



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Εφαρμογές της γραμμικής άλγεβρας στην ιατρική



Σπουδαστής: Βερβενιώτης Ιωάννης Φοίβος (ΑΜ 7790)

**Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (Μ.Εδ.),
Επίκουρος Καθηγητής**

Ακαδημαϊκό έτος: 2021– 2022

Ημερομηνία ανάθεσης: **21.05. 2021**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **01. 12. 2021**
 Ημερομηνία εξέτασης: **.... 12. 2021**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	3
1. Ομάδες αιμοδοτών	4
2. Αιμοδοσία φοιτητών	4
3. Ημερήσια ποσότητα δισκίων φαρμάκου.....	5
4. Έμμεση μετάδοση ασθένειας.....	5
5. Έμμεση κατανάλωση φυτοφαρμάκων	6
6. Γονότυπος απογόνων	6
7. Διατροφή σαρκοφάγων	7
8. Ανάδειξη ηγέτη	8
9. Εκτέλεση συνταγής.....	11
10. Διαιτητική διατροφή	12
11. Διατροφή βακτηρίων	13
12. Λήψη βιταμινών.....	14
13. Έμμεση ιδιοκατανάλωση φυτοφαρμάκων	15
14. Παρουσία φαρμάκου στο πλάσμα και στους ιστούς	16
15. Ανάπτυξη πληθυσμών βακτηρίων	17
16. Θεραπεία ασθενούς.....	18

Εισαγωγή

Επιστήμες όπως η ιατρική και η βιολογία δεν είχαν από την αρχή άμεση σχέση με τα μαθηματικά, γιατί ασχολούνταν με την περιγραφή φαινομένων ή την ταξινόμηση οργανισμών. Αργότερα μετακινήθηκαν προς την ανάλυση και την ερμηνεία συστημάτων που απαιτούν εξερεύνηση με τη χρήση μαθηματικών εργαλείων. Σήμερα δε θα ήταν υπερβολή να πούμε ότι τα μαθηματικά είναι ένας από τους στυλοβάτες της ιατρικής επιστήμης. Είναι ενδεικτική η δήλωση του φυσικομαθηματικού A. Cormack, ο οποίος κατασκεύασε τον αξονικό τομογράφο, κατά την απονομή του βραβείου Νόμπελ (1979): **«Ήταν προφανές ότι το πρόβλημα του αξονικού τομογράφου ήταν καθαρά ένα μαθηματικό πρόβλημα».**

Στον τομέα της καρδιολογίας, ερευνητές έχουν δημιουργήσει μαθηματικά μοντέλα που χρησιμεύουν σε περιστατικά καρδιακής προσβολής, ενώ πρόσφατα ομάδα Ελλήνων ερευνητών κατάφεραν, χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα βιοπληροφορικής, να διερευνήσουν νευρολογικές διαταραχές. Όλα αυτά ανοίγουν το δρόμο για την παρασκευή αποτελεσματικότερων φαρμάκων και τη χρήση νέων θεραπειών. Όσον αφορά τη βιολογία, ο καθηγητής Joel Cohen έχει δηλώσει ότι τα μαθηματικά είναι ένα καινούριο και ισχυρό μικροσκόπιο για την επιστήμη της βιολογίας, απαραίτητο για την καλύτερη κατανόηση σύνθετων δικτύων από γονίδια, κύτταρα και πρωτεΐνες, αλλά και για τη μελέτη της λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφάλου. Η πληροφορική βασίζεται στα μαθηματικά και τη μαθηματική λογική. Στα μαθηματικά βασίζονται η σημασιολογία των προγραμμάτων, οι τυπικές μέθοδοι, η αποδεικτική θεωρημάτων, ο εξισωτικός και λογικός προγραμματισμός. Στη συμβολική λογική βασίζονται οι βάσεις δεδομένων, οι γλώσσες προδιαγραφών, η τεχνολογία λογισμικού και οι ταυτόχρονες διαδικασίες.

1. Ομάδες αιμοδοτών

Σημειώνοντας 1 όταν ένας δότης με δεδομένη ομάδα αίματος επιτρέπεται να δώσει αίμα σε ένα δέκτη με δεδομένη ομάδα αίματος και 0 όταν δεν επιτρέπεται, να παρασταθεί μ' έναν τετραγωνικό πίνακα 8x8. Ο 8x8 πίνακας που παίρνουμε είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή, αριθμίζοντας από 1 έως 8 τις ομάδες αίματος με τη σειρά που αναγράφονται στον πίνακα έχουμε ορίσει μία απεικόνιση

$$a: I \times J \mapsto a(i, j) \equiv a_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{αν η ομάδα αίματος } j \text{ δίνει αίμα στην } i \\ 0 & \text{αν όχι,} \end{cases}$$

όπου $I = \{1, 2, \dots, 8\}$, $J = \{1, 2, \dots, 8\}$ και το $i \in I$ μετράει τις ομάδες αίματος του δέκτη, το δε $j \in J$ του δότη.

2. Αιμοδοσία φοιτητών

Υποθέτουμε ότι οι φοιτητές του φαρμακευτικού και βιολογικού τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών κατανέμονται κατά ομάδα αίματος με τη σειρά $A_+, A_-, B_+, B_-, AB_-, O_+, O_-$ και κατά έτος σπουδών όπως παρακάτω:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 13 & 11 & 15 & 19 & 20 & 16 \\ 13 & 11 & 10 & 11 & 14 & 17 & 15 & 10 \\ 10 & 10 & 16 & 9 & 12 & 15 & 18 & 15 \\ 8 & 9 & 10 & 12 & 11 & 16 & 13 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 8 & 12 & 7 & 7 & 11 \\ 7 & 10 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 10 \\ 8 & 12 & 4 & 5 & 11 & 9 & 9 & 8 \\ 10 & 5 & 6 & 6 & 7 & 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Θέλουμε να γνωρίζουμε πόσοι φοιτητές υπάρχουν και στα δύο τμήματα κατά ομάδα αίματος και έτος σπουδών, που μπορούν να προσέλθουν για αιμοδοσία, όταν υπολογίζεται ότι, για διάφορους λόγους το 10% δεν μπορεί να προσέλθει. Και στα δύο τμήματα υπάρχουν κατά ομάδα αίματος και έτος σπουδών $\Phi + B$ φοιτητές, δηλαδή:

$$\Phi + B = \begin{pmatrix} 21 & 21 & 23 & 19 & 27 & 26 & 27 & 27 \\ 20 & 21 & 18 & 20 & 24 & 23 & 22 & 20 \\ 18 & 22 & 20 & 14 & 23 & 24 & 27 & 23 \\ 18 & 14 & 16 & 18 & 18 & 26 & 22 & 19 \end{pmatrix}$$

Αυτοί που θα προσέλθουν τελικά είναι $0,90 \cdot (\Phi + B)$, δηλαδή (στρογγυλεύοντας στο ακέραιο):

$$0,90(\Phi + B) = \begin{pmatrix} 19 & 19 & 21 & 17 & 24 & 23 & 24 & 24 \\ 18 & 19 & 16 & 18 & 22 & 21 & 20 & 18 \\ 16 & 20 & 18 & 13 & 21 & 22 & 24 & 21 \\ 16 & 13 & 14 & 16 & 16 & 23 & 20 & 17 \end{pmatrix}$$

3. Ημερήσια ποσότητα δισκίων φαρμάκου

Σε ένα νοσοκομείο η θεραπεία της ασθένειας A γίνεται με τη χορήγηση, σε κάθε πάσχοντα, ενός δισκίου φαρμάκου Φ καθημερινά. Σε καθέναν από 23 θαλάμους του νοσοκομείου δεν υπάρχει κανένας A - ασθενής. Σε 17 θαλάμους υπάρχει 1 A - ασθενής στον καθένα, σε 8 υπάρχουν 2, σε 6 υπάρχουν 3, σε 8 υπάρχουν 4 και σε 2 θαλάμους υπάρχουν 5 A -ασθενείς στον καθένα. Πόσα δισκία του φαρμάκου απαιτούνται καθημερινά;

Τα απαιτούμενα δισκία είναι

$$(23 \ 17 \ 8 \ 6 \ 8 \ 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$(23 \cdot 0 + 17 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 5) = (17 + 16 + 18 + 32 + 10) = (93) = 93$ δισκία φαρμάκου Φ .

4. Έμμεση μετάδοση ασθένειας

Υποθέτουμε ότι μία ομάδα O_1 , αποτελείται από 3 άτομα που έχουν προσβληθεί από μία μεταδοτική ασθένεια. Σε μία δεύτερη ομάδα από 6 άτομα, ορισμένα από αυτά έρχονται σε άμεση επαφή με άτομα της O_2 . Επίσης σε μία τρίτη ομάδα O_3 από 7 άτομα, ορισμένα από αυτά έρχονται σ' επαφή με άτομα της O_2 . Ορίζουμε τον 3×6 πίνακα $A = (a_{ij})$ θέτοντας $a_{ij} = 1$ αν το j άτομο της O_2 έχει έρθει σε επαφή με το i άτομο της O_1 , και $a_{ij} = 0$ αν όχι.

Όμοια ορίζεται ο 6×7 πίνακας $B = (b_{ij})$, θέτοντας $b_{ij} = 1$ αν το j άτομο της O_3 ήρθε σ' επαφή με το i άτομο της O_2 και $b_{ij} = 0$ αν όχι. Έστω ότι οι δύο πίνακες A και B που δείχνουν τις άμεσες ($1^{\text{ου}}$ είδους) επαφές ατόμων της O_2 και O_3 , αντίστοιχα με άτομα της O_1 και O_2 , είναι οι παρακάτω:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι έμμεσες ($2^{\text{ου}}$ είδους) επαφές καθενός ατόμου της O_3 με κάθε άτομο της O_1 . Την απάντηση δίνει ο 3×7 πίνακας $C = (c_{ij})$ που προκύπτει ως γινόμενο των A και B . Είναι δηλαδή:

$$c = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου π.χ. το $c_{23} = 2$ σημαίνει ότι το $3^{\text{ο}}$ άτομο της O_3 είχε 2 έμμεσες επαφές με το $2^{\text{ο}}$ άτομο της O_1 . Είναι δηλαδή $c_{23} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1 + 1$. Η $6^{\text{η}}$ στήλη του C λέει ότι το

6° άτομο της O_3 είχε συνολικά $4=1+1+2$ έμμεσες επαφές με τα άτομα της O_3 . Μόνο το 5° άτομο της O_3 δεν είχε έμμεση επαφή με τα άτομα της O_1 .

5. Έμμεση κατανάλωση φυτοφαρμάκων

Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, m$ διάφορα είδη φυτών $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p, p$ διάφορα είδη φυτοφάγων ζώων και $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, n$ διάφορα είδη σαρκοφάγων ζώων. Έστω a_{ik} η μέση ποσότητα (σε Kg) από το φυτό φ_i που καταναλώνει κάθε ζώο του είδους τ_k και b_{kj} το πλήθος από ζώα του είδους τ_k που καταβροχθίζονται από όλα μαζί τα ζώα του είδους σ_j . Να βρεθεί η ποσότητα από κάθε είδος φυτού φ_i που καταναλώνουν έμμεσα τα σαρκοφάγα ζώα του κάθε είδους σ_j , αν

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = (b_{kj}) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Τα αριθμητικά δεδομένα δείχνουν ότι έχουμε 2 είδη φυτών, 3 είδη φυτοφάγων ζώων και 3 είδη σαρκοφάγων. Την απάντηση μας δίνει ο πίνακας C που προκύπτει ως γινόμενο των A και B . Δηλαδή είναι:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 22 & 5 \\ 52 & 60 & 17 \end{pmatrix}$$

Άρα, τα σαρκοφάγα ζώα του είδους σ_1 έχουν καταναλώσει έμμεσα (τρώγοντας φυτοφάγα που έχουν τραφεί με τα φυτά) 20 Kg του φ_1 και 52 Kg του φ_2 , ενώ του σ_2 και σ_3 έχουν καταναλώσει έμμεσα 22 Kg του φ_1 , 60 Kg του φ_2 και 5 Kg του φ_1 , 17 Kg του φ_2 , αντίστοιχα. Η παραπάνω εφαρμογή έχει σημασία για την οικολογία, γιατί ο οργανισμός των σαρκοφάγων ζώων (άρα και του ανθρώπου) μπορεί να υποστεί έμμεση δηλητηρίαση από φυτοφάρμακα που έχουν χρησιμοποιηθεί στα φυτά, χωρίς άμεση κατανάλωση.

6. Γονότυπος απογόνων

Έστω ότι στα άτομα ενός πληθυσμού είναι δυνατό να υπάρχουν τα αλληλόμορφα γονίδια που εμφανίζονται με πιθανότητα P και $q = 1 - P$, αντίστοιχα. Θεωρούμε ένα γονέα και ένα παιδί Π του Γ και υποθέτουμε ότι έχουν κοινό ένα αλληλόμορφο γονίδιο. Να γραφεί ο πίνακας πιθανοτήτων που έχει το παιδί Π να είναι γονότυπου AA , Aa , aa , όταν ο γονέας Γ είναι γονότυπου AA , Aa , aa και να βρεθεί ο πίνακας πιθανοτήτων για ένα εγγονό E του Γ από το Π , να είναι γονότυπου AA , Aa , aa , όταν ο Γ είναι γονότυπου AA , Aa , aa .

Αν ο Γ είναι γονότυπου AA , το Π θα έχει οπωσδήποτε ως ένα γονίδιο το A . Ως δεύτερο γονίδιο μπορεί, ανεξάρτητα, να έχει:

Το A , που η πιθανότητα εμφάνισής του είναι P και τότε το Π είναι γονότυπου AA .

Το a , που η πιθανότητα εμφάνισής του είναι q και τότε το Π είναι γονότυπου Aa .

Γονότυπου aa δεν μπορεί να είναι, ή μπορεί να είναι με πιθανότητα 0.

Αν ο Γ είναι γονότυπου Aa , το Π θα έχει είτε το A , είτε το a οπωσδήποτε και για να συμβεί είτε το ένα, είτε το άλλο η πιθανότητα $\frac{1}{2}$ είναι. Ως δεύτερο γονίδιο μπορεί να έχει, ανεξάρτητα, είτε το με πιθανότητα P , είτε το a με

πιθανότητα q . Άρα το Π θα είναι γονοτύπου AA με πιθανότητα p , γονοτύπου Aa με πιθανότητα

$$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2},$$

ή γονοτύπου aa με πιθανότητα

Αν ο Γ είναι γονοτύπου Aa , συλλογισμοί ανάλογοι προς την περίπτωση που είναι γονοτύπου AA , οδηγούν $\frac{1}{2}q$ στις πιθανότητες $0, p, q$ για το Π , να είναι γονοτύπου AA , Aa και aa , αντίστοιχα. Τα παραπάνω συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα :

		Π		
		AA	Aa	aa
Γ	AA	p	q	0
	Aa	$\frac{1}{2}p$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}q$
	aa	0	p	q

Έτσι, ο πίνακας πιθανοτήτων P για το ζεύγος (Γ, Π) είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ p/2 & 1/2 & q/2 \\ 0 & p & q \end{pmatrix}$$

Οι ίδιοι συλλογισμοί ισχύουν για το ζεύγος (Π, E) και οδηγούν πάλι στον πίνακα πιθανοτήτων P , αφού πρόκειται πάλι για γονέα και παιδί. Ο ζητούμενος πίνακας πιθανοτήτων για το ζεύγος (Γ, E) είναι τότε το γινόμενο $P \cdot P = P^2$, αφού από το γονότυπο του Γ φθάνουμε έμμεσα στο γονότυπο του E , μέσω του γονοτύπου του Π . Είναι δηλαδή :

$$P^2 = \begin{pmatrix} p^2 + \frac{1}{2}p \cdot q & pq + \frac{1}{2}q & \frac{1}{2}q^2 \\ \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}p & pq + \frac{1}{4} & \frac{1}{4}q + \frac{1}{2}q^2 \\ \frac{1}{2}p^2 & \frac{1}{2}p + p \cdot q & \frac{1}{2}pq + q^2 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση. Στα παραπάνω, το ζεύγος Aa δεν είναι διατεταγμένο διότι δεν είναι δυνατόν να διακρίνουμε μεταξύ των γονοτύπων Aa και aA . Δηλαδή δεν ενδιαφέρει αν το a ή το A προήλθαν από πατέρα ή μητέρα. Τα παραπάνω αποτελούν και μία εφαρμογή της θεωρίας πιθανοτήτων στη γενετική.

7. Διατροφή σαρκοφάγων

Έστω P_1, P_2, P_3 τρία διάφορα είδη φυτοφαρμάκων, V_1, V_2, V_3 τρία διάφορα είδη φυτοφάγων ζώων και C_1, C_2, C_3 τρία διάφορα είδη σαρκοφάγων ζώων. Έστω a_{ik} η μέση ποσότητα, σε μgr , από το φυτοφάρμακο του είδους P_i που έχει εισχωρήσει σε κάθε ζώο του είδους V_k ,

καθώς αυτά $(a_{ik}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$ τρέφονται με φυτά που έχουν ψεκάσθει με τα φυτοφάρμακα P_i . Να βρεθεί το πλήθος των ζώων του κάθε είδους V_k , που έχει καταβροχθισθεί απ' όλα τα ζώα του κάθε είδους C_j μαζί, αν

και αν όλα τα ζώα του είδους C_j έχουν καταναλώσει έμμεσα 1 mgr, μόνον από το αντίστοιχο είδος φυτοφαρμάκου P_j . Τα δεδομένα του προβλήματος οδηγούν στην παρακάτω ισότητα πινάκων:

$$\begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 \\ P_1 & \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_2 & \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix} \\ P_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 \\ V_1 & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix} \\ V_2 & \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \\ V_3 & \begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 \\ P_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ P_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

όπου στον πίνακα (x_{kj}) το τυχόν στοιχείο x_{kj} παριστάνει το πλήθος από φυτοφάγα ζώα του είδους V_k που έχουν καταβροχθίσει τα σαρκοφάγα ζώα του είδους C_j . Παρατηρούμε ότι ο πίνακας του δεύτερου μέλους είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Άρα ο ζητούμενος πίνακας (x_{kj}) είναι ο αντίστροφος του (a_{kj}) . Έτσι βρίσκουμε ότι:

$$(x_{kj}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

δηλαδή τα σαρκοφάγα του C_1 έχουν καταβροχθίσει 3 φυτοφάγα του V_1 τα σαρκοφάγα του C_2 έχουν καταβροχθίσει 2,5 του V_2 και τα σαρκοφάγα του έχουν καταβροχθίσει 8 του C_3 . Άρα έχουν τραφεί αποκλειστικά και μόνο με φυτοφάγα από το αντίστοιχο είδος τους.

Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος του πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

που είναι διαγώνιος, είναι ο επίσης διαγώνιος πίνακας

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

στοιχεία του οποίου είναι τα αντίστροφα των στοιχείων του πρώτου. Αυτό δεν είναι συμπτωματικό. Ισχύει γενικά ότι ο αντίστροφος ενός διαγώνιου πίνακα:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ είναι ο πίνακας } \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

8. Ανάδειξη ηγέτη

Έστω V ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο και E μία σχέση του V έτσι ώστε $\Delta \cap E = \emptyset$, όπου Δ η διαγώνιος του $V \times V$. Το ζεύγος (V, E) καλείται προσανατολισμένο

γράφημα με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E . Αν $(u,w) \in E$ τότε λέμε ότι η ακμή (u,w) έχει φορά (προσανατολισμό) από το u στο w . Μία ακολουθία ακμών (u_i, w_i) καλείται μονοπάτι μήκους p με αρχή το u_i , και πέρας το w_p , εάν $u_{i+1} = w_i, i = 1, 2, \dots, p-1$. Εάν $u_1 = w_p$ το μονοπάτι καλείται κύκλωμα. Έστω ότι οι κορυφές ενός (V, E) είναι μαθητές μιας τάξης. Λέμε ότι ο v έχει επιρροή τάξης p επί του w , εάν υπάρχει μονοπάτι μήκους p με αρχή τον v και πέρας τον w και δεν υπάρχει άλλο μικρότερου μήκους. Ένας μαθητής καλείται ηγέτης εάν έχει επιρροή κάποιας τάξης σε όλους τους υπόλοιπους και ομόφωνος ηγέτης, εάν έχει επιρροή τάξης 1 (= άμεση επιρροή που σημαίνει ότι ο 2ος μαθητής του ζεύγους, σέβεται τη γνώμη του 1ου πάνω από όλων των άλλων) σε όλους. Ο πίνακας $M = (\varepsilon_{ij})$ με :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } (u_i, u_j) \in E \\ 0 & \text{αν όχι} \end{cases}$$

καλείται πίνακας πρόσπτωσης του (V, E) .

$I_i^{(p)} = \{u_j : i \neq j, \varepsilon_{ij} = 0, \varepsilon_{ij}^{(2)} = 0, \dots, \varepsilon_{ij}^{(p-1)} = 0, \varepsilon_{ij}^{(p)} \neq 0\}$ Θέτουμε , που

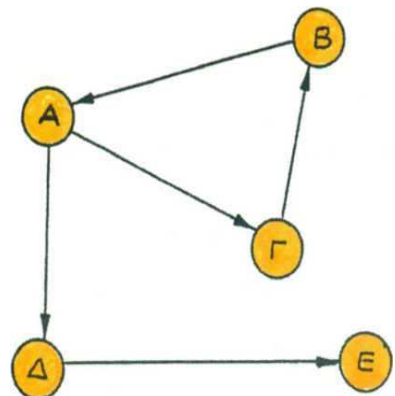
παριστάνει το σύνολο των κορυφών που δέχονται επιρροή τάξης p από την κορυφή i (δηλ. των κορυφών που επηρεάζει με τάξη p , η, i) και όπου $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ είναι το (i, j) στοιχείο του M^k . Τότε το σύνολο όλων των επιρροών της i είναι (αν το V έχει n στοιχεία)

Αποδεικνύεται ότι : Ο $I_i = I_i^{(1)} \cup I_i^{(2)} \cup \dots \cup I_i^{(n-1)}$ μαθητής i είναι ηγέτης
 $\Leftrightarrow I_i = V - \{u_i\}$. Αν (V, E) είναι το παρακάτω :

να βρεθεί αν υπάρχει ηγέτης. Οι ακμές του προσανατολισμένου γραφήματος είναι τα παρακάτω ζεύγη: $(5, A), (A, \Gamma), (\Gamma, B), (A, A), (A, E)$. Συνεπώς το σύνολο E είναι $E = \{(B, A), (A, \Gamma), (\Gamma, B), (A, A), (A, E)\}$.

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα :

$v,$	A	B	Γ	A	E
A	0	0	1	1	0
B	1	0	0	0	0
Γ	0	1	0	0	0
A	0	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0



Ο παραπάνω πίνακας έχει σχηματιστεί ως εξής :

1. Αν ο u_i , δεν έχει άμεση επιρροή στο , δηλαδή αν το διατεταγμένα ζεύγος (u_i, w_i) δεν ανήκει στο σύνολο E θέτουμε 0.

2. Αν ο u_i , έχει άμεση επιρροή στο w_i , δηλαδή αν το διατεταγμένα ζεύγος (u_i, w_i) ανήκει στο σύνολο E θέτουμε 1.

Ο πίνακας προσπτώσεως του γραφήματος είναι συνεπώς

$$M = (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε: $I_A^{(1)} = \{\Gamma, \Delta\}, I_B^{(1)} = \{A\}, I_\Gamma^{(1)} = \{B\}, I_\Delta^{(1)} = \{E\}, I_E^{(1)} = \{\emptyset\}$

Βρίσκουμε τον πίνακα M^2 για τις επιρροές 2ης τάξης.

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε: $I_A^{(2)} = \{B, E\}, I_B^{(2)} = \{\Gamma, \Delta\}, I_\Gamma^{(2)} = \{A\}, I_\Delta^{(2)} = \{\emptyset\}, I_E^{(2)} = \{\emptyset\}$

Βρίσκουμε τον πίνακα M^3 , για τις επιρροές 3ης τάξης.

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε: $I_A^{(3)} = \{\emptyset\}, I_B^{(3)} = \{E\}, I_\Gamma^{(3)} = \{\Delta\}, I_\Delta^{(3)} = \{\emptyset\}, I_E^{(3)} = \{\emptyset\}$

Βρίσκουμε τον πίνακα M^4 , για τις επιρροές 4ης τάξης.

$$M^4 = M^3 \times M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$I_A^{(4)} = \{\emptyset\}, I_B^{(4)} = \{\emptyset\}, I_\Gamma^{(4)} = \{E\}, I_\Delta^{(4)} = \{\emptyset\}, I_E^{(4)} = \{\emptyset\}$

Το σύνολο όλων των επιρροών της κορυφής A είναι:

$$I_A = I_A^{(1)} \cup I_A^{(2)} \cup I_A^{(3)} \cup I_A^{(4)} \cup \{\emptyset\} = \{\Gamma, \Delta\} \cup \{B, E\} \cup \emptyset \cup \emptyset = \{B, \Gamma, \Delta, E\} = V - \{A\}.$$

Το σύνολο όλων των επιρροών της κορυφής B είναι:

$$I_B = I_B^{(1)} \cup I_B^{(2)} \cup I_B^{(3)} \cup I_B^{(4)} \cup \{A\} \cup \{\Gamma, \Delta\} \cup \{E\} \cup \emptyset = \{A, \Gamma, \Delta, E\} = V - \{B\}.$$

Το σύνολο όλων των επιρροών της κορυφής Γ είναι:

$$I_\Gamma = I_\Gamma^{(1)} \cup I_\Gamma^{(2)} \cup I_\Gamma^{(3)} \cup I_\Gamma^{(4)} = \{B\} \cup \{A\} \cup \{\Delta\} \cup \{E\} = \{A, B, \Delta, E\} = V - \{\Gamma\}.$$

Το σύνολο όλων των επιρροών της κορυφής Δ είναι:

$$I_\Delta = I_\Delta^{(1)} \cup I_\Delta^{(2)} \cup I_\Delta^{(3)} \cup I_\Delta^{(4)} = \{E\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \{E\} = V - \{A, B, \Gamma, \Delta\}.$$

Το σύνολο όλων των επιρροών της κορυφής E είναι:

$$I_E = I_E^{(1)} \cup I_E^{(2)} \cup I_E^{(3)} \cup I_E^{(4)} = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν τρεις ηγέτες : οι μαθητές A , B και Γ , όπως προκύπτει από το σύνολο επιρροών καθενός από αυτούς αφού έχουμε:

$$I_A = \{B, \Gamma, \Delta, E\} = V - \{A\}, \quad I_B = \{A, \Gamma, \Delta, E\} = V - \{B\}, \quad I_\Gamma = \{A, B, \Delta, E\} = V - \{\Gamma\}.$$

9. Εκτέλεση συνταγής

Ένα φάρμακο παρασκευάζεται με συνδυασμένη χρήση τριών ουσιών O_i , $i = 1, 2, 3$ και πρέπει να περιέχει 26 mgr Na, 46 mgr Fe και 57 mgr Cu. Η περιεκτικότητα 1 gr της O_i σε mgr Na, Fe, Cu είναι αντίστοιχα (1,1,1), (1,2,2) και (1,2,3). Να βρεθεί αν υπάρχουν και ποιες είναι οι ποσότητες από τις O_i , $i = 1, 2, 3$, που απαιτούνται για την εκτέλεση της συνταγής.

Αν διαθέτουμε 20 gr από καθεμία από τις O_i , $i = 1, 2, 3$, επαρκούν αυτά για να εκτελεσθεί πάλι η συνταγή ; Έστω ότι απαιτούνται x_i , $i = 1, 2, 3$ gr από την ουσία O_i , $i = 1, 2, 3$ αντίστοιχα. Τα x_1 gr της O_1 περιέχουν $1 \cdot x_1$ mgr Na, τα x_2 gr της O_2 περιέχουν $1 \cdot x_2$ mgr Na και τα x_3 gr της O_3 περιέχουν $1 \cdot x_3$ mgr Na. Τότε θα πρέπει τα $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$ mgr Na να μας κάνουν τα 26 mgr Na που απαιτείται να περιέχονται στο φάρμακο, δηλαδή $x_1 + x_2 + x_3 = 26$. Επίσης, τα x_1 gr της O_1 περιέχουν $1 \cdot x_1$ mgr Fe, τα x_2 gr της O_2 περιέχουν $2 \cdot x_2$ mgr Fe και τα x_3 gr της O_3 περιέχουν $2 \cdot x_3$ mgr Fe, οπότε $x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 46$. Τέλος, τα x_1 gr της O_1 περιέχουν $1 \cdot x_1$ mgr Cu, τα x_2 gr της O_2 περιέχουν $2 \cdot x_2$ mgr Cu και τα x_3 gr της O_3 περιέχουν $3 \cdot x_3$ mgr Cu, οπότε $x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 57$. Συνεπώς, έχουμε να ελέγξουμε αν το σύστημα:

$x_1 + x_2 + x_3 = 26$, $x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 46$, $x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 57$ έχει λύση και αν ναι, να το λύσουμε. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει λύση, είναι η τάξη $\tau(A)$ του πίνακα A των συντελεστών των αγνώστων, να είναι ίση με την τάξη $\tau(E)$ του επαυξημένου πίνακα E . Έχουμε λοιπόν:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 26 \\ 1 & 2 & 2 & : & 46 \\ 1 & 2 & 3 & : & 57 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 26 \\ 0 & 1 & 1 & : & 20 \\ 0 & 1 & 2 & : & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 26 \\ 0 & 1 & 1 & : & 20 \\ 0 & 0 & 1 & : & 11 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Άρα $\tau(E) = 3 = \tau(A)$, όπως φαίνεται από τη μορφή του τελευταίου πίνακα και επειδή $\tau(A) = \tau(E) = 3 = \text{πλήθος αγνώστων}$, το σύστημα έχει λύση και μάλιστα ακριβώς μία.

Από τον τελευταίο πίνακα της (1) παίρνουμε τότε:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 26$$

$$x_2 + x_3 = 20$$

$$x_3 = 11$$

και με αντίστροφη αντικατάσταση βρίσκουμε $x_2 = 20 - 11 = 9$ και $x_1 = 26 - 9 - 11 = 6$.

Άρα θα χρησιμοποιηθούν 6gr της O_1 , 9 gr της O_2 και 11 gr της O_3 για την εκτέλεση της συνταγής, μετά την οποία απομένουν $20 - 6 = 14$ gr της O_1 , $20 - 9 = 11$ gr της O_2 , $20 - 11 = 9$ gr της O_3 . Άρα η O_3 που μένει δεν επαρκεί για να εκτελεσθεί πάλι η ίδια συνταγή. Αν αντί 3×3 είχαμε 2×3 από τα δεδομένα, το σύστημα δεν θα είχε λύση.

Η παραπάνω μέθοδος επίλυσης του συστήματος, με το όνομα “Μέθοδος (της τριγωνικής απαλοιφής) του Gauss” χρησιμοποιείται στους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές, αντί της μεθόδου του Cramer. Η μέθοδος του Gauss απαιτεί πιο λίγες πράξεις, πράγμα πολύ σημαντικό, όπως γίνεται φανερό στην παρακάτω εφαρμογή.

10. Διαιτητική διατροφή

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας περιεκτικότητας τροφών.

	Ασκορβικό οξύ (mg) βιταμίνη Q	Πρωτεΐνες (g)	Θερμίδες	Ca (g)
100 g κρέας	0	20	325	0,01
100 g νωπά λαχανικά	15	1	80	0,04
100 g γάλα	1,5	3,3	70	0,12
100 g σπανάκι	50	2.3	22	0,07
ημερήσια ποσότητα	60	70	3.000	1

Ένα άτομο θέλει με το ένα από τα δύο γεύματα να πάρει το μισό της ημερήσιας απαιτούμενης ποσότητας, πρωτεϊνών, βιταμίνης C και ασβεστίου, αλλά μόνον 700 θερμίδες. Τί ποσότητα από την κάθε τροφή πρέπει να πάρει; Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 η ζητούμενη ποσότητα από κρέας, νωπά λαχανικά, γάλα και σπανάκι, αντίστοιχα. Τότε τα $60/2 = 30$ mgr βιταμίνης C θα τα συγκεντρώσει παίρνοντας $0 \cdot x_1$, από το κρέας, συν $15x_2$ από τα νωπά λαχανικά, συν $1,5x_3$ από το γάλα, συν $50x_4$ από το σπανάκι δηλαδή:

$$15x_2 + 1.5x_3 + 50x_4 = 30 \quad (1)$$

$70/2 = 35$ gr πρωτεΐνης θα τα συγκεντρώσει παίρνοντας $20x_1$ από το κρέας, συν $1x_2$ από τα νωπά λαχανικά, συν $3,3x_3$ από το γάλα, συν $2,3x_4$ από το σπανάκι, δηλαδή :

$$20x_1 + x_2 + 3.3x_3 + 2.3x_4 = 35 \quad (2)$$

Όμοια βρίσκουμε για τις 700 θερμίδες ότι:

$$325x_1 + 80x_2 + 70x_3 + 22x_4 = 700 \quad (3)$$

Τέλος βρίσκουμε για τα $1/2 = 0,5$ gr ασβεστίου ότι:

$$0.01x_1 + 0.04x_2 + 0.12x_3 + 0.07x_4 = 0.5 \quad (4)$$

Για να έχει ακριβώς μία λύση το σύστημα των (1), (2), (3) και (4) πρέπει $\tau^{\wedge} = 4$.

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα E του συστήματος και εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, φθάνουμε στον τελευταίο παρακάτω ισοδύναμο (από πλευράς τάξης) πίνακα:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 1.5 & 50 & 30 \\ 20 & 1 & 3.3 & 2.3 & 35 \\ 325 & 80 & 70 & 22 & 700 \\ 0.01 & 0.04 & 0.12 & 0.07 & 0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (20) & 1 & 3.3 & 2.3 & 35 \\ 0 & 15 & 1.5 & 50 & 30 \\ 325 & 80 & 70 & 22 & 700 \\ 0.01 & 0.04 & 0.12 & 0.07 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0.05 & 0.165 & 0.115 & 1.75 \\ 0 & (15) & 1.5 & 50 & 30 \\ 0 & 63.75 & 16.375 & -15.375 & 131.25 \\ 0 & 0.0395 & 0.11835 & 0.06885 & 0.4825 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.05 & 0.165 & 0.115 & 1.75 \\ 0 & 1 & 0.1 & 3.333 & 2 \\ 0 & 0 & (10) & -227.875 & 3.75 \\ 0 & 0 & 0.1144 & -0.06265 & 0.4036 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0.05 & 0.165 & 0.115 & 1.75 \\ 0 & 1 & 0.1 & 3.333 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -22.7875 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & (2.54424) & 0.3607 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.05 & 0.165 & 0.115 & 1.75 \\ 0 & 1 & 0.1 & 3.333 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -22.7875 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.1418 \end{pmatrix}$$

Άρα, $\tau(\Lambda)=4$. Από τον τελευταίο πίνακα παίρνουμε, αντικαθιστώντας αντίστροφα από την τελευταία γραμμή προς την πρώτη, $\chi_4=0,1418$, $\chi_3=3,606$, $\chi_2=1,1667$ και $\chi_1=1,0804$ εκατοντάδες gr. Άρα χρειάζεται περίπου 108 g κρέας, περίπου 117 g νωπά λαχανικά, περίπου 361 gr γάλα και περίπου 14 g σπανάκι.

Υπολογίζεται ότι με τη μέθοδο του Gauss ένα σύστημα 4×4 χρειάζεται για να λυθεί 36 πολλαπλασιασμούς, 10 διαιρέσεις και 36 αφαιρέσεις, ενώ με τη μέθοδο Cramer 200 πολλαπλασιασμούς, 4 διαιρέσεις και 115 αφαιρέσεις.

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος των εξισώσεων (2), (1), (3), (4) είναι ίση με το γινόμενο των εκάστοτε διαγώνιων στοιχείων (στροφών), δηλαδή είναι ίση με $20 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 2,54424 = 7632,72$.

11. Διατροφή βακτηρίων

Σ' ένα δοκιμαστικό σωλήνα βάζουμε κάθε μέρα τρεις ομάδες βακτηρίων O_i $i = 1,2,3$, που τρέφονται από τρεις πηγές Π_i , $i = 1,2,3$. Η ημερήσια κατανάλωση τροφής του κάθε βακτηρίου της O_1 από κάθε μία από τις τρεις πηγές Π_i , αντίστοιχα, είναι (1,1,1) μονάδες, της O_2 είναι (1,2,3) και της O_3 είναι (1,3,5) μονάδες. Ημερήσια διαθέτουμε 15.000 μονάδες της Π_1 , 30.000 της Π_2 και 45.000 της Π_3 . Να βρεθεί αν και πόσα βακτήρια μπορούν να τραφούν από κάθε ομάδα. Έστω $x_i = 1,2,3$ ο άγνωστος αριθμός βακτηρίων της ομάδας O_i , $i = 1,2,3$, αντίστοιχα. Τότε τα βακτήρια x_1 της O_1 καταναλώνουν $1 \cdot x_1$ μονάδες από την πηγή Π_1 , τα βακτήρια x_2 της O_2 καταναλώνουν από την Π_1 , $1 \cdot x_2$ μονάδες και τα βακτήρια x_3 της O_3 καταναλώνουν από την Π_1 , $1 \cdot x_3$ μονάδες. Άρα από την Π_1 καταναλώνονται από τα βακτήρια και των τριών ομάδων $1x_1 + 1x_2 + 1x_3$ μονάδες που πρέπει να μας κάνουν τις 15.000 μονάδες που διαθέτουμε για την Π_1 , δηλαδή $x_1 + x_2 + x_3 = 15.000$. Όμοια βρίσκουμε ότι από την Π_2 καταναλώνονται $1x_1 + 2x_2 + 3x_3$ μονάδες από βακτήρια και των τριών ομάδων, οπότε πρέπει $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30.000$. Τέλος τα βακτήρια και των τριών ομάδων καταναλώνουν από την Π_3 , $x_1 + 3x_2 + 5x_3$ μονάδες, οπότε πρέπει $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 45.000$.

Φθάνουμε δηλαδή στο ότι τα $x_i, i = 1, 2, 3$ πρέπει να επαληθεύουν το σύστημα των τριών γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 15.000 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 30.000 \\x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 45.000\end{aligned}$$

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει λύση το σύστημα αυτό είναι: η τάξη $\tau(A)$ του πίνακα A των συντελεστών των αγνώστων $x_i, i = 1, 2, 3$ να είναι ίση με την τάξη $\tau(E)$ του επαυξημένου πίνακα E το οποίο και ελέγχουμε. Είναι:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 15000 \\ 1 & 2 & 3 & : & 30000 \\ 1 & 3 & 5 & : & 45000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 15000 \\ 0 & 1 & 2 & : & 15000 \\ 0 & 2 & 4 & : & 30000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 15000 \\ 0 & 1 & 2 & : & 15000 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Άρα $\tau(E) = 2$ όπως φαίνεται από την (1). Επειδή οι τάξεις είναι ίσες μεταξύ τους αλλά ισχύει $\tau(A) = \tau(E) = 2 < 3$ που είναι το πλήθος των αγνώστων, το σύστημα έχει λύση, αλλά η λύση δεν είναι ακριβώς μία. (υπάρχει απειρία λύσεων όπως γενικά συμβαίνει στην περίπτωση μη αδυνάτων συστημάτων με μικρότερο πλήθος εξισώσεων από πλήθος αγνώστων).

Ορίζουμε αυθαίρετα $3-2 = 1$ άγνωστο, έτσι ώστε ο πίνακας των συντελεστών των υπολοίπων $3-1 = 2$ αγνώστων να έχει τάξη 2. Π.χ. θέτουμε $x_3 = a$ και από τον τελευταίο πίνακα της (1) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + a &= 15.000 \\x_2 + 2a &= 15.000\end{aligned}$$

δηλαδή $x_2 = 15.000 - 2a$, οπότε $x_1 = a$. Η λύση του συστήματος λοιπόν είναι $(a, 15.000 - 2a, a)$. Επειδή όμως τα $x_i, i = 1, 2, 3$ είναι πλήθος βακτηρίων, πρέπει $0 \leq x_i \forall i = 1, 2, 3$. Δηλαδή $0 \leq 15.000 - 2a$ και $0 \leq a$. Άρα πρέπει $0 \leq a \leq 7.500$. Συνεπώς πρέπει $0 \leq x_i \leq 7.500$, $0 \leq x_3 \leq 7.500$ και $0 \leq x_2 \leq 15.000$. Π.χ. μπορούν να τραφούν:

0 βακτήρια της O_1 , 15.000 της O_2 και 0 της O_3 (ακραία περίπτωση)

ή 3.000 βακτήρια της O_1 , 9.000 της O_2 και 3.000 της O_3

ή 5.000 βακτήρια της O_1 , 5.000 της O_2 και 5.000 της O_3 ... κ.λπ.

ή 7.500 βακτήρια της O_1 , 0 της O_2 και 7.500 της O_3 (ακραία περίπτωση).

12. Λήψη βιταμινών

1 g τροφής T_1 έχει 1 μονάδα βιταμίνης A , 3 βιταμίνης B , 4 βιταμίνης C και 2 βιταμίνης E .

1 g τροφής T_2 έχει 2 μονάδες βιταμίνης A , 3 βιταμίνης B , 5 βιταμίνης C και 4 βιταμίνης E .

1 g τροφής T_3 έχει 3 μονάδες βιταμίνης A , 0 βιταμίνης B , 3 βιταμίνης C και 6 βιταμίνης E .

Ένα άτομο που τρέφεται με τις T_1, T_2 και T_3 , θέλουμε να πάρει 11 μονάδες βιταμίνης A , 9 βιταμίνης B , 20 βιταμίνης C και 22 βιταμίνης E .

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλες οι δυνατές ποσότητες από κάθε τροφή, που δίνουν τις βιταμίνες που θέλουμε. Μεταξύ ποιών ορίων κυμαίνεται η ποσότητα της τροφής T_3 ;

Αν x_1, x_2, x_3 είναι οι ποσότητες από τις T_1, T_2, T_3 αντίστοιχα, που πρέπει να καταναλώσει το άτομο αυτό, για να συγκεντρώσει τις απαιτούμενες βιταμίνες, θα έχουμε το σύστημα :

$$3x_1 + 3x_2 = 9 \quad 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 20 \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 \quad 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 22$$

Για να έχει λύση, πρέπει $\tau(A) = \tau(E)$. Ο επαυξημένος πίνακας E του συστήματος μετασχηματίζεται διαδοχικά.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 20 \\ 2 & 4 & 6 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -3 & -9 & -24 \\ 0 & -3 & -9 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα $\tau(A) = \tau(E) = 2 < 3$. Το σύστημα λοιπόν έχει λύση, αλλά όχι μονοσήμαντα ορισμένη. Ορίζοντας αυθαίρετα τον άγνωστο $x_3 = a$ παίρνουμε από τον τελευταίο πίνακα της (1) ότι:

$x_1 + 2x_2 + 3a = 11$ και $x_2 + 3a = 8$ οπότε $x_2 = 8 - 3a$ και $x_1 = 11 - 2(8 - 3a) - 3a = -5 + 3a$. Οι λύσεις του συστήματος είναι λοιπόν $(-5 + 3a, 8 - 3a, a)$. Επειδή όμως πρόκειται για ποσότητες τροφών, πρέπει $x_i > 0, i = 1, 2, 3$. Έτσι παίρνουμε $x_3 \geq \frac{5}{3}$ και $x_3 \leq \frac{8}{3}$ δηλαδή $\frac{5}{3} \leq x_3 \leq \frac{8}{3}$ που είναι και τα ζητούμενα όρια για την ποσότητα της τροφής T_3 . Έτσι όλες οι

δυνατές ποσότητες καθορίζονται από τις σχέσεις $x_1 = 3x_3 - 5, x_2 = 8 - 3x_3, \frac{5}{3} \leq x_3 \leq \frac{8}{3}$. Π.χ. για $x_3 = 2$ g βρίσκουμε $x_1 = 1$ g και $x_2 = 2$ g. Παρατηρούμε ότι αν π.χ. αντί για 20 g βιταμίνης C, απαιτούσαμε 21 g, τότε το πρόβλημα δε θα είχε λύση.

13. Έμμεση ιδιοκατανάλωση φυτοφαρμάκων

Ένα άτομο καταναλώνει ετήσια x_1 το πλήθος αμνούς και x_2 το πλήθος πουλερικά, με $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Κάθε αμνός έμμεσα έχει καταναλώσει τρεφόμενος, 2 μg φυτοφαρμάκου φ_1 και 5 μg φυτοφαρμάκου φ_2 . Επίσης, κάθε πουλερικό έχει καταναλώσει 1,2 και 1 μg από τα φ_1 και φ_2 αντίστοιχα. Αν το άτομο αυτό επιτρέπεται να καταναλώσει έμμεσα μg του φ_1 και λx_2 μg του φ_2 , να βρεθούν τα λ, x_1 και x_2 . (Ζητάμε δηλαδή να βρούμε αν η επιτρεπόμενη ποσότητα φ_i μπορεί να εκφρασθεί σε ποσοστό λ του ίδιου του μεγέθους (ιδιοτιμή) $x_i, i = 1, 2$, αντίστοιχα. Αφού κάθε αμνός καταναλώνει 2 μg και κάθε πουλερικό 1,2 μg του φ_1 , το άτομο αυτό, καταναλώνοντας X_1 αρνιού και x_2 πουλερικά θα έχει καταναλώσει $2x_1 + 1,2x_2$ μg του φ_1 . Η ποσότητα αυτή πρέπει να μας κάνει την επιτρεπόμενη ποσότητα φυτοφαρμάκου δηλαδή πρέπει: $2x_1 + 1,2x_2 = \lambda x_2$. Εξάλλου, κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι: $5x_1 + x_2 = \lambda x_2$. Το σύστημα αυτό των δύο εξισώσεων γράφεται και:

$$(2 - \lambda)x_1 + 1,2x_2 = 0 \quad 5x_1 + (1 - \lambda)x_2 = 0 \quad (1)$$

και είναι ένα ομογενές σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους x_1, x_2 . Επειδή

ζητείται λύση διάφορη της μηδενικής: $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ απαιτούμε η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του (1) να είναι ίση με μηδέν:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1,2 \\ 5 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Αναπτύσσοντας, έχουμε:

$$(2 - \lambda)(1 - \lambda) - 6 = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad (2)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 4$.

Για $\lambda = -1$ το (1) γίνεται: $3x_1 + 1,2x_2 = 0 \quad 5x_1 + 2x_2 = 0$

απ' όπου, επειδή απαιτήσαμε $\tau(A) < 2$, παίρνουμε την απειρία λύσεων $(-0,4x_2, x_2)$. Πρέπει

όμως $x_1, x_2 > 0$, αφού πρόκειται για πλήθος αμνών και πουλερικών και τα x_1, x_2 μηδενίζονται συγχρόνως. Οπότε, για $x_2 > 0$ έπεται $x_1 < 0$ και άρα η λύση αυτή (για $\lambda = -1$) του συστήματος απορρίπτεται ως λύση του προβλήματος.

Για $\lambda = 4$, το (1) γίνεται: $-2x_1 + 1.2x_2 = 0$ $5x_1 - 3x_2 = 0$
 απ' όπου παίρνουμε, για τον ίδιο λόγο, την απειρία λύσεων $(0, 6x_2, x_2)$ ως λύσεις του συστήματος, που είναι και δέκτες ως λύσεις του προβλήματος. Έτσι π.χ. για $x_2 = 5$ πουλερικά, έπεται $x_1 = 3$ αμνούς μπορεί να καταναλώσει το χρόνο, ή 3 πουλερικά και $1/2$ αμνό κ.λπ.

Παρατήρηση. Η εξίσωση (2) (αντιστ. το πολυώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$) καλείται χαρακτηριστική εξίσωση (αντιστ. χαρακτηριστικό πολυώνυμο) του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 1,2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ και οι ρίζες του λ_1, λ_2 καλούνται χαρακτηριστικές τιμές ή ιδιοτιμές του πίνακα, ενώ τα διανύσματα $(-0,4, x_2, x_2)$ και $(0,6, x_2, x_2)$ καλούνται ιδιοδιανύσματα του πίνακα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 .

14. Παρουσία φαρμάκου στο πλάσμα και στους ιστούς

Οι ποσότητες $x(t)$ και $y(t)$ ενός φαρμάκου Φ που υπάρχουν στο πλάσμα του αίματος και στους ιστούς ενός ασθενούς μεταβάλλονται με το χρόνο t ως εξής :

$$x(t) = Ae^{\lambda t}, \quad y(t) = Be^{\lambda t}, \text{ με } (A, B) \neq (0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρεθούν όλες οι τιμές των A, B και λ , αν οι ρυθμοί μεταβολής $x'(t)$ και $y'(t)$ πληρούν συγχρόνως τις σχέσεις $x'(t) = 3x(t) - 2y(t)$ και $y'(t) = 2x(t) - 2y(t)$.

Από το σύστημα των (γραμμικών διαφορικών) εξισώσεων

$$x'(t) = 3x(t) - 2y(t)$$

$$y'(t) = 2x(t) - 2y(t)$$

για $x(t) = Ae^{\lambda t}$, οπότε $x'(t) = \lambda Ae^{\lambda t}$ και $y(t) = Be^{\lambda t}$, οπότε $y'(t) = \lambda Be^{\lambda t}$ παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων $\lambda A e^{\lambda t} = 3A e^{\lambda t} - 2B e^{\lambda t}$ και $\lambda B e^{\lambda t} = 2A e^{\lambda t} - 2B e^{\lambda t}$ και από αυτό, απλοποιώντας με $e^{\lambda t}$ που είναι διάφορο του μηδέν $\forall t$ παίρνουμε το σύστημα των γραμμικών, ως προς A και B , εξισώσεων: $\lambda A = 3A - 2B$ και $\lambda B = 2A - 2B$ ή ακόμη το ομογενές σύστημα: $(3 - \lambda)A - 2B = 0$ και $2A - (2 + \lambda)B = 0$. Επειδή ζητείται λύση $(A, B) \neq (0, 0)$, απαιτούμε: (1)

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & -(2 + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

και παίρνουμε $-(3 - 2)(2 + \lambda) - 4 = 0$, ή την (χαρακτηριστική) εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ με ρίζες (ιδιοτιμές) $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -1$. Για $\lambda = 2$ το (1) γίνεται: $A - 2B = 0$ και $2A - 4B = 0$ απ' όπου έχουμε $A = 2B$, δηλαδή την απειρία λύσεων (ιδιοδιανύσματα) $(2B, B)$. (π.χ. $(2, 1)$, $(1, 1/2)$ κ.λπ.). Για $\lambda = -1$, το (1) γίνεται:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

απ' όπου έχουμε $B = 2A$, δηλαδή τις λύσεις $(A, 2A)$ (π.χ. $(1, 2)$, $(3, 6)$ κ.λπ.). Έτσι είναι:

$$x(t) = 2ke^{2t}, \quad y(t) = ke^{2t}, \text{ με } k \in \mathbb{R}, \text{ ή}$$

$$x(t) = ke^{-t}, \quad y(t) = 2ke^{-t}, \text{ με } k \in \mathbb{R}$$

15. Ανάπτυξη πληθυσμών βακτηρίων

Τρεις πληθυσμοί βακτηρίων $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ αναπτύσσονται ως εξής:
 $x(t) = Ae^{\lambda t}$, $y(t) = Be^{\lambda t}$, $z(t) = Ce^{\lambda t}$ με $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ όπου t ο χρόνος. Να βρεθούν όλες οι τιμές των A, B, C και λ όταν οι ρυθμοί μεταβολής των πληθυσμών επαληθεύουν συγχρόνως τις: $x'(t) = 2x(t)$, $y'(t) = x(t) + 7y(t) + 3z(t)$, $z'(t) = 5x(t) + 4y(t) + 3z(t)$

$$\text{Από το σύστημα των (διαφορικών) εξισώσεων:} \quad \left. \begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) \\ y'(t) &= x(t) + 7y(t) + 3z(t) \\ z'(t) &= 5x(t) + 4y(t) + 3z(t) \end{aligned} \right|$$

για $x(t) = Ae^{\lambda t}$, οπότε $x'(t) = \lambda Ae^{\lambda t}$, για $y(t) = Be^{\lambda t}$, οπότε $y'(t) = \lambda Be^{\lambda t}$ και για $z(t) = Ce^{\lambda t}$, οπότε $z'(t) = \lambda Ce^{\lambda t}$, παίρνουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} \lambda Ae^{\lambda t} &= 2Ae^{\lambda t} \\ \lambda Be^{\lambda t} &= Ae^{\lambda t} + 7Be^{\lambda t} + 3Ce^{\lambda t} \\ \lambda Ce^{\lambda t} &= 5Ae^{\lambda t} + 4Be^{\lambda t} + 3Ce^{\lambda t} \end{aligned} \right|$$

και απλοποιώντας με $e^{\lambda t} \neq 0$, φθάνουμε στο γραμμικό, ως προς A, B, C σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} \lambda A &= 2A \\ \lambda B &= A + 7B + 3C \\ \lambda C &= 5A + 4B + 3C \end{aligned} \right| \quad (1)$$

$$\text{ή ακόμα στο ομογενές σύστημα:} \quad \left. \begin{aligned} (2 - \lambda)A &= 0 \\ A + (7 - \lambda)B + 3C &= 0 \\ 5A + 4B + (3 - \lambda)C &= 0 \end{aligned} \right|$$

Για λύση διάφορη της μηδενικής, απαιτούμε :

$$\text{απ' όπου παίρνουμε:} \quad \left| \begin{array}{ccc} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 7 - \lambda & 3 \\ 5 & 4 & 3 - \lambda \end{array} \right| = 0$$

$$(2 - \lambda)(7 - \lambda)(3 - \lambda) - 12(2 - \lambda) = 0, \text{ ή } (2 - \lambda)[(7 - \lambda)(3 - \lambda) - 12] = 0, \text{ ή}$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) = 0. \text{ Οι ρίζες είναι } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 9 \text{ και } \lambda_3 = 1.$$

Για $\lambda = 2$ βρίσκουμε από το (1): $A + 5B + 3C = 0$ και $5A + 4B + C = 0$.

Το ομογενές σύστημα αυτό, 2 εξισώσεων με 3 αγνώστους, έχει πάντοτε απειρία λύσεων αφού δεν είναι αδύνατο. Έχουμε λοιπόν:

$$\text{απ' όπου} \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -21 & -14 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 14/21 & 0 \end{array} \right) \quad \text{όπου}$$

$$B = -\frac{14}{21}C = -\frac{2}{3}C \quad \text{και άρα} \quad A = -5B - 3C = \frac{10}{3}C - 3C = \frac{C}{3} \quad \left(\frac{C}{3}, -\frac{2C}{3}, C \right).$$

Για $\lambda = 9$, βρίσκουμε από το (1):

$$\text{που είναι ομογενές 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους και έχει ασφαλώς μη} \\ \text{μηδενική λύση :} \quad \left. \begin{aligned} -7A &= 0 \\ A - 2B + 3C &= 0 \\ 5A + 4B - 6C &= 0 \end{aligned} \right|$$

$$\left(\begin{array}{cccc} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -6 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Δηλαδή, έπεται ότι

$$B = \frac{3C}{2}, A = 0,$$

οπότε έχουμε τη

$$\text{λύση} \left(0, \frac{3C}{2}, C \right),$$

Για $\lambda=1$, βρίσκουμε από το (1) : $A - 2B + 3C = 0$

$$\left. \begin{array}{l} A = 0 \\ A + 6B + 3C = 0 \\ 5A + 4B + 2C = 0 \end{array} \right|$$

Πάλι ομογενές 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους που ασφαλώς έχει μη μηδενική λύση :

$$\text{Δηλαδή, έχουμε ότι} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = -\frac{C}{2}, A = 0$$

οπότε η λύση είναι $\left(0, -\frac{C}{2}, C \right)$. Έτσι έχουμε ότι:

$$x(t) = \frac{k}{3} e^{2t}, y(t) = -\frac{2k}{3} e^{2t}, z(t) = k e^{2t}, k \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = 0, y(t) = -\frac{3k}{2} e^{2t}, z(t) = k e^{2t}, k \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = 0, y(t) = -\frac{k}{2} e^t, z(t) = k e^t, k \in \mathbb{R}$$

16. Θεραπεία ασθενούς

Για τη θεραπεία ασθενούς με συνδυασμένη χρήση 3 φαρμάκων Φ_i , $i = 1, 2, 3$ απαιτούνται 1 mgr αντιπυρετικού, λ mgr αντιβιοτικού και λ^2 mgr αναλγητικού. Αν η περιεκτικότητα 1 gr του Φ_i , $i = 1, 2, 3$ στις 3 παραπάνω ουσίες είναι αντίστοιχα $(\lambda, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ και $(1, 1, \lambda)$ mgr, να βρεθεί για ποιες τιμές του λ υπάρχουν τριάδες ποσοτήτων των Φ_i που να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να θεραπευθεί ο ασθενής.

Εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη εφαρμογή, φθάνουμε στο σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{array} \right|$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) \neq 0$$

Το σύστημα αυτό έχει ακριβώς μία λύση όταν :

, δηλαδή όταν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2$. Σ' αυτήν την περίπτωση, με τον κανόνα του Cramer π.χ., βρίσκουμε

$$x_1 = \frac{-(\lambda+1)(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, x_2 = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{1}{\lambda+2} \quad \text{και}$$

$$x_3 = \frac{(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$$

Επειδή όμως πρέπει $x_1, x_2, x_3, \lambda > 0$ ως ποσότητες ουσιών, η περίπτωση αυτή απορρίπτεται, γιατί δίνει $x_1 > 0$ για $\lambda > 0$.

Αν $\lambda = 1$, τότε το σύστημα γίνεται : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ και έχει $\tau(A) = \tau(E) = 1$. Άρα, ορίζοντας αυθαίρετα $3-1 = 2$ αγνώστους π.χ. x_2 και x_3 βρίσκουμε άπειρες τριάδες $(1-x_2-x_3, x_2, x_3)$ που το επαληθεύουν, μεταξύ των οποίων και τέτοιες ώστε $x_1, x_2, x_3 > 0$ (π.χ. $x_2=0,2, x_3=0,1, x_1=0,7$).

$$\text{Αν } \lambda = -2, \text{ τότε το σύστημα γίνεται: } \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

και έχει $\tau(A) = 2$, αφού π.χ. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ και $\tau(E) = 3$, αφού π.χ.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Άρα τότε δεν έχει λύση. Δηλαδή, για $\lambda = -2$ δεν υπάρχει καμία τριάδα ποσοτήτων φαρμάκων Φ_i που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη θεραπεία του ασθενούς. Εξάλλου και να υπήρχε λύση για $\lambda = -2$, η τιμή αυτή θα απορρίπτονταν ως αρνητική, αφού το λ παριστάνει ποσότητα συστατικού. Άρα, συμπερασματικά, μόνο για $\lambda = 1$ έχει λύση το πρόβλημα.