόμενη σε ένα χαρτί δύο διαστάσεων

ανήκει στο παρακάτω σχήμα που είναι ζενιθιακή προβολή 2 διαστάσεων (ένα παρόμοιο παρασκεύασμα συσκευασμένα αλλά κατασκευασμένο από μέταλλο εκτίθεται στο Ινστιτούτο Fields του Τορόντο).



Μία από τις βασικές δυσκολίες που εντοπίζουν οι ειδικοί είναι ο ορισμός το πολύεδρου. Στην πραγματικότητα δεν έχουμε σαφή ιδέα περί τίνος πρόκειται, ενώ δεν υπάρχει ομοφωνία. Το μοναδικό σημείο στο οποίο όλος ο κόσμος φαίνεται να συμφωνεί (στα πλαίσια διαστάσεων των τριών διαστάσεων) είναι πως δύο έδρες οροθετούν την ίδια ακμή. Περιοριζόμενοι στα πολύεδρα που έχουν μελετηθεί παραδοσιακά και δίνοντας προσοχή στις ιδιότητές τους που άπτονται της συμμετρίας, τα πολύεδρα μπορούν να είναι ισογώνια, ισότοξα, ισοεδρικά, κανονικά, ημικανονικά ομοιόμορφα και ευγενή. Οι ομάδες συμμετριών τους μπορεί να είναι τεράστιες αν και ο Coxeter και άλλοι μαθηματικοί τις χώρισαν ανά οικογένεια. Σκεφτείτε τις συμμετρίες σαν ένα απλό πρίσμα κανονικής τομής που παρουσιάζει τόσες περιστροφές όσες και έδρες. Αρκεί να πούμε ότι διακρίνονται περίπου 10 οικογένειες στη μελέτη των ομάδων συμμετριών ενός πολύεδρου.

14. Harold Scott Macdonald Coxeter (1907–2003)

Προσωπικότητες όπως ο H.S.M. Coxeter δυσκολεύτηκαν να γίνουν δημοσιότητες παγκόσμιας αναγνώρισης. Ωστόσο στον επιστημονικό κόσμο, είναι σχεδόν μυθικά πλάσματα, ινδάλματα τρόπου ύπαρξης, πράξης και σύλληψης του κόσμου. Ο Coxeter έγραψε το πρώτο του άρθρο σε ηλικία 11 ετών, ενώ δεν κατάφερε να στείλει το τελευταίο του που δημοσιεύτηκε μετά τον θάνατό του, ένα αφιέρωμα στις ομάδες που επί σχεδόν 80 χρόνια διατηρούσαν μία σχέση ερωτική μαζί του. Κατά τη διάρκεια της ζωής του είχε την ευκαιρία να συναντήσει τους Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein ή M.C. Escher. Για να πάρουμε μία ιδέα για τον τρόπο ζωής του Coxeter, αρκεί να διηγηθούμε πως όταν η μαθηματικός Asia Ivic του ανακοίνωσε ότι επρόκειτο να απουσιάσει μερικές μέρες εν όψει του επικείμενου τοκετού της, ο μαθηματικός της έδωσε χειρόγραφο αξιόλογου όγκου λέγοντάς της ότι έπρεπε να το διαβάσει στον ελεύθερο χρόνο της για να ανακουφιστεί από την πλήξη της όταν δεν θα είχε τίποτε άλλο να κάνει.

Ο Coxeter θα άξιζε να ονομαστεί Κύριος Ομάδα καθότι αφιέρωσε ολόκληρη την ζωή του στη μελέτη της συμμετρίας και των ομάδων της στον ευκλείδειο χώρο και στη συνέχεια σε διαφορετικές διαστάσεις, σαν οι τρεις που αντιλαμβανόμαστε να μην είναι να μην ήταν αρκετές. Αφοσιώθηκε έτσι ένθερμα στα πολύτοπα ή πολυδιάστατα πολύεδρα. Η προσέγγιση του αφορά το σύμπαν ήταν περισσότερο γεωμετρική παρά αλγεβρική γεγονός που τον έκανε σπάνιο είδος μαθηματικού. Οι ομάδες που μπορούν να οριστούν ως «βασικές» με κατοπτρικές συμμετρίες

ονομάζονται ομάδες Coxeter διότι αφιέρωσε δεκαετίες ολόκληρες στη μελέτη αυτών των ομάδων και στις ταξινομήσεις τους, για να καταλήξει στην ταξινόμηση των πεπερασμένων ομάδων το 1935. Πέραν της παρουσίας τους στα πολύτοπα εμφανίζονται στη θεωρία των γραφημάτων, στην κρυσταλλογραφία, στην ταξινόμηση των ομάδων Lie, στη θεωρία των κτιρίων (που δεν έχει καμία σχέση με την αρχιτεκτονική). Ο Coxeter ήταν συγγραφέας 13 βιβλίων εκ των οποίων το ένα μία συλλογή είχε τίτλο «Καλειδοσκοπία» θέμα που τον γοήτευε πάντα και πάνω στο οποίο είχε διεξάγει σημαντικότερες μελέτες. Υπήρξε εξαιρετικός μουσικός και στον πρόλογο του βιβλίου του Regular Simple Polytopes (Κανονικά Απλά Πολύτοπα) έγραφε: «προσπάθησα να φτιάξω αυτό το έργο σαν μία συμφωνία του Brunker με κρεσέντο και απόγεια, μικρές πρώτες εντυπώσεις μελλοντικών απολαύσεων με άφθονες διασταυρωμένες αναφορές». Επίσης θεωρούσε τη συμμετρία ως έργο τέχνης.

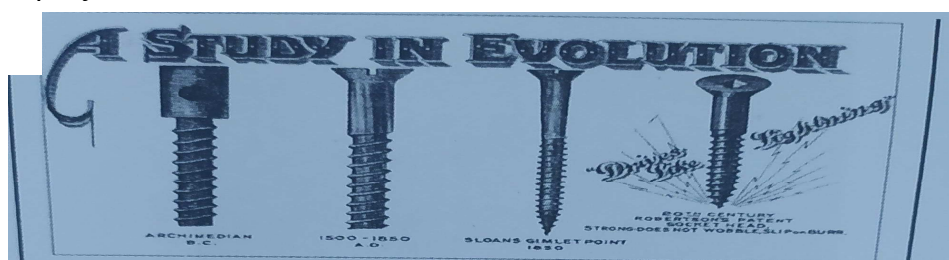
15. Jacques Tits (1930–)

Ο Jacques Tits Γάλλος μαθηματικός βελγικής καταγωγής είναι σημαντικότερος ειδικός της θεωρίας ομάδων και εξαίρετος αλγεβριστής πολύ κοντινός φίλος του Coxeter και υποστηρικτής των απόψεων και των ερευνών του. Η συνεισφορά του στη γνώση των ομάδων είναι τεράστια και το όνομά του συνδέεται με την ομάδα με την ομάδα Tits, μία πεπερασμένη απλή ομάδα βαθμού 17.971.200. Είναι ο δημιουργός της έννοιας των κτιρίων των συνδυαστικών οντοτήτων που σχετίζονται με την ομάδα καθώς και πολλών άλλων μαθηματικών εννοιών. Έχει τη σπάνια τιμή να είναι μέλος της ομάδας Bourbaki του θρυλικού μαθηματικού που δεν υπήρξε ποτέ.

16. Η ελικοειδής συμμετρία

Ο έλικας, είναι μία τρισδιάσταση μαθηματική καμπύλη που χαρακτηρίζεται από μία θεμελιώδη ιδιότητα: η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της και μία καθορισμένη ευθεία (που ονομάζεται άξονας του έλικα) είναι πάντα η ίδια. Όταν μιλάμε για την επιφάνεια που ενώνει τον έλικα με τον άξονα, λέμε ελικοειδής επιφάνεια. Αν ο έλικας περιελίσσεται γύρω από έναν κύλινδρο το αντικείμενο που προκύπτει είναι συμμετρικό και πασίγνωστο καθώς το συναντάμε στις κολόνες, στα τρυπάνια, στις βίδες και σε ένα σωρό αλλά αντικείμενα και αρχιτεκτονικά στοιχεία.

Οι έλικες είναι χειρόμορφικοί δηλαδή μπορούν να περιελίσσονται προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά και ως εκ τούτου οι εναντιομορφικές εικόνες τους δε συμπίπτουν. Μερικές φορές δύο εναντιομορφικοί έλικες περιελίσσονται γύρω από τον ίδιο άξονα, δίνοντας έτσι παράξενες δομές. Μερικές φορές όπως στην περίπτωση μίας βίδας, οι δύο εναντιομορφικές πολυπλοκότητες υπάρχουν με φυσικό τρόπο. Ένα σημαντικό στοιχείο του έλικα το σπείρωμα του που καθορίζει το εύρος της συμμετρίας του.

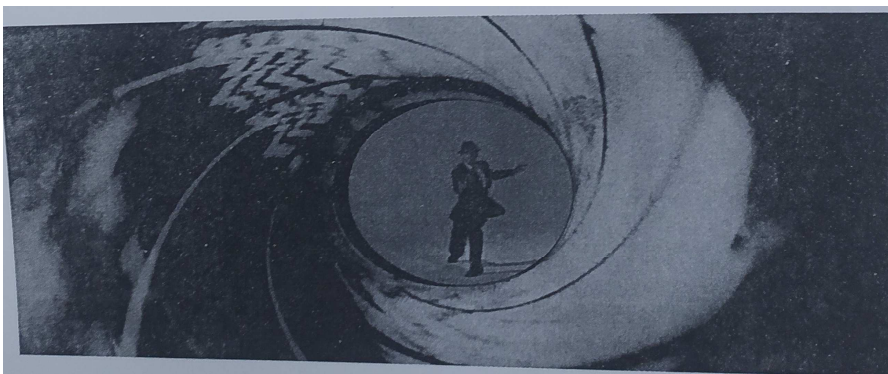


Το σπείρωμα μίας κυλινδρικής βίδας είναι μια καλή προσέγγιση της ελικοειδούς συμμετρίας. Η φωτογραφία είναι από διαφήμιση του 1909 για τα προϊόντα Robertson.

Βασικά η ελικοειδής συμμετρία είναι ένας τρισδιάστατος συνδυασμός μετατοπίσεων σύμφωνα με έναν άξονα και περιστροφές συγκεκριμένης γωνίας. Στη βαλλιστική οι έλικες βρήκαν μία απρόσμενη χρησιμότητα, καθότι σμιλεύονται στις κάνες των πιστολιών, των τουφεκιών, και άλλων όπλων, έτσι ώστε τα βλήματα να βγαίνουν περιελισσόμενα γύρω από το εαυτό τους ώστε ο αέρας να μην μπορεί να αλλάξει την τροχιά τους.

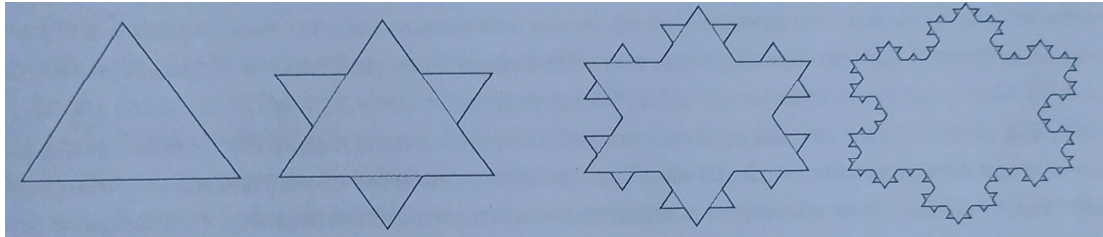


Διπλή σκάλα του Βατικανού στη Ρώμη. Η μια σκάλα χρησιμεύει για την άνοδο και η άλλη, που περιελίσσεται ελικοειδώς γύρω από την πρώτη, χρησιμεύει για την κάθοδο. Άλλο ένα αξιόλογο παράδειγμα διπλής σκάλας συναντάμε στον πύργο του Σαμπόρ στη Γαλλία.



17. Camille Jordan (1838 – 1922)

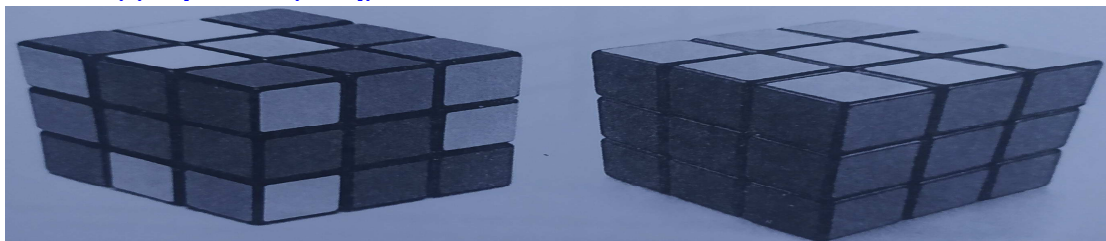
Ο μηχανικός Camille Jordan καθώς υπήρξε μηχανικός σε όλη του τη ζωή, έγινε γνωστός στα μαθηματικά για το θεώρημα της καμπύλης που φέρει το όνομά του και λέει ότι κάθε επίπεδη καμπύλη που δεν τέμνει ποτέ το εαυτό της (δηλαδή που δεν διαπλέκεται) χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές, «το εσωτερικό» και «το εξωτερικό» της καμπύλης, έτσι ώστε αν ενώσουμε δύο σημεία κάθε περιοχής η γραμμή πρέπει να διασταυρώνει την καμπύλη. Αυτό φάνταζε στοιχειώδες, αλλά αν προσπαθήσετε να το αποδείξετε με καμπύλες μη παραγωγίσιμες (ή μη διαφορίσιμες) όπως μία καμπύλη Koch θα βρεθείτε αντιμέτωποι με τη δυσκολία αυτού του θεωρήματος.



Η καμπύλη του Helge van Koch (1870-1924) παρουσιασμένη από αυτόν το 1904, είναι αδύνατο να σχεδιαστεί αλλά μπορούμε να την ορίσουμε καθώς αποτελεί ένα αντικείμενο φράκταλ κλασματογενούς διάστασης $d = \ln 4 / \ln 3 = 1,26186$. Η εικόνα δείχνει τα πρώτα 4 στάδια της υποθετικής όψης αυτού του είδους της καμπύλης. Μετά από άπειρες επαναλήψεις αποκτώντας κάθε φορά περισσότερες κορυφές παίρνουμε μία καμπύλη που είναι συνεχής αλλά όχι διαφορίσιμος. Είναι κυρίως γνωστή ως «χιονοनिφάδα».

Είναι δύσκολο να αποδείξουμε ικανοποιητικά ένα εμφανώς τόσο απλό γεγονός που έως πρόσφατα πιστευόταν ότι η αρχική απόδειξη του Jordan δεν ήταν εντελώς σωστή και περιείχε ένα λάθος συλλογιστικής. Στην πραγματικότητα αυτό δεν ήταν καθόλου προφανές στους σύγχρονους του Jordan. Μολονότι αυτός συνεισέφερε αξιοσημείωτα στη θεωρία αριθμών και στο λογισμό πινάκων, ήταν γνωστός επίσης για την ώθηση που έδωσε στην εποχή του στη θεωρία Galois την οποία ο Liouville του γνώρισε πολύ νωρίς και στην ολοκαίνουργια τότε θεωρία των ομάδων. Ο Jordan δε θεωρούσε τις ομάδες ως αφηρημένες οντότητες, όπως θεωρούνται σήμερα αλλά ως ομάδες μεταθέσεων. Αυτό δεν τον εμπόδισε όμως να λάβει υπόψη του τις αλυσίδες κανονικών υποομάδων του τύπου: $\{n\} = G_1 < G_2 < G_3 < \dots < G_n = G$ και να κάνει τη δοκιμή σε συνεργασία με τον Otto Holder (1859- 1937) του θεωρήματος των Jordan –Holder που διατυπώνει με την προϋπόθεση ορισμένων ισομορφισμών και να πληροί ορισμένες αρκετά απλές αρχικές προϋποθέσεις, την ισοδυναμία παρόμοιων αλυσίδων.

18. Η συμμετρία στα μαθηματικά



Η θεωρία ομάδων είναι ένας εκπληκτικός κλάδος των μαθηματικών που δείχνει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων που υπάρχουν για να ζωγραφίσουμε κομμάτια ξύλου. Robert Ansley

Αν είστε λάτρεις των μαθηματικών παιχνιδιών τότε το στοιχείο σας είναι οι ομάδες είτε πρόκειται για παιχνίδι με χαρτιά είτε έχει να κάνει με τη συναρμολόγηση,

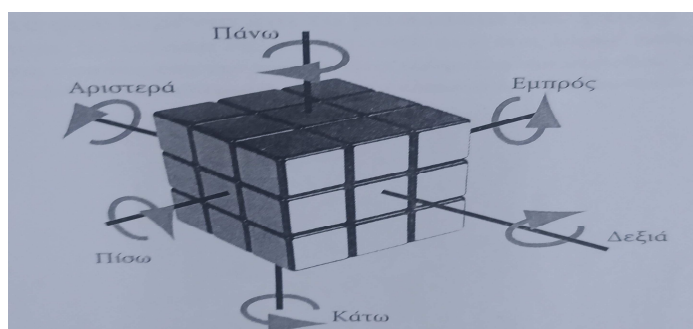
την αποσυναρμολόγηση ή το βάνιμο κομματιών ξύλου. Δεν είναι περίεργο που οι ομάδες σχέση έχουν μεγάλη σχέση με το διάσημο κύβο του Ρούμπικ. Επομένως ο ορισμός που δίνεται στην παραπομπή στην αρχή του κεφαλαίου είναι αληθινός, αν και μόνο εν μέρει: η θεωρία των ομάδων, χρησιμεύει φυσικά στην ανεύρεση των διαφορετικών τρόπων που υπάρχουν για να ζωγραφίσει κάποιος κομμάτια ξύλου. Αλλά αυτή η ανυπέρβλητη θεωρία μας επιτρέπει επίσης να λύσουμε από οποιαδήποτε θέση τον κύβο του Ρούμπικ ώσπου να ξαναφτιάξουμε τις έξι χρωματιστές πλευρές του.

Αυτό φαίνεται ανάξια υπόθεση για μία ολόκληρη μαθηματική θεωρία: η λύση σπαζοκεφαλιών και αινιγμάτων. Και όμως προσπαθήστε να λύσετε τον κύβο του Ρούμπικ από μία οποιαδήποτε τυχαία θέση. Ίσως αλλάξετε άποψη για το παιχνίδι αν μάθετε ότι μπορείτε να βρείτε την αρχική θέση του κύβου ξεκινώντας από οποιαδήποτε θέση, αν εφαρμόσετε σωστά τις περιστροφές που χαρακτηρίζουν τη θεωρία των ομάδων.

19. Η άλγεβρα σαν παιχνίδι

Το μαθηματικό παιχνίδι με τις μεγαλύτερες πωλήσεις στην ιστορία γνώρισε απαστράπτουσα καριέρα από τότε που δημιουργήθηκε το 1974 από τον Ούγγρο αρχιτέκτονα Erno Rubick. Έκτοτε γνώρισε τεράστια επιτυχία φτάνοντας στο σημείο να δίνει στους φοιτητές το χρόνο να βρουν λύσεις γρήγορες αλλά όχι εύκολες ξεκινώντας από τις θέσεις των μικρών κύβων. Υπάρχουν 27 καταναμεμένοι ανά ομάδες των τριών που χάρη σε ένα μεγαλοφυή μηχανισμό περιστροφής, μπορούν να γυρίζουν κατά στρώματα και να αλλάζουν τα χρώματα των πλευρών που βλέπει ο παίκτης. Το παιχνίδι συνίσταται στην αρχική του εκδοχή στο να αποκτήσει ξανά κάθε πλευρά του μεγάλου κύβου το ομοιόμορφο χρώμα της. Αργότερα, προέκυψαν κι άλλα τελικά αποτελέσματα όπως η τοποθέτηση ενός διαφορετικού χρώματος στο κέντρο κάθε πλευράς αλλά το παιχνίδι και οι χειρισμοί ποικίλουν αισθητά. Ο κύβος του Ρούμπικ επιτρέπει κινήσεις σε πολλές κατευθύνσεις δημιουργώντας μία ομάδα μεταθέσεων των άκρων και των αξόνων η οποία μεγαλώνει χρωμάτων από τους συνδυασμούς χρωμάτων.

Στην πραγματικότητα όλες οι περιστροφές ενός κύβου του Ρούμπικ μπορούν να περιοριστούν στις κινήσεις που φαίνονται στην εικόνα, εφαρμοσμένες σε 1,2 ή 3 στρώματα κύβων.

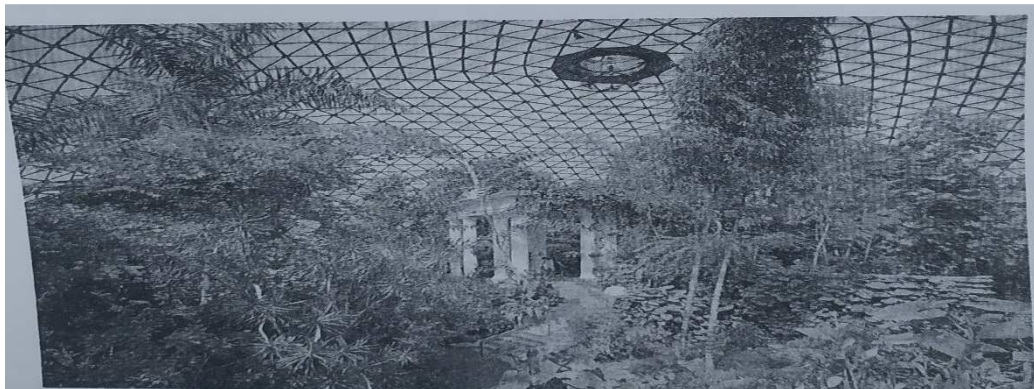
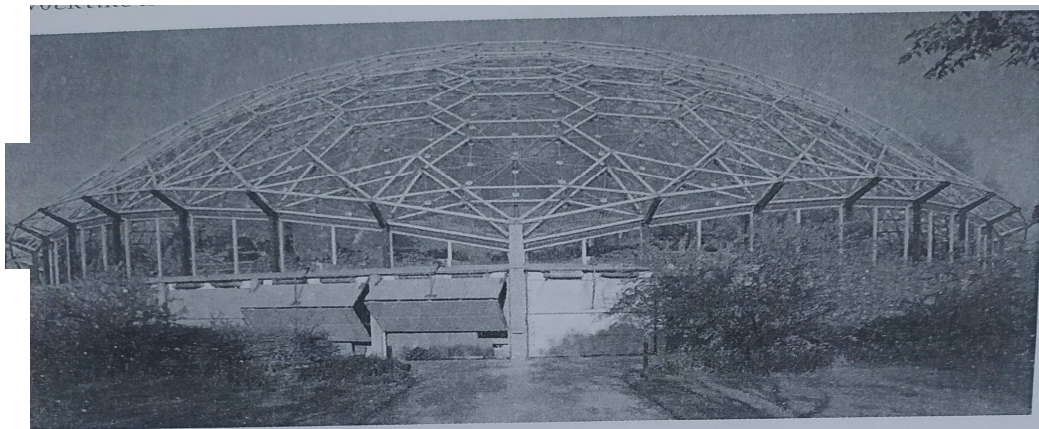
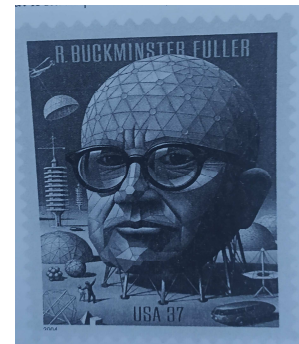


Δεν είναι εύκολο να υπολογίσει κάποιος τις μεταθέσεις αλλά πρόκειται για μία καλή άσκηση συνδυαστικής αριθμητικής. Συνολικά υπάρχουν 43.252.003.274.489.856.000 μεταθέσεις που ευτυχώς σχηματίζουν μία ομάδα. Αρκεί απλά να βρούμε έναν αλγόριθμο που να επιτρέπει, με τη βοήθεια μιας σειράς κινήσεων να φτάσουμε στο επιθυμητό σχηματισμό. Για να φανταστούμε το εύρος του αριθμού σχηματισμών μπορούμε να αναλογιστούμε το γεγονός πως ο σημερινός όγκος των κύβων (πλευράς 6cm) που αντιπροσωπεύει όλους τους σχηματισμούς θα κάλυπτε σχεδόν 300 φορές στην επιφάνεια της Γης. Η αναζήτηση αλγόριθμων με μερικά αποτελέσματα, έχει εξελιχθεί πολύ και υπάρχουν χιλιάδες φυλλάδια, βιβλία και ιστοσελίδες που ασχολούνται με το θέμα αυτό. Ο έλεγχος των καλύτερων

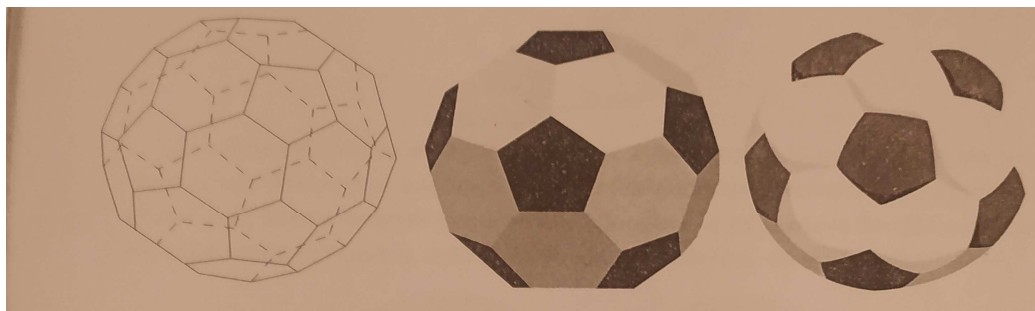
αλγορίθμων δεν είναι εύκολη υπόθεση αλλά μόλις γίνει ο χρόνος πρόσβασης σε μια λύση μειώνεται με θαυματικό τρόπο. Τα ρεκόρ είναι μικρότερα από ένα λεπτό και μερικές φορές η λύση απαιτεί λιγότερο από 10 sec. Έχουν καθιερωθεί πάσης φύσεως διαγωνισμοί και πρωταθλήματα αν και αυτό ενδιαφέρει περισσότερο τα βραβεία Γκίνες παρά τους αλγεβριστές.

20. Οι θόλοι, τα φουλερένια και τα μπαλάκια του γκολφ

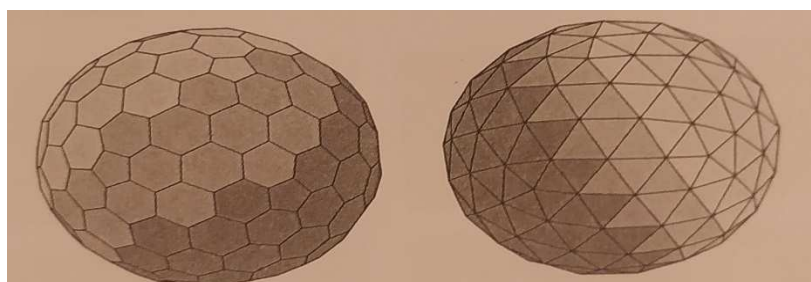
Ο αρχιτέκτονας Buckminster Fuller (1895–1983) ήταν ένας λόγιος παθιασμένος με τα πολύεδρα ο οποίος είχε την τιμή να γίνει εξώφυλλο στο περιοδικό Time και στον οποίο αποδίδεται η καθιέρωση σε ευρεία κλίμακα των γεωδαιτικών θόλων. Ο γεωδαιτικός θόλος είναι μία σφαιρική ή ημισφαιρική κατασκευή βασισμένη πάγωσε ένα δίκτυο πολύεδρων των οποίων η επιφάνεια τον εδρών (γενικά τριγωνικών) πλησιάζει εκείνη μία σφαίρας. Για την ακρίβεια το δίκτυο των πολύεδρων πλησιάζει τις γεωδαιτικές γραμμές της σφαίρας που είναι οι μέγιστοι κύκλοι αυτής. Αυτό προσδίδει στην κατασκευή του μεγάλη σταθερότητα και αξιοσημείωτη ανθεκτικότητα.



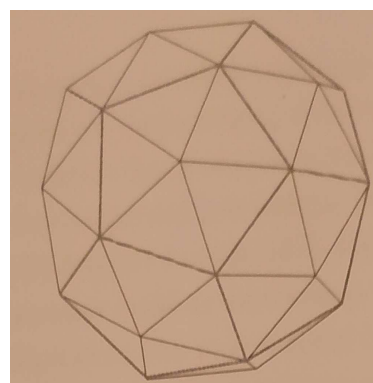
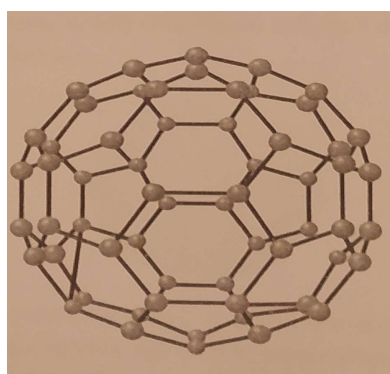
Οι θόλοι δε βρίσκουν εφαρμογή μόνο στις αρχιτεκτονικές κατασκευές. Στην πραγματικότητα το κόλουρο εικοσάεδρο, ένα πολύεδρο που ανήκει στα στερεά του Αρχιμήδη και που αποτελεί τη θεωρητική βάση των θόλων, υλοποιείται και σε πιο καθημερινά αντικείμενα όπως είναι οι μπάλες του ποδοσφαίρου.



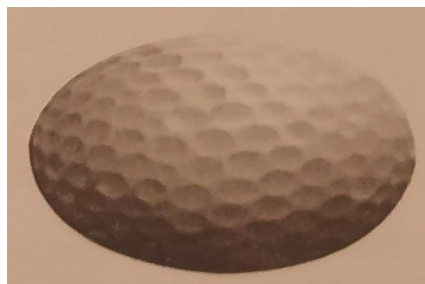
Το κόλουρο είναι ένα πολύεδρο συμμετρίας I_h (ή *532, σύμφωνα με τη χρησιμοποιούμενη σημειογραφία) που αναπαράγει τη μοριακή δομή του άνθρακα C_{60} μία αλλοτροπική μορφή του άνθρακα που αριθμεί άτομα αυτού του στοιχείου. Το 1985, οι εφευρέτες αυτής της συλλογής οι τρεις χημικοί και νικητές το βραβείου Νόμπελ Robert Curl, Harold Kroto & Richard Smalley την ονόμασαν μπακμίνστερ-φουλερένιο προς τιμή του εφευρέτη των γεωδαιτικών θόλων, αν και σήμερα αποκαλείται ευρέως φουλερένιο χάριν συντομίας.



Το συζυγές πολύεδρο που μας ενδιαφέρει είναι το πεντάκις δωδεκάεδρο που έχει την όψη ενός 12εδρου του οποίου κάθε έδρα έχει γίνει πενταγωνική πυραμίδα, αλλά που αποτελείται από τρίγωνα που καλύπτουν το πολύεδρο και το κάνουν περισσότερο να μοιάζει με γεωδαιτικό θόλο όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο παρακάτω σχήμα. Η συζυγία είναι ένα συνηθισμένο χαρακτηριστικό των πολύεδρων και ως εκ τούτου των θόλων που κατασκευάζονται βάσει αυτών. Ενώνοντας τα κέντρα των εδρών ενός θόλου, παίρνουμε το συζυγές του αν και τα τρίγωνα δεν είναι ισόπλευρα αλλά ισοσκελή (εκτός από ένα κανονικό πολύεδρο, το 20εδρο).

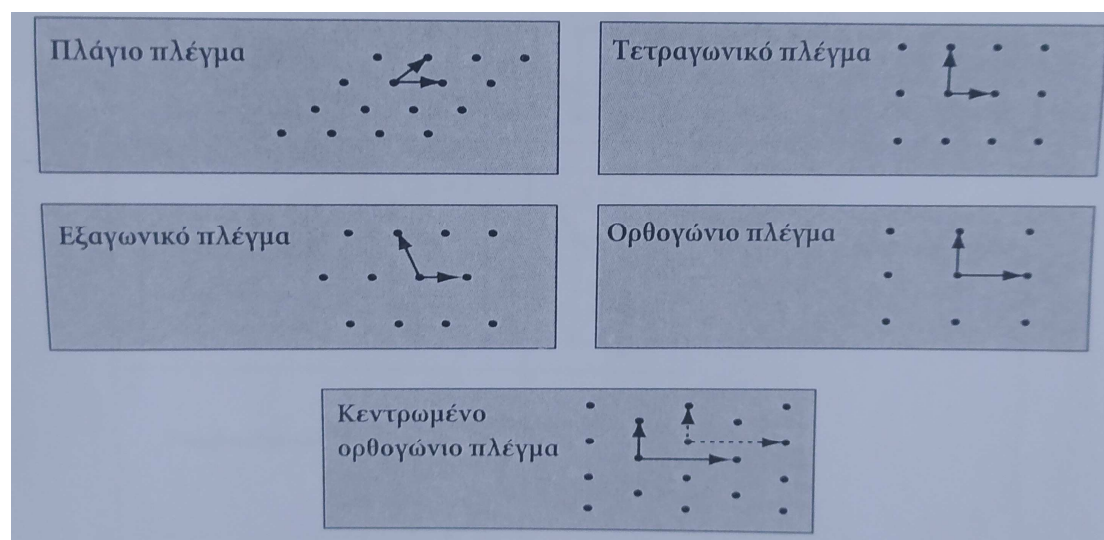


Τα μπαλάκια του γκολφ δεν είναι σφαιρικά σώματα, αλλά κυψελωτές σφαίρες που υπόκεινται σε μία γεωμετρική σύλληψη και σε κανόνες παρόμοιους με εκείνους της σύλληψης των θόλων. Πρέπει να υπόκειται στους κανόνες της βαλλιστικής και να πληρούν τις αθλητικές απαιτήσεις που αναμένονται από αυτά: να μην παρεκκλίνουν, κάτι που συνεπάγεται μία συμμετρία και να μην απογοητεύουν τις προβλέψεις ως προς την εμβέλειά τους. Σε αυτές τις απαιτήσεις προστίθενται και εκείνες της κατασκευής τους καθώς φτιάχνονται πώς φτιάχνονται από ημισφαιρικά κομμάτια που δεν πρέπει να τέμνουν τις κυψελίδες. Γύρω από αυτό το θέμα υπάρχει άφθονη βιβλιογραφία καθώς και μία απάντηση σε όσους ψάχνουν την ομάδα συμμετριών μιας μπάλας του γκολφ: παρουσιάζει από 48 ομάδα του οκτάεδρου έως και 120 στοιχεία.



21. Τα πλέγματα

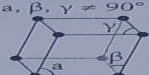
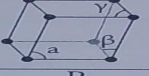
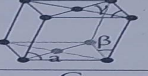
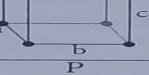
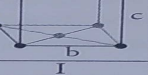
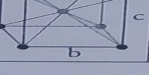
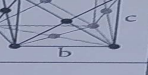
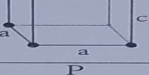
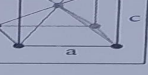
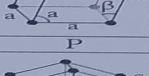
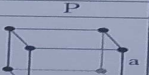
Σημειακά πλέγματα είναι εκείνα των οποίων οι κινήσεις αφήνουν τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου σταθερό μετά την επιβολή τους. Διέπουν τη συμμετρία κεντρωμένων σωμάτων που, όπως είναι τα πολυέδρα ή τα πολύγωνα διαθέτουν ένα προνομιακό σημείο, κανονικά στο κέντρο του σχήματος. Ένα πλέγμα Bravais αποκαλούμενο έτσι προς τιμή του κρυσταλλογράφου August Bravais (1811-1863) επιτρέπει να περάσουμε από τον κόσμο των σημειακών ομάδων στον κόσμο των μη σημειακών ομάδων που δεν αφορούν ένα μόνο σχήμα αλλά όλο το επίπεδο ή όλο το χώρο. Αυτό το είδος πλέγματος περιλαμβάνει μία απεριόριστη διάταξη διακεκριμένων σημείων αμετάβλητων από τις μετατοπίσεις. Είναι σαν όταν κοιτάμε το τοπίο από το εσωτερικό του πλέγματος, το πλέγμα να επαναλαμβάνεται προς όλες τις διευθύνσεις σε όποιο μέρος και αν κοιτάζουμε. Στη δισδιάστατη γεωμετρία, αυτό μας οδηγεί σε πέντε σχηματισμούς που περιγράφονται από διανύσματα και γωνίες.



Δεν υπάρχουν αλλά πλέγματα διότι δεν υπάρχουν άλλοι τρόποι να καλύψουμε όλο το επίπεδο. Δε θα εξηγήσουμε αυτό το γεγονός: δεν είναι δύσκολο αλλά είναι

κοπιαστικό και εξαρτάται μόνο από το άθροισμα των γωνιών που φτάνουν σε μία κορυφή. Υπάρχουν πέντε επίπεδα πλέγματα από τα οποία μπορούμε να φτιάξουμε ομάδες που αφορούν το σύνολο του επιπέδου. Τα πράγματα περιπλέκονται όταν πρόκειται για 3 διαστάσεις καθώς πρέπει να λάβουμε υπόψη και έναν άλλο τύπο περιορισμών και καταστάσεων που παρουσιάζουν παρόμοιους σχηματισμούς.

Βρίσκονται μπροστά μας τα παρακάτω πλέγματα Bravais των οποίων τα ονόματα που είναι γνωστά που είναι γνωστά στους φοιτητές γεωλογίας αναγράφονται στη στήλη αριστερά.

Κρυσταλλική οικογένεια	Πλέγματα Bravais			
Τρικλινής	P $a, \beta, \gamma \neq 90^\circ$ 			
Μονοκλινής	P $a, \neq 90^\circ$ $a, \gamma = 90^\circ$ 	C $a, \neq 90^\circ$ $\beta, \gamma = 90^\circ$ 		
Ορθορομβική	P $a \neq b \neq c$ 	C $a \neq b \neq c$ 	I $a \neq b \neq c$ 	F $a \neq b \neq c$ 
Τετραγωνική	P $a \neq c$ 	I $a \neq c$ 		
Ρομβοεδρική	P $a=\beta=\gamma \neq 90^\circ$ 			
Εξαγωνική	P 			
Κυβική	P 	I 	F 	

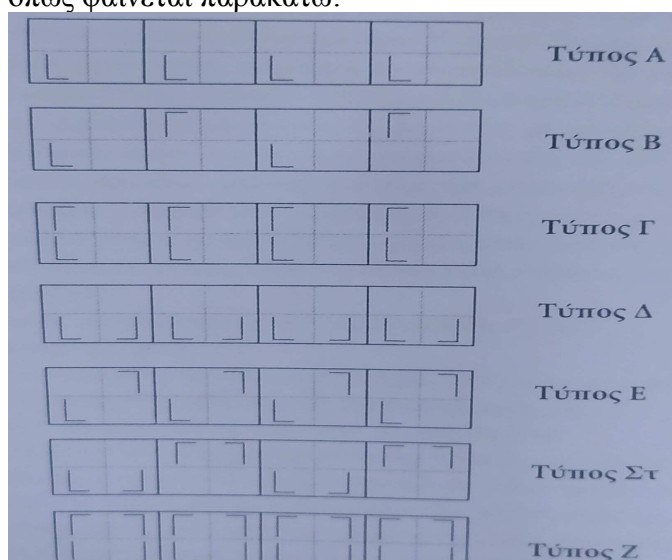
Οι υποκατηγορίες P, F, I και C του πίνακα αντιστοιχούν σε διαφορετικές μορφές στο κέντρο των εδρών και του πλέγματος (πού ανήκει ή όχι στο δίκτυο) του κέντρου ή των κορυφών. Μπορείτε να φανταστείτε το πλέγμα τοποθετώντας τα παραπάνω κελιά το ένα δίπλα στο άλλο χωρίζοντας τις κορυφές.

22. Ταπετσαρίες, μωσαϊκά, φρίζες και διακοσμητικά στοιχεία

Οι ταπετσαρίες, τα μωσαϊκά, οι φρίζες και τα διακοσμητικά στοιχεία διέπονται από μία ίδια πραγματικότητα: τις απεριόριστες επίπεδες συμμετρίες.

Υποθέτουμε πώς οι ταπετσαρίες ή τα μωσαϊκά καλύπτουν το σύνολο του επιπέδου, ενώ οι φρίζες περιορίζονται από τις μπορντούρες του. Τα διακοσμητικά στοιχεία μπορούμε να τα χαρακτηρίσουμε ως διακεκομμένες φρίζες που εφαρμόζονται πάνω σε τελικά αντικείμενα κοινής χρήσης: τις κορδέλες των καπέλων, τα περιδέραια, τα πάσης φύσης αγγεία. Είναι σαν τις όψεις του ίδιου πράγματος. Όσον αφορά τη συμμετρία θα τη θεωρήσουμε δεδομένη και θα παραλείψουμε τις περιπτώσεις που απουσιάζει όπως αυτό συμβαίνει σε πολλά διακοσμητικά στοιχεία. Οι φρίζες των μωσαϊκών που περιορίζονται από δύο παράλληλες ευθείες είναι ίδιες

με εκείνες των κορδελών. Υπάρχουν επτά πιθανές ομάδες συμμετρίας των φριζών όπως φαίνεται παρακάτω:



Ο λαός της Μπακούμπα στο Κονγκό τρέφει ιδιαίτερη εκτίμηση για τις φρίζες και τα διακοσμητικά στοιχεία, ιδιαίτερα για εκείνα των οποίων τα μοτίβα είναι σύνθετα και συμμετρικά.

Γεωμετρικά μοτίβα της Μπακούμπα.

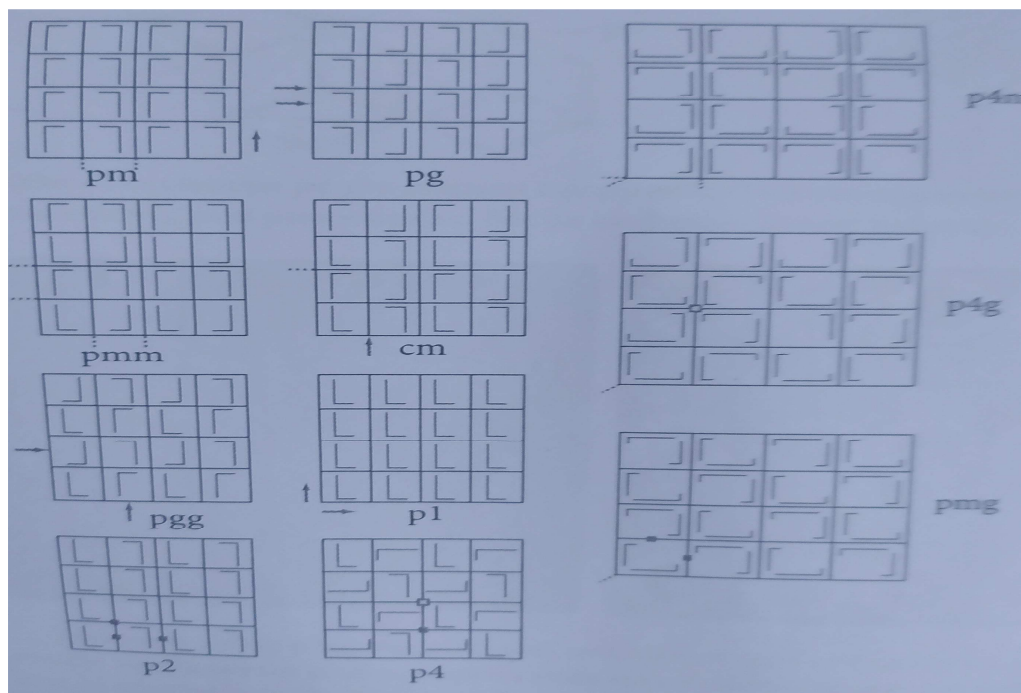


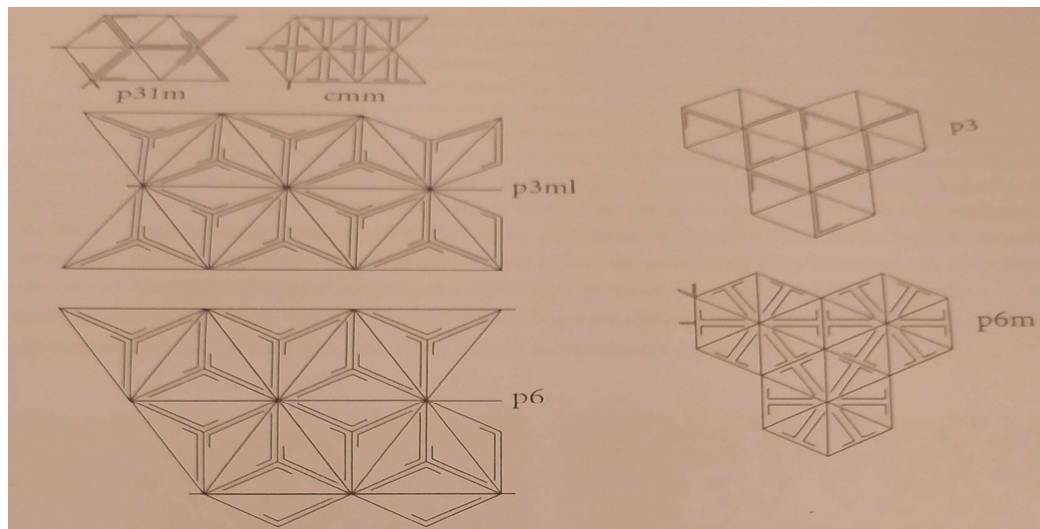
Οι φρίζες μπορούν επίσης να γίνουν επίτηδες πολύπλοκες και να υιοθετούν το σχήμα κολόνων. Υπάρχουν ακριβώς 24 ομάδες τις οποίες δεν θα περιγράψουμε εδώ. Στις δύο διαστάσεις οι ομάδες των ταπετσαριών ή των μωσαϊκών που καλύπτουν όλο το επίπεδο περιλαμβάνουν 17 διαφορετικούς τύπους συνδυάζοντας τα πέντε πλέγματα δύο διαστάσεων με τις σημειακές ομάδες. Οφείλουμε την περιγραφή αυτών των ομάδων τον κρυσταλλογράφο Evgraf Stepanovitch Fedorov (1853-1919) καθώς και σε δύο έργα που πραγματοποιήθηκαν ανεξάρτητα πολλά χρόνια αργότερα από τον George Polya (1887-1985). Ο Fedorov, Ρώσος μαθηματικός ήταν άνθρωπος με έντονες πεποιθήσεις που θεωρείτο επαναστάτης στην ταραγμένη εποχή που έζησε. Πέθανε από πείνα και φυματίωση το 1919. Η σημειογραφία που χρησιμοποιείται για να ξεχωρίζουμε τις ομάδες μεταξύ τους γνωστή με το όνομα «σύμβολα Herman Maugin» είναι κάπως περίπλοκη. Μην ανησυχείτε αν δεν την καταλάβατε καλά από την πρώτη επαφή διότι δεν πρόκειται για βασικό στοιχείο για την κατανόηση όσων ακολουθούν:

- p1: δύο μετατοπίσεις
- p2: τρεις κεντρικές συμμετρίες (ή περιστροφές $\pi/2$)
- p3: δύο περιστροφές $2\pi/3$

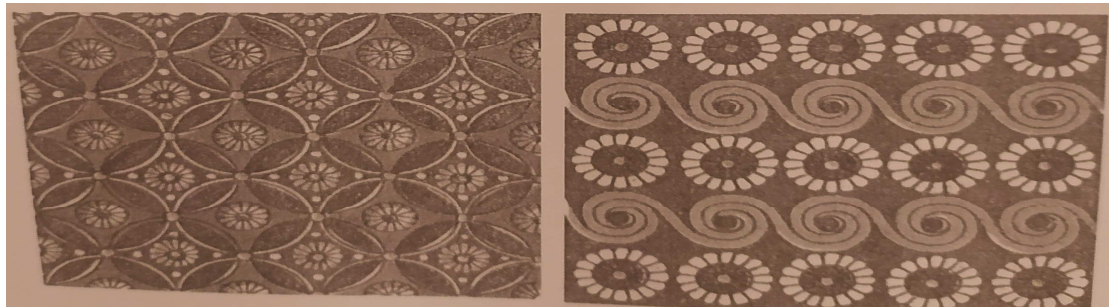
- p4: μία κεντρική συμμετρία (περιστροφή $\pi/2$) και μία περιστροφή $\pi/4$
- p6: μία κεντρική συμμετρία και μία περιστροφή $2\pi/3$
- pm: δύο αξονικές συμμετρίες και μία μετατόπιση
- pmm: τέσσερις αξονικές συμμετρίες στις τέσσερις πλευρές ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου (2 οριζόντιες και 2 κατακόρυφες)
- pmg: μία αξονική συμμετρία και δύο κεντρικές συμμετρίες
- cmm: δύο κάθετες αξονικές συμμετρίες και μία κεντρική συμμετρία
- p31m: μία αξονική συμμετρία και μία περιστροφή $2\pi/3$
- p3m1: τρεις αξονικές συμμετρίες στις πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου (πλάτους $\pi/3$)
- p4g: μία αξονική συμμετρία και μία περιστροφή $\pi/4$
- p4m: τρεις αξονικές συμμετρίες στις τρεις πλευρές ενός τριγώνου πλάτους $\pi/4, \pi/4, \pi/2$
- p6m: τρεις αξονικές συμμετρίες στις τρεις πλευρές ενός τριγώνου πλάτους $\pi/6, \pi/3, \pi/2$
- cm: μία αξονική συμμετρία και μία συμμετρία με κάθετη μετακίνηση
- pg: δύο συμμετρίες με μετακίνηση, παράλληλες
- pgg: δύο συμμετρίες με μετακίνηση, κάθετες

Η περιγραφή του Jesus M. Landart με τη βοήθεια εικόνων είναι πολύ σαφής. Οι τελείες δείχνουν τα κέντρα περιστροφής, τα βέλη και οι διάστικτες γραμμές τις μετατοπίσεις.





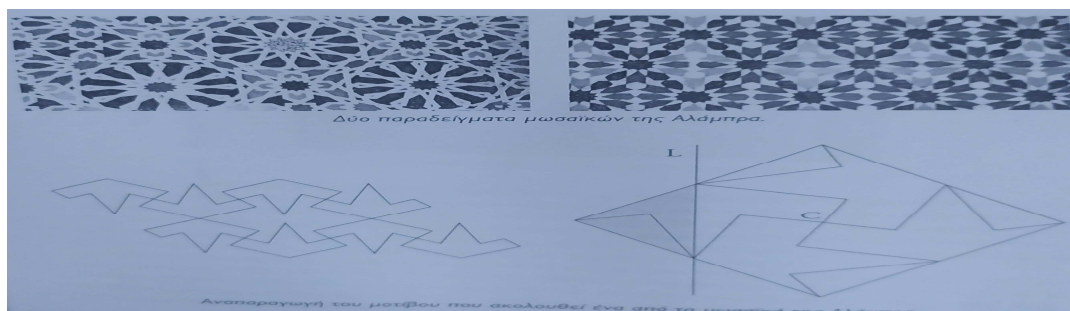
Θα συνεχίσουμε με μία άσκηση εφαρμογής. Σε ποια ομάδα ανήκουν οι παρακάτω εικόνες που μπορούμε να δούμε σε διακοσμήσεις τοίχων;



Τα δύο μοτίβα προέρχονται από το ταβάνι αιγυπτιακού τάφου και ταξινομούνται στις ομάδες p2 (μοτίβο δεξιά) και p4m (μοτίβο αριστερά).

Άλλα παραδείγματα παρατηρούμε στην Αλάμπρα της Γρανάδα που έχει γίνει τόπος προσκυνήματος για τους αλγεβριστές: ξέρουμε πως ο ισλαμισμός απαγορεύει κάθε αναπαράσταση ανθρώπινων μορφών και ως εκ τούτου τα διακοσμητικά στοιχεία που εφευρέθηκαν για τις φρίζες, τους τοίχους, τα πατώματα τα ταβάνια ήταν βασισμένα αποκλειστικά σε γεωμετρικά μοτίβα. Αυτό σημαίνει ότι τα μοτίβα αυτά επαναλαμβάνονται με συμμετρικό τρόπο βάσει ορισμένων από τις 17 ομάδες επιπέδων συμμετριών. Η ανίχνευση των ομάδων μέσα στα διακοσμητικά στοιχεία καθώς και η ταυτοποίηση τους έγινε άθλημα ενώ πολλοί είναι εκείνοι που προσποιούνται ότι τις έχουν βρει όλες. Ωστόσο, η αμφισβήτηση συνεχίζεται καθώς υπάρχουν μαθηματικοί για τους οποίους οι αποδείξεις που έχουν συγκεντρωθεί μέχρι σήμερα εξακολουθούν να είναι αμφιλεγόμενες. Βασικά το ερώτημα αν οι καλλιτέχνες της Αλάμπρα αναπαράστησαν τις διάσημες 17 ομάδες είναι κάπως ακαδημαϊκό καθώς αυτοί δεν έδωσαν ιδιαίτερη βάση στη γεωμετρία.

Τα πραγματικά καλά νέα θα ήταν να είχαν χρησιμοποιήσει 18. Τον 21ο αιώνα δε χρειάζεται να καταφύγουμε σε κάποιο σημαντικό εργατικό δυναμικό για να καλύψουμε με μωσαϊκά μία επίπεδη επιφάνεια ή για να φανταστούμε ένα καθορισμένο μοτίβο και τις 17 πιθανές ομάδες συμμετριών. Υπάρχουν προγράμματα λογισμικού που κάνουν αυτή τη δουλειά: αρκεί να το τροφοδοτήσουμε με ένα προκαταρκτικό μοτίβο και να του ζητήσουμε τις επιθυμητές ομάδες.



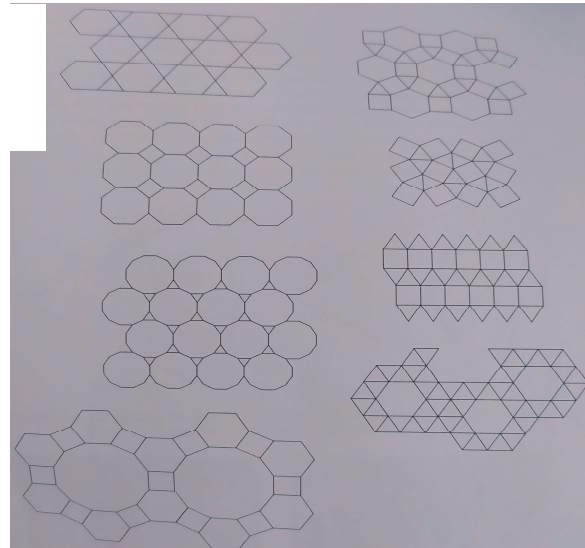
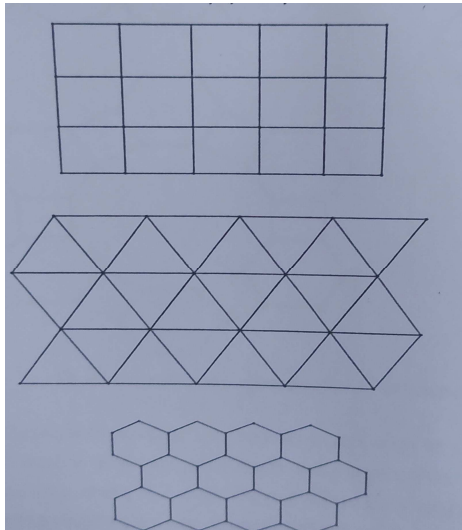
23. Οι κρύσταλλοι και πέρα από τους κρυστάλλους

Στις 3 διαστάσεις, οι πιθανές σημειακές ομάδες είναι 32 στον αριθμό, αλλά αν λάβουμε υπόψη τις πιθανές μετατοπίσεις τους κατά μήκος των πλεγμάτων, ο αριθμός τους μπορεί να ανέλθει τις 230 ομάδες. Πρόκειται για τρισδιάστατες κρυσταλλογραφικές ομάδες τόσο αληθινές όσο και η ύλη τους αυτή καθαυτή οι οποίες ανακαλύφθηκαν ομοίως από τον Fedorov. Αν αυτοί οι αριθμοί μοιάζουν πολύ υψηλοί φανταστείτε ότι στην τέταρτη διάσταση ανέρχονται στους 4.783 κρυστάλλους, στην πέμπτη πολλά εκατομμύρια και στην έκτη 28.934.974. Όπως μπορεί να φανταστεί ο αναγνώστης θα αρκεστούμε να δώσουμε μόνο την περιγραφή συνοδευόμενη από σκίτσα και φωτογραφίες των 230 κρυσταλλογραφικών ομάδων. Δε θα δώσουμε ούτε το όνομά τους ένα προς ένα. Στην πραγματικότητα χρησιμοποιούν 3 διαφορετικούς προσδιορισμούς κάτι που καταλήγει σε 690.

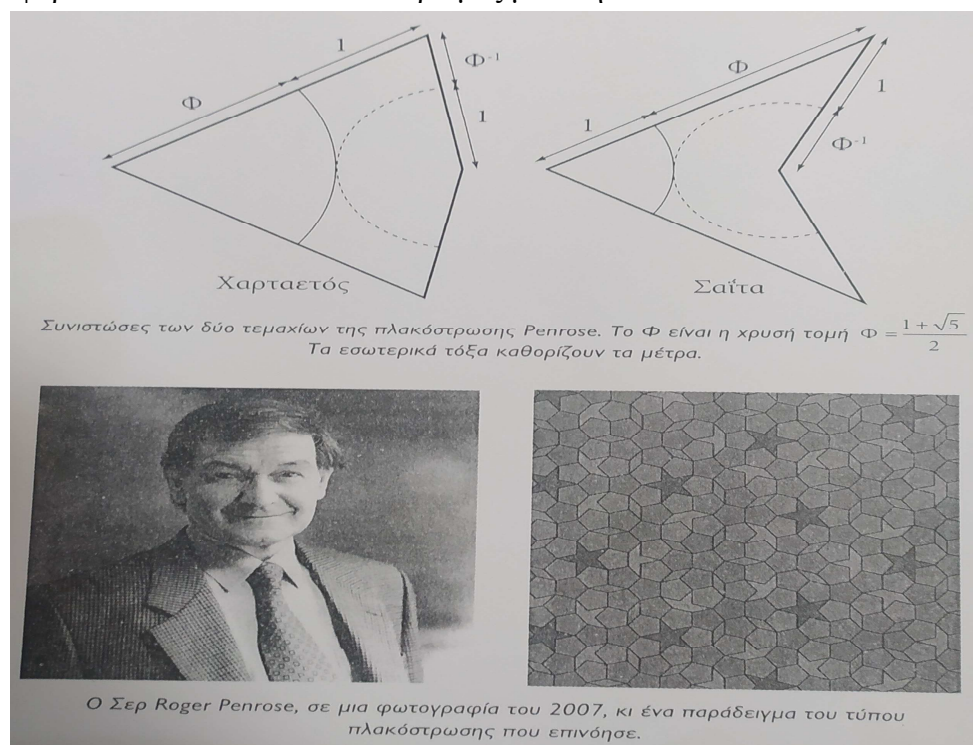
Μία παρόμοια απόρριψη ήταν εκείνη που υπέστησαν οι ημικρύσταλλοι όταν έκαναν την εμφάνισή τους. Αυτό ήταν έκπληξη καθώς οι φυσικοί είχαν ήδη δουλέψει πολύ τους 230 κρυστάλλους του Fedorov και φαινόταν ότι τα πάντα ήταν λυμένα: κάθε κρύσταλλος ήταν σύμφωνος με τη συμμετρία μίας ομάδας που ανήκε σε ένα από τα πλέγματα Bravais. Μία απλή μαθηματική συλλογιστική κάπως αδέξια αλλά βασική (αποκαλούμενη απλά κρυσταλλογραφικός περιορισμός) επιβεβαιώνει ότι δε γινόταν να υπάρχουν πολλά πράγματα. Αλλά αυτό που συμβαίνει είναι ότι η άλγεβρα προτείνει και η πραγματικότητα καθορίζει. Ας ξεχάσουμε για μία στιγμή το χώρο των 3 διαστάσεων και για να κάνουμε τα λεγόμενά μας πιο κατανοητά ας αναλογιστούμε το επίπεδο. Ένα πλέγμα καλύπτει όλο τον άπειρο χώρο του επιπέδου αν και όπως υποδείξαμε παραπάνω υπάρχουν μόνο ορισμένοι τύποι πλεγμάτων.

Οι συμμετρίες βαθμού 5 οι πενταγωνικές ή δεκαγωνικές δε μπορούν να δημιουργήσουν πλέγματα και συνεπώς πιθανούς κρυστάλλους. Αλλά αυτό αληθεύει μόνο και μόνο επειδή ένα πενταγωνικό συμμετρικό αντικείμενο δε μπορεί να προσαρμοστεί σε ένα πιθανό πλέγμα. Ωστόσο θυμίζουμε πώς ένα πλέγμα εφαρμόζεται σε ολόκληρο το χώρο. Και αν εξαφανίσουμε το χωρικό περιορισμό; Και αν περιοριστούμε σε πιο μικρούς χώρους; Φυσικά δε θα υπάρχουν πλέγματα ούτε κρύσταλλοι αλλά θα βλέπουμε ίσως κάτι που μοιάζει με τους κρυστάλλους.

Για να απαντήσουμε καλύτερα σε αυτήν την ερώτηση ας την εξετάσουμε από άλλη οπτική γωνία. Θα μιλήσουμε για μία άλλη έννοια που μοιάζει απομακρυσμένη από τα πλέγματα και τους κρυστάλλους, την πλακόστρωση. Ας εξηγήσουμε αυτό τον όρο: πρόκειται για την επένδυση ενός επιπέδου χωρίς κενά ή επικαλύψεις, με αντικείμενα που ονομάζονται πλάκες. Όταν οι πλάκες σχηματίζονται από πολλά διαφορετικά κομμάτια που παραμένουν κανονικά πολύγωνα λέμε πως η πλακόστρωση είναι ημικανονική. Υπάρχουν πολλοί άλλοι τύποι πλακοστρώσεων που δεν ανήκουν σε αυτούς τους δύο τύπους οι οποίοι παρεμπιπτόντως είναι πολύ συμμετρικοί.



Οι 2 τύποι πλακόστρωσης, η κανονική και η ημικανονική, είναι οι πιο συνηθισμένοι. Επιτρέπουν την περιοδική κάλυψη του επιπέδου και υπόκειται σε συμμετρίες βασισμένες στις 17 ομάδες επίπεδης συμμετρίας. Κατά γενικό κανόνα μερικές πλακοστρώσεις είναι συμμετρικές και άλλες όχι, αλλά οι περιοδικές πλακοστρώσεις είναι φυσικά συμμετρικές. Ένα γεωμετρικά ενδιαφέρον ζήτημα είναι η ανεύρεση του ελάχιστου αριθμού πλακών που χρειάζονται για μία μη περιοδική πλακόστρωση. Αυτό ξεκίνησε με ένα πρώτο αποτέλεσμα του Αμερικανού μαθηματικού Robert Berger που δημοσιοποίησε το 1966 μια μη περιοδική κάλυψη 20.426 διαφορετικών πλακών. Έπειτα ο αριθμός μειώθηκε.



Ο φιλόσοφος φυσικός και μαθηματικός Sir Roger Penrose (1931-) κατέπληξε το μαθηματικό κόσμο το 1974, όχι χάρη στο άρθρο που έγραψε μαζί με τον συνάδελφό του Stephen Hawking κάτι που είχε κάνει ήδη και μάλιστα πάνω από μία φορές, αλλά επειδή αποκάλυψε την ύπαρξη μιας κάλυψης ή μιας πλακόστρωσης του επιπέδου αποτελούμενης μόνο από δύο απλά τεμάχια το ένα κοίλο και το άλλο κυρτό

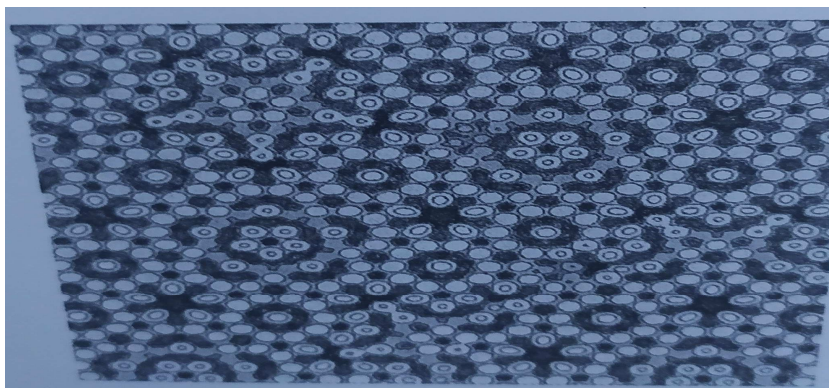
(αποκαλούμενα στα αγγλικά dark, σαΐτα και kite, χαρταετός) η οποία δεν ήταν περιοδική. Με μόνο δύο τεμάχια, αυτή η πλακόστρωση μπορούσε να καλύψει το επίπεδο, μολονότι δεν ήταν περιοδική ή δεν επαναλαμβανόταν στο άπειρο.

Επιπλέον δεν ήταν ούτε συμμετρική στο σύνολο του επιπέδου. Ξεκινώντας από αυτή τη βάση ο Don Levine και ο δάσκαλος του ο κοσμολόγος Paul Steinhardt (1955-) ανακάλυψαν μία πλακόστρωση που δεν ήταν επίπεδη αλλά χωρική εξίσου μη περιοδική και αποτελούμενη από ρομβοειδείς κυψελίδες. Δεν άνηκε σε κάποιο πλέγμα και ως εκ τούτου δεν επρόκειτο για περιοδική πλακόστρωση. Δεν κάλυπτε συμμετρικά όλο το χώρο όπως η μία από τις 230 ομάδες του Fedorov.

Οι πλακοστρώσεις Penrose δεν είναι περιοδικές και δεν αναπαράγουν το ίδιο μοτίβο σε όλα τα μέρη τους. Δεν έχουν προβλεπόμενη συμμετρία σε ένα οποιοδήποτε σημείο, αλλά είναι συμμετρικές σε πολύ ευρείες ζώνες και σε κάθε ζώνη όσο μεγάλη και αν είναι. Δεν είναι περιοδικές, δε διαθέτουν την αρετή του άπειρου και δεν καλύπτουν περιοδικά ολόκληρο το επίπεδο.

Είναι συμμετρικές με περιορισμένο τρόπο: αν τις αντιγράψουμε σε ένα χαρτί, τοποθετήσουμε ένα άλλο σημείο και αντιγράψουμε το μοτίβο κατασκευής σε αυτό το μέρος, η δεύτερη κατασκευή δε θα αντιστοιχεί με το μοτίβο της αρχικής πλακόστρωσης στο χαρτί. Δεν είναι άρα συμμετρικές με μετατόπιση. Από την πλευρά τους οι ημικρύσταλλοι, έχουν μία πραγματική ύπαρξη από τότε που ανακαλύφθηκε ο πρώτος το 1982: ένα κράμα αλουμινίου και μαγγανίου. Έκτοτε ο αριθμός τους δεν έπαψε να μεγαλώνει. Για να φανταστείτε την όψη τους, σκεφτείτε ένα στοιχείο ανάμεσα στο γυαλί που είναι άμορφο και το χαλαζία που είναι κρυσταλλικός με την παραδοσιακή έννοια του όρου. Οι ημικρύσταλλοι διαμορφώνουν μία νέα κατάσταση της ύλης δεν είχε περιγραφεί ως τότε. Έτσι η επιστήμη εξελίσσεται και η θεωρία των ομάδων δεν επιτρέπει την αποκάλυψη όλων των μυστικών της συμμετρίας.

Θα χρειαστεί να προχωρήσουμε πέρα από τις ομάδες για να αντιμετωπίσουμε τις νέες επιστημονικές προκλήσεις και είναι πιθανόν η κβαντική φυσική να μπορέσει να συνεισφέρει σε μεγάλο βαθμό στο μέλλον. Ποια θα είναι η σπουδαιότητα των ομάδων της συμμετρίας και ποιες προκλήσεις θα μας εξαπολύσουν ως την διάλυσή τους;

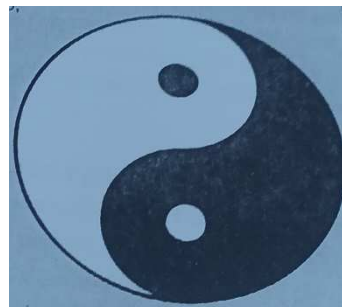


24. Μία συμμετρία αντισυμμετρική

Το παγκόσμιο σύμβολο το γιν-γιανγκ δεν είναι συμμετρικό αλλά η μορφή του υποδηλώνει έντονα τη συμμετρία. Είναι τόσο ασυμμετρικό που αξίζει να είναι συμμετρικό. Στην πραγματικότητα το γιν γίνεται γιανγκ (και αντίστροφα) με μία περιστροφή ακολουθούμενη από μία αλλαγή χρώματος. Στα μαθηματικά μία συνάρτηση f που επαληθεύει ότι $F(x,y)=-f(y,x)$ για κάθε $x \neq y$, ονομάζεται αντισυμμετρική. Από πρακτικής άποψης δύο γεωμετρίες ισομορφών αντικειμένων όσο κρυφός και αν είναι ένας τέτοιος ισομορφισμός, αποτελούν ουσιαστικά την ίδια γεωμετρία. Επί παραδείγματι η γεωμετρία της προβολικής μιγαδικής ευθείας είναι ίδια με εκείνη του πραγματικού υπερβολικού επιπέδου, επειδή οι ομάδες τους είναι

μη διακρίσιμες έως ισομορφισμού. Αρκεί άρα να μελετήσουμε τη μία από αυτές τις γεωμετρίες και όχι και τις δύο. Οι σπείρες που δεν έχουν ως συμμετρίες την ομάδα των ευκλείδειων ισομετριών διαθέτουν μία όταν θεωρήσουμε τις ομάδες Lie και χρησιμοποιείται ως παράμετρος αυτή του χρόνου.

Στη χημεία ο χειρομορφισμός είναι βασιλιάς. Τα μόρια είναι συμμετρικά σύμφωνα με τη μετακίνηση των ατόμων τους και σε συνάρτηση με αυτό το χειρομορφισμό διαθέτουν διαφορετικές οπτικές ιδιότητες και πολλούς τύπους χαρακτηριστικών. Όπως ξέρουμε στο ανθρώπινο σώμα υπάρχουν μόνο μόρια αριστερόστροφου χειρομορφισμού και η άγνοια αυτού του γεγονότος θα μπορούσε να αποβεί μοιραία (η κατανάλωση θαλιδομίδης αποτελεί πασίγνωστο παράδειγμα).

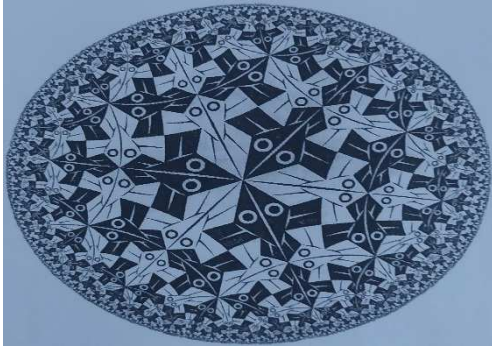


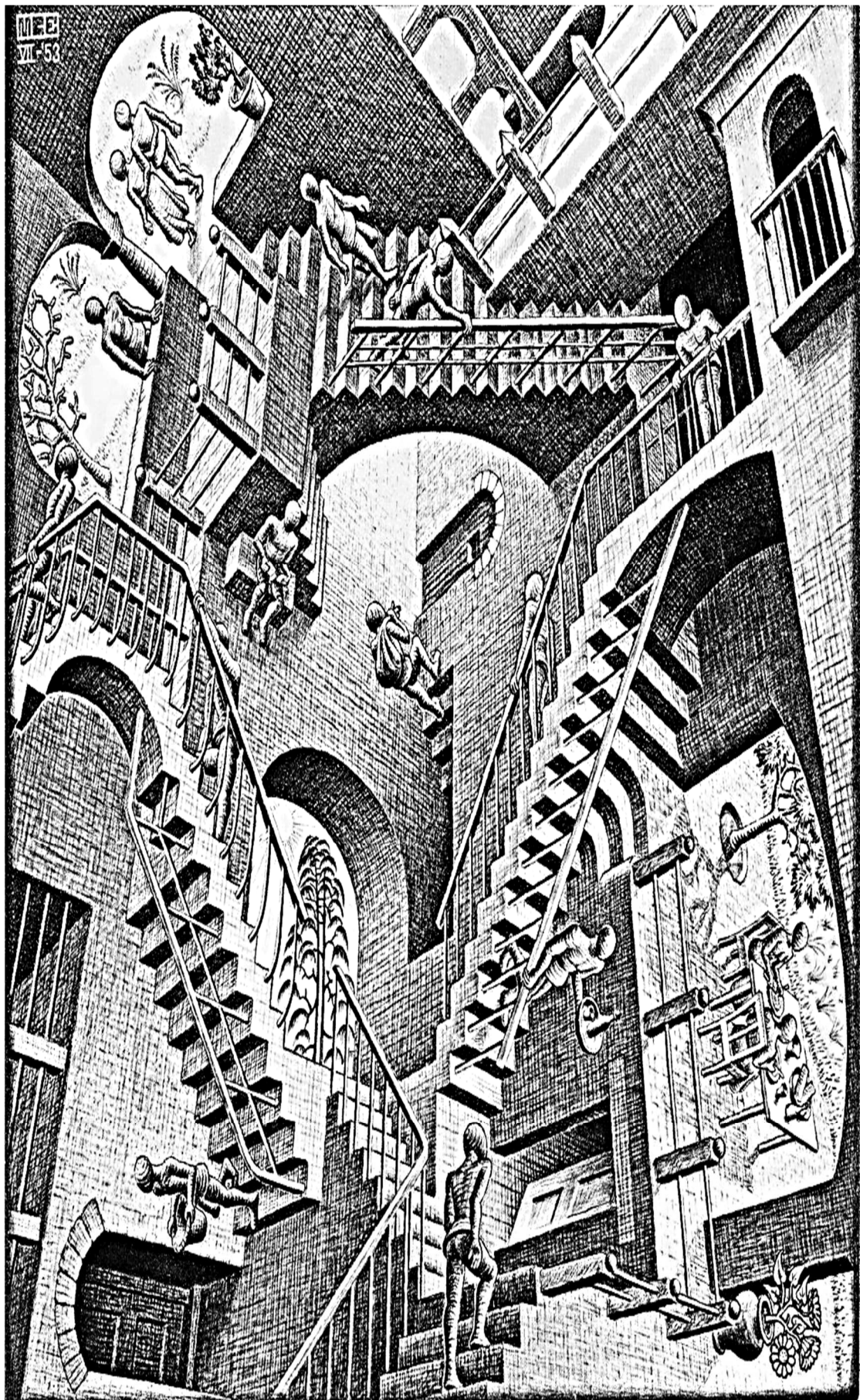
25. Ο κόσμος του Escher και τα υπόλοιπα έργα τέχνης

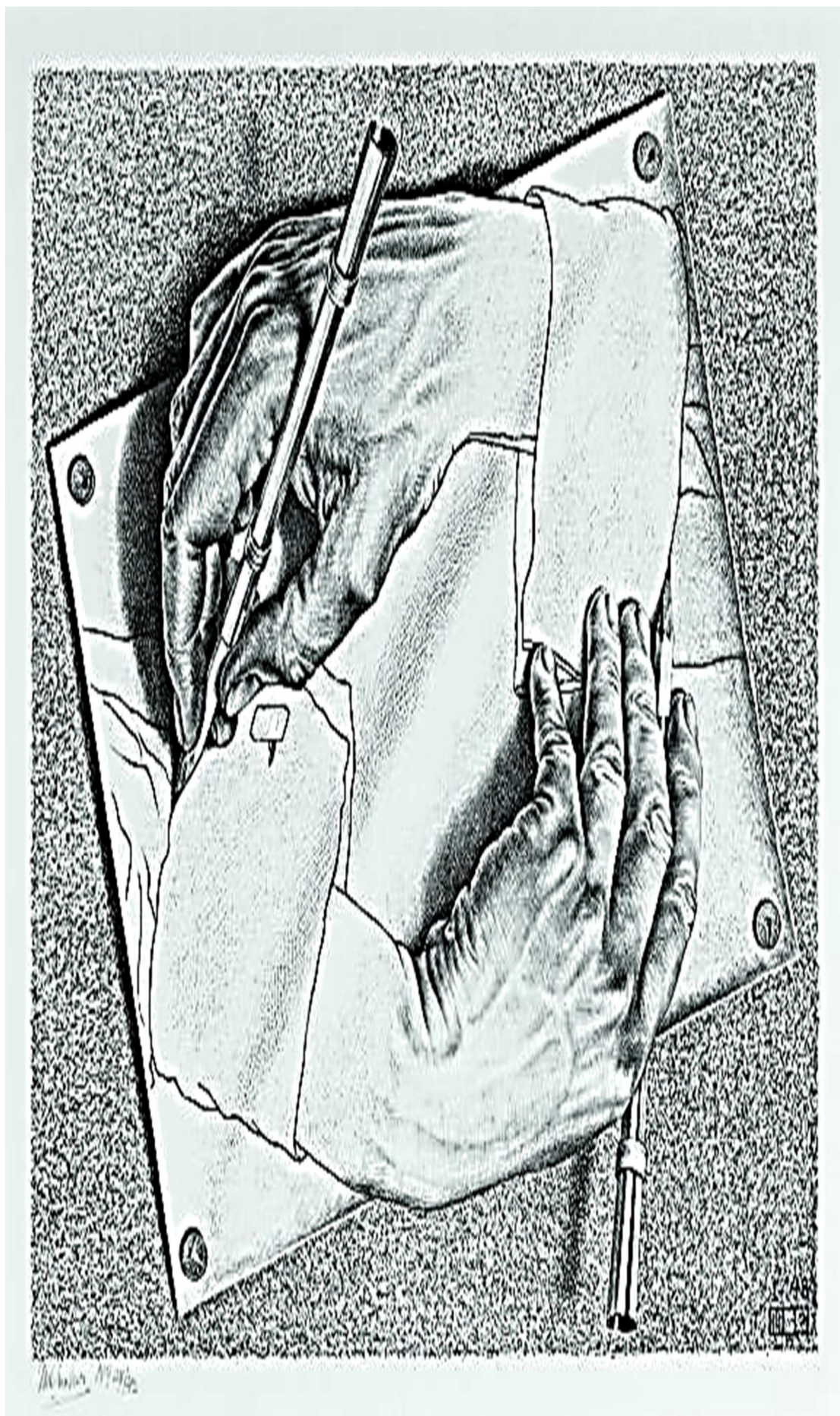
Σε αυτό που ονομάζουμε «τέχνη» και πιο συγκεκριμένα στον κλάδο των οπτικών τεχνών, ο ρόλος και η σπουδαιότητα της συμμετρίας ιδιαίτερα σε εποχές του παρελθόντος παρήγαγαν πολλά έργα, από τις ροζέτες και τα νεύρα των θόλων των γοτθικών καθεδρικών ναών έως το Ατόμιουμ στις Βρυξέλλες, ένα γιγάντιο οικοδόμημα ύψους λίγο περισσότερο από 100 m που κατασκευάστηκε για τη διεθνή έκθεση του 1958 και αναπαριστά την κυβική δομή του μορίου ενός κρυστάλλου σιδήρου. Δε θα σταματήσουμε σε αυτό τον κλάδο που αποτελεί ήδη αντικείμενο πολλών εξειδικευμένων μελετών. Θα κάνουμε μία σύντομη αναφορά σε έναν καλλιτέχνη του οποίου τα έργα αντανακλούν με συχνά ανησυχητικό αλλά πάντα συναρπαστικό τρόπο μία όψη της συμμετρίας που δεν αφήνει κανέναν αδιάφορο.

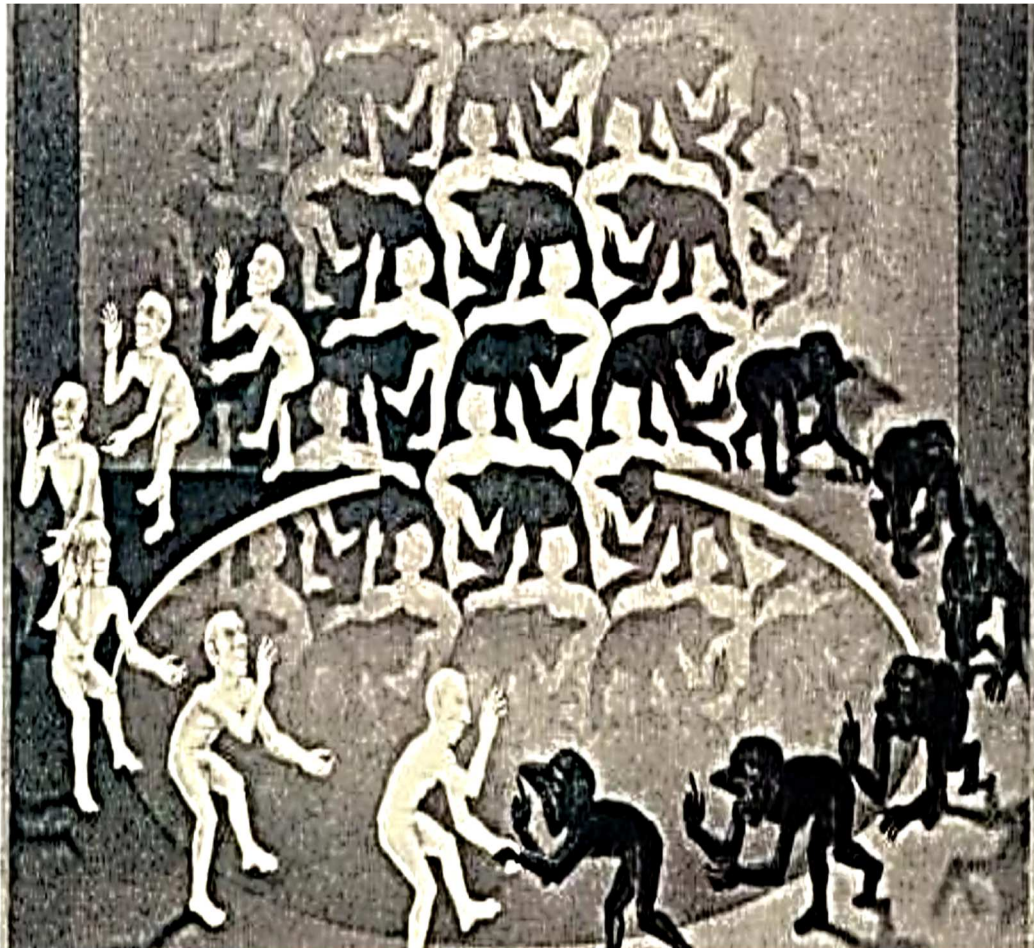
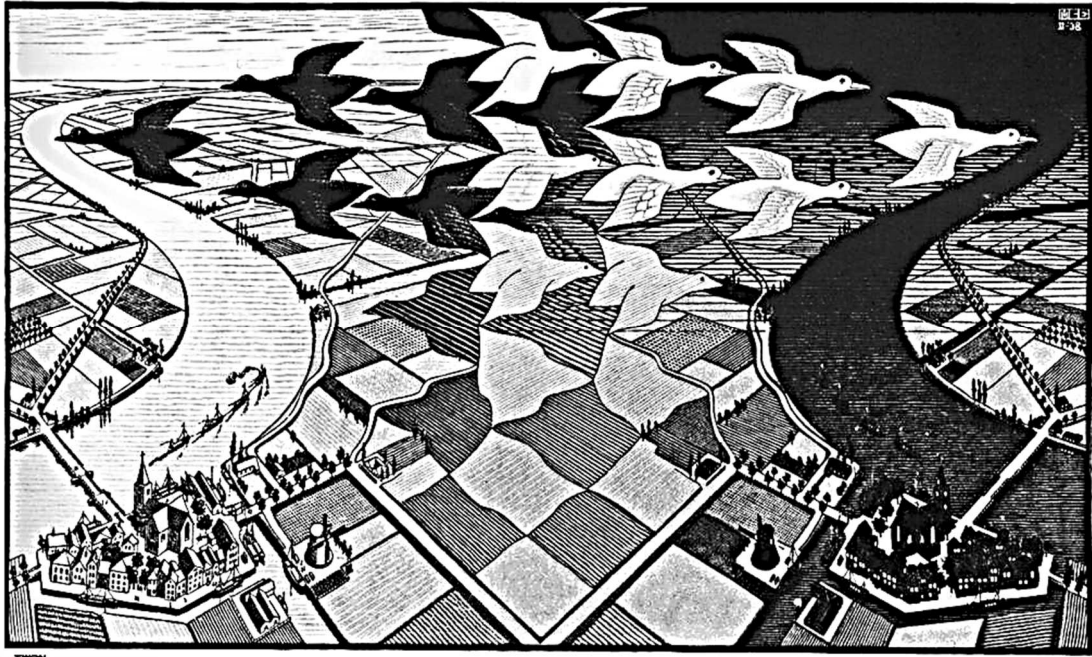
Πρόκειται για τον **Maurits Cornelius Escher** (1898–1972), έναν Ολλανδό καλλιτέχνη γνωστό για τα σκίτσα και τις γκραβούρες του, ο οποίος αφιέρωσε τη καλλιτεχνική του κλίση στη μελέτη της συμμετρίας της κάλυψης των επιπέδων, των πολυέδρων, των κατασκευών και άλλων θεμάτων μαθηματικών παραδόξων.

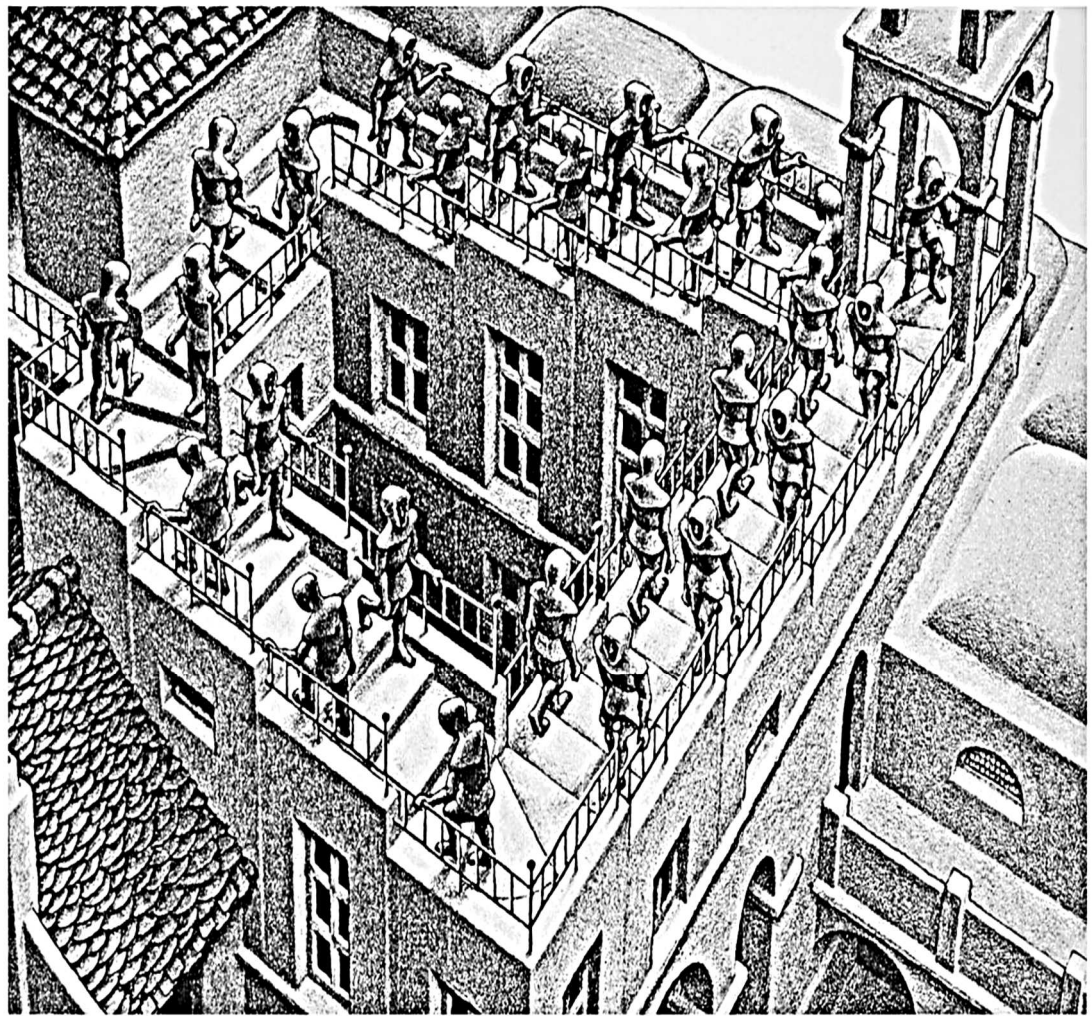
Στην πραγματικότητα ο Escher αισθανόταν πιο κοντά στα μαθηματικά από ότι οι υπόλοιποι συνάδελφοι καλλιτέχνες. Γνωρίζοντας από τη δεκαετία του 20 τα διακοσμητικά μοτίβα της Αλάμπρα και άλλων οικοδομημάτων, ο Escher ενσωμάτωσε στα σκίτσα του παραδείγματα των 17 ομάδων επίπεδης συμμετρίας και στη συνέχεια μελέτησε τον τρόπο συνδυασμό των χρωμάτων, των σχημάτων και της συμμετρίας για να μπορέσει να παντρέψει με κάποιο τρόπο την τέχνη με τα μαθηματικά. Ο Escher έγινε τόσο διάσημος που δόθηκε το όνομά του σε έναν αστεροειδή. Εκτός από τη γκραβούρα που απεικονίζεται εδώ, μερικά από τα υπόλοιπα έργα του Escher είναι τα χέρια που σχεδιάζουν που αντιστοιχεί σε μία συμμετρική και αυτοαναφορική εικόνα.











TWON

