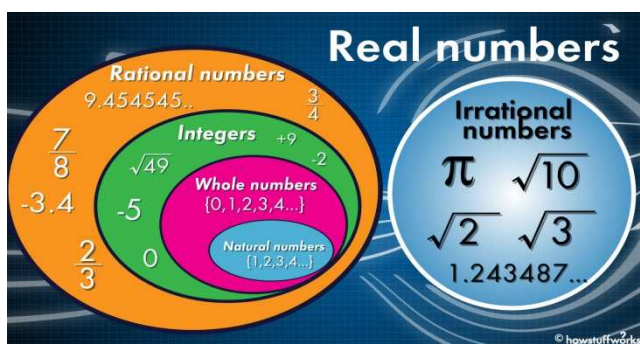




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Αξιοσημείωτες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών



Σπουδαστής: Μπεγνής Παντελής (AM 8472)
Καραγιάννης Αθανάσιος (AM 8567)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2021–2022

Ημερομηνία ανάθεσης: 22.11.2021
Ημερομηνία κατάθεσης: 02.02.2022
Ημερομηνία εξέτασης:02.2022.

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Πρόλογος	5
1. Αριθμοί με συναρπαστικές συμπεριφορές	5
1.1 Εξαψήφιοι αριθμοί	5
1.2 Οι τριψήφιοι και οι διψήφιοι αριθμοί	7
1.3 Ο αριθμός 666	8
1.4 Οι αριθμοί 9, 4, 8	9
2. Ομάδες αριθμών	11
2.1 Πρώτοι αριθμοί	11
2.2 Παρατηρήσεις	11
2.3 Παλινδρομικοί αριθμοί	11
2.4 Παλινδρομικός και πρώτος αριθμός	12
2.5 Συμμετρικοί και πρώτοι αριθμοί	12
2.6 Πολύγωνοι αριθμοί	12
2.6.1 Τρίγωνοι αριθμοί	12
2.6.2 Τετράγωνοι αριθμοί	13
2.6.3 Πεντάγωνοι αριθμοί	13
2.7 Τέλειοι αριθμοί	13
2.8 Φίλοι αριθμοί	14
2.9 Ευτυχισμένος αριθμός	14
3. Δυνάμεις αριθμών	14
3.1 Τετράγωνα αριθμών	14
3.2 Παράξενα τετράγωνα	15
3.3 Έξυπνη τοποθέτηση	16
3.4 Πυθαγόρειες τιμές	16
3.5 Ιδιάζοντες αριθμοί	16
4. Οι κύβοι των αριθμών	16
4.1 Ιδιότητες κύβων	16
4.2 Περίεργοι κύβοι	17
4.3 Και άλλοι παράξενοι κύβοι	18
4.4 Εντυπωσιακές σχέσεις μεταξύ τετραγώνων και κύβων	18
5. Αλλόκοτες πράξεις	18
5.1 Εξαίσια αποτελέσματα από τη χρήση όλων των ψηφίων από μία φορά	18
5.2 Οι θαυμαστοί πίνακες	19
5.3 Το τετράγωνο του Euler	21
5.4 Μαγικά στοιχήματα	22
5.5 Μαγικά τετράγωνα	22
5.6 Μαγικά τρίγωνα	22
5.7 Τα μαγικά τετράγωνα του Einstein	22
5.8 Μαγικά πεντάγωνα	22
5.9 Μαγικοί αστέρες	23
5.10 Μαγικές κυψέλες	23
5.11 Αρμονικές διαπλοκές	23
5.12 Απροσδόκητα αποτελέσματα	23
5.13 Αρμονικές σχέσεις	23
5.14 Εντυπωσιακό «κτίσιμο»	24
5.15 Περίεργες συμπεριφορές δυνάμεων αριθμών	24
5.16 Η $13^{\text{η}}$ δύναμη αριθμού	24
5.17 Αλλεπάλληλα ριζικά	24
5.18 Νομοτελειακοί πολλαπλασιασμοί	24
5.19 Ομάδες ακεραίων	25
6. Εκπληκτικές αναλύσεις αριθμών	25

6.1 Αριθμοί αναλυόμενοι με τα ίδια τους τα ψηφία σε άθροισμα αυξανομένων δυνάμεων	25
6.2 Αριθμοί αναλυόμενοι με τα ψηφία τους σε άθροισμα ίδιων δυνάμεων	25
6.3 Αριθμοί αναλυόμενοι με τα ψηφία με απλά σύμβολα αριθμητικής	25
6.4 Αλληπάλληλες αναλύσεις του 7	26
6.5 Αναλύσεις αριθμών σε παράξενα αθροίσματα	26
7. Απίστευτα εξαγόμενα	26
7.1 Ίδια ψηφία εκατέρωθεν του ίσον	26
7.2 Ίδιο άθροισμα ψηφίων εκατέρωθεν του ίσον	26
7.3 Αριθμοί βρικόλακες	27
7.4 Συμμετρικές σχέσεις	27
Βιβλιογραφία	28

Πρόλογος

Στα μαθηματικά, οι πραγματικοί αριθμοί γίνονται αντιληπτοί διαισθητικά ως το σύνολο όλων των αριθμών που είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα σημεία μιας άπειρης ευθείας, που καλείται ευθεία των πραγματικών αριθμών ή πραγματικός άξονας. Ο όρος «πραγματικός αριθμός» πλάστηκε εκ των υστέρων σε αντιδιαστολή προς τους «φανταστικούς αριθμούς», των οποίων η ένωση με τους πραγματικούς δίνει τους μιγαδικούς αριθμούς. Οι πραγματικοί αριθμοί διακρίνονται σε ρητούς αριθμούς (που μπορούν να εκφραστούν ως κλάσματα με ακέραιο αριθμητή και παρονομαστή) και σε άρρητους αριθμούς (που δε μπορούν να εκφραστούν επακριβώς ως κλάσματα). Οι ρητοί μαζί με τους άρρητους αποτελούν ένα συνεχές σύνολο. Κάθε φυσικό μέγεθος που μπορεί να μετρηθεί, εκφράζεται συνήθως με έναν πραγματικό αριθμό. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.

1. Αριθμοί με συναρπαστικές συμπεριφορές

1.1 Εξαψήφιοι αριθμοί

Ο αριθμός **142.857** είναι ο πιο παράξενος αριθμός από όλους, γι' αυτό θα τον ερευνήσουμε. Θα τον πολλαπλασιάσουμε διαδοχικά με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, και θα δούμε τι προκύπτει.

$1 \times 142.857 = 142.857$
$2 \times 142.857 = 285.714$
$3 \times 142.857 = 428.571$
$4 \times 142.857 = 571.428$
$5 \times 142.857 = 714.285$
$6 \times 142.857 = 857.142$

Άρα, αυτό που προκύπτει είναι ότι στα γινόμενα αυτά έχουμε την ίδια διαδοχή ψηφίων που αποτελούν τον αριθμό 142.857. Ανακατατάσσουμε τώρα τα ίδια αποτελέσματα ώστε τα αρχικά ψηφία κατακορύφως να σχηματίζουν πάλι τον 142.857.

142.857
428.571
285.714 3 ^η σειρά
857.142
571.428
714.285
3 ^η στήλη

Παρατηρούμε ότι κάθε οριζόντια στήλη είναι ίδια με την αντίστοιχη κάθετη στήλη και ότι οι υπό γωνία 45° διαγώνιες αποτελούνται από ίδια ψηφία. Ωστόσο, αυτός ο περίεργος αριθμός βρέθηκε από την περίοδο του απλού δεκαδικού περιοδικού κλάσματος $\frac{1}{7}$, όπου $\frac{1}{7} = 0,142857$. Στη συνέχεια με τέτοιους απλούς περιοδικούς δεκαδικούς, θα βρούμε και άλλους περίεργους αριθμούς τους οποίους συνήθως τους ονομάζουμε **κυκλικούς αριθμούς**. Επίσης περίεργος αριθμός όπως ο 142.857 είναι και ο **076.923**. Άλλωστε αν αυτούς τους δύο αριθμούς τους χωρίσουμε σε τριψήφια κομμάτια και τα προσθέσουμε μας δίνουν άθροισμα 999. Δηλαδή:

$$142 + 857 = 999$$

$$076 + 923 = 999$$

Ας θεωρήσουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 και τον 13 μαζί με τα πολλαπλάσιά του.

$076.923 \times 1 = 076.923$
$076.923 \times 3 = 230.769$
$076.923 \times 4 = 307.692$
$076.923 \times 9 = 692.307$
$076.923 \times 10 = 769.230$
$076.923 \times 12 = 923.076$

$076.923 \times 2 = 153.846$
$076.923 \times 5 = 384.615$
$076.923 \times 6 = 461.538$
$076.923 \times 7 = 538.461$
$076.923 \times 8 = 615.384$
$076.923 \times 11 = 846.153$

Δηλαδή, στους παραπάνω πίνακες εμφανίζονται οι κυκλικές εναλλαγές των αριθμών 076.923, 153.846. Τώρα ας πάρουμε και τα γινόμενα του με τον 13 και τα πολλαπλάσιά του.

$076.923 \times 13 = 0.999.999$
$076.923 \times 26 = 1.999.998$
$076.923 \times 39 = 2.999.997$
$076.923 \times 52 = 3.999.996$

Χωρίζουμε τα αποτελέσματα σε εξαψήφια κομμάτια εκ δεξιών προς τα αριστερά και προσθέτοντάς τα έχουμε:

$$\begin{aligned} 999.999 + 000.000 &= 999.999 \\ 999.998 + 000.001 &= 999.999 \\ 999.997 + 000.002 &= 999.999 \\ 999.996 + 000.003 &= 999.999 \end{aligned}$$

Άρα, καταλήγουμε ότι και αυτός είναι ένας περίεργος αριθμός, όπου προκύπτει από την περίοδο του απλού δεκαδικού κλάσματος $\frac{1}{13}$. Ο αριθμός **12345679** είναι η περίοδος του απλού δεκαδικού περιοδικού κλάσματος $\frac{1}{81}$. Για να δούμε τι συναρπαστικό συμβαίνει με αυτόν, θα ξεκινήσουμε πολλαπλασιάζοντάς τον διαδοχικά με τα πολλαπλάσια του 9.

$12.345.679 \times 9 = 111.111.111$
$12.345.679 \times 18 = 222.222.222$
$12.345.679 \times 27 = 333.333.333$
.....
$12.345.679 \times 81 = 999.999.999$

Στη συνέχεια τον πολλαπλασιάζουμε με τα πολλαπλάσια του 9 που είναι μεγαλύτερα του 81. Δηλαδή έχουμε:

$12.345.679 \times 99 (= 9 \times 11) = 1.222.222.221$
$12.345.679 \times 108 (= 9 \times 12) = 1.333.333.332$
$12.345.679 \times 117 (= 9 \times 13) = 1.444.444.443$
$12.345.679 \times 126 (= 9 \times 14) = 1.555.555.554$
.....

Εδώ μπορούμε να διατυπώσουμε ότι το άθροισμα των ακραίων ψηφίων των αποτελεσμάτων δίνει το ενδιαμέσως επαναλαμβανόμενο ψηφίο. Τώρα θα πολλαπλασιάσουμε τον 12.345.679 με πολλαπλάσια του 3, χωρίς όμως να είναι και πολλαπλάσια του 9. Δηλαδή:

$15 \times 12.345.679 = 185.185.185$
$21 \times 12.345.679 = 259.259.259$
$24 \times 12.345.679 = 296.296.296$
$33 \times 12.345.679 = 407.407.407$

Στον παραπάνω πίνακα προκύπτουν εννιαψήφιοι αριθμοί, όπου ένας τριψήφιος επαναλαμβάνεται τρεις φορές. Και κάτι τελευταίο και πολύ όμορφο: Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό μας με το 999.999.999:

$$12.345.679 \times 999.999.999 = 1.234.567.887.654.321 \text{ Προκύπτει... παλινδρομικός αριθμός!}$$

Ακόμα ένας ιδιαίτερος αριθμός είναι και ο **123456789**. Κατ' αρχήν το άθροισμα των ψηφίων του είναι 45. Θα αρχίσουμε πολλαπλασιάζοντάς τον με τους μονοψήφιους αριθμούς που δεν είναι πολλαπλάσια του 3.

$123.456.789 \times 1 = 123.456.789$
$123.456.789 \times 2 = 246.913.578$

$123.456.789 \times 4 = 493.827.156$
$123.456.789 \times 5 = 617.283.945$
$123.456.789 \times 7 = 864.197.523$
$123.456.789 \times 8 = 987.654.312$

Εδώ παρατηρούμε ότι στα αποτελέσματα επαναλαμβάνονται τα ψηφία από το 1 έως το 9 από μια φορά. Πάμε να δούμε τι προκύπτει αν τον πολλαπλασιάσουμε με το 3 και το 6.

$123.456.789 \times 3 = 370.370.370 = 370.370370 - 3$
$123.456.789 \times 6 = 740.740.734 = 740.740.740 - 6$

Και τώρα πάμε να δούμε τι προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό του επί τα 9 πρώτα πολλαπλάσια του 9.

$123.456.789 \times 9 = 1.111.111.101$
$123.456.789 \times 18 = 2.222.222.202$
$123.456.789 \times 27 = 3.333.333.303$
.....
$123.456.789 \times 81 = 9.999.999.909$

Άλλη μια παραδοξότητα με τον αριθμό 123.456.789, είναι ότι η τετραγωνική ρίζα είναι ο 11.111,1 ... Δηλαδή: $\sqrt{123.456.789} = 11.111,1 \dots$

Οι αριθμοί **2.519** και **2.520** είναι δύο αριθμοί με πολλά προσόντα! Ας ξεκινήσουμε με τον 2.519. Τον αριθμό αυτόν αν τον διαιρέσουμε δια του 10 δίνει υπόλοιπο 9, αν τον διαιρέσουμε δια του 9 δίνει υπόλοιπο 8, αν τον διαιρέσουμε δια του 8 δίνει υπόλοιπο 7 και ούτω καθ' εξής. Και τελικά διαιρούμενος δια 2 δίνει υπόλοιπο 1. Ας δούμε όμως τι συμβαίνει και με τον **2.520**. Είναι ο πιο μικρός φυσικός αριθμός που διαιρείται ακριβώς από όλους τους μονοψήφιους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 και τον 10 φυσικά. Επιπλέον ο 2.520 είναι ο μικρότερος αριθμός n που αυτός και ο $n-1$ διαιρούνται μαζί από το 1 έως το 12.

1.2 Οι τριψήφιοι και οι διψήφιοι αριθμοί

- Η διαφορά ενός τριψήφιου αριθμού και του συμμετρικού του, είναι πάντα πολλαπλάσιο του 99.

Έστω π.χ. ο τριψήφιος **589**. Τον αφαιρούμε από τον συμμετρικό του 985: $985 - 589 = 396$ ($= 4 \times 99$) (πολλαπλάσιο του 99). Αν ο τριψήφιος έχει διαδοχικά ψηφία, τότε η διαφορά του από τον συμμετρικό του είναι το διπλάσιο του 99 δηλαδή ο 198 (και πάλι πολλαπλάσιο του 99) π.χ. Έστω ο 456: Είναι $654 - 456 = 198$.

- Ας πάρουμε έναν οποιονδήποτε τριψήφιο με αυξανόμενα διαδοχικά ψηφία. Αν σε αυτόν προσθέσουμε το 99, προκύπτει τριψήφιος με όλα τα ψηφία του, ίδια.

Π.χ.: $123 + 99 = 222$, $234 + 99 = 333$, ...

- Αν θεωρήσουμε έναν οποιονδήποτε τριψήφιο με μειούμενα διαδοχικά ψηφία και του αφαιρέσουμε το 99 προκύπτει και πάλι τριψήφιος με όλα τα ψηφία του ίδια.

Π.χ.: $978 - 99 = 888$, $876 - 99 = 777$

- Τώρα με τους διψήφιους θεωρούμε έναν τυχόντα διψήφιο αριθμό (18) και τον συμμετρικό του (81). Αφαιρούμε από τον μεγαλύτερο τον μικρότερο ($81 - 18 = 63$) της διαφοράς που βρίσκουμε, την προσθέτουμε με τον συμμετρικό της ($63 + 36 = 99$) και το άθροισμα θα είναι πάντοτε 99.

Ο αριθμός **33** είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που δεν είναι άθροισμα τριγωνικών αριθμών και πολλαπλασιάζοντάς τον με κάποιους άλλους αριθμούς και τα πολλαπλάσια τους, παρουσιάζει αρκετές παράξενες συμπεριφορές. Ξεκινάμε με τον αριθμό 3 και τα πολλαπλάσιά του.

$33 \times 6 = 198$
$33 \times 9 = 297$
$33 \times 12 = 396$
$33 \times 15 = 495$
$33 \times 18 = 594$

$33 \times 21 = 693$
$33 \times 24 = 792$
$33 \times 27 = 891$
$33 \times 30 = 990$

Παρατηρούμε ότι στα αποτελέσματα, το άθροισμα των ακραίων ψηφίων είναι 9, δηλαδή το μεσαίο ψηφίο. Αν πάρουμε τώρα τα υπόλοιπα 100 πολλαπλάσια του 3 έχουμε:

$33 \times 33 = 1.089$
$33 \times 36 = 1.188$
$33 \times 39 = 1.287$
$33 \times 42 = 1.386$
$33 \times 45 = 1.485$
$33 \times 48 = 1.584$
.....

Στα αποτελέσματα παρατηρούμε το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου ψηφίου, όπως και του δεύτερου με του τέταρτου ψηφίου είναι 9.

Ο αριθμός **64** ξεχωρίζει από άλλους αριθμούς διότι:

- $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ • Είναι τετράγωνος αριθμός (8×8)
- Είναι δωδεκάγωνος αριθμός • Είναι κυβικός αριθμός ($4 \times 4 \times 4$)
- Είναι άθροισμα των 8 αρχικών περιττών αριθμών: $1+3+5+7+9+11+13+15=64$
- Είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός με 7 διαιρέτες.

1.3 Ο αριθμός 666

Ξεκινάμε γράφοντας κάποιες εντυπωσιακές αναλύσεις του:

- $666 = 1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89$ $666 = 123 + 456 + 78 + 9$ $666 = 9 + 87 + 6 + 543 + 21$

Όπως παρατηρήσαμε ο 666 γράφεται σαν άθροισμα προσθετέων με αύξουσα ή φθίνουσα διαδοχή εμφανίσεως των μονοψηφίων αριθμών.

- Ο 666 είναι διαιρέτης του αθροίσματος: $123.456.789 + 987.654.321$.
- Επιπλέον παράξενες εμφανίσεις του που πραγματικά εντυπωσιάζουν είναι:

$$\begin{aligned}
 666 &= 1^6 - 2^6 + 3^6 & 666 &= (6 + 6 + 6) + (6^3 + 6^3 + 6^3) \\
 666 &= (6 + 6 + 6) \times (6^2 + 1^2) & 666 &= 6! \times (6^2 + 1) \times (6^2 + 2^2) \\
 666 &= 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 & (6 \times 6 \times 6)^2 + (666 - 6 \times 6)^2 &= 666^2 \\
 666 + 666 &= 6 \times 6 \times 6 \times 6 + 6 \times 6 & 666 &= 111 + 222 + 333
 \end{aligned}$$

- Ψώνουμε τον αριθμό μας πρώτα στο τετράγωνο και κατόπιν στον κύβο. Άρα έχουμε:

$$666^2 = 443.556 \quad 666^3 = 295.408.296$$

Άθροισμα των κύβων των ψηφίων του πρώτου αποτελέσματος: $4^3 + 4^3 + 3^3 + 5^3 + 5^3 + 6^3 = 621$

Άθροισμα των ψηφίων του δεύτερου αποτελέσματος: $2 + 9 + 5 + 4 + 0 + 8 + 2 + 9 + 6 = 45$

Προσθέτουμε τους 62 και 45. Δηλαδή: $621 + 45 = 666$

- Το άθροισμα των αρχικών 666 πρώτων αριθμών εμπεριέχει τον 666:

$$2 + 3 + 7 + 11 + \dots + 4.969 + 4.973 = 1.553.157 = 23 \times 66.659$$

- Το άθροισμα των πρώτων 144 ψηφίων του π είναι: $666 (144 = (6 + 6) \times (6 + 6) = 12 \times 12)$

Βρίσκουμε ότι $\frac{355}{113} = 3,14159... (= \pi)$. Αν αντιστρέψουμε τον αριθμητή αυτού του κλάσματος και του προσθέσουμε τον παρονομαστή έχουμε: $553 + 113 = 666$

- Δύο εντυπωσιακές σχέσεις είναι:

$$\alpha) \frac{666}{64.676} = \frac{6 \times 6 \times 6}{6 \times 46 \times 76} \quad \beta) \frac{1.666}{6.664} = \frac{16}{66} \times \frac{66}{64}$$

- **Αριθμός του Smith** λέγεται ο ακέραιος αριθμός του οποίου το άθροισμα των ψηφίων ισούται με το άθροισμα των ψηφίων των πρώτων του διαιρετών. Ο 666 λοιπόν είναι αριθμός του Smith, διότι: $666 = 2 \times 3 \times 3 \times 37$ και $6 + 6 + 6 = 2 + 3 + 3 + 3 + 7$

1.4 Οι αριθμοί 9, 4, 8

Ξεκινάμε με τον αριθμό 9.

- Κατ' αρχήν κάθε αριθμός πολλαπλασιάζομενος επί 9 εξαγόμενο που το άθροισμα των ψηφίων του είναι ο αριθμός που διαιρείται ακριβώς δια 9.

Π.χ. $528 \times 9 = 4.752$, $4 + 7 + 5 + 2 = 18$, $18 : 9 = 2$
 $952 \times 9 = 8.568$, $8 + 5 + 6 + 8 = 27$, $27 : 9 = 3$

- Όταν ένας τριψήφιος αριθμός είναι άθροισμα δύο άλλων τριψήφιων και αν τα χρησιμοποιηθέντα ψηφία είναι από το 1 έως το 9 ληφθέντα από μία φορά, τότε το άθροισμα των ψηφίων του αποτελέσματος είναι πάντα 18, δηλαδή διπλάσιο του 9.

Π.χ. $716 + 238 = 954 \rightarrow 9 + 5 + 4 = 18 = 2 \times 9$
 $317 + 528 = 846 \rightarrow 8 + 4 + 6 = 18 = 2 \times 9$
 $291 + 546 = 837 \rightarrow 8 + 3 + 7 = 18 = 2 \times 9$

- Το υπόλοιπο της διαιρέσεως ενός οποιουδήποτε αριθμού διά του 9 είναι το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού.

Π.χ. $23 : 9 = 2$ και υπόλοιπο $2 + 3 = 5$
 $67 : 9 = 7$ και υπόλοιπο $6 + 7 = 13$, $1 + 3 = 4$
 $173 : 9 = 19$ και υπόλοιπο $1 + 7 + 3 = 11$, $1 + 1 = 2$

- Έστω ένας αριθμός. Του αφαιρούμε το άθροισμα των ψηφίων του. Το αποτέλεσμα διαιρείται ακριβώς δια 9. Π.χ. Έστω ο 736. Του αφαιρώ το άθροισμα των ψηφίων του $7 + 3 + 6 = 16$

Άρα : $736 - 16 = 720$. Ο 720 διαιρείται ακριβώς διά 9. Πράγματι $720 : 9 = 80$.

- Ακόμα κάποια αρμονικά αποτελέσματα από προθέσεις που προκύπτουν αν τους μονοψήφιους αριθμούς τους πολλαπλασιάζουμε επί 9 και συγχρόνως τους προσθέτουμε το 9.

$1 \times 9 + (1 + 9) = 9 + 10 = 19$
$2 \times 9 + (2 + 9) = 18 + 11 = 29$
$3 \times 9 + (3 + 9) = 27 + 12 = 39$
.....
...

Ας δούμε πως συμπεριφέρονται τα τετράγωνα και οι κύβοι των αριθμών 9, 99, 999, 9.999 και τι αποτελέσματα προκύπτουν.

$9^2 = 81$
$99^2 = 9.801$
$999^2 = 998.001$
$9.999^2 = 99.980.001$
$99.999^2 = 9.999.800.001$
.....

$9^3 = 729$
$99^3 = 970.299$
$999^3 = 997.002.999$
.....

Συνεχίζουμε με τον αριθμό 4. Αρχικά, θα διαιρέσουμε τον 4 με τους παρακάτω αριθμούς. Αυτό που προκύπτει είναι ότι μετά τη διαίρεση έχουμε ίδια κυκλική διαδοχή ψηφίων. Επίσης αν ορισμένα από τα εκάστοτε προκύπτοντα πηλίκια συνεχίσουμε να τα διαιρούμε διά 4 προκύπτουν νέα πηλίκια με την ίδια κυκλική διαδικασία.

- $615.384 : 4 = 153.846$ Συνεχίζουμε να διαιρούμε διά 4
 $153.846 : 4 = 38.461,5$
- $410.256 : 4 = 102.564$ Συνεχίζουμε να διαιρούμε διά 4
 $102.564 : 4 = 25.641,0$ Πάλι διά 4
- $102.564 : 4 = 25.641,0$ Πάλι διά 4
 $25.641,0 : 4 = 6.410,25$

- $923.076 : 4 = 230.769$
- $307.692 : 4 = 076.923$
- $820.512 : 4 = 205.128$ Ξανά διά 4
 $205.128 : 4 = 51.282,0$ Ξανά διά 4
 $51.282,0 : 4 = 12.820,5$
- $512.820 : 4 = 128.205$
- $205.128 : 4 = 51.282,0$ Πάλι διά 4
 $51.282,0 : 4 = 12.820,5$ Πάλι διά 4
 $12.820,5 : 4 = 3.205,125$

Τώρα κάποιои πολλαπλασιασμοί με τον αριθμό 4:

$58 \times 4 = 232$
$5.858 \times 4 = 23.432$
$586.358 \times 4 = 2.345.342$
$58.641.358 \times 4 = 234.565.432$
$5.864.191.358 \times 4 = 23.456.765.432$
$586.419.961.358 \times 4 = 2.345.678.765.432$
$58.641.974.691.358 \times 4 = 234.567.898.765.432$

Τέλος ο αριθμός **8**. Ο αριθμός 8 είναι ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα ψηφία. Τον συναντάμε πολύ στη καθημερινότητά μας (όπως τον οκτακύλινδρο κινητήρα, το οκτάωρο εργασίας κ.λπ.). Ας δούμε όμως τώρα την εξής αριθμητική αρμονία όπου ο 8 παίζει το βασικό ρόλο:

$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 8 + 3 = 987$
$1.234 \times 8 + 4 = 9.876$
$12.345 \times 8 + 5 = 98.765$
$123.456 \times 8 + 6 = 987.654$
$1.234.567 \times 8 + 7 = 9.876.543$
$12.345.678 \times 8 + 8 = 98.765.432$
$123.456.789 \times 8 + 9 = 987.654.321$

Ακόμα μια άλλη αριθμητική εκδοχή χρησιμοποιώντας τον αριθμό οχτώ είναι:

$8 \times 8 + 13 = 77$
$88 \times 8 + 13 = 717$
$888 \times 8 + 13 = 7.117$
$8.888 \times 8 + 13 = 71.117$
$88.888 \times 8 + 13 = 711.117$
$888.888 \times 8 + 13 = 7.111.117$
$8.888.888 \times 8 + 13 = 71.111.117$
.....

Θα αναλύσουμε τον αριθμό 8 και όσους προκύπτουν αν συνεχώς προσκολλάμε δεξιά του, τους μονοψήφιους. Αυτό που προκύπτει είναι:

$8 = 7,1 \times 1 + 0,9 \times 1$
$87 = 7,1 \times 12 + 0,9 \times 2$
$876 = 7,1 \times 123 + 0,9 \times 3$
$8765 = 7,1 \times 1234 + 0,9 \times 4$
$87654 = 7,1 \times 12345 + 0,9 \times 5$
$876543 = 7,1 \times 123456 + 0,9 \times 6$
.....

Και φυσικά όπου $7,1 + 0,9 = 8!!$

2. Ομάδες αριθμών

2.1 Πρώτοι αριθμοί

Ένας αριθμός λέγεται πρώτος αν κανείς άλλος αριθμός δε μπορεί να τον διαιρέσει ακριβώς (παρά μόνο ο εαυτός του και η μονάδα). Πρώτοι είναι οι: 1, 2, 3, 5, 7, κ.λπ. Σε ορισμένους από αυτούς, παρατηρούνται παράξενα πράγματα τα οποία θα εξετάσουμε. Οποιοσδήποτε πρώτος αριθμός του τύπου $4 \times v + 1$ μπορεί, να αναλυθεί σε άθροισμα δύο τετραγώνων και μάλιστα η ανάλυση της πρώτης και της δεύτερης δύναμης δεν γίνεται παρά μόνο με έναν και μοναδικό τρόπο. Π.χ.:

Ο **13** είναι πρώτος αριθμός και μπορεί να γραφεί $13 = 4 \times 3 + 1$. Δηλαδή:

$$13 = 3^2 + 2^2, \text{ όπου } 13 = 9 + 4$$

$$13^2 = 12^2 + 5^2, \text{ όπου } 169 = 144 + 25$$

$$13^3 = 46^2 + 9^2, \text{ όπου } 2.197 = 2.116 + 81$$

Όπως και ο **41**:

$$41 = 5^2 + 4^2, \text{ όπου } 41 = 25 + 16$$

$$41^2 = 40^2 + 9^2, \text{ όπου } 1.681 = 1.600 + 81$$

$$41^3 = 236^2 + 115^2, \text{ όπου } 68.921 = 55.696 + 13.225$$

2.2 Παρατηρήσεις

1^η. Έχουμε $1 + 1 = 2 =$ πρώτος αριθμός. Αυτόν τον 2 τώρα τον πολλαπλασιάζουμε κάθε φορά επί το γινόμενο των αρχικών δύο, τριών, τεσσάρων κ.λπ. πρώτων, προσθέτοντας πάντα το όπως φαίνεται παρακάτω:

$$2 \times 1 \times 3 + 1 = 7 \text{ πρώτος}$$

$$2 \times 1 \times 3 \times 5 + 1 = 31 \text{ πρώτος}$$

$$2 \times 1 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211 \text{ πρώτος}$$

$$2 \times 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2.311 \text{ πρώτος}$$

2^η. Στην αλγεβρική έκφραση $10^{2v} - 10^v + 1$ δίνουμε διαδοχικά τις τιμές $v = 1, 2, 3, \dots$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

v	$10^{2v} - 10^v + 1$	Αριθμητική τιμή	Χαρακτηρισμός
1	$10^2 - 10^1 + 1$	91	Σύνθετος αριθμός
2	$10^4 - 10^2 + 1$	9.901	Πρώτος αριθμός
3	$10^6 - 10^3 + 1$	999.001	Σύνθετος αριθμός
4	$10^8 - 10^4 + 1$	99.990.001	Πρώτος αριθμός
5	$10^{10} - 10^5 + 1$	9.999.900.001	Σύνθετος αριθμός
6	$10^{12} - 10^6 + 1$	999.999.000.001	Πρώτος αριθμός
7	$10^{14} - 10^7 + 1$	99.999.990.000.001	Σύνθετος αριθμός
8	$10^{16} - 10^8 + 1$	9.999.999.900.000.001	Πρώτος αριθμός
9	$10^{18} - 10^9 + 1$	999.999.999.000.000.001	Σύνθετος αριθμός
10	$10^{20} - 10^{10} + 1$	99.999.999.990.000.000.001	Σύνθετος αριθμός

3^η.

Αριθμός	Χαρακτηρισμός
31	Πρώτος αριθμός
331	Πρώτος αριθμός
3.331	Πρώτος αριθμός
33.331	Πρώτος αριθμός
333.331	Πρώτος αριθμός
3.333.331	Πρώτος αριθμός
33.333.331	Πρώτος αριθμός
333.333.331	Σύνθετος αριθμός

2.3 Παλινδρομικοί αριθμοί

Παλινδρομικός λέγεται ο αριθμός που διαβάζεται το ίδιο ή από αριστερά προς τα δεξιά, ή από δεξιά προς τα αριστερά. Αρχίζουμε με τα τετράγωνα των παλινδρομικών 1, 11, 111, 1.111 κ.λπ.

$1^2 = 1$	=	$\frac{1 \times 1}{1}$
$11^2 = 121$	=	$\frac{22 \times 22}{1+2+1}$
$111^2 = 12.321$	=	$\frac{333 \times 333}{1+2+3+2+1}$
$1.111^2 = 1.234.321$	=	$\frac{4.444 \times 4.444}{1+2+3+4+3+2+1}$
.....		

Συνεχίζουμε με μερικά παλινδρομικά αθροίσματα:

1	=	1	=	1^2
1+2+1	=	2+2	=	2^2
1+2+3+2+1	=	3+3+3	=	3^2
1+2+3+4+3+2+1	=	4+4+4+4	=	4^2
1+2+3+4+5+4+3+2+1	=	5+5+5+5+5	=	5^2
1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1	=	6+6+6+6+6+6	=	6^2
.....				

Τώρα προχωράμε ελέγχοντας τις τέσσερις πρώτες δυνάμεις του 11:

$11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1.331$, $11^4 = 14.641$. Παρατηρήσαμε ότι προέκυψαν πάλι παλινδρομικοί αριθμοί. Γι' αυτό τώρα ας πάρουμε το **11** και ας σχηματίσουμε τους παλινδρομικούς που θα προκύπτουν αν ανάμεσά στο 11 βάλουμε ένα μηδενικό, κατόπιν δύο μηδενικά, τρία, τέσσερα κ.λπ. Των αριθμών αυτών παίρνουμε τα τετράγωνα, τους κύβους και τις τέταρτες δυνάμεις τους.

Βάση	Τετράγωνο	Κύβος	4 ^η Δύναμη
11	121	1.331	14.641
101	10.201	1.030.301	104.060.401
1001	1.002.001	1.003.003.001	1.004.006.004.001
.....			
...	...		...

2.4 Παλινδρομικός και πρώτος αριθμός

Το άθροισμα των 666 παλινδρομικών πρώτων αριθμών είναι: 2.391.951.273 για το οποίο έχουμε: $2^3 + 3^3 + 9^3 + 1^3 + 9^3 + 5^3 + 1^3 + 2^3 + 7^3 + 3^3 = 666 + 666 + 666$. Ας πάρουμε τον αριθμό 347.182.965, όπου εμφανίζονται οι μονοψήφιοι από μία φορά και ας τον διαιρέσουμε με το άθροισμα των ψηφίων του $3 + 4 + 7 + 1 + 8 + 2 + 9 + 6 + 5 = 45$. Προκύπτει πρώτος και παλινδρομικός!

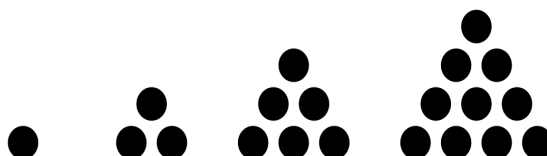
2.5 Συμμετρικοί και πρώτοι αριθμοί

Οι συμμετρικοί των εξής πρώτων αριθμών: 13, 17, 37, 79, 107, 113, 1.597 δηλαδή οι αριθμοί 31, 71, 73, 97, 701, 331, 7.951 είναι και αυτοί πρώτοι.

2.6 Πολύγωνοι αριθμοί

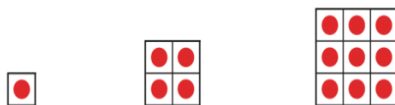
2.6.1 Τρίγωνοι αριθμοί

Ένας αριθμός λέγεται τρίγωνος, όταν με τις μονάδες του μπορούμε να φτιάξουμε ένα τρίγωνο. Αυτό προέκυψε επειδή στο 1 προσθέτουμε 2 και παίρνουμε το 3. Στο 3 προσθέτουμε 3 και παίρνουμε 6, στο 6 προσθέτουμε 4 και παίρνουμε 10, στο 10 προσθέτουμε 5 και παίρνουμε 15 κ.λπ. Ο τύπος του ν-στου τριγώνου είναι $n \times (n + 1) : 2$ ή και πιο παραστατικά $1 = 1$, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, κ.λπ.



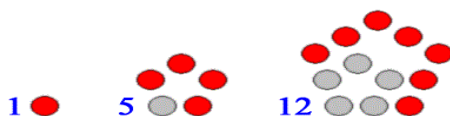
2.6.2 Τετράγωνοι αριθμοί

Ένας αριθμός λέγεται τετράγωνος όταν με τις μονάδες του μπορούμε να φτιάξουμε ένα τετράγωνο. Φυσικά κάθε τετράγωνος αριθμός είναι το τετράγωνο κάποιου άλλου: $4=2^2$, $9=3^2$ κ.λπ. Επιπλέον προκύπτουν και από το άθροισμα δύο διαδοχικών τριγώνων αριθμών π.χ.: $1+3=4$, $3+6=9$



2.6.3 Πεντάγωνοι αριθμοί

Ένας αριθμός λέγεται πεντάγωνος όταν με τις μονάδες του μπορούμε να φτιάξουμε ένα κανονικό πεντάγωνο. Υπάρχουν βέβαια και εξάγωνοι κ.λπ. Κατ' αρχήν με τον όρο πρώτες διαφορές εννοούμε τις διαφορές που προκύπτουν από την αφαίρεση δύο διαδοχικών πολύγωνων αριθμών. Π.χ. για τους τριγώνους έχουμε σαν πρώτες διαφορές $3 - 1 = 2$, $6 - 3 = 3$ κ.λπ. Δεύτερες διαφορές είναι οι διαφορές των δύο διαδοχικών πρώτων διαφορών π.χ. $3 - 2 = 1$, $4 - 3 = 1$ κ.λπ.



2.7 Τέλειοι αριθμοί

Ένας αριθμός λέγεται τέλειος όταν το άθροισμα των διαιρετών του (εκτός από τον ίδιο) μας δίνει τον ίδιο τον αριθμό. Π.χ. ο αριθμός 6 είναι τέλειος, διότι οι διαιρέτες του είναι οι 1,2,3,6 και έχουμε $1+2+3=6$. Όπως και ο αριθμός 28 είναι τέλειος, διότι οι διαιρέτες του είναι οι 1,2,4,7,14,28 και έχουμε $1+2+4+7+14=28$. Το περίεργο με αυτούς είναι ότι είναι άρτιοι, λήγουν πάντα σε 6 ή 28, είναι τριγώνιοι και το άθροισμα των αντίστροφων του συνόλου των διαιρετών τους είναι πάντοτε 2 ή τείνει στο 2! Τους τέλειους άρτιους αριθμούς που αναφέραμε πιο πάνω τους βλέπουμε στον παρακάτω πίνακα.

Α/Α	ν πρώτος	2^{n-1}	$2^n - 1$	Τέλειοι αριθμοί Κ
1	2	2	3	6
2	3	4	7	28
3	5	16	31	496
4	7	64	127	8.128
5	13	4.096	8.191	33.550.336
6	17	65.536	131.071	8.489.869.056
7	19	262.144	5.204.287	137.438.691.328
8	31	...	...	...
9	61	...	...	...

(Οι αριθμοί των γραμμών της τελευταίας στήλης προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων αριθμών των γραμμών των τρίτων και τέταρτων στηλών). Οι τιμές του ν: 11, 23 και 29 αποκλείονται, γιατί οι τρεις αριθμοί $(2^{11}-1)$, $(2^{23}-1)$, $(2^{29}-1)$ δεν είναι πρώτοι αφού κάθε ένας τους διαιρείται αντίστοιχα διά 23,47 και 233. **Οι τέλειοι αριθμοί λήγουν πάντα σε 6 ή 28.** Εκτός του 2 και του 3, όλοι οι πρώτοι αριθμοί ν της δεύτερης στήλης, είναι πολλαπλάσια του 6 συν ή πλην 1. Έτσι αν ο ν είναι πολλαπλάσιο του 6 μείον 1 τότε ο τέλειος αριθμός Κ τελειώνει σε 6. Ενώ αν ο ν είναι πολλαπλάσιο του 6 συν 1 τότε ο τέλειος αριθμός Κ λήγει σε 28. Επιπροσθέτως, αν κάθε έναν από τους τέλειους που πήραμε στην τελευταία στήλη του πίνακα, τον διαιρέσουμε διά 9 παίρνουμε υπόλοιπο 1. Τέλος ο αριθμός 6 ξεχωρίζει από τους άλλους τέλειους αριθμούς διότι οι διαιρέτες του εμπλέκονται και με άλλες ιδιότητες χαρακτηρίζοντάς τον έτσι υπέρ τέλειο αριθμό. Δηλαδή:

$$1 + 2 + 3 = 6 \text{ και } 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2 = 36 \text{ και } 1^2 \times 2^2 \times 3^2 = 6^2 = 36$$

$$1^3 \times 2^3 \times 3^3 = 6^3 = 216 \text{ και } 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 = 216$$

2.8 Φίλοι αριθμοί

Δύο αριθμοί λέγονται φίλοι όταν το άθροισμα των διαιρετών του πρώτου, δίνει τον δεύτερο και αντίστροφα. Δηλαδή όταν το άθροισμα των διαιρετών του δεύτερου αριθμού δίνει τον πρώτο. Π.χ. οι 220 και 284 είναι φίλοι γιατί:

Διαιρέτες του 220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110

Διαιρέτες του 284: 1, 2, 4, 71, 142

Άθροισμα διαιρετών του 220: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

Άθροισμα διαιρετών του 284: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

Μερικοί φίλοι αριθμοί είναι:

220	1.184	2.620	5.020
284	1.210	2.924	5.564
6.232	10.744	17.296	63.020
6.328	10.856	18.416	76.084
66.928	67.095	69.615	122.265
66.992	71.145	87.633	139.815
141.664	142.310	171.856	176.272
153.176	168.730	176.336	180.848

2.9 Ευτυχισμένος αριθμός

Ευτυχισμένος αριθμός λέγεται αυτός που παίρνοντας το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του, προκύπτει ένας άλλος αριθμός που και αυτού παίρνουμε το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του και επαναλαμβάνουμε συνέχεια το ίδιο μέχρι να προκύψει μονοψήφιος. Αν αυτός είναι ο 1 τότε ο αριθμός λέγεται ευτυχισμένος.

203: $2^2 + 0^2 + 3^2 = 4 + 0 + 9 = 13$

13: $1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$

10: $1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$

Άλλοι ευτυχισμένοι αριθμοί είναι βέβαια ο 1 αλλά και ο 7, 356, 78.999 κ.λπ.

3. Δυνάμεις αριθμών

3.1 Τετράγωνα αριθμών

Τα τετράγωνα των αριθμών χαρακτηρίζουν τους αριθμούς ως τετράγωνους.

A. Αρχικά βρίσκουμε διαδοχικούς αριθμούς που το άθροισμα των κύβων τους είναι τετράγωνο. Π.χ.

$$289^3 + 290^3 + \dots + 4.904^3 = (3 \times 577 \times 6.948)^2$$

$$3600^3 + 3.601^3 + \dots + 4.225^3 = (5 \times 313 \times 3.915)^2$$

B. Τώρα μερικά αθροίσματα τετραγώνων που και αυτά είναι τετράγωνα ή άθροισμα τετραγώνων.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 = 14^2$$

$$5^2 + 6^2 + 10^2 + 12^2 = 4^2 + 17^2 = 7^2 + 16^2$$

Γ. Περίεργη είναι και η εμφάνιση της διαφοράς των τετραγώνων δύο διαδοχικών αριθμών που ισούται με το άθροισμα των αριθμών αυτών:

$2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 (= 2 + 1)$
$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 (= 3 + 2)$
$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 (= 4 + 3)$
$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 (= 5 + 4)$
.....

Δ. Στη σχέση $4^2=16$ ας βάλουμε πριν το 4 τριάρια και ανάμεσα στο 16 ας βάλουμε το 15, μετά το 1.155 κ.λπ.:

$4^2 = 16$
$34^2 = 1.156$

$334^2 = 111.556$
$3.334^2 = 11.115.556$
.....

Ε. Ας αναλύσουμε τώρα τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, 4, ...:

$1^2 = 1 = 0 \times 2 + 1$
$2^2 = 4 = 1 \times 3 + 1$
$3^2 = 9 = 2 \times 4 + 1$
$4^2 = 16 = 3 \times 5 + 1$
$5^2 = 25 = 4 \times 6 + 1$
.....

Προκύπτουν από τη σχέση: $v^2 = (v-1)(v+1) + 1$

Ζ. Από τα παραπάνω τετράγωνα των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, 4, ... , θα αφαιρέσουμε από το τετράγωνο κάθε αριθμού γούμενου του επί τον τέλεσμα θα είναι πά-

$1^2 = 1$ και $0 \times 2 = 0$ που έχουμε: $1 - 0 = 1$
$2^2 = 4$ και $1 \times 3 = 3$ που έχουμε $4 - 3 = 1$
$3^2 = 9$ και $2 \times 4 = 8$ που έχουμε $9 - 8 = 1$
$4^2 = 16$ και $3 \times 5 = 15$ που έχουμε $16 - 15 = 1$
$5^2 = 25$ και $4 \times 6 = 24$ που έχουμε $25 - 24 = 1$
.....

το γινόμενο του προηγούμενου του. Το απο-
ντα 1. Άρα έχουμε:

Η. Υπάρχει αριθμός με ίδια ψηφία που το τετράγωνό του είναι τετραψήφιος και έχει τα δύο πρώτα ψηφία ίδια, όπως και τα δύο τελευταία: $88^2 = 7.744$. Τα τετράγωνα των παρακάτω αριθμών μας δίνουν ως αποτέλεσμα έναν αριθμό στον οποίο εμφανίζονται όλα τα ψηφία από 1 έως 9 και μια φορά.

$11.826^2 = 139.854.276$	$19.377^2 = 375.468.129$
$12.543^2 = 157.326.849$	$19.629^2 = 385.297.641$
$15.681^2 = 245.893.761$	$23.178^2 = 537.219.684$
$18.072^2 = 326.597.184$	$29.034^2 = 842.973.156$

Υπάρχουν συνολικά 87 αριθμοί που στο τετράγωνό τους εμφανίζονται όλοι οι μονοψήφιοι από το 0 έως το 9. Ο μικρότερος είναι ο $1.026.753.849 (=32.043^2)$ και ο μεγαλύτερος είναι ο $9.814.072.356 (=99.066^2)$. Το άθροισμα των αριθμών 1, 5, 7, 9, ισούται με το άθροισμα των αριθμών 2, 4, 6, 10, αλλά ισούται και το άθροισμα των τετραγώνων τους. Δηλαδή:

$$1 + 5 + 7 + 9 = 2 + 4 + 6 + 10 = 22$$

$$1^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 10^2 = 156$$

Το ίδιο ισχύει και με τους αριθμούς 1, 6, 8 και 2, 4, 9. Δηλαδή:

$$1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 15$$

$$1^2 + 6^2 + 8^2 = 2^2 + 4^2 + 9^2 = 101$$

Οι αριθμοί 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, και 14 είναι διαδοχικοί αριθμοί. Από τα τετράγωνά τους προκύπτει ότι: $7^2 + 10^2 + 12^2 + 13^2 = 8^2 + 9^2 + 11^2 + 14^2 = 462$

$$\text{Το ίδιο και με τους } 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12: 5^2 + 8^2 + 10^2 + 11^2 = 6^2 + 7^2 + 9^2 + 12^2 = 310$$

$$\text{Όπως και με τους } 10, 11, 12, 13 \text{ και } 14. 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$

Αν από το τετράγωνο του 5 αφαιρέσουμε διαδοχικά τα τετράγωνα των αριθμών 0, 1, 2, 3, 4,

5, προκύπτει ότι:

$$5^2 - 0^2 = 25 - 0 = 25 = 5 \times 5, \quad 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4 \times 4$$

$$5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24 = 6 \times 4, \quad 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3 \times 3$$

$$5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21 = 7 \times 3, \quad 5^2 - 5^2 = 25 - 25 = 0 = 10 \times 0$$

3.2 Παράξενα τετράγωνα

Πολύ εντυπωσιακές είναι κάποιες περίεργες συνθέσεις με το τετράγωνο του αθροίσματος δύο αριθμών, που στο αποτέλεσμα εμφανίζονται οι ίδιοι αριθμοί. $(0+1)^2=01$, $(20+25)^2=2.025$

$$(30+25)^2=3.025, \quad (98+01)^2=9.801, \quad (6.048+1.729)^2=60.481.729$$

$$\text{Με το άθροισμα των τετραγώνων δύο αριθμών: } 12^2+33^2=1.233, \quad 990^2+100^2=990.100, \\ 9.412^2+2.353^2=94.122.353, \quad 74.160^2+43.776^2=7.416.043.776$$

$$\text{Με τη διαφορά των τετραγώνων των δύο αριθμών: } 8^2-4^2=48, \quad 768^2-416^2=416.768, \\ 6.668^2-3.334^2=33.346.668.$$

Μια πολύ ωραία διαπίστωση είναι ότι, υπάρχουν τριψηφίοι, τετραψηφίοι και πενταψηφίοι αριθμοί οι οποίοι αν πολλαπλασιαστούν διαδοχικά με τους αρχικούς φυσικούς αριθμούς (1, 2, 3, 4, 5, ...) και το αποτέλεσμα το υψώσουμε στο τετράγωνο προκύπτουν εξαγόμενα που αν τα χωρίσουμε στη μέση το άθροισμα των δύο μισών είναι πάλι ένα τετράγωνο ενός μοναδικού αριθμού που έχει πολλαπλασιαστεί και αυτός διαδοχικά επί 1,2,3,4,5... Ας δούμε πχ με τον τριψήφιο **155**.

$(1 \times 155)^2 = 024.025$	προσθέτουμε $024 + 025 = 49 = 1 \times 49 = (1 \times 7)^2$
$(2 \times 155)^2 = 096.100$	προσθέτουμε $096 + 100 = 196 = 4 \times 49 = (2 \times 7)^2$
$(3 \times 155)^2 = 216.225$	προσθέτουμε $216 + 225 = 441 = 9 \times 49 = (3 \times 7)^2$
$(4 \times 155)^2 = 384.400$	προσθέτουμε $384 + 400 = 784 = 16 \times 49 = (4 \times 7)^2$
$(5 \times 155)^2 = 600.625$	προσθέτουμε $600 + 625 = 1.225 = 25 \times 49 = (5 \times 7)^2$
$(6 \times 155)^2 = 864.900$	προσθέτουμε $864 + 900 = 1.764 = 36 \times 49 = (6 \times 7)^2$

3.3 Έξυπνη τοποθέτηση

Τοποθετούμε στα παρακάτω κελιά τους αριθμούς από 1 έως 15. Αν στον αριθμό κάθε κελιού προστεθεί ο προηγούμενος του ή ο επόμενός του προκύπτει τετράγωνος αριθμός. Π.χ. του αριθμού 12 προηγούμενος είναι ο 4. Άρα $4+12=16=4^2$. Ο επόμενος του 12 είναι ο 13. Άρα $12+13=25=5^2$.

9	7	2	14	11	5	4	12	13	3	6	10	15	1	8
---	---	---	----	----	---	---	----	----	---	---	----	----	---	---

3.4 Πυθαγόρειες τιμές

Υπάρχουν αρκετές τριάδες ακέραιων για τις οποίες ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα. Δηλαδή αν αυτές αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, τότε το τετράγωνο της μιας εξ αυτών ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο. Π.χ.:

$$\text{Για την τριάδα } 3, 4, 5, \text{ έχουμε: } 5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\text{Για την τριάδα } 5, 12, 13 \text{ έχουμε } 13^2 = 12^2 + 5^2$$

Άλλες πυθαγόρειες τιμές είναι οι:

$$(7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85), (15, 8, 17), (21, 20, 23), (33, 56, 65), \text{ κ.α.}$$

3.5 Ιδιάζοντες αριθμοί

Ένας 2ν-ψηφιος αριθμός λέγεται ιδιάζων, αν είναι τέλειο τετράγωνο και τα δύο μισά του (δηλαδή οι αριθμοί που σχηματίζονται από τα ν πρώτα ψηφία του, καθώς και από τα τελευταία ν ψηφία του) είναι επίσης τέλεια τετράγωνα. Υπάρχει ένας τέτοιος διψήφιος, ένας τετραψηφιος και ένας εξαψηφιος οι 49, 1.681, 256.036. Πράγματι: $49 = 7^2$

$$\text{Τον κόβουμε στη μέση και έχουμε: } 4 = 2^2 \text{ και } 9 = 3^2$$

$$\text{Επίσης } 1.681 = 41^2. \text{ Για τα δύο μισά του έχουμε: } 16 = 4^2 \text{ και } 81 = 9^2$$

$$\text{Ακόμη: } 256.036 = 506^2. \text{ Για τα δύο μισά έχουμε: } 256 = 16^2 \text{ και } 036 = 6^2$$

4. Οι κύβοι των αριθμών

4.1 Ιδιότητες κύβων

➤ Ο κύβος κάθε ακέραιου αριθμού λήγει στο ίδιο ψηφίο με αυτό που λήγει και ο κύβος των μονάδων του. Π.χ.:

$$23^3 = 12.167 \text{ (ψηφίο μονάδων του 23 είναι ο 3, άρα } 3^3 = 27)$$

$$18^3 = 5.832 \text{ (ψηφίο μονάδων του 18 είναι το 8, άρα } 8^3 = 512)$$

$$45^3 = 91.125 \text{ (ψηφίο μονάδων του 45 είναι το 5, άρα } 5^3 = 125)$$

$$21^3 = 9.261 \text{ (ψηφίο μονάδων του 21 είναι το 1, άρα } 1^3 = 1)$$

➤ Οι κύβοι των αριθμών που λήγουν σε 1, 4, 5, 6, και 9 λήγουν στο ίδιο ψηφίο. Οι κύβοι των αριθμών που λήγουν σε 2, 3, 7, 8 λήγουν αντίστοιχα σε 8, 7, 3, 2 (αντίστροφη ροή). Σε αυτήν την περίπτωση ένας αριθμός και ο κύβος του λήγουν σε δύο ψηφία με άθροισμα 10. Π.χ.:

$$7^3 = 343 \quad \text{όπου, } 7 + 3 = 10$$

$$8^3 = 512 \quad \text{όπου, } 8 + 2 = 10$$

$$3^3 = 27 \quad \text{όπου, } 3 + 7 = 10$$

$$52^3 = 140.608 \quad \text{όπου, } 2 + 8 = 10$$

➤ Κάθε κύβος ακέραιου αριθμού είναι πολλαπλάσιο του 9 ή πολλαπλάσιο του 9 αυξημένο κατά 1 Π.χ.:

$$52^3 = 140.608 = 140.607 + 1 = 15.623 \times 9 + 1 = \text{πολλαπλάσιο του } 9 + 1$$

$$63^3 = 250.047 = 27.783 \times 9 = \text{πολλαπλάσιο του } 9$$

$$94^3 = 830.584 = 830.583 + 1 = 92.287 \times 9 + 1 = \text{πολλαπλάσιο του } 9 + 1$$

➤ Δημιουργούμε με τους πρώτους αριθμούς ομάδες (αυξανόμενες κατά έναν αριθμό) στη φυσική τους σειρά και σε κάθε ομάδα δίνουμε αύξοντα αριθμό το πλήθος των πρώτων αριθμών που περιέχει. Δηλαδή:

Ομάδα 1^η: 1

Ομάδα 2^η: 3, 5

Ομάδα 3^η: 7, 9, 11

Ομάδα 4^η: 13, 15, 17, 19

Παρατηρούμε τα εξής:

➤ Το άθροισμα των αριθμών κάθε ομάδας ισούται με τον αριθμό που δείχνει τον αύξοντα αριθμό της ομάδας. Π.χ.:

$$7 + 9 + 11 = 3^3 \text{ (Τρίτη ομάδα)}$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3 \text{ (τέταρτη ομάδα)}$$

➤ Αν προσθέσουμε τους αύξοντες αριθμούς κάποιων διαδοχικών ομάδων (αρχίζοντας από την πρώτη) παρατηρούμε ότι το άθροισμα αυτό αν υψωθεί στο τετράγωνο, ισούται με το άθροισμα των κύβων αυξόντων αριθμών.

Π.χ.1. Α/Α ομάδων: $1+2+3+4 = 10$ άρα $10^2 = 100$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$

Π.χ.2. Α/Α ομάδων: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ άρα $21^2 = 441$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441$

4.2 Περίεργοι κύβοι

Αριθμητική πρόοδος λέγεται μία ακολουθία πραγματικών αριθμών όπου κάθε αριθμός με τον προηγούμενό του ή τον επόμενό του έχουν σταθερή διαφορά που λέγεται διαφορά της αριθμητικής προόδου και συμβολίζεται με ω . Οι κύβοι των ακέραιων 20, 1.155, αναλύονται σε άθροισμα 4, 6, κύβων ακέραιων αριθμών που αποτελούν αριθμητική πρόοδο. Άρα:

$20^3 = 11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3$. Οι αριθμοί 11, 12, 13, 14 είναι 4 και αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega=1$.

$1.115^3 = 435^3 + 506^3 + 577^3 + 648^3 + 719^3 + 790^3$. Οι αριθμοί 435, 506, 577, 648, 719 και 790 είναι 6 και αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega=71$. Υπάρχουν κάποιοι αριθμοί που ο κύβος τους έχει άθροισμα ψηφίων τον ίδιο τον αριθμό. Δηλαδή:

Αριθμός: v	1	8	17	18	26	27
Κύβος: v^3	1	$8^3 = 512$	$17^3 = 4.193$	$18^3 = 5.832$	$26^3 = 17.576$	$27^3 = 19.683$
Άθροισμα ψηφίων του κύβου	1	$5+1+2=8$	$4+1+9+3=17$	$5+8+3+2=18$	$1+7+5+7+6=26$	$1+9+6+8+3=27$

Υπάρχουν κάποιοι αριθμοί που εκφράζονται ως άθροισμα κύβων των ίδιων των ψηφίων τους ή ως άθροισμα των τετραγώνων των κύβων των ψηφίων τους. Δηλαδή:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27$$

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3 = 27 + 343 + 0$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3 = 27 + 343 + 1$$

$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3 = 64 + 0 + 343$$

$$548.834 = (5^3)^2 + (4^3)^2 + (8^3)^2 + (3^3)^2 + (4^3)^2 = 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6 = 15.625 + 4.096 + 262.144 + 262.144 + 729 + 4.096.$$

4.3 Και άλλοι παράξενοι κύβοι

Όπως στα τετράγωνα των αριθμών, υπάρχουν και στους κύβους κάποιες απρόσμενες συνθέσεις με το άθροισμα τους που στο αποτέλεσμα εμφανίζονται οι ίδιοι αριθμοί.

$$22^3 + 18^3 + 59^3 = 221.859, \quad 166^3 + 500^3 + 333^3 = 166.500.333$$

Όμως ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που εκφράζεται σαν άθροισμα δύο κύβων με τρεις διαφορετικούς τρόπους είναι ο εξής: $87.539.319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$

Σαν άθροισμα δύο κύβων αλλά με δύο διαφορετικούς τρόπους εκφράζεται ο αριθμός 1.729 που είναι ο μικρότερος ακέραιος με αυτήν την ιδιότητα. $1.729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$

4.4 Εντυπωσιακές σχέσεις μεταξύ τετραγώνων και κύβων

$1^2 = 1^2 = 1 = 1^3$
$(1+2)^2 = 3^2 = 9 = 1^3 + 2^3$
$(1+2+3)^2 = 6^2 = 36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$

Ακόμα κάποιες εντυπωσιακές σχέσεις:

Ισχύει: $1 + 7 + 8 + 14 = 2 + 4 + 11 + 13$

αλλά και: $1^2 + 7^2 + 8^2 + 14^2 = 2^2 + 4^2 + 11^2 + 13^2$

αλλά και: $1^3 + 7^3 + 8^3 + 14^3 = 2^3 + 4^3 + 11^3 + 13^3$

Οι ακόλουθες προσθέσεις όπου υπάρχει διαδοχή ακέραιων αριθμών εκατέρωθεν του ίσο και το ίδιο επαναλαμβάνεται με το άθροισμα των τετραγώνων τους ή ακόμα και με το άθροισμα των κύβων τους. $1 + 2 + 4 + 7 = 3 + 5 + 6$

$$1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2$$

Και:

$$1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 11 + 13 + 14 = 3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15$$

$$1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 11^2 + 13^2 + 14^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2 + 9^2 + 10^2 + 12^2 + 15^2$$

$$1^3 + 2^3 + 4^3 + 7^3 + 8^3 + 11^3 + 13^3 + 14^3 = 3^3 + 5^3 + 6^3 + 9^3 + 10^3 + 12^3 + 15^3$$

Επιπλέον, σημειώνουμε και τους παρακάτω αριθμούς που το άθροισμα των ψηφίων τους αν υψωθεί στο κύβο, μας δίνει τον ίδιο αριθμό.

$$512 = (5 + 1 + 2)^3 = 8^3$$

$$4.913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3 = 17^3$$

$$17.576 = (1 + 7 + 5 + 7 + 6)^3 = 26^3$$

Ακόμα δύο εντυπωσιακοί αριθμοί είναι ο 289 και ο 578, όπου το άθροισμα των κύβων τους είναι τετράγωνο και το άθροισμα των τετραγώνων των τετραγώνων τους, είναι κύβος.

$$289^3 + 578^3 = 14.739^2, \quad (289^2)^2 + (578^2)^2 = 4.913$$

5. Αλλόκοτες πράξεις

5.1 Εξαίσια αποτελέσματα από τη χρήση όλων των ψηφίων από μία φορά

➤ Χρησιμοποιώντας από μία φορά όλα τα ψηφία βρίσκουμε δύο κλάσματα που έχουν άθροισμα τη μονάδα.

$$\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$$

➤ Χρησιμοποιώντας όλα τα ψηφία από μια φορά εμφανίζονται τέσσερις αριθμοί με άθροισμα 100: $15 + 78 + \sqrt[2]{9} + \sqrt[3]{64} = (15 + 78 + 3 + 4) = 100$

➤ Μια καταπληκτική περίπτωση: Χρησιμοποιώντας όλα τα ψηφία από μία φορά, κατασκευάζουμε δεκαψηφίους που διαιρούνται ακριβώς από όλους τους αριθμούς μεταξύ του 1 και 18.

$$2.438.195.760, \quad 3.785.942.160, \quad 4.753.869.120, \quad 4.876.391.520$$

➤ Χρησιμοποιούμε με διάφορους συνδυασμούς όλα τα ψηφία από μία φορά, έτσι ώστε να προκύπτει πάντα το 100.

$$100 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9$$

$$100 = 0 + 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 5 + 6 + 7 \times 8 + 9$$

$$100 = 0 + 123 - 45 - 67 + 89$$

$$100 = 0 + 1 + 2 - 3 \times 4 + 5 \times 6 + 7 + 8 \times 9$$

$$100 = 0 + (56 + 34 + 8 + 2) \times (9 - 7 - 1)$$

$$100 = 0 + 62 + 38 + [(1 + 7) \times (9 - 5 - 4)]$$

$$100 = 9 - 8 + 76 - 5 + 4 + 3 + 21 + 0$$

$$100 = 9 - 8 + 76 - 54 - 32 + 1 + 0$$

$$100 = 1 \times 2 \times 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 + 0$$

$$100 = 98 - 7 + 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 + 0$$

$$100 = 98 - 7 - 6 - 5 - 4 + 3 + 21 + 0$$

$$100 = 98 - 7 - 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0$$

Αλλά και για το 1.000: $1.000 = 0 + 291 + 678 + 35 - 4$

➤ Ας προσέξουμε τώρα τις παρακάτω πράξεις. Θα παραξενευτούμε διαπιστώνοντας ότι έχουν χρησιμοποιηθεί όλα τα ψηφία από μία φορά. $849 + 753 = 1.602$, $1.089 - 432 = 657$

$$7.394 = 28.156, \quad 27.504 : 9.168 = 3$$

➤ Τυχαίνει, αρκετά σπάνια βέβαια, σε διάφορους πολλαπλασιασμούς, όπως οι επόμενοι, εκατέρωθεν του ίσον να εμφανίζονται όλα τα ψηφία από μια φορά.

$$159 \times 48 = 7.632, \quad 138 \times 42 = 5.769, \quad 27 \times 198 = 5.346, \quad 1.738 \times 4 = 6.952$$

$$1.9634 = 7.862, \quad 28 \times 157 = 4.396, \quad 18 \times 297 = 5.346$$

➤ Προσέξτε τις αναλύσεις σε γινόμενο παραγόντων των παρακάτω αριθμών :

$$291.548.736 = 8 \times 92 \times 531 \times 746$$

$$124.367.958 = 627 \times 198.354 = 9 \times 26 \times 531.487$$

Και στις δύο αναλύσεις αριστερά και δεξιά του ίσον εμφανίζονται όλα τα ψηφία από μία φορά. Όμως το ίδιο συμβαίνει και με την εξής ανάλυση ενός αριθμού σε δυνάμεις:

$$214.358.976 = (3+6)^2 + (4+7)^8 + (5+9)^1$$

➤ Με έκπληξη παρατηρούμε ότι τα ψηφία των παρακάτω αριθμών, μαζί με τα ψηφία των διπλάσιων και τριπλασίων τους, εμφανίζονται όλα από μία φορά.

Αριθμός	Διπλάσιος	Τριπλάσιος
192	384	576
219	438	657
273	546	819
327	654	981

5.2 Οι θαυμαστοί πίνακες

Δημιουργώντας πίνακες στους οποίους υπάρχουν οι αριθμοί από το 1 έως το 90 ή το 100, αποκαλύπτονται, απίστευτα πράγματα. Ξεκινώντας με τον επόμενο πίνακα όπου έχουμε τοποθετήσει τους αριθμούς από το 1 έως το 100 και όπως βλέπουμε αποτελείται από 10 στήλες και 10 γραμμές.

πολλαπλάσια του 11

πολλαπλάσια του 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Παρατηρούμε ότι:

1. Μια διαγώνιος μας δίνει τα πολλαπλάσια του 9. Μια άλλη μας δίνει τα πολλαπλάσια του 11.
2. Για οποιοδήποτε παραλληλόγραμμα κελιών εντός του πίνακα, το άθροισμα των διαγωνίως απέναντι στις άκρες του, αριθμών των κελιών είναι ίσο.

72	73	74	75
82	83	84	85
92	93	94	95

Έχουμε: $72 + 95 = 167 = 75 + 92$.

3. Για οποιοδήποτε τετράγωνο από κελιά εντός του πίνακα, το άθροισμα των αριθμών γύρω από τον κεντρικό αριθμό, ισούται με τον εννεαπλάσιό του.

47	48	49
57	58	59
67	68	69

Κεντρικός αριθμός σε αυτό είναι ο 58.

Άθροισμα αριθμών γύρω από τον 58: $47+48+49+59+69+68+67+57 = 522$, $522 = 9 \times 58$

4. Για οποιοδήποτε τετράγωνο κελιών 3 3 εντός του πίνακα, το άθροισμα οποιασδήποτε κεντρικής γραμμής του, ή κεντρικής στήλης του ή διαγώνιας του, είναι τριπλάσιο του αριθμού που βρίσκεται στο κέντρο του.

22	23	24
32	33	34
42	43	44

4	9	2	15
3	5	7	15
8	1	6	15

θα έχουμε: $22+33+44 = 99 = 3 \times 33$
 $23+33+44 = 99 = 3 \times 33$
 $42+33+24 = 99 = 3 \times 33$
 $32+33+34 = 99 = 3 \times 33$

5.3 Το τετράγωνο του Euler

Ο παρακάτω πίνακας λέγεται και τετράγωνο του Euler διότι το επινόησε ο μεγάλος αυτός μαθηματικός. Είναι ένας πίνακας 8 στηλών και 8 γραμμών, όπου έχουν τοποθετηθεί κατάλληλα οι φυσικοί αριθμοί από το 1 έως το 64.

		ΣΤΗΛΕΣ							
		1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η
ΓΡΑΜΜΕΣ	1η	1	48	31	50	33	16	63	18
	2η	30	51	46	3	62	19	14	35
	3η	47	2	49	32	15	34	17	64
	4η	52	29	4	45	20	61	36	13
	5η	5	44	25	56	9	40	21	60
	6η	28	53	8	41	24	57	12	37
	7η	43	6	55	26	39	10	59	22
	8η	54	27	42	7	58	23	38	11

Σε αυτό τον πίνακα συμβαίνουν τα εξής:

1. Κάθε γραμμή και κάθε στήλη έχει άθροισμα $260 = 2 \times 130$.
2. Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε τετράγωνο κελιών 2×2 που να περιορίζεται ανάμεσα στις στήλες 1 και 2 ή 4 και 5 και 6 ή 7 και 8 ή μεταξύ των γραμμών 5 και 6, τότε το άθροισμα των αριθμών στα κελιά αυτά είναι πάντοτε 130. Τα επόμενα τετράγωνα κελιών περιορίζονται το πρώτο από τις στήλες 7 και 8 και το δεύτερο από τις γραμμές 5 και 6.
4. Αν από το τετράγωνο του Euler αφαιρέσουμε την 1η και την 8η γραμμή καθώς και την 1η την 8η στήλη, προκύπτει νέο τετράγωνο στο οποίο το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα γωνιακά κελιά είναι πάλι 130. Π.χ. $51 + 14 + 59 + 6 = 130$.
5. Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών κάθε γραμμής ή κάθε στήλης είναι ίσο με το άθροισμα των επομένων τεσσάρων. Το άθροισμα αυτό είναι πάντα 130.

14	35
17	64

Άθροισμα αριθμών
στα κελιά: $14+35+17+64=130$

Ας πάρουμε για παράδειγμα την 4η γραμμή: Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών είναι $52+29+4+45 = 130$ και των τεσσάρων επόμενων αριθμών είναι $20+61+36+13 = 130$.

44	25
53	8

Άθροισμα αριθμών
στα κελιά: $44+25+53+8=130$

Ας πάρουμε για παράδειγμα την 3η γραμμή: Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών είναι $47+2+49+32=130$ και των τεσσάρων επόμενων αριθμών είναι $15+34+17+64=130$.

5.4 Μαγικά στοιχήματα

Με επιδέξια τοποθέτηση των φυσικών αριθμών $1,2,3,\dots$ μπορούμε να σχηματίσουμε διάφορα γεωμετρικά σχήματα που έχουν πράγματι παράξενες ιδιότητες, για αυτό και λέγονται «μαγικά». Υπάρχουν μαγικά τρίγωνα, τετράγωνα, πεντάγωνα, εξάγωνα, κύκλοι, κύκλοι, κύβοι, αστέρια κ.λπ. Η έρευνά τους ξεκίνησε πρώτα από τα μαγικά τετράγωνα για αυτό και αυτά είναι τα πιο συνηθισμένα.

5.5 Μαγικά τετράγωνα

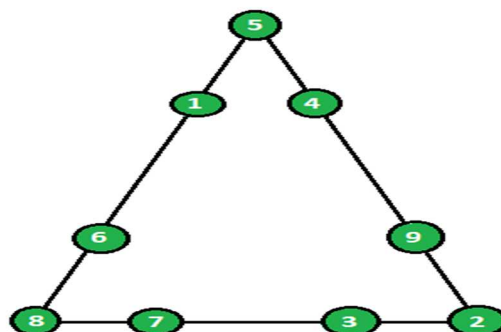
Μαγικό τετράγωνο σχηματίζεται όταν έχουμε αριθμούς τοποθετημένους σε σχήμα τετραγώνου, έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών κάθε οριζόντιας και κάθετης στήλης, αλλά και κάθε διαγώνιας να είναι το ίδιο. Τα διακρίνουμε σε τρίτης, τέταρτης, πέμπτης κ.λπ. τάξης όταν ο αριθμός των γραμμών και στηλών τους είναι 3,4,5 κ.λπ. Πρώτο παράδειγμα μαγικού τετραγώνου είναι το εξής: Χρησιμοποιούμε τους αριθμούς από το 1 έως το 25 από μία φορά και το άθροισμα των αριθμών οποιασδήποτε γραμμής, στήλης, ή διαγώνιας, είναι πάντοτε 65.

Π.χ. Αν προσθέσουμε τα νούμερα στην διαγώνια στήλη το άθροισμα είναι $11+12+13+14+15=65$, το άθροισμα των αριθμών της 2ης στήλης είναι $24+12+5+18+6=65$.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

5.6 Μαγικά τρίγωνα

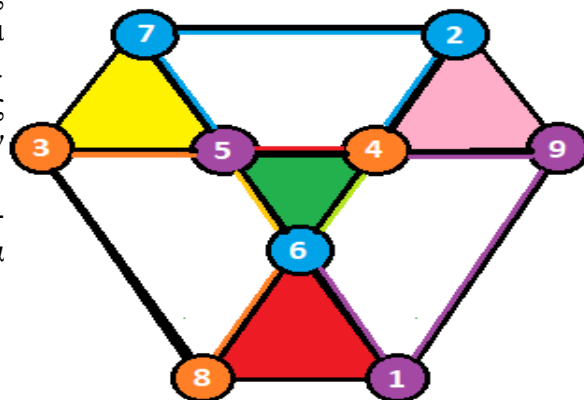
Το παρατιθέμενο τρίγωνο σχηματίζεται από τους μονοψήφιους αριθμούς. Το άθροισμα των αριθμών κάθε πλευράς του είναι 20 και το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών αυτών είναι σε κάθε πλευρά 126. Για άθροισμα της αριστερής πλευράς $5+1+6+8=20$ και το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών ισούται με $25+1+36+64=126$.



5.7 Τα μαγικά τετράγωνα του Einstein

Τα είχε εφεύρει ο διάσημος νομπελίστας φυσικός Einstein. Είναι ένα σχήμα με εννέα κύκλους οι οποίοι είναι κορυφές 4 μικρών και 3 μεγάλων ισόπλευρων τριγώνων. Τοποθετούμε τους μονοψήφιους (εκτός του 0) μέσα στους κύκλους έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών των κορυφών κάθε τετραγώνου να είναι 15:

Π.χ. για το κίτρινο τρίγωνο το άθροισμα των κορυφών είναι $3+5+7=15$, για το ροζ τρίγωνο $2+9+4=15$ και για το μπλε $7+2+6=15$.



5.8 Μαγικά πεντάγωνα

Εξαιρετικό παράδειγμα μαγικού Πενταγώνου είναι το παρατιθέμενο. Ουσιαστικά πρόκειται για τέσσερα ομόκεντρα πεντάγωνα, τα οποία λειτουργούν και ανεξάρτητα και όλα μαζί. Για το επόμενο παράδειγμα τοποθετούμε τους αριθμούς από το 1-80 έτσι ώστε:

1. Κάθε πλευρά του εξωτερικού πενταγώνου να έχει άθροισμα 254.

2. Το αμέσως επόμενο του εξωτερικού πενταγώνου να έχει άθροισμα αριθμών κάθε πλευράς 248.
3. Το τρίτο πεντάγωνο, ξεκινώντας από το εξωτερικό να έχει άθροισμα αριθμών κάθε πλευράς του 122
4. Στο κεντρικό πεντάγωνο να έχουν τοποθετηθεί οι διαδοχικοί αριθμοί 56,57,58,59,60.
5. Το άθροισμα των αριθμών των αντίστοιχων κορυφών όλων των πενταγώνων να είναι 92.

5.9 Μαγικοί αστέρες

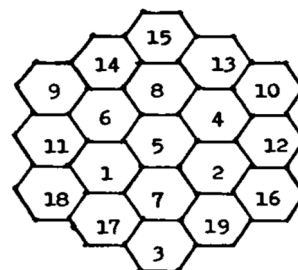
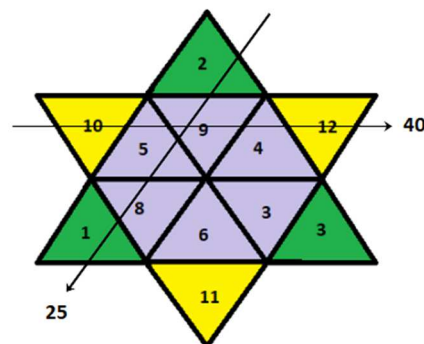
Παράδειγμα μαγικού αστέρα είναι το επόμενο όπου στο κάθε τρίγωνο έχουμε τοποθετήσει αριθμούς από το 1 έως το 12.

1. Το άθροισμα των εξωτερικών αριθμών ισούται με το άθροισμα των εσωτερικών αριθμών δηλαδή:
 $2+12+3+11+1+10=39$, $9+4+7+6+8+5=39$

2. Το άθροισμα των αριθμών κάθε πλευράς του κίτρινου τριγώνου του είναι 25:

$$10+5+9+4+12=40, 10+5+8+6+11=40, 12+4+7+6+11=40$$

3. Το άθροισμα των αριθμών κάθε πλευράς του πράσινου τριγώνου του είναι 25: $2+9+5+8+1=25$, $2+9+4+7+3=25$, $1+8+6+7+3=25$.



5.10 Μαγικές κυψέλες

Στα παρακάτω κελία από μία κυψέλη, τοποθετούμε τους αριθμούς από το 1 έως το 19 και παρατηρούμε ότι τα κατακόρυφα αθροίσματα είναι όλα 38. Πράγματι:

- $9+11+18=38$
- $14+6+1+17=38$
- $15+8+5+7+3=38$
- $13+4+2+19=38$
- $10+12+16=38$

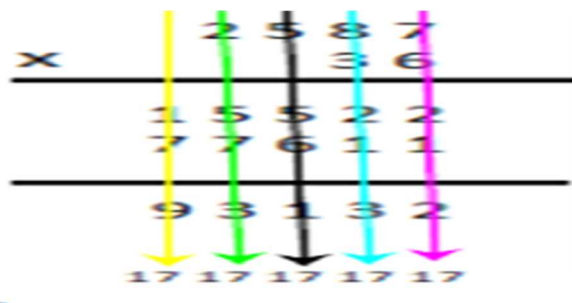
5.11 Αρμονικές διαπλοκές

Οι επόμενες σχέσεις που θα αναλύσουμε μας εντυπωσιάζουν με την απίθανη δομή τους. Ξεκινώντας με μία απρόσμενη σχέση η οποία έχει απίστευτη αρμονία μεταξύ των αριθμών:

$$4^4+3^3+8^8+5^5+7^7+9^9+0^0+8^8+8^8=438.579.088$$

5.12 Απροσδόκητα αποτελέσματα

Ας πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς 36 και 2.587 με την κλασική μέθοδο:



Μας εντυπωσιάζει ότι τα κατακόρυφα αθροίσματα είναι όλα 17.

5.13 Αρμονικές σχέσεις

Ισχύουν οι εξής ισότητες: $2^6=2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0$, $2.222=2^1+2^2+2^3+2^5+2^7+2^{11}$
 $1.000=2^3+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9$. Αλλά και οι παρελκόμενες ισότητες από την αρχική:
 $-1 \times 4 + 2 \times 6 - 3 \times 4 + 4 \times 1 = 0$

$$-1^2 \times 4 + 2^2 \times 6 - 3^2 \times 4 + 4^2 \times 1 = 0$$

$$-1^3 \times 4 + 2^3 \times 6 - 3^3 \times 4 + 4^3 \times 1 = 0$$

5.14 Εντυπωσιακό «κτίσιμο»

Προσθέτουμε τις δύο σειρές των συμμετρικών και με αυξανόμενα διαδοχικώς ψηφία, αριθμών, αλλά με διαφορετικό κτίσιμο όπως φαίνεται πιο κάτω. Το τι προκύπτει από την πρόσθεση, είναι εντυπωσιακό.

100.000.000	000.000.001
120.000.000	000.000.021
123.000.000	000.000.321
123.400.000	000.004.321
123.450.000	000.054.321
123.456.000	000.654.321
123.456.700	007.654.321
123.456.780	087.654.321
123.456.789	987.654.321
1.083.676.269	1.083.676.269

5.15 Περίεργες συμπεριφορές δυνάμεων αριθμών

Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε δύναμη των αριθμών 76, 376, 5, 2, 625, 90.625 λήγει στον ίδιο αριθμό. Π.χ.:

- $76^3 = 438.976$
- $625^3 = 244.140.625$
- $90.625^2 = 8.212.890.625$
- $25^6 = 244.140.625$
- $376^3 = 53.157.376$
- $5^8 = 390.625$

5.16 Η 13^η δύναμη αριθμού

Αν υπολογίσουμε την 13^η δύναμη ενός αριθμού, το αποτέλεσμα θα έχει τελευταίο ψηφίο τον ίδιο αριθμό. Π.χ.:

- $5^{13} = 1.220.703.125$
- $4^{13} = 67.108.864$
- $3^{13} = 1.594.323$

5.17 Αλλεπάλληλα ριζικά

Μια παράξενη έκφραση με ριζικά του 2: $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}$

Αλλά και του 6: $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}} = 3$

5.18 Νομοτελειακοί πολλαπλασιασμοί

Ξεκινάμε από την ισότητα $6 \times 7 = 42$ και διαδοχικά παραθέτουμε αριστερά του 6 και του 7 συνεχώς εξάρια, δεξιά του 4 συνεχώς τεσσάρια, αριστερά του 2 συνεχώς δυάρια. Το τι προκύπτει είναι εντυπωσιακό:

6	×	7 =	42
66	×	67 =	4.422
666	×	667 =	444.222
6.666	×	6667 =	44.442.222
66.666	×	66667 =	4.444.422.222

5.19 Ομάδες ακεραίων

Πολλαπλασιάζουμε οποιουδήποτε τέσσερις διαδοχικούς ακεραίους που κανείς τους δεν είναι πολλαπλάσιο του 5. Η διαπίστωσή είναι ότι όλα τα γινόμενα λήγουν σε 024.

$(-14) \times (-13) \times (-12) \times (-11) =$	24.024
$1 \times 2 \times 3 \times 4 =$	024
$6 \times 7 \times 8 \times 9 =$	3.024
$16 \times 17 \times 18 \times 19 =$	93.024
$21 \times 22 \times 23 \times 24 =$	255.024
$26 \times 27 \times 28 \times 29 =$	570.024

6. Εκπληκτικές αναλύσεις αριθμών

6.1 Αριθμοί αναλυόμενοι με τα ίδια τους τα ψηφία σε άθροισμα αυξανόμενων δυνάμεων

Μερικοί αριθμοί μπορούν να αναλυθούν σε αθροίσματα δυνάμεων όπου βάσεις των δυνάμεων είναι τα ψηφία που απαρτίζουν τον αριθμό, εμφανιζόμενα με την ίδια διαδοχή, οι δε εκθέτες των δυνάμεων βαίνουν αυξανόμενες.

$$\begin{aligned} 89 &= 8^1 + 9^2, & 135 &= 1^1 + 3^2 + 5^3, & 175 &= 1^1 + 7^2 + 5^3, & 518 &= 5^1 + 1^2 + 8^3 \\ 598 &= 5^1 + 9^2 + 8^3, & 1.306 &= 1^1 + 3^2 + 0^3 + 6^4, & 1.676 &= 1^1 + 6^2 + 7^3 + 6^4, & 2.427 &= 2^1 + 4^2 + 2^3 + 7^4 \\ 43 &= 4^4 + 3^3 \end{aligned}$$

Υπάρχουν και κάποιοι όμως που λειτουργούν ανάποδα. Δηλαδή οι βάσεις των δυνάμεων βαίνουν αυξανόμενες, οι δε εκθέτες είναι τα ίδια ψηφία του αριθμού, εμφανιζόμενα με την ίδια διαδοχή. $746 = 1^7 + 2^4 + 3^6$, $986 = 1^9 + 2^8 + 3^6$, $594 = 1^5 + 2^9 + 3^4$.

6.2 Αριθμοί αναλυόμενοι με τα ψηφία τους σε άθροισμα ιδίων δυνάμεων

Διάφοροι αριθμοί αναλύονται σε άθροισμα δυνάμεων με βάσεις τα ψηφία του αριθμού στην ίδια διαδοχική σειρά και εκθέτες ίδιους αριθμούς:

- $1.231 = 1^7 + 2^7 + 3^7 + 1^7$
- $1.233 = 12^2 + 33^2$
- $1.370 = 1^2 + 37^2 + 0^2$
- $1.371 = 1^2 + 37^2 + 1^2$
- $1.634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$
- $2.213 = 2^3 + 2^3 + 13^3$
- $4.150 = 4^5 + 1^5 + 5^5 + 0^5$
- $4.151 = 4^5 + 1^5 + 5^5 + 1^5$
- $4.160 = 4^3 + 16^3 + 0^3$
- $4.161 = 4^4 + 16^4 + 1^4$
- $8.208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$
- $9.474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$
- $194.979 = 1^5 + 9^5 + 4^5 + 9^5 + 7^5 + 9^5$

Και το αντίστροφο:

- $4.624 = 4^4 + 4^6 + 4^2 + 4^4$
- $1.033 = 8^1 + 8^0 + 8^3 + 8^3$
- $595.968 = 4^5 + 4^9 + 4^5 + 4^9 + 4^6 + 4^8$

Συναρπαστικοί είναι και οι επόμενοι αριθμοί όπου στην ανάλυση τους, οι δυνάμεις έχουν τα ψηφία των αριθμών, οι δε εκθέτες είναι πάλι τα ίδια ψηφία αλλά με αντίστροφη σειρά.

$$48.625 = 4^5 + 8^2 + 6^6 + 2^8 + 5^4, \quad 397.612 = 3^2 + 9^1 + 7^6 + 6^7 + 1^9 + 2^3$$

6.3 Αριθμοί αναλυόμενοι με τα ψηφία με απλά σύμβολα αριθμητικής

Πολλοί φυσικοί αριθμοί μπορούν να εμφανιστούν με άλλη μορφή χρησιμοποιώντας τα ίδια τους τα ψηφία και τα σύμβολα δυνάμεως, πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης και παρένθεσης. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται και αριθμοί του Friedman και το εντυπωσιακό είναι η εφευ-

ρετικότητα και η επιδεξιότητα που απαιτήθηκε για να αναλυθούν με την άλλη τους μορφή. Έτσι οι αριθμοί 25 και 126 αναλύονται με τα ίδια τους ψηφία. $25 = 5^2$, $126 = 21 \times 6$.

Θα παραθέσουμε τέτοιους αριθμούς με τις εκπληκτικές τους αναλύσεις, όπου διατηρείται ακόμη και η ίδια διαδοχική ψηφίων με την οποία εκφράζεται ο κάθε αριθμός.

$343 = (3+4)^3$	$3.685 = (3+8) \times 5$	$13.825 = 1 + (3 \times 8)^{-2+5}$
$736 = 7 + 3^6$	$3.864 = 3 \times (-8 + 6^4)$	$14.641 = (1+4+6)^{4 \times 1}$
$1.285 = (1+2) \times 5$	$3.972 = 3 + (9 \times 7)^2$	$15.613 = 1 + 5^6 - 13$
$2.187 = (2+1)^8$	$4.096 = (4+0 \times 9)^6$	$15.624 = 1 + 5^6 + 2 - 4$
$2.502 = 2 + 50^2$	$6.455 = (6^4 - 5) \times 5$	$15.632 = 1 + 5^6 + 3 \times 2$
$2.592 = 2^5 \times 9^2$	$11.664 = 1 \times 1 \times 6^6 : 4$	$15.688 = -1 + 5^6 + 8 \times 8$
$2.737 = (2 \times 7)^3 - 7$	$11.264 = 11 \times 2^{6+4}$	$16.377 = (1+6-3)^7 - 7$
$3.125 = (3+1 \times 2)^5$	$12.850 = (1+2^8) \times 50$	$16.447 = -1 + 64 + 4$

6.4 Αλλεπάλληλες αναλύσεις του 7

Εδώ αναλύουμε τον αριθμό 7 με τη χρήση από μία φορά όλων των αρχικών ακεραίων αριθμών από το 1 έως το 10.

$$7 = \frac{1 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{2 \times 4 \times 9 \times 10} = \frac{1 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 10}{2 \times 5 \times 8 \times 9}$$

6.5 Αναλύσεις αριθμών σε παράξενα αθροίσματα

Θα δούμε αριθμούς που αναλύονται σε αθροίσματα, όπου οι όροι των αθροισμάτων αποτελούνται από όμοια ψηφία που έχουν ληφθεί όλα από μία φορά από τα ψηφία του αριθμού μας.

- $198 = 11 + 99 + 88$
- $461 = 444 + 6 + 11$
- $1.098 = 11 + 0 + 999 + 88$
- $1.099 = 1 + 0 + 999 + 99$
- $1.185 = 11 + 1.111 + 8 + 55$
- $1.187 = 111 + 111 + 888 + 77$
- $1.276 = 1.111 + 22 + 77 + 66$

7. Απίστευτα εξαγόμενα

7.1 Ίδια ψηφία εκατέρωθεν του ίσον

Στους επόμενους πολλαπλασιασμούς διαπιστώνουμε ότι δεξιά και αριστερά του ίσον εμφανίζονται ίδια ψηφία.

- $906 \times 21 = 19.026$
- $930 \times 15 = 13.950$
- $651 \times 24 = 15.624$
- $21 \times 87 = 1.827$
- $410 \times 26 = 10.426$
- $870 \times 21 = 18.270$
- $704 \times 65 = 45.760$
- $678 \times 42 = 28.476$
- $983 \times 65 = 63.895$

7.2 Ίδιο άθροισμα ψηφίων εκατέρωθεν του ίσον

Στους πολλαπλασιασμούς που παρατίθενται διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα των ψηφίων των αριθμών που υπάρχουν δεξιά και αριστερά του ίσον είναι το ίδιο.

- $51 \times 84 = 4.284$ άθροισμα ψηφίων δεξιά και αριστερά 18
- $42 \times 84 = 3.528$ άθροισμα ψηφίων δεξιά και αριστερά 18
- $6 \times 48 = 288$ άθροισμα ψηφίων δεξιά και αριστερά 18
- $51 \times 75 = 3.825$ άθροισμα ψηφίων δεξιά και αριστερά 18
- $33 \times 75 = 2.475$ άθροισμα ψηφίων δεξιά και αριστερά 18

- $41 \times 89 = 3.649$ άθροισμα ψηφίων δεξιά και αριστερά **22**
- $71 \times 59 = 4.189$ άθροισμα ψηφίων δεξιά και αριστερά **22**
- $11 \times 47 = 517$ άθροισμα ψηφίων δεξιά και αριστερά **13**

7.3 Αριθμοί βρικόλακες

Ονομάζουμε έτσι έναν αριθμό με άρτιο πλήθος ψηφίων και ίσο με το γινόμενο δύο άλλων αριθμών με τα μισά του ψηφία ο καθένας, που όμως να είναι όλα μαζί ίδια με του αρχικού. Οι αριθμοί του γινομένου λέγονται κυνόδοντες του βρικόλακα.

Παράδειγμα: Ο αριθμός 386.415 είναι αριθμός Vampire διότι έχει 6 ψηφία και αναλύεται σε γινόμενο των αριθμών 465 και 831 οι οποίοι μαζί έχουν τα ίδια ψηφία με αυτόν. Οι αριθμοί αυτοί 465 και 831 είναι οι κυνόδοντές του. **$386.415 = 465 \times 831$** Άλλοι αριθμοί βρικόλακες είναι :

- $326.452 = 524 \times 623$
- $175.329 = 231 \times 759$
- $304.717 = 431 \times 707$
- $2.187 = 27 \times 81$
- $6.880 = 80 \times 86$

Υπάρχουν αριθμοί βρικόλακες με δύο διαφορετικά ζεύγη κυνοδόκτων αλλά και με τρία επίσης.

1. Με δύο ζεύγη διαφορετικών κυνοδόκτων:

$$125.460 = 204 \times 615 = 246 \times 510$$

$$11.930 = 1.301 \times 9.170 = 1.310 \times 9.107$$

$$12.054.060 = 2.004 \times 6.015 = 2.406 \times 5.010$$

2. Με τρία ζεύγη διαφορετικών κυνοδόκτων :

$$13.078.260 = 1260 \times 8.073 = 1863 \times 7.020 = 2.070 \times 6.318$$

3. Υπάρχουν οι παρακάτω αριθμοί βρικόλακες με τέσσερα διαφορετικά ζεύγη κυνοδόκτων ο ένας και με πέντε ο άλλος.

$$\begin{aligned} 16.758.243.290.880 &= \\ &= 1.982.763 \times 8.452.080 = \\ &= 2.123.856 \times 7.890.480 = \\ &= 2.751.840 \times 6.089.832 = \\ &= 2.817.360 \times 5.948.280 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24.959.017.348.650 &= \\ &= 2.947.050 \times 8.469.153 = \\ &= 2.949.705 \times 8.461.530 = \\ &= 4.125.870 \times 6.049.395 = \\ &= 4.0129.587 \times 6.043.950 = \\ &= 4.230.765 \times 5.899.410 \end{aligned}$$

7.4 Συμμετρικές σχέσεις

Στις συμμετρικές σχέσεις εμφανίζεται διάταξη κατοπτρισμού, γνωστή ως mirroring:

$$2 \times 41 = 82 \text{ αλλά και } 28 = 14 \times 2$$

$$21 \times 32 = 672 \text{ αλλά και } 276 = 23 \times 12$$

$$221 \times 312 = 68.952 \text{ αλλά και } 25.986 = 213 \times 122$$

$$12^2 = 144 \text{ αλλά και } 441 = 21^2$$

$$13^2 = 169 \text{ αλλά και } 961 = 31^2$$

$$112^2 = 12.544 \text{ αλλά και } 44.521 = 211^2$$

$$122^2 = 14.884 \text{ αλλά και } 48.841 = 221^2$$

$$103^2 = 10.609 \text{ αλλά και } 90.601 = 301^2$$

$$113^2 = 12.769 \text{ αλλά και } 96.721 = 311^2$$

Βιβλιογραφία

Πέππας, Χ. (2009). «Η μαγεία των αριθμών», Καλλιθέα.