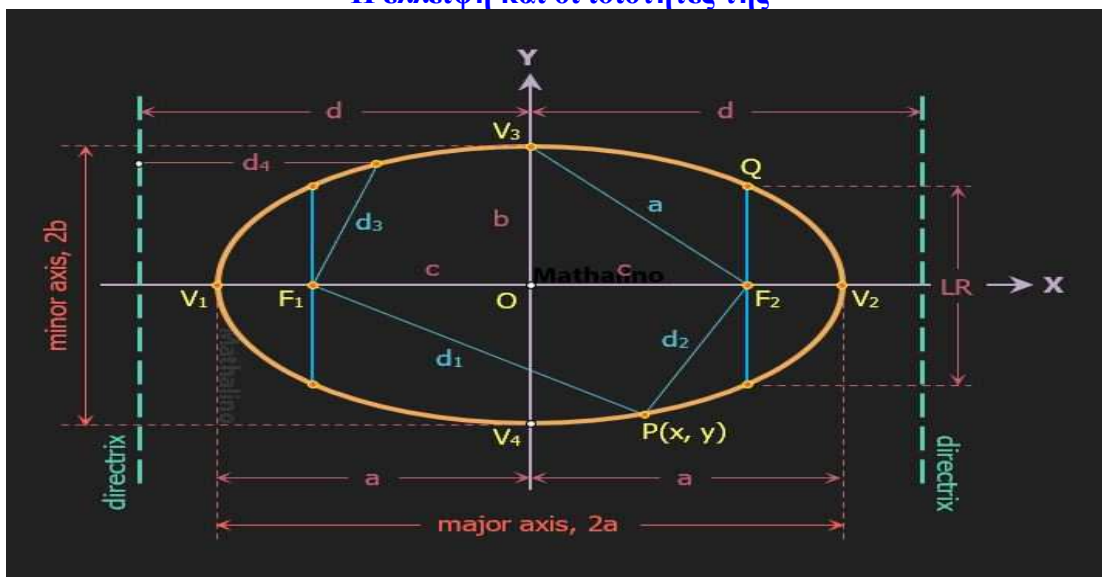




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Η έλλειψη και οι ιδιότητες της



Σπουδαστές: Αρβανιτάκης Νικόλαος (AM 8164)
Γκίκας Γεώργιος (AM 8280)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2021– 2022

Ημερομηνία ανάθεσης: 24.05.2021
 Ημερομηνία κατάθεσης: 02.02.2022
 Ημερομηνία εξέτασης: ...02.2022

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Εξισώσεις έλλειψης	3
2. Αναλυτική εξίσωση έλλειψης.....	3
3. Μορφή και στοιχεία μίας έλλειψης (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$	4
4. Παραμετρικές εξισώσεις έλλειψης (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$	7
5. Σχετικές θέσεις ευθείας (ε): $y = \lambda x + k$ και έλλειψης (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$	9
6. Κατακόρυφες εφαπτόμενες της (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	9
7. Η έλλειψη ως προβολή κύκλου	10
8. Μέθοδοι για τη λύση ασκήσεων	13
9. Στοιχεία έλλειψης	28
10. Ειδικές περιπτώσεις έλλειψης.....	28
11. Εξίσωση της εφαπτόμενης μίας έλλειψης σε ένα σημείο της.....	29

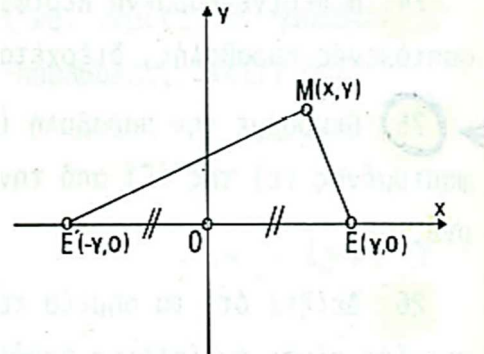
1. Εξισώσεις έλλειψης

Ορίζουμε ως έλλειψη (C), με εστίες τα σταθερά σημεία E E', το γεωμετρικό τόπο των σημείων M και του επιπέδου για τα οποία είναι $d(M,E)+d(M,E')=2a$, a =σταθερό. Η σταθερή απόσταση $d(E,E')=2\gamma$ λέγεται εστιακή απόσταση της έλλειψης.

2. Αναλυτική εξίσωση έλλειψης

Για να βρούμε την εξίσωση της έλλειψης, εκλέγουμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy ως εξής: Ως άξονα τεταγμένων θεωρούμε την ευθεία E'E και ως άξονα τεταγμένων τη μεσοκάθετη του E'E.

Για το τυχαίο σημείο M της έλλειψης, από τρίγωνο MEE' είναι $ME+ME' > EE' \Leftrightarrow 2a > 2\gamma \Leftrightarrow a > \gamma$ (1) Τότε, αφού $E(\gamma,0)$, $E'(-\gamma,0)$ είναι: Το $M(x,y)$ είναι το σημείο της έλλειψης



$$\Leftrightarrow d(M,E) + d(M,E') = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2 - 2\gamma x} + \sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2 + 2\gamma x} = 2a$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + \gamma^2 - 2\gamma x) + (x^2 + y^2 + \gamma^2 + 2\gamma x) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + \gamma^2 - 2\gamma x)(x^2 + y^2 + \gamma^2 + 2\gamma x)} = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + \gamma^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2 x^2} = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 + y^2 + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2 x^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + \gamma^2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a^2 - x^2 - y^2 - \gamma^2 \geq 0 \\ (x^2 + y^2 + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2 x^2 = 4a^4 + (x^2 + y^2 + \gamma^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + \gamma^2) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\alpha^2 - x^2) + (\alpha^2 - \gamma^2) - y^2 \geq 0 \\ (\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2\gamma^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2 \\ (\alpha^2 - x^2) + \beta^2 - y^2 \geq 0 \\ \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\alpha^2 - x^2) + (\beta^2 - y^2) \geq 0 \quad (2) \\ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (E) \end{array} \right\} (\Sigma)$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι από (E)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{\alpha^2} \leq 1 \Rightarrow \alpha^2 \geq x^2 \Rightarrow \alpha^2 - x^2 \geq 0 \\ \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1 \Rightarrow \beta^2 \geq y^2 \Rightarrow \beta^2 - y^2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (\alpha^2 - x^2) + (\beta^2 - y^2) \geq 0 \text{ άρα } (\Sigma) \Leftrightarrow (E).$$

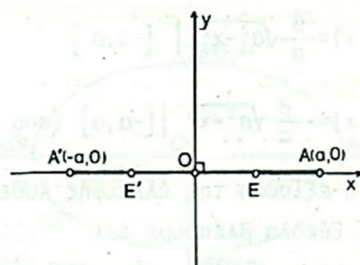
Ωστε: Αν $M(x,y)$ σημείο του τόπου $\Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Άρα, η εξίσωση της έλλειψης,

ως προς το σύστημα αξόνων που εκλέξαμε, είναι η $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$.

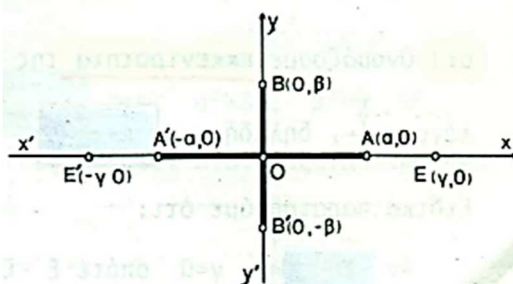
3. Μορφή και στοιχεία μίας έλλειψης (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$

Παρατηρούμε ότι:

α) Για $y=0$ η εξίσωση της έλλειψης δίνει $x=\pm\alpha$. Άρα, η καμπύλη (C) τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(\alpha,0)$ και $A'(-\alpha,0)$ που θα τα λέμε **κύριες κορυφές** ενώ το τμήμα AA' για το οποίο είναι $\overrightarrow{AA'}=2\alpha$ θα το λέμε **μεγάλο άξονα** της έλλειψης.



β) Για $x=0$ η εξίσωση της έλλειψης δίνει $y=\pm\beta$. Άρα, η καμπύλη (C) τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B(0,\beta)$ και $B'(0,-\beta)$ που τα λέμε **δευτερεύουσες κορυφές** ενώ το τμήμα BB' για το οποίο είναι $\overrightarrow{BB'}=2\beta$ το λέμε **μικρό άξονα** της έλλειψης.



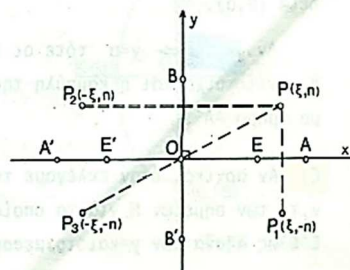
γ) Αν το σημείο $P(\xi, \eta) \in (C) \Leftrightarrow \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{(-\eta)^2}{\beta^2} = 1, \frac{(-\xi^2)}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1, \frac{(-\xi^2)}{\alpha^2} + \frac{(-\eta)^2}{\beta^2} = 1$

που σημαίνουν ότι, τα σημεία $P_1(\xi, -\eta)$, $P_2(-\xi, \eta)$, $P_3(-\xi, -\eta)$ ανήκουν στην έλλειψη και άρα, η καμπύλη της έλλειψης είναι συμμετρική ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την αρχή O των αξόνων.

δ) Από την εξίσωση της έλλειψης προκύπτει

$$\text{ότι: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{\alpha^2} \leq 1 \\ \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 \leq \alpha^2 \\ y^2 \leq \beta^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|x\| \leq \alpha \\ \|y\| \leq \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\alpha \leq x \leq \alpha \\ -\beta \leq y \leq \beta \end{array} \right\} \quad \text{Αυτό σημαίνει ότι η}$$

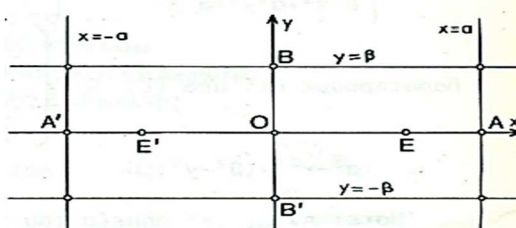
καμπύλη της έλλειψης είναι εσωτερική του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με εξισώσεις πλευρών $x=\alpha$, $x=-\alpha$, $y=\beta$, $y=-\beta$.



ε) Η καμπύλη (C) της έλλειψης είναι η ένωση των γραφημάτων των συναρτήσεων

$$F_1(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \quad [-\alpha, \alpha]$$

$$F_2(x) = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \quad [-\alpha, \alpha]$$

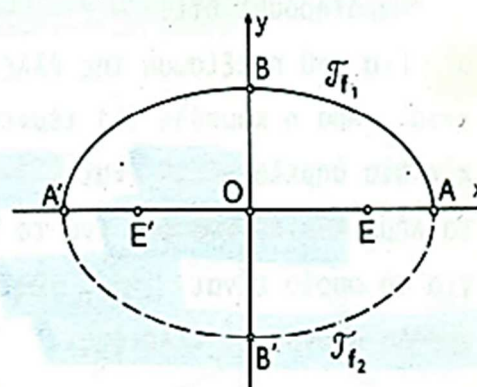


(που προκύπτουν αν η εξίσωση της έλλειψης λυθεί ως προς y). Εύκολα βλέπουμε ότι $R(f_1)=[0,\beta]$, $R(f_2)=[-\beta,0]$.

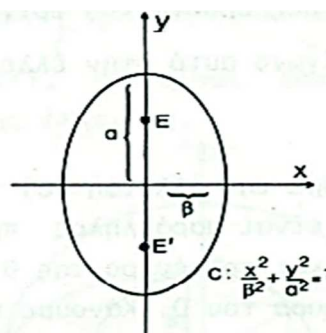
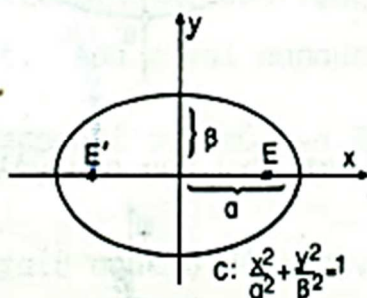
στ) Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης και θα τη συμβολίζουμε με ε , το λόγο $\frac{\gamma}{\alpha}$, δηλαδή $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$. Επειδή $\gamma < \alpha \Rightarrow \varepsilon < 1$. Ειδικά παρατηρούμε ότι:

Αν $\varepsilon=0 \Leftrightarrow \gamma=0$ οπότε $E' \in E$ και $\alpha=\beta$, τότε η έλλειψη είναι περιφέρεια $(0,\alpha)$.

Αν $\varepsilon=1 \Leftrightarrow \gamma=\alpha$ τότε οι εστίες E, E' ταυτίζονται με τις κορυφές A, A' αντίστοιχα και η καμπύλη της έλλειψης εκφυλίζεται σε "διπλό" ευθύγραμμο τμήμα AA' .

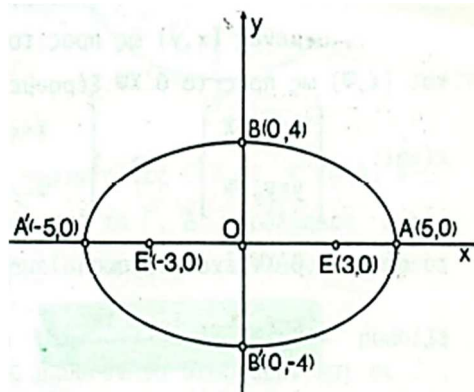


ζ) Αν αρχικά, όταν εκλέγαμε το σύστημα αξόνων, προκειμένου να βρούμε το γ.τ. των σημείων M για τα οποία είναι $\|ME\| + \|ME'\| = 2a$, θεωρούσαμε την $E'E$ ως άξονα των y και τη μεσοκάθετη του $E'E$ ως άξονα των x και θα είχαμε τότε: $E(0,\gamma)$, $E'(0,-\gamma)$, αν και δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο θα βρίσκαμε ότι ο τόπος (έλλειψη) έχει εξίσωση με $\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ όπου και πάλι $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ ($\Leftrightarrow \alpha > \beta$). Έτσι με $\alpha > \beta$ έχουμε:



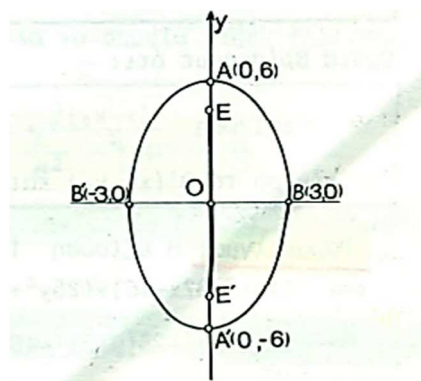
Παράδειγμα 1. Η έλλειψη (C): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

έχει: $\alpha^2 = 25$, $\beta^2 = 16$, $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2 = 9$ και άρα: $\alpha=5$, $\beta=4$, $\gamma=3$. Οι εστίες της έλλειψης κείνται στον άξονα των x (αφού ο παρονομαστής 25 του x είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή 16 του y) και άρα $E(3,0)$, $E'(-3,0)$. Κύριες κορυφές: $A(5,0)$, $A'(-5,0)$. Δευτερεύουσες κορυφές: $B(0,4)$, $B'(0,-4)$. Μεγάλος άξονας $\|AA'\|=10$. Μικρός άξονας $\|BB'\|=8$. Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

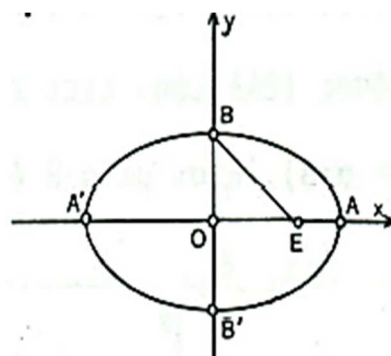


Παράδειγμα 2. Η έλλειψη (C): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ έχει

$\alpha^2 = 36, \beta^2 = 9, \gamma^2 = 27$ άρα $\alpha = 6, \beta = 3, \gamma = 3\sqrt{3}$. Οι εστίες κείνται στον άξονα των y και (αφού ο παρονομαστής 36 του και είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή 9 του x) άρα $E(0, 3\sqrt{3}), E'(0, -3\sqrt{3})$. Κύριες κορυφές: $A(0,6), A'(0,-6)$. Δευτερεύουσες κορυφές: $B(3,0), B'(-3,0)$. Μεγάλος άξονας: $\|AA'\| = 12$. Μικρός άξονας: $\|BB'\| = 6$. Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Συμπέρασμα: Η έλλειψη $\varepsilon = \frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$ έχει τις εστίες της στον άξονα xx' αν $\kappa^2 > \lambda^2$ και στον άξονα yy' αν $\lambda^2 > \kappa^2$.



Παρατήρηση. Τα α, β, γ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου (αφού $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$).

Το τρίγωνο αυτό στην έλλειψη είναι το OEB.

η) Θεωρούμε την έλλειψη (C) του επιπέδου των αξόνων Oxy, που ο μεγάλος άξονας της είναι παράλληλος προς τον άξονα $x'x$ και το κέντρο της $O'(x_0, y_0)$ είναι διάφορο του O. Κάνουμε παράλληλη μεταφορά του συστήματος Oxy στο $O'X\Psi$. Αν M είναι σημείο της έλλειψης (C), με συντεταγμένες (x,y) ως προς το Oxy και (X,Ψ) ως προς το $O'X\Psi$ ξέρουμε ότι είναι:

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + \Psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - x_0 \\ \Psi = y - y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Όμως η έλλειψη (C) ως προς το σύστημα

$O'X\Psi$ έχει εξίσωση $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{\Psi^2}{\beta^2} = 1$ άρα

λόγω των (1) θα έχει εξίσωση

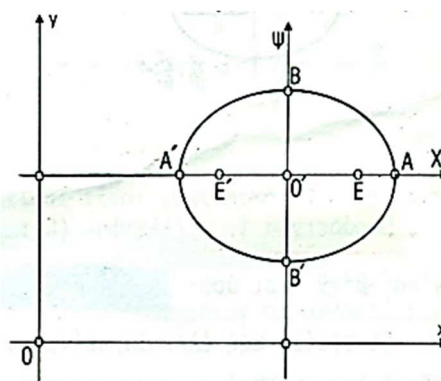
$$\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{ως προς το}$$

αρχικό σύστημα Oxy. Οι εστίες είναι $E(x_0 + \gamma, y_0), E'(x_0 - \gamma, y_0)$ και οι

κορυφές είναι $A(x_0 + \alpha, y_0), A'(x_0 - \alpha, y_0), B(x_0, y_0 + \beta), B'(x_0, y_0 - \beta)$. Άρα:

Η εξίσωση $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$, είναι εξίσωση έλλειψης με κέντρο το

$O'(x_0, y_0)$ και μεγάλο άξονα παράλληλο προς τον $x'x$. Όμοια βρίσκουμε ότι η



εξίσωση $\frac{(x-x_0)^2}{\beta^2} = \frac{(y-y_0)^2}{\alpha^2} = 1$ με $\alpha < \beta$, είναι εξίσωση έλλειψης με κέντρο το O' (x_0, y_0) και μεγάλο άξονα παράλληλο προς τον yy' .

Παράδειγμα 3. Η εξίσωση $16x^2 + 25y^2 - 32x + 100y - 284 = 0$, $(16x^2 - 32x + 16) + (25y^2 + 100y + 100) - 16 - 100 - 284 = 0$ και $16(x-1)^2 + 25(y+2)^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ και συνεπώς είναι εξίσωση έλλειψης με κέντρο O' $(1, -2)$ και μεγάλο άξονα παράλληλο προς τον $x'x$.

4. Παραμετρικές εξισώσεις έλλειψης (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$.

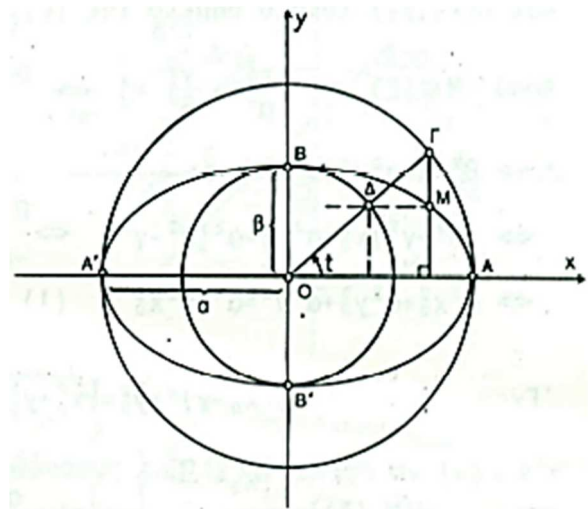
α) Έστω συναρτήσεις $\begin{cases} x = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu t, t \in \mathbb{R} \\ y = \beta \cdot \eta\mu t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Αυτές αντικαθιστάμενες στην εξίσωση της έλλειψης δίνουν, $\sigma\upsilon\nu^2 t + \eta\mu^2 t = 1$ που είναι ταυτότητα ως προς t . Άρα είναι παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης.

Μπορούμε συνεπώς να θεωρήσουμε ότι: Το τυχαίο σημείο $M(x = \alpha \sigma\upsilon\nu t, y = \beta \eta\mu t)$ της έλλειψης έχει

1. Τετμημένη, την τετμημένη ενός σημείου Γ της περιφέρειας $C(0, \alpha)$ για το οποίο $x\hat{O}\Gamma = t$.

2. Τεταγμένη, την τεταγμένη ενός σημείου Δ της περιφέρειας $C'(0, \beta)$ για το οποίο $x\hat{O}\Delta = t$. Έτσι με $t \in [0, 2\pi)$, αν γράψουμε τις περιφέρειες $C(0, \alpha)$, $C'(0, \beta)$, θεωρήσουμε την τέμνουσα $O\Delta\Gamma$ αυτών και φέρουμε από τα Γ, Δ παράλληλες αντίστοιχα προς τους άξονες $y'y$ και $x'x$, το σημείο τομής M αυτών είναι σημείο της έλλειψης.



β) Ως παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης μπορούν να θεωρηθούν και οι

$\begin{cases} x = \frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2}, t \in \mathbb{R} \\ y = \frac{2\beta t}{1+t^2}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$. Οι εξισώσεις αυτές ανάγονται στις προηγούμενες αν τεθεί

(αποδεικνύεται ότι είναι δυνατόν τούτο) $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \eta\mu\varphi = \frac{2t}{1+t^2}$ με

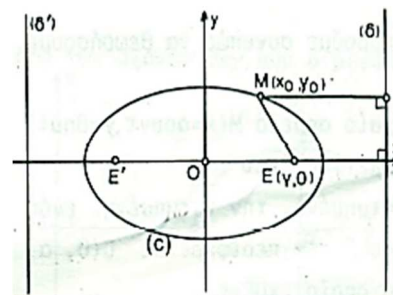
$t = \varepsilon\varphi \frac{\varphi}{2}, \varphi \neq 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$ και άρα δίνουν όλα τα σημεία της έλλειψης εκτός από το $A'(-\alpha, 0)$.

Διευθετούσες της έλλειψης (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$.

Ορισμός: Διευθετούσα της (C), αντίστοιχη με την εστία $E(\gamma, 0)$, ονομάζουμε την ευθεία (δ) : $x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$.

Διευθετούσα της (C), αντίστοιχη στην εστία $E'(-\gamma, 0)$, ονομάζουμε την ευθεία (δ') : $x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}$. Επειδή

$x = \left| \pm \frac{\alpha^2}{\gamma} \right| = \alpha \left| \frac{\alpha}{\gamma} \right| = \alpha$, $\frac{1}{\varepsilon} > \alpha$ έπεται ότι οι διευθετούσες $(\delta), (\delta')$ της έλλειψης δεν τέμνουν την έλλειψη.



Πρόταση: Αν M τυχαίο σημείο της έλλειψης, τότε ισχύει: $\frac{d(M, E)}{d(M, (\delta))} = \varepsilon$ Απόδειξη:

Έστω (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $E(\gamma, 0)$, (δ) : $x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ ή (δ) : $x - \frac{\alpha^2}{\gamma} = 0$ και M (x_0, y_0) τυχαίο σημείο της (C). Αφού

$$M \in (C) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x_0^2 + \alpha^2 y_0^2 = \alpha^2 \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2) x_0^2 + \alpha^2 y_0^2 = \alpha^2 (\alpha^2 - \gamma^2) \Leftrightarrow \alpha^2 x_0^2 + \alpha^2 y_0^2 + \alpha^2 \gamma^2 = \alpha^4 + \gamma^2 x_0^2 \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} d(M, E) &= \sqrt{(x_0 - \gamma)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \gamma^2 - 2\gamma x_0} \\ d(M, (\delta)) &= \frac{\left| x_0 - \frac{\alpha^2}{\gamma} \right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \left| x_0 - \frac{\alpha^2}{\gamma} \right| = \frac{|\gamma x_0 - \alpha^2|}{\gamma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d(M, E)}{d(M, (\delta))} =$$

$$= \frac{\gamma \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \gamma^2 - 2\gamma x_0}}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \gamma^2 - 2\gamma x_0}}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} = \varepsilon \frac{\sqrt{\alpha^2 x_0^2 + \alpha^2 y_0^2 + \alpha^2 \gamma^2 - 2\alpha^2 \gamma x_0}}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \varepsilon \frac{\sqrt{\alpha^4 + \gamma^2 x_0^2 - 2\alpha^2 \gamma x_0}}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} = \varepsilon \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma x_0)^2}}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} = \varepsilon$$

Το ίδιο ισχύει και για την εστία $E'(-\gamma, 0)$ και την αντίστοιχη διευθετούσα (δ') : $x - \frac{\alpha^2}{\gamma} = 0$

Παρατήρηση: Για την έλλειψη (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta$ (που οι εστίες της κείνται

στον y'y) ως διευθετούσες ορίζονται οι ευθείες (δ_1) : $y = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ και (δ_2) : $y = -\frac{\alpha^2}{\gamma}$.

5. Σχετικές θέσεις ευθείας (ε): $y=\lambda x+k$ και έλλειψης (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \lambda \in \mathbb{R}$

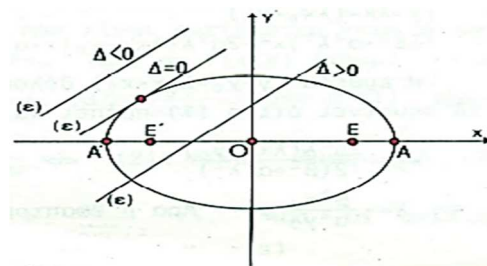
Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} y = \lambda x + k \\ \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \lambda x + k \\ \beta^2 x^2 + \alpha^2 (\lambda x + k) - \alpha^2 \beta^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x + k \\ (\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2) x^2 + 2\alpha^2 \lambda x k + \alpha^2 (k^2 - \beta^2) = 0 \quad (1) \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Παρατηρούμε ότι $\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2 \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Όταν η (1) έχει δύο ρίζες διακεκριμένες στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta > 0$, το (Σ) έχει δύο λύσεις στο $\mathbb{R}^2$ τις συντεταγμένες των σημείων τομής της (ε) και της (C).



β) Όταν η (1) δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R} = \Delta < 0$, τότε η (ε) δεν έχει κοινά σημεία με την (C).

γ) Όταν η (1) έχει διπλή ρίζα στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^4 \lambda^2 k^2 - 4\alpha^2 (k^2 - \beta^2) (\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 \lambda^2 k^2 - k^2 \beta^2 - \alpha^2 \lambda^2 k^2 + \beta^4 + \alpha^2 \lambda^2 \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \lambda^2 + \beta^2 = k^2$$

η ευθεία (ε) και η έλλειψη (C) έχουν κοινά δύο σημεία ταυτιζόμενα, ή ένα διπλό σημείο κοινό. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία (ε) **ορίζεται** ως εφαπτομένη της έλλειψης (C). Αν δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής της (ε), δηλαδή αν (ε)

$$//y'y \text{ τότε } (ε): x=k \text{ έχουμε το σύστημα } \begin{cases} x = k \\ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - k^2) \end{cases} \text{ από το}$$

οποίο συμπεραίνουμε ότι:

➤ Αν $-\alpha < k < \alpha$ η (ε) τέμνει τη (C) σε δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

➤ Αν $k = \pm \alpha$ η (ε) εφάπτεται στην (C) στα A, A' .

➤ Αν $k \in (-\infty, -\alpha) \cup (\alpha, +\infty)$ η (ε) και η (C) δεν έχουν κοινά σημεία.

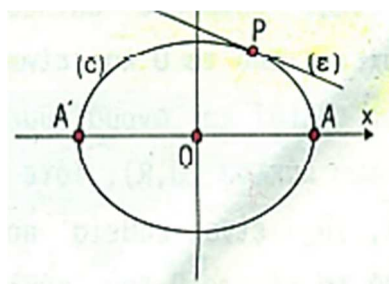
Η ευθεία (ε): $y = \lambda x + k$ **εφάπτεται** στην έλλειψη (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, αν και μόνο ισχύει $\alpha^2 \lambda^2 + \beta^2 = k^2$.

6. Κατακόρυφες εφαπτόμενες της (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1): x = \alpha, (\varepsilon_2): x = -\alpha$.

Εφαπτομένη έλλειψης (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο

της $P(x_0, y_0)$. Οι ευθείες που διέρχονται από το $P(x_0, y_0)$ είναι οι $x = x_0, y - y_0 = \lambda (x - x_0), \lambda \in \mathbb{R}$. Η



ευθεία $x = x_0$ είναι εφαπτομένη της (C) αν $x_0 = \pm a$, $y_0 = 0$ δηλαδή αν το P ταυτίζεται με το A ή A'. Έστω $P \neq A, A'$. Έστω το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} y - y_0 = \lambda(x - x_0) \\ \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x - (\lambda x_0 - y_0) \\ \beta^2 x^2 + \alpha^2 [\lambda x - (\lambda x_0 - y_0)]^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x - (\lambda x_0 - y_0) \\ (\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2) x^2 - 2\alpha^2 \lambda (\lambda x_0 - y_0) x + \alpha^2 [(\lambda x_0 - y_0)^2 - \beta^2] = 0 \quad (1) \end{array} \right\}$$

Η ευθεία $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ θέλουμε να εφάπτεται στη (C) στο $P(x_0, y_0)$. Αυτό σημαίνει ότι η (1) πρέπει αρκεί να έχει διπλή ρίζα στην $x_0 \Leftrightarrow$

$$x_0 = \frac{2\alpha^2 \lambda (\lambda x_0 - y_0)}{2(\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2)} \Leftrightarrow \beta^2 x_0 = -\alpha^2 \lambda y_0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\beta^2 x_0}{\alpha^2 y_0}.$$

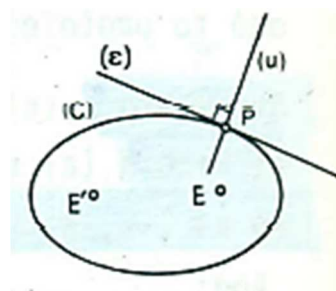
Άρα η εφαπτομένη της

(C) στο $P(x_0, y_0)$ είναι η $(\varepsilon): y - y_0 = -\frac{\beta^2 x_0}{\alpha^2 y_0} (x - x_0) \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon): \alpha^2 y y_0 - \alpha^2 y_0^2 = -\beta^2 x x_0 + \beta^2 x_0^2 \Leftrightarrow \beta^2 x x_0 + \alpha^2 y y_0 = \beta^2 x_0^2 + \alpha^2 y_0^2 \\ P(x_0, y_0) \in (C) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x_0^2 + \alpha^2 y_0^2 = \alpha^2 \beta^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon): \beta^2 x x_0 + \alpha^2 y y_0 = \alpha^2 \beta^2 \Leftrightarrow (\varepsilon): \frac{x x_0}{\alpha^2} + \frac{y y_0}{\beta^2} = 1$$

Ορίζουμε ως κάθετη (u), στο σημείο $P(x_0, y_0)$ της έλλειψης, την κάθετη ευθεία επί την εφαπτομένη (ε) της έλλειψης, στο $P(x_0, y_0)$.



7. Η έλλειψη ως προβολή κύκλου

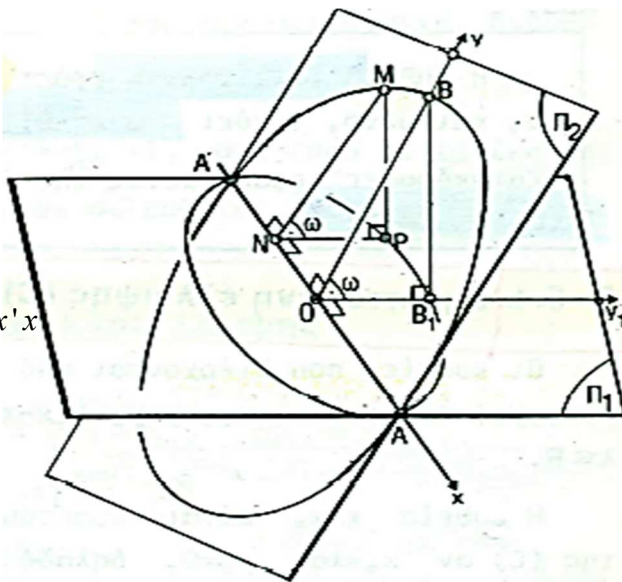
Πρόταση: Η ορθή προβολή του κύκλου $(0, R)$ επί επίπεδο (Π) , που δεν είναι παράλληλο ή κάθετο επί το επίπεδο του κύκλου, είναι έλλειψη.

Απόδειξη: Θεωρούμε επίπεδο (Π_1) που διέρχεται από το 0 και είναι παράλληλο προς το (Π) και ονομάζουμε (Π_2) το επίπεδο του κύκλου $(0, R)$. Τότε η τομή των Π_1, Π_2 είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου και την θεωρούμε ως άξονα των τετμημένων στα ορθοκανονικά συστήματα αξόνων Oxy, Ox_1y_1 που θεωρούμε στα Π_1, Π_2 αντίστοιχα.

Επειδή

$$Oy \perp x'x, Oy_1 \perp x'x \Rightarrow (yOy_1) \perp x'x$$

και άρα η $y_1 \hat{O}y = \omega$, $0 < \omega < 90^\circ$



είναι η αντίστοιχη επίπεδη γωνία της διέδρου $\Pi_1.x'x.\Pi_2$.

Αν $M(a, \beta)$ τυχαίο σημείο του κύκλου $(0,R)$, τότε $a^2 + \beta^2 = R^2$ (1), P η ορθή προβολή του, επί το Π_1 και N η ορθή προβολή του, επί την $x'x$, έχουμε: $MP \perp (\Pi)$, $MN \perp x'x$. Οπότε από το θεώρημα των καθέτων $\Rightarrow PN \perp x'x$. Άρα η $M\hat{N}P$ είναι αντίστοιχη επίπεδη γωνία της διέδρου $\Pi_1.x'x.\Pi_2$ οπότε είναι $M\hat{N}P = \omega$.

Τότε αν $P(x,y)$ έχουμε $\chi = \alpha$ και $|y| = \|\overline{NP}\| = \|\overline{NM}\| \sigma\upsilon\nu\omega = |\beta| \sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow \alpha = x, |\beta| = \frac{|y|}{\sigma\upsilon\nu\omega}$. Τότε η (1) γράφεται και

$$x^2 + \frac{y^2}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = R^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 \sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1 \quad (2). \text{ Είναι όμως } \|\overline{OA}\| = R, \quad \|\overline{OB_1}\| = R \sigma\upsilon\nu\omega$$

οπότε (2) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{\|\overline{OA}\|^2} + \frac{y^2}{\|\overline{OB_1}\|^2} = 1$. Άρα, τα σημεία του κύκλου $(0,R)$ έχουν ως ορθές

προβολές επί το Π_1 σημεία της έλλειψης με μεγάλο ημιάξονα το OA και μικρό το OB .

Αντίστροφα: Αν $P(x_0, y_0)$ σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 \sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1$, οπότε

$$\frac{x_0^2}{R^2} + \frac{y_0^2}{R^2 \sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1 \quad (3) \text{ και η κάθετη, επί το } \Pi_1 \text{ στο } P, \text{ τέμνει το } \Pi_2 \text{ στο } M(a, \beta).$$

εύκολα φαίνεται ότι είναι $\alpha = x_0$ και $|y_0| = |\beta| \sigma\upsilon\nu\omega$. Τότε η (3) δίνει

$$\frac{a^2}{R^2} + \frac{\beta^2 \sigma\upsilon\nu^2\omega}{R^2 \sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1 \Leftrightarrow a^2 + \beta^2 = R^2 \text{ δηλαδή το } M \text{ είναι σημείο του κύκλου } (0,R).$$

Συνεπώς, η ορθή προβολή του κύκλου $(0,R)$ επί το Π_1 , άρα και επί το (Π) , είναι έλλειψη.

Παράδειγμα 4. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, που είναι ορθή προβολή του κύκλου $(C): x^2 + y^2 = 16$ επί επίπεδο που σχηματίζει με το επίπεδο του κύκλου γωνία 60° .

Λύση. Ο κύκλος (C) έχει ακτίνα $R=4 \Rightarrow a=4$ και $\beta = R \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 4 \frac{1}{2} = 2$ οπότε, η

$$\text{έλλειψη έχει εξίσωση } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

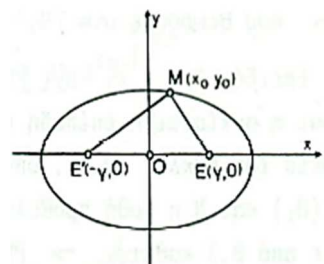
Παράδειγμα 5. Αν $M(x_0, y_0)$ σημείο της έλλειψης $(C): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $a > \beta$,

$$\text{τότε } \|\overline{ME}\| = a - \varepsilon \cdot x_0 \text{ και } \|\overline{ME'}\| = a + \varepsilon \cdot x_0.$$

Λύση. Επειδή $M \in (C) \Leftrightarrow \|\overline{ME}\| + \|\overline{ME'}\| = 2a$. Ακόμα

$$\|\overline{ME'}\|^2 - \|\overline{ME}\|^2 = [(x_0 + \gamma)^2 + y_0^2] - [(x_0 - \gamma)^2 + y_0^2] = 4\gamma x_0.$$

Θεωρούμε το σύστημα:



$$\left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{ME'}\| + \|\overrightarrow{ME}\| = 2\alpha \\ \|\overrightarrow{ME'}\|^2 - \|\overrightarrow{ME}\|^2 = 4\gamma x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{ME'}\| + \|\overrightarrow{ME}\| = 2\alpha \\ \|\overrightarrow{ME'}\| - \|\overrightarrow{ME}\| = 2\epsilon x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{ME}\| = a - \epsilon x_0 \\ \|\overrightarrow{ME'}\| = a + \epsilon x_0 \end{array} \right\}$$

Ορίζουμε ως **διάμετρο έλλειψης** κάθε χορδή της, που διέρχεται από το κέντρο της. Τότε, ικανή και αναγκαία συνθήκη για ν είναι μια χορδή διάμετρος, είναι οι εφαπτόμενες στα άκρα της να είναι παράλληλες.

Απόδειξη: Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία

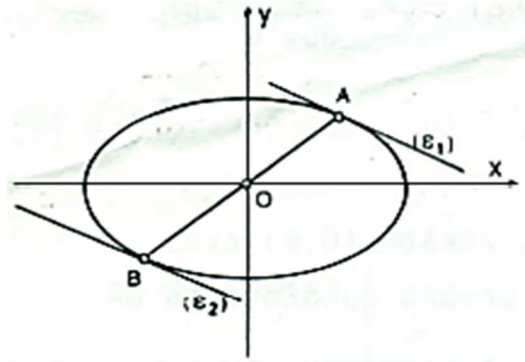
της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, τότε

$$(\epsilon_1): \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \quad (\epsilon_2): \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1.$$

Επειδή $A \neq B$ είναι

$$(\epsilon_1) \parallel (\epsilon_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{a^2} \frac{y_2}{b^2} - \frac{y_1}{b^2} \frac{x_2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

τα $A(x_1, y_1)$, $O(0,0)$, $B(x_2, y_2)$ είναι ομοευθειακά.



➤ Έστω έλλειψη $(C): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$ και η περιγεγραμμένη της περιφέρεια (C')

με κέντρο O και ακτίνα a . Αν και η προβολή μιας από τις εστίες της (C) στην ευθεία (ϵ) του επιπέδου της έλλειψης, δείξτε ότι:

α) Η (ϵ) τέμνει την έλλειψη $(C) \Leftrightarrow$ Το M είναι εσωτερικό σημείο της (C') .

β) Η (ϵ) εφάπτεται στην έλλειψη $(C) \Leftrightarrow$ Το M είναι σημείο της (C') .

γ) Η (ϵ) δεν έχει κοινά σημεία με την έλλειψη $\Leftrightarrow$ Το M είναι εξωτερικό σημείο της (C') .

Απόδειξη: Έστω ότι $(\epsilon): y = \lambda x + \mu$. Θεωρούμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x + \mu \\ \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x + \mu \\ (\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2) x^2 + 2\alpha^2 \lambda \mu x + \alpha^2 (\mu^2 - \beta^2) = 0 \quad (1) \end{array} \right\}$$

Η (1) έχει $\Delta = 4\alpha^4 \lambda^2 \mu^2 - 4\alpha^2 (\mu^2 - \beta^2) (\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2) = 4\alpha^2 \beta^2 (\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2 - \mu^2)$.

Παρατηρούμε ότι:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 + \alpha^2 \lambda^2 - \mu^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \gamma^2 + \alpha^2 \lambda^2 - \mu^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 \lambda^2 > \gamma^2 + \mu^2 \Leftrightarrow \alpha^2 (1 + \lambda^2) > \gamma^2 + \mu^2 \Leftrightarrow \alpha^2 > \frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2}$$

Όμοια έχουμε $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2}$ και

$\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < \frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2}$. Άρα, η (ε) τέμνει

την (C) $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > \frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2}$ (1)

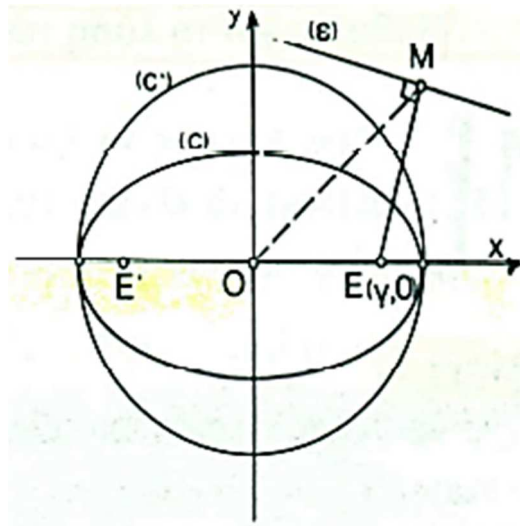
Η (ε) εφάπτεται στη (C) $\Leftrightarrow$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2}$ (2) Η (ε) δεν έχει

κοινά σημεία με την (C)

$\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < \frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2}$ (3). Επειδή (ε):

$$y = \lambda x + \mu \Rightarrow \lambda_\varepsilon - \lambda \Rightarrow \lambda_{EM} = -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow EM: y = -\frac{1}{\lambda}(x - \gamma).$$



Οι συντεταγμένες του M είναι η λύση του συστήματος

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x + \mu \\ y = \frac{-1}{\lambda}(x - \gamma) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\gamma - \lambda\mu}{1 + \lambda^2} \\ y = \frac{\lambda\gamma + \mu}{1 + \lambda^2} \end{array} \right\} \Rightarrow M\left(\frac{\gamma - \lambda\mu}{1 + \lambda^2}, \frac{\lambda\gamma + \mu}{1 + \lambda^2}\right)$$

Η θέση του M σε σχέση με την (C') καθορίζεται από την $d(M, 0)$.

$$\text{Έχουμε: } d(M, 0) = \sqrt{\left(\frac{\gamma - \lambda\mu}{1 + \lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\gamma + \mu}{1 + \lambda^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2}} \Leftrightarrow d^2(M, 0) = \frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2}.$$

Τότε το M είναι εσωτερικό της (C')

$$\Leftrightarrow d(M, 0) < \alpha \Leftrightarrow d^2(M, 0) < \alpha^2 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2} < \alpha^2 \Leftrightarrow (1)$$

Το M είναι σημείο της (C')

$$\Leftrightarrow d(M, 0) = \alpha \Leftrightarrow d^2(M, 0) = \alpha^2 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2} = \alpha^2 \Leftrightarrow (2)$$

Το M είναι εξωτερικό της (C')

$$\Leftrightarrow d(M, 0) > \alpha \Leftrightarrow d^2(M, 0) > \alpha^2 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2} > \alpha^2 \Leftrightarrow (3).$$

8. Μέθοδοι για τη λύση ασκήσεων

Όταν θέλουμε να βρούμε την εξίσωση μιας έλλειψης, πρέπει να προσδιορίζουμε το κέντρο της $O'(x_0, y_0)$ τη διεύθυνση των αξόνων συμμετρίας της και τους θετικούς πραγματικούς α, β .

Παράδειγμα 6. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, της μορφής $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, στις περιπτώσεις:

α) $\alpha = 2\beta$, $E(2\sqrt{3}, 0)$

β) $\beta = 2\alpha$ και το σημείο $A(4,6)$ κείται στην έλλειψη.

γ) Τα σημεία $A(3,2), \beta\left(4, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ κείνται στην έλλειψη.

Λύση: α) Έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2\beta \\ \gamma = 2\sqrt{3} \end{array} \right\} \xrightarrow{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2\beta \\ 3\beta^2 = \gamma^2 \\ \gamma = 2\sqrt{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2\beta \\ 3\beta^2 = 4 \cdot 3 \\ \gamma = 2\sqrt{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = 2 \\ \alpha = 4 \\ \gamma = 2\sqrt{3} \end{array} \right\}$$

και άρα $(C): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

β) Επειδή

$$A(4,6) \in (C): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} + \frac{36}{\beta^2} = 1 \xleftarrow{\beta=2\alpha} \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} + \frac{36}{4\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} + \frac{9}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$$

οπότε και $\beta = 10$. Άρα $(C): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$.

γ) Επειδή

$$\left\{ \begin{array}{l} A \in (C) \\ B \in (C) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{a^2} + \frac{4}{\beta^2} = 1 \\ \frac{16}{a^2} + \frac{32}{9\beta^2} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} = \omega, \frac{1}{\beta^2} = \varphi \\ 9\omega + 4\varphi = 1 \\ 16\omega + \frac{32}{9}\varphi = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} = \omega, \frac{1}{\beta^2} = \varphi \\ 9\omega + 4\varphi = 1 \\ 144\omega + 32\varphi = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} = \omega, \frac{1}{\beta^2} = \varphi \\ \omega = \frac{1}{72}, \varphi = \frac{7}{32} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ a^2 = 72, \beta^2 = \frac{32}{7} \right\}$$

Και άρα $(C): \frac{x^2}{72} + \frac{7y^2}{32} = 1$.

Παράδειγμα 7. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης στις περιπτώσεις:

α) $O'(0,2)$, $E(0,0)$, $\alpha=3$

β) $O'(-3,0)$, $E(-3,-2)$, $\alpha=4$

γ) $O'(2,2)$, $E(-1,2)$, $\alpha=\sqrt{10}$

Λύση:

α) Επειδή τα O' , E έχουν τετμημένες ίσες με μηδέν έπειτα ότι ο μεγάλος άξονας της έλλειψης κείται στην ευθεία $x=0$ δηλαδή στον άξονα $y'y$. Όμως το O' είναι

το μέσο του $EE' \Rightarrow E'(0,4)$. Άρα $2\gamma=d(E,E')=4 \Leftrightarrow \gamma=2$ και αφού

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = 9 - 4 = 5 \text{ οπότε } \frac{(x-0)^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

β) Τα O', E έχουν ίσες τετμημένες και άρα κείνται στην ευθεία $x=-3$ δηλαδή ο μεγάλος άξονας της έλλειψης κείνται στην ευθεία $x=-3$. Επειδή το O' είναι μέσο του $EE' \Rightarrow E'(-3,2)$. Άρα $2\gamma=d(E,E')=4 \Leftrightarrow \gamma=2$ και αφού

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = 16 - 4 = 12, \text{ οπότε } \frac{(x+3)^2}{12} + \frac{(y-0)^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

γ) Τα O', E έχουν ίσες τετμημένες και άρα κείνται στην ευθεία $y=2$ δηλαδή ο μεγάλος άξονας της έλλειψης κείνται στην ευθεία $y=2$. Επειδή το O' είναι μέσο του $EE' \Rightarrow E'(5,2)$. Άρα $2\gamma=d(E,E')=6 \Leftrightarrow \gamma=3$ και αφού $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 10 - 9 = 1$

$$\text{οπότε } \frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1.$$

Παράδειγμα 8. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης όταν:

α) Έχει εστίες τα $E(1,1), E'(-1,1)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β) Έχει ως άξονες συμμετρίας τους άξονες συντεταγμένων, διέρχεται από το $P(2,-3)$ και εφάπτεται στην $(\varepsilon): x + 6y - 20 = 0$.

Λύση: **α)** Επειδή τα E, E' έχουν ίσες τεταγμένες $\Rightarrow$ ο μεγάλος άξονας της έλλειψης κείται στην ευθεία $y=1$. Το κέντρο O' της έλλειψης είναι μέσο του $EE' \Rightarrow O'(0,1)$

και συνεπώς η έλλειψη έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{\beta^2} = 1$. Όμως το

$O(0,0)$ είναι σημείο της έλλειψης $\Leftrightarrow \frac{1}{\beta^2} \Leftrightarrow \beta^2 = 1$. Επιπλέον έχουμε:

$$2\gamma = d(E, E') = 2 \Leftrightarrow \gamma = 1 \text{ και αφού } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 2 \text{ οπότε (C):}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1.$$

$$\text{β) Έστω (C): } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ η ζητούμενη έλλειψη. Τότε } P \in (C) \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{9}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\beta^2 + 9a^2 = a^2\beta^2 \quad (1) \text{ . Η ευθεία } (\varepsilon): y = \frac{-1}{6}x + \frac{10}{3} \text{ εφάπτεται στη (C):}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ αν και μόνο αν ισχύει } \beta^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \alpha^2 \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 - \frac{100}{9} + \frac{\alpha^2}{36} = 0 \Leftrightarrow 36\beta^2 - 400 + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 36\beta^2 = 400 \quad (2).$$

$$\text{Έχουμε συνεπώς το σύστημα των (1), (2) δηλαδή } \begin{cases} a^2 + 36\beta^2 = 400 \\ 9a^2 + 4\beta^2 = a^2\beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 = 400 - 36\beta^2 \\ 9a^2 + 4\beta^2 = a^2\beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 400 - 36\beta^2 \\ \beta^4 - 20\beta^2 + 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 400 - 36\beta^2 \\ \beta^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 = 10 \\ \alpha^2 = 40 \end{cases}$$

$$\text{Και άρα (C): } \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1.$$

Παράδειγμα 9. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης (C) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, που

εφάπτεται στις ευθείες (ε_1) : $x + y - 5 = 0$ και (ε_2) : $x - 4y - 10 = 0$.

Λύση : Είναι (ε_1) : $y = -x + 5$ και (ε_2) : $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}$. Από §5.3 έχουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{H } (\varepsilon_1) \text{ εφάπτεται στην } (C) \Leftrightarrow \alpha^2(-1)^2 + \beta^2 = 5^2 \\ \text{H } (\varepsilon_2) \text{ εφάπτεται στην } (C) \Leftrightarrow \alpha^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \beta^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 = 25 \\ \alpha^2 + 16\beta^2 = 100 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 = 25 \\ \beta^2 = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = 20 \\ \beta^2 = 5 \end{array} \right\} \text{ οπότε } (C) : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 .$$

Μ2 Όταν θέλουμε να βρούμε την εξίσωση μιας εφαπτομένης (ε) της έλλειψης (C) που έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης ή προσδιορισίμο τότε γράφουμε την (ε) με την ανοιγμένη μορφή της $y = \lambda x + k$ οπότε από τη συνθήκη $\alpha^2 \lambda^2 + \beta^2 = k^2$ προσδιορίζουμε το $k \in \mathbb{R}$ και άρα την (ε).

Παράδειγμα 10. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες (ε) της (C) $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{4} = 1$ που είναι

παράλληλες προς την (η): $4x + 3y - 1 = 0$.

Λύση. Επειδή $\lambda_\pi = \frac{-4}{3}$ και (ε) // (η) $\Rightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{-4}{3}$ οπότε (ε): $y = \frac{-4}{3}x + k$. Η (ε)

εφάπτεται στη (C) $\Leftrightarrow 9\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 4 = k^2 \Leftrightarrow 16 + 4 = k^2 \Leftrightarrow k = \pm 2\sqrt{5}$ οπότε,

οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι (ε_1) : $y = \frac{-4}{3}x + 2\sqrt{5}$, (ε_2): $y = \frac{-4}{3}x - 2\sqrt{5}$.

Παράδειγμα 11. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες (ε) της (C): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ που είναι

κάθετες επί την (η): $x + y - 5 = 0$.

Λύση. Επειδή $\lambda_\pi = -1$ και (ε) $\perp$ (η) $\Rightarrow \lambda_\varepsilon = 1$ οπότε, (ε): $y = x + k$. Η (ε) εφάπτεται στη (C) $\Leftrightarrow 16 \cdot 1^2 + 9 = k^2 \Leftrightarrow k = \pm 5$ οπότε, οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι (ε_1) : $y = x + 5$ και (ε_2) : $y = x - 5$.

Παράδειγμα 12. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες (ε) της (C) : $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$ για τις

οποίες είναι $(\hat{\eta}, \hat{\varepsilon}) = 45^\circ$, όταν (η): $2x - y + 1 = 0$.

Λύση. Πρέπει $(\hat{\eta}, \hat{\varepsilon}) = 45^\circ \Rightarrow \varphi 45^\circ = \frac{\lambda_\varepsilon - \lambda_\pi}{1 + \lambda_\varepsilon \lambda_\pi} \Leftrightarrow 1 = \frac{\lambda_\varepsilon - 2}{1 + 2\lambda_\varepsilon} \Leftrightarrow \lambda = -3$ οπότε

(ε): $y = -3x + k$. Η (ε) εφάπτεται στην (C) $\Leftrightarrow 3(-3)^2 + 9 = k^2 \Leftrightarrow k = \pm 6$ οπότε, οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι (ε_1): $y = -3x + 6$ και (ε_2): $y = -3x - 6$.

Παράδειγμα 13. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της (C): $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$, που είναι παράλληλες προς την (η): $2x + y + 5 = 0$.

Λύση. Θεωρούμε παράλληλη μεταφορά του συστήματος Oxy των αξόνων στο $O'X\Psi$ όπου $O'(-1, 2)$ το κέντρο της έλλειψης. Επειδή $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = 2 + \Psi \end{cases}$ έχουμε (C):

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1$ και (η): $2(-1 + X) + (2 + \Psi) + 5 = 0 \Leftrightarrow$ (η): $2X + \Psi + 5 = 0$. Είναι $\lambda_\pi = -2$, άρα και $\lambda_c = -2$ οπότε (ε): $\Psi = -2X + k$. Για να εφάπτεται η (ε) στην (C), πρέπει και αρκεί $4(-2)^2 + 20 = k^2 \Leftrightarrow k = \pm 6$. Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι $(\varepsilon_1): \Psi = -2X + 6$ και $(\varepsilon_2): \Psi = -2X - 6$ στο $O'X\Psi$ ή, στο Oxy ,

$$((\varepsilon_1): y - 2 = 2(x + 1) + 6 \text{ και } (\varepsilon_2): y - 2 = -2(x + 1) - 6)$$

$$((\varepsilon_1): y = -2x + 6 \text{ και } (\varepsilon_2): y = -2x - 6).$$

Παράδειγμα 14. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της (C): $\frac{(x+2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ που είναι κάθετες επί την (η): $x + 3y + 1 = 0$.

Λύση. Θεωρούμε παράλληλη μεταφορά του συστήματος Oxy των αξόνων στο $O'X\Psi$ όπου

$O'(-2, -1)$ το κέντρο της έλλειψης. Επειδή $\begin{cases} x = -2 + X \\ y = -1 + \Psi \end{cases}$ έχουμε (C): $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

και

(η): $(-2 + X) + 3(-1 + \Psi) + 1 = 0 \Leftrightarrow$ (η): $X + 3\Psi - 4 = 0$ οπότε $\lambda_\pi = -1/3$ και αφού

$(\varepsilon) \perp (\eta) \Rightarrow \lambda_\varepsilon = 3$ δηλαδή (ε): $\Psi = 3X + k$. Η (ε) εφάπτεται στην (C) αν και μόνο $5 \cdot 3^2 + 4 = k^2 \Leftrightarrow k = \pm 7$ οπότε οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι

$(\varepsilon_1): \Psi = 3X + 7$ και $(\varepsilon_2): \Psi = 3X - 7$ στο $O'X\Psi$ ή, στο Oxy

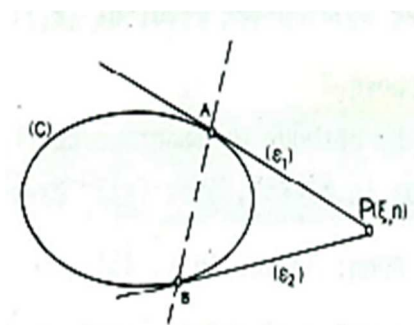
$$((\varepsilon_1): y + 1 = 3(x + 2) + 7 \text{ και } (\varepsilon_2): y + 1 = 3(x + 2) - 7) \Leftrightarrow$$

$$((\varepsilon_1): y = 3x + 12 \text{ και } (\varepsilon_2): y = 3x - 2)$$

Αν από σημείο $P(\xi, \eta)$ φέρουμε τις εφαπτόμενες PA , PB στην έλλειψη

(C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Τότε η εξίσωση της AB βρίσκεται

ως εξής:



$$\mathbf{M} \quad \left. \begin{aligned} \text{Αν } A(x_1, y_1) &\Rightarrow (\varepsilon_1): \frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \xrightarrow{P \in (\varepsilon_1)} \frac{\xi x_1}{\alpha^2} + \frac{\eta y_1}{\beta^2} = 1 \\ \text{Αν } B(x_2, y_2) &\Rightarrow (\varepsilon_2): \frac{xx_2}{\alpha^2} + \frac{yy_2}{\beta^2} = 1 \xrightarrow{P \in (\varepsilon_2)} \frac{\xi x_2}{\alpha^2} + \frac{\eta y_2}{\beta^2} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Άρα, η εξίσωση της AB είναι : $\frac{\xi x}{\alpha^2} + \frac{\eta y}{\beta^2} = 1$ αφού, λόγω των (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των σημείων $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

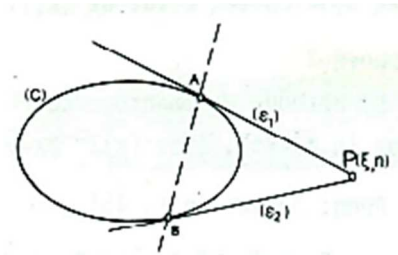
Παράδειγμα 15. Από το σημείο P στην έλλειψη (C) : $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. Να υπολογιστεί η $d(P, AB)$.

Λύση.

$$\left. \begin{aligned} \text{Αν } A(x_1, y_1) &\Rightarrow PA: \frac{xx_1}{2} + \frac{yy_1}{3} = 1 \xrightarrow{P \in PA} \frac{-4x_1}{2} + \frac{5y_1}{3} = 1 \\ \text{Αν } B(x_2, y_2) &\Rightarrow PB: \frac{xx_2}{2} + \frac{yy_2}{3} = 1 \xrightarrow{P \in PB} \frac{-4x_2}{2} + \frac{5y_2}{3} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB: \frac{-4x}{2} + \frac{5y}{3} = 1 \Leftrightarrow AB: 6x - 5y + 3 = 0 \text{ άρα,}$$

$$d(P, AB) = \frac{|6 \cdot (-4) - 5 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{36 + 25}} = \frac{46}{\sqrt{61}}.$$



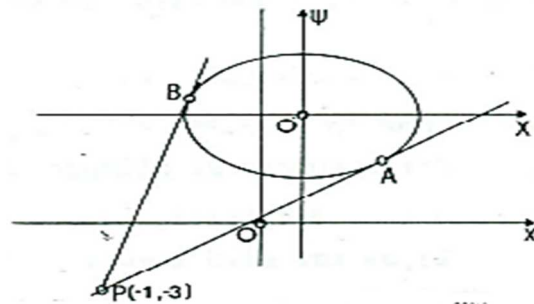
Παράδειγμα 16. Από το σημείο $P(-1, -3)$ φέρνουμε

τις εφαπτόμενες PA , PB στην έλλειψη (C) : $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$. Να βρεθεί η εξίσωση της AB .

Λύση. Έστω παράλληλη μεταφορά του συστήματος Oxy των αξόνων στο $O'X\Psi$ όπου $O'(1, 2)$ το κέντρο της έλλειψης.

Επειδή $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = 2 + \Psi \end{cases}$ έχουμε

(C) : $\frac{X^2}{4} + \frac{\Psi^2}{2} = 1$ και $P(-3, -5)$. Με βάση τα προηγούμενα, η εξίσωση AB στο $OX\Psi$ είναι η $\frac{-3X}{4} - \frac{5\Psi}{2} = 1 \Leftrightarrow -3X - 10\Psi = 4 \Leftrightarrow 3X + 10\Psi + 4 = 0$ και άρα στο Oxy είναι $AB: 3(x-1) + 10(y-2) + 4 = 0 \Leftrightarrow AB: 3x + 10y - 19 = 0$.



M4 Αν από σημείο $P(\xi, \eta)$ φέρουμε τις εφαπτόμενες PA , PB στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ζητάμε τις εξισώσεις τους ή την γωνία τους (οπότε αρκεί να βρεθούν τα λ_{PA} , λ_{PB}).

Παράδειγμα 17. Από το $P(4, 5)$ φέρνουμε εφαπτόμενες στην έλλειψη $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Να βρεθεί η γωνία τους.

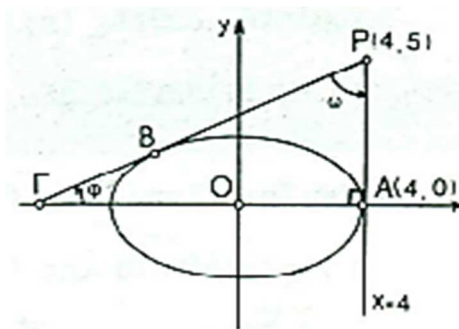
Λύση. Οι ευθείες που διέρχονται από το $P(4, 5)$ είναι οι $x = 4$ και $y - 5 = \lambda(x - 4)$,

$$\lambda \in \mathbb{R}. \text{ Έστω το σύστημα } \begin{cases} x = 4 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ άρα η ευθεία $x = 4$ εφάπτεται στην έλλειψη στο σημείο $A(4, 0)$.

Οι ευθείες $(\varepsilon): y = \lambda x - (4\lambda - 5)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ εφάπτονται στην (C) , αν και μόνο ισχύει

$$16\lambda^2 + 9 = (4\lambda - 5)^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{5} = \lambda_{PB}. \text{ Άρα } \sigma\varphi\omega = \varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{PB} = \frac{2}{5}.$$



Παράδειγμα 18. Από το σημείο $P(-2, -1)$ φέρνουμε εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ προς

την έλλειψη $(C): \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. Να βρεθεί η γωνία τους.

Λύση. Θεωρούμε παράλληλη μεταφορά του συστήματος Oxy των αξόνων στο $O'X\Psi$ με $O'(1, 3)$ που είναι το κέντρο της έλλειψης. Επειδή $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = +\Psi \end{cases}$ στο σύστημα $O'X\Psi$

έχουμε $(C): \frac{X^2}{16} + \frac{\Psi^2}{9} = 1$, $P(-3, -4)$. Οι ευθείες που διέρχονται από το $P(-3, -4)$

έχουν εξισώσεις $X = -3$, $\Psi + 4 = \lambda(X + 3)$. Αλλά, διαπιστώνουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $X = -3$ δεν εφάπτεται στην (C) . Αν $(\varepsilon): \Psi + 4 = \lambda(X + 3)$

$\Leftrightarrow (\varepsilon): \Psi = \lambda X + (3\lambda - 4)$ τότε η (ε) εφάπτεται στη (C) , αν και μόνο ισχύει

$$16\lambda^2 + 9 = (3\lambda - 4)^2 \Leftrightarrow 7\lambda^2 + 24\lambda - 7 = 0 \quad (1). \text{ Ρίζες της (1) είναι τα } \lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2} \text{ οπότε}$$

$$\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{-7}{7} = -1 \text{ που σημαίνει } (\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2), \text{ άρα οι εφαπτόμενες που άγονται από}$$

το P προς την (C) , σχηματίζουν γωνία 90° .

Μ5 Όταν εμφανίζεται η απόσταση σημείου M μιας έλλειψης από την εστία E, E' , τότε χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις $d(M, E) = \alpha - \varepsilon x_0$, $d(M, E) = \alpha + \varepsilon x_0$.

Σχόλιο. Λύνεται και ως εξής: $d(M, E) = \alpha - \varepsilon x_0 > 0$,

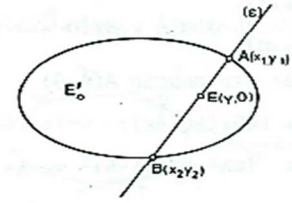
$$d(M, (\varepsilon)) = \left| x_0 - \frac{\alpha^2}{\varepsilon} \right| = \left| x_0 - \frac{\alpha}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{\varepsilon x_0 - \alpha}{\varepsilon} \right| = \frac{\alpha - \varepsilon x_0}{\varepsilon} \text{ οπότε } \frac{d(M, E)}{d(M, (\varepsilon))} = \varepsilon.$$

Παράδειγμα 19. Μεταβλητή ευθεία (ε) διέρχεται από την εστία E έλλειψης και την

τέμνει στα A, B . Δείξτε ότι $\frac{1}{\|EA\|} + \frac{1}{\|EB\|} = \text{σταθ.}$

Λύση. Έστω ότι $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $E(\gamma, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και ε η εκκεντρότητα της (C) . Τότε $\|\overline{EA}\| = d(A, E) = \alpha - \varepsilon x_1$, $\|\overline{EB}\| = d(B, E) = \alpha - \varepsilon x_2$ οπότε:

$$\frac{1}{\|\overline{EA}\|} + \frac{1}{\|\overline{EB}\|} = \frac{1}{\alpha - \varepsilon x_1} + \frac{1}{\alpha - \varepsilon x_2} = \frac{2\alpha - \varepsilon(x_1 + x_2)}{\alpha^2 - \alpha\varepsilon(x_1 + x_2) + \varepsilon^2 \cdot x_1 x_2} \quad (1).$$



Οι συντεταγμένες των σημείων A , B είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon): y - 0 = \lambda(x - \gamma) \\ (C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x - \lambda \gamma \\ \beta^2 x^2 + \alpha^2 (\lambda^2 x^2 - 2\lambda^2 \gamma x + \lambda^2 \gamma^2) - \alpha^2 \beta^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x - \lambda \gamma \\ (\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2) x^2 + 2\alpha^2 \lambda^2 \gamma x + \alpha^2 (\lambda^2 \gamma^2 - \beta^2) = 0 \end{array} \right\} \xleftarrow[\gamma = \alpha\varepsilon]{\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x - \lambda \alpha \varepsilon \\ (\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2) x^2 - 2\alpha^3 \lambda^2 \varepsilon x + \alpha^2 (\lambda^2 \alpha^2 \varepsilon^2 - \beta^2) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Η (2) έχει ως λύσεις, τις τετμημένες των A , B οπότε, $x_1 + x_2 = \frac{2\alpha^3 \lambda^2 \varepsilon}{\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2} \quad (3)$

και $x_1 x_2 = \frac{\alpha^2 (\lambda^2 \alpha^2 \varepsilon^2 - \beta^2)}{\beta^2 \alpha^2 \lambda} \quad (4)$. Τότε η (1) με βάση τις (3), (4) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\overline{EA}\|} + \frac{1}{\|\overline{EB}\|} &= \frac{2\alpha - \varepsilon \frac{2\alpha^3 \lambda^2 \varepsilon}{\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2}}{\alpha^2 - \varepsilon \cdot \frac{2\alpha^3 \lambda^2 \varepsilon}{\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\alpha^2 (\lambda^2 \alpha^2 \varepsilon^2 - \beta^2)}{\beta^2 \alpha^2 \lambda}} = \\ &= \frac{2\alpha\beta^2 + 2\alpha^3 \lambda^2 - 2\alpha^3 \lambda^2 \varepsilon^2}{\alpha^2 \beta^2 + \alpha^4 \lambda^2 - 2\alpha^4 \lambda^2 \varepsilon^2 + \alpha^4 \lambda^2 \varepsilon^4 - \alpha^2 \beta^2 \varepsilon^2} = \frac{2\alpha (\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2 - \alpha^2 \lambda^2 \varepsilon^2)}{\alpha^2 [\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2 - 2\alpha^2 \lambda^2 \varepsilon^2 + \alpha^2 \lambda^2 \varepsilon^4 - \beta^2 \varepsilon^2]} = \\ &= \frac{2[\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2 (1 - \varepsilon^2)]}{\alpha [\beta^2 (1 - \varepsilon^2) + \alpha^2 \lambda^2 (1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4)]} = \frac{2[\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2 (1 - \varepsilon^2)]}{\alpha [\beta^2 (1 - \varepsilon^2) + \alpha^2 \lambda^2 (1 - \varepsilon^2)^2]} \\ &= \frac{2[\beta^2]}{\alpha (1 - \varepsilon^2) [\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2 (1 - \varepsilon^2)]} = \frac{2}{\alpha (1 - \varepsilon^2)} = \text{σταθ.} \end{aligned}$$

Η σχέση ισχύει και για την ευθεία $\chi = y$.

M₆ Όταν θεωρούμε τυχαίο σημείο M έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι δυνατό να θεωρούμε ότι το M είναι $M(\alpha \cos t, \beta \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Τούτο απλοποιεί πολλές φορές την λύση, από πλευράς λογισμού.

Παράδειγμα 20. Το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών μιας έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από την εφαπτομένη σε κάποιο σημείο της, είναι ίσο με β^2 .

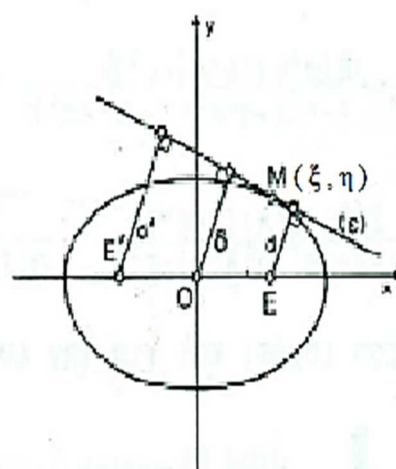
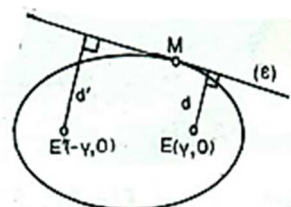
Λύση. Αν $M(\alpha \cos t, \beta \sin t)$ τότε

$$(\varepsilon): \frac{\alpha \cos t}{\alpha^2} + \frac{\beta \sin t}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon): \beta \sin t \cdot \chi \alpha \eta \mu t \cdot y - \alpha \beta = 0. \text{ Τότε:}$$

$$d = \frac{|\beta \gamma \sin t - \alpha \beta|}{\sqrt{\beta^2 \sin^2 t + \alpha^2 \eta \mu^2 t}},$$

$$d' = \frac{|-\beta \gamma \sin t - \alpha \beta|}{\sqrt{\beta^2 \sin^2 t + \alpha^2 \eta \mu^2 t}} = \frac{|\beta \gamma \sin t + \alpha \beta|}{\sqrt{\beta^2 \sin^2 t + \alpha^2 \eta \mu^2 t}} \quad \text{οπότε :}$$



$$d \cdot d' = \frac{\beta |\gamma \sin t - \alpha| \beta |\gamma \sin t + \alpha|}{\beta^2 \sin^2 t + \alpha^2 \eta \mu^2 t} = \frac{\beta^2 |\gamma^2 \sin^2 t - \alpha^2|}{\beta^2 \sin^2 t + \alpha^2 \eta \mu^2 t} = \frac{\beta^2 |(\alpha^2 - \beta^2) \sin^2 t - \alpha^2|}{\beta^2 \sin^2 t + \alpha^2 \eta \mu^2 t} =$$

$$= \frac{\beta^2 |-\alpha^2 (1 - \sin^2 t) - \beta^2 \sin^2 t|}{\beta^2 \sin^2 t + \alpha^2 \eta \mu^2 t} = \frac{\beta^2 |\alpha^2 \eta \mu^2 t + \beta^2 \sin^2 t|}{\beta^2 \sin^2 t + \alpha^2 \eta \mu^2 t} = \beta^2$$

β' Τρόπος: Έστω ότι $M(\xi, \eta) \Rightarrow (\varepsilon): \frac{\xi \chi}{\alpha^2} + \frac{\eta y}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): \beta^2 \xi \chi + \alpha^2 \beta^2 = 0$. Αν δ η απόσταση του 0 από την (ε) έχουμε :

$$\delta = \frac{|-\alpha^2 \beta^2|}{\sqrt{\beta^4 \xi^2 + \alpha^4 \eta^2}} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\sqrt{\beta^4 \xi^2 + \alpha^4 \eta^2}} \quad \text{Τότε έχουμε :}$$

$$d = d(E, (\varepsilon)) = \frac{|\beta^2 \xi \gamma - \alpha^2 \beta^2|}{\sqrt{\beta^4 \xi^2 + \alpha^4 \eta^2}} = \frac{\beta^2 |\gamma \xi - \alpha^2|}{\sqrt{\beta^4 \xi^2 + \alpha^4 \eta^2}} = \frac{\beta^2 |\alpha \varepsilon \xi - \alpha^2|}{\sqrt{\beta^4 \xi^2 + \alpha^4 \eta^2}} = \frac{\alpha \beta^2 |\alpha - \varepsilon \xi|}{\sqrt{\beta^4 \xi^2 + \alpha^4 \eta^2}} = \frac{\delta}{\alpha} (\alpha - \varepsilon \xi)$$

και όμοια $d' = \frac{\delta}{\alpha} (\alpha + \varepsilon \xi)$, οπότε $d \cdot d' = \frac{\delta^2}{\alpha^2} (\alpha - \varepsilon \xi)(\alpha + \varepsilon \xi) \quad (1).$

$$\text{Επειδή } M(\xi, \eta) \in (C) \Leftrightarrow \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 \xi^2 + \alpha^2 \eta^2 = \alpha^2 \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \eta^2 = \alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \xi^2 \text{ είναι : } \delta^2 = \frac{\alpha^4 \beta^4}{\beta^4 \xi^2 + \alpha^4 \eta^2} = \beta^2$$

$$= \frac{\alpha^4 \beta^4}{\beta^4 \xi^2 + \alpha^2 (\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \xi^2)} = \frac{\alpha^4 \beta^2}{\beta^2 \xi^2 + \alpha^4 - \alpha^2 \xi^2} =$$

$$\frac{\alpha^4 \beta^2}{(\alpha^2 - \gamma^2) \xi^2 + \alpha^4 - \alpha^2 \xi^2} = \frac{\alpha^4 \beta^2}{\alpha^4 - \gamma^2 \xi^2} = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 - \varepsilon^2 \xi^2} = \frac{\alpha^2 \beta^2}{(\alpha + \varepsilon \xi)(\alpha - \varepsilon \xi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2}{\alpha^2} (\alpha + \varepsilon \xi)(\alpha - \varepsilon \xi) = \beta^2 \xrightarrow{(1)} dd' = \beta^2$$

Παράδειγμα 21. Ποιά η εκκεντρότητα της

$$\text{έλλειψης } (C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha > \beta$$

όταν οι εστίες της βλέπουν τον μικρό άξονα υπό ορθή γωνία;

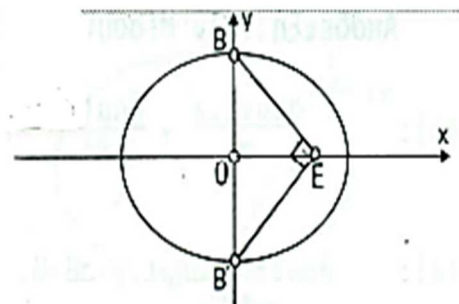
Λύση. Είναι $E(\gamma, 0)$, $B(0, \beta)$, $B'(0, -\beta)$ οπότε

$\overline{EB'}(-\gamma, \beta)$ και $\overline{EB'}(-\gamma, -\beta)$. Άρα

$$\widehat{EBB'} = 90^\circ \Leftrightarrow \overline{EB} \perp \overline{EB'} \Leftrightarrow \overline{EB} \cdot \overline{EB'} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = \gamma^2. \text{ Τότε (αφού } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2) \text{ έπεται}$$

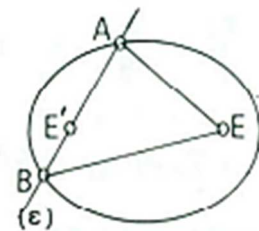
$$\alpha^2 = 2\gamma^2 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \text{ και συνεπώς } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Παράδειγμα 22. Μεταβλητή ευθεία διέρχεται από την

$$\text{εστία } E' \text{ έλλειψης } (C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha > \beta \text{ και τέμνει}$$

τη (C) στα A, B. Αν E η άλλη εστία, τότε η περίμετρος L του τριγώνου AEB παραμένει σταθερή.

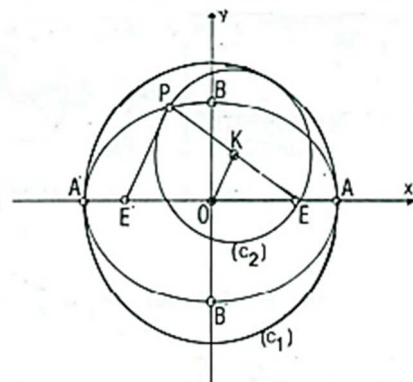


$$\text{Λύση. Είναι: } L_{EAB} = EA + AB + BE = EA + AE' + E'B + BE = (AE + AE') + (BE + BE') = 2\alpha + 2\alpha = 4\alpha \text{ σταθερό.}$$

Παράδειγμα 23. Αν P μεταβλητό σημείο έλλειψης και E μια εστία της, δείξτε ότι ο κύκλος με διάμετρο EP εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο της έλλειψης.

$$\text{Λύση. Αν } (C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha > \beta \text{ η εξίσωση}$$

της έλλειψης, ο περιγεγραμμένος κύκλος (C_1) έχει



κέντρου 0 και ακτίνας $R=a$. Έστω ότι $P(x_0, y_0)$, είναι $PE = a - \varepsilon x_0$, $PE' = a + \varepsilon x_0$.

Ο κύκλος (C_2) διαμέτρου EP, έχει ακτίνα $\rho = \frac{PE}{2} = \frac{a - \varepsilon x_0}{2}$. Ισχύει ότι **α)** Η

διάκεντρος των (C_1) , (C_2) είναι $OK = \frac{PE'}{2} = \frac{a - \varepsilon x_0}{2} = \frac{a}{2} + \frac{\varepsilon x_0}{2}$ **β)**

$$R - \rho = a - \frac{1}{2}(a - \varepsilon x_0) = \frac{a}{2} + \frac{\varepsilon x_0}{2}.$$

Συνεπώς, είναι $OK = R - \rho$ και άρα οι κύκλοι (C_1) , (C_2) εφάπτονται εσωτερικά.

Παράδειγμα 24. Έστω έλλειψη (C) : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με κύριες κορυφές A, A'. Αν M

τυχαίο σημείο της, δείξτε ότι: $\lambda_{MA} \cdot \lambda_{MA'} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Λύση. Αν $M(\xi, \eta)$ τυχαίο σημείο της (C) τότε: $\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 \xi^2 + \alpha^2 \eta^2 = \alpha^2 \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \eta^2 = \beta^2 (\alpha^2 - \xi^2) \quad (1).$$

$$\text{Επειδή } \lambda_{MA} = \frac{-\eta}{\alpha - \xi}, \lambda_{MA'} = \frac{-\eta}{\alpha + \xi} \Rightarrow \lambda_{MA} \cdot \lambda_{MA'} = \frac{-\eta^2}{\alpha^2 - \xi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{MA} \cdot \lambda_{MA'} = \frac{-\alpha^2 \eta^2}{\alpha^2 (\alpha^2 - \xi^2)} \xrightarrow{(1)} \frac{-\beta^2 (\alpha^2 - \xi^2)}{\alpha^2 (\alpha^2 - \xi^2)} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Παράδειγμα 25. Έστω έλλειψη

(C) : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και εφαπτόμενη της (ε) , που

τέμνει τις εφαπτόμενες της (C) στις κύριες κορυφές της, στα σημεία Γ, Δ. Δείξτε ότι η περιφέρεια με διάμετρο ΓΔ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

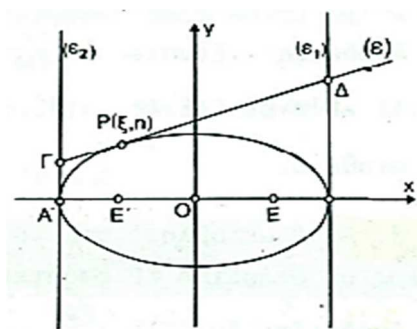
Λύση. Αν $P(\xi, \eta)$ το σημείο επαφής της (ε) και της (C) τότε:

$$(\varepsilon): \frac{\xi x}{\alpha^2} + \frac{\eta y}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow (\varepsilon): \beta^2 \xi x + \alpha^2 \eta y - \alpha^2 \beta^2 = 0.$$

Οι εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) στα άκρα του πρωτεύοντα άξονα, έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): x = \alpha$, $(\varepsilon_2): x = -\alpha$. Συντεταγμένες του Γ είναι η λύση του

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\alpha \\ \beta^2 \xi x + \alpha^2 \eta y = \alpha^2 \beta^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \left(-\alpha, \frac{\beta^2 (\alpha + \xi)}{\alpha \eta} \right)$$

Συντεταγμένες του Δ είναι η λύση του $\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ \beta^2 \xi x + \alpha^2 \eta y = \alpha^2 \beta^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \left(\alpha, \frac{\beta^2 (\alpha - \xi)}{\alpha \eta} \right)$



Το μέσο K του ΓΔ είναι $K\left(0, \frac{\beta^2}{\eta}\right)$ και $d^2(\Gamma, \Delta) = (2\alpha)^2 + \left(\frac{2\beta^2\xi}{\alpha\eta}\right)^2 = 4\left[\alpha^2 + \frac{\beta^2\xi^2}{\alpha^2\eta^2}\right]$

Η περιφέρεια διαμέτρου ΓΔ έχει κέντρο το $K\left(0, \frac{\beta^2}{\eta}\right)$ και

$$R = \frac{1}{2}d(\Gamma, \Delta) \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4}d^2(\Gamma, \Delta) \Rightarrow R^2 = \frac{\alpha^4\eta^2 + \beta^4\xi^2}{\alpha^2\eta^2} \text{ και άρα η εξίσωση της}$$

είναι : $(C'): x^2 + \left(y - \frac{\beta^2}{\eta}\right)^2 = \frac{\alpha^4\eta^2 + \beta^4\xi^2}{\alpha^2\eta^2}$. Για την εστία $E(\gamma, 0)$ έχουμε: Το E

$$\text{κείται στην } (C') \Leftrightarrow \gamma^2 + \left(0 - \frac{\beta^2}{\eta}\right)^2 = \frac{\alpha^4\eta^2 + \beta^4\xi^2}{\alpha^2\eta^2} \Leftrightarrow \gamma^2 + \frac{\beta^2}{\eta^2} = \frac{\alpha^4\eta^2 + \beta^4\xi^2}{\alpha^2\eta^2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2\gamma^2\eta^2 + \alpha^2\beta^4 = \alpha^4\eta^2 + \beta^4\xi^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\eta^2(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha^2\beta^4 = \alpha^4\eta^2 + \beta^4\xi^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4\eta^2 - \alpha^2\beta^2\eta^2 + \alpha^2\beta^4 = \alpha^4\eta^2 + \beta^4\xi^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^4\eta^2 + \alpha^2\beta^2\eta^2 = \alpha^2\beta^4 \Leftrightarrow \beta^2\xi^2 + \alpha^2\eta^2 = \alpha^2\beta^2 \quad \text{που ισχύει αφού}$$

$$P(\xi, \eta) \in (C) \Leftrightarrow \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2\xi^2 + \alpha^2\eta^2 = \alpha^2\beta^2.$$

Παράδειγμα 26. Στην έλλειψη $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ να

εγγραφεί ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδό.

Λύση. Είναι $E_{AB\Gamma\Delta} = \max \Leftrightarrow \frac{1}{4}E_{AB\Gamma\Delta} = \max$

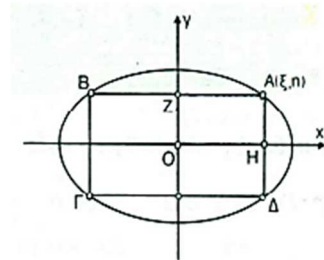
$$E_{AZOH} = \max \Leftrightarrow \xi \cdot \eta = \max \Leftrightarrow \xi^2 \cdot \eta^2 = \max \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi^2 \cdot \eta^2}{\alpha^2 \cdot \beta^2} = \max &\Leftrightarrow \frac{\xi^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\eta^2}{\beta^2} = \max \\ \text{Αλλά: } (C) &\Leftrightarrow \frac{\xi^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\xi^2}{\alpha^2} = \frac{\eta^2}{\beta^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{ \frac{\xi}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\eta}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \text{ αφού το A είναι σημείο του } \alpha'$$

τεταρτημόριου, οπότε τελικά αρκεί να πάρουμε $A\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)$. Οι άλλες κορυφές

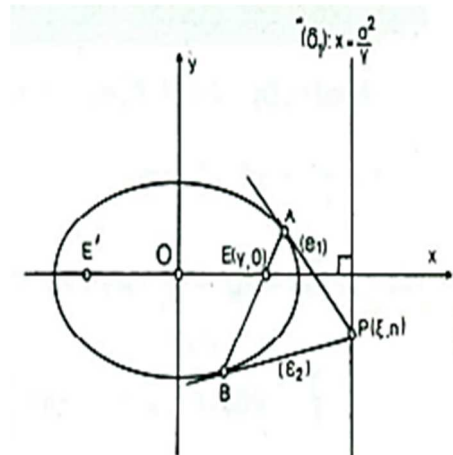
του ορθογωνίου, προφανώς είναι τα συμμετρικά του A ως προς τους άξονες και την αρχή των αξόνων.



Παράδειγμα 27. Αν A, B τα άκρα μίας χορδής

έλλειψης $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που διέρχεται από μία

εστία, δείξτε ότι οι εφαπτόμενες της (C) στα A, B τέμνονται σε σημείο της διευθετούσας, που αντιστοιχεί στην εστία που θεωρήσαμε.



Λύση. Θεωρούμε την εστία $E(\gamma, 0)$, την αντίστοιχη διευθετούσα $(\delta_1): x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ και ονομάζουμε $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τις εφαπτόμενες της (C) στα A, B . Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχουμε $(\varepsilon_1): \frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$, $(\varepsilon_2): \frac{xx_2}{\alpha^2} + \frac{yy_2}{\beta^2} = 1$. Έστω ότι το σημείο τομής P των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ πώς έχει συντεταγμένες (ξ, η) . Τότε:

$$\left. \begin{aligned} P \in (\varepsilon_1) &\Rightarrow \frac{\xi x_1}{\alpha^2} + \frac{\eta y_1}{\beta^2} = 1 \\ P \in (\varepsilon_2) &\Rightarrow \frac{\xi x_2}{\alpha^2} + \frac{\eta y_2}{\beta^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB: \frac{\xi x}{\alpha^2} + \frac{\eta y}{\beta^2} = 1. \text{ Αλλά το } E(\gamma, 0) \text{ κείται στην } AB$$

$$\Rightarrow \frac{\xi \cdot \gamma}{\alpha^2} + \frac{\eta \cdot 0}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{\xi \gamma}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow \xi = \frac{\alpha^2}{\gamma}, \text{ άρα το } P(\xi, \eta) \text{ κείται στην}$$

$$(\delta_1): x = \frac{\alpha^2}{\gamma}.$$

Παράδειγμα 28. Η εφαπτόμενη (ε) σε σημείο M της έλλειψης $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Τέμνει την διευθετούσα $(\delta_1): x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ στο σημείο N . Αν $E(\gamma, 0)$ η αντίστοιχη εστία,

δείξτε ότι $\widehat{MEN} = 1$ ορθή.

Λύση. Αν $M(\xi, \eta)$ τότε

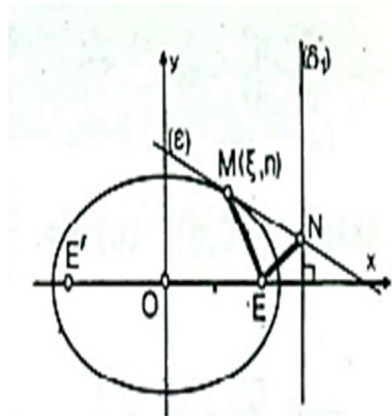
$$(\varepsilon): \frac{\xi x}{\alpha^2} + \frac{\eta y}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \beta^2 \xi x + \alpha^2 \eta y = \alpha^2 \beta^2. \text{ Επειδή το}$$

N είναι τομή των (δ_1) και (ε) βρίσκουμε ότι

$$N\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}, \frac{\beta^2(\gamma - \xi)}{\gamma \eta}\right) \text{ άρα } \lambda_{EN} = \frac{\beta^2(\gamma - \xi)}{\eta(\alpha^2 - \gamma^2)} = \frac{\gamma - \xi}{\eta}$$

$$\lambda_{EM} = \frac{\eta}{\xi - \gamma} \text{ άρα } \lambda_{EM} \cdot \lambda_{EN} = -1. \text{ Συνεπώς}$$

$\widehat{MEN} = 1$ ορθή.

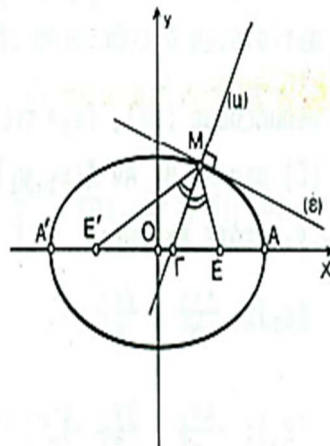


Παράδειγμα 29. Έστω έλλειψη $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,

εφαπτόμενη της (ε) στο σημείο της M και η κάθετη (u)

στο σημείο M της έλλειψης. Αν Γ η τομή (u) και του μεγάλου άξονα AA' της έλλειψης, δείξτε ότι $\|\vec{E'\Gamma}\| = \varepsilon \|\vec{E'M}\|$ και άρα οι $(u), (\varepsilon)$ είναι οι διχοτόμοι $(\varepsilon\omega\tau\epsilon\rho\iota\kappa\eta \text{ και } \varepsilon\zeta\omega\tau\epsilon\rho\iota\kappa\eta)$ της γωνίας $\widehat{EME'}$. (E, E' εστίες και ε η εκκεντρότητα).

Λύση. Αν $M(\xi, \eta)$ τότε $(\varepsilon): \frac{\xi x}{\alpha^2} + \frac{\eta y}{\beta^2} = 1 \Rightarrow$



$$(\varepsilon): \beta^2 \xi x + \alpha^2 \eta y - \alpha^2 \beta^2 = 0, \lambda_\varepsilon = \frac{-\beta^2 \xi^2}{\alpha^2 \eta^2} \Rightarrow \lambda_u = \frac{\alpha^2 \eta}{\beta^2 \xi} \quad \text{άρα}$$

$$(u): y - \eta = \frac{\alpha^2 \eta}{\beta^2 \xi} (x - \xi) \quad \text{και τέμνει τον άξονα των } x \text{ στο σημείο } \Gamma \text{ με συντεταγμένες}$$

την λύση του:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\gamma^2 \xi}{\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \varepsilon^2 \xi \end{cases} \Leftrightarrow \text{δηλαδή } \Gamma(\varepsilon^2 \xi, 0).$$

$$\text{Τότε } \|\overline{E'\Gamma}\| = \|\overline{\Gamma E}\| = |\chi_E - \chi_\Gamma| = |\gamma - \varepsilon^2 \xi| \stackrel{\gamma = \alpha \varepsilon}{=} |\alpha \varepsilon - \varepsilon^2 \xi| = \varepsilon |\alpha - \varepsilon \xi| = \varepsilon \|\overline{EM}\|$$

$$\text{και όμοια } \|\overline{\Gamma E'}\| = \|\overline{\Gamma E}\| = |-\gamma - \varepsilon^2 \xi| = |\gamma + \varepsilon^2 \xi| = |\alpha \varepsilon + \varepsilon^2 \xi| = \varepsilon |\alpha + \varepsilon \xi| = \varepsilon \cdot \|\overline{E'M}\|.$$

$$\text{συνεπώς ισχύει: } \frac{\|\overline{\Gamma E'}\|}{\|\overline{E'M}\|} = \varepsilon = \frac{\|\overline{\Gamma E}\|}{\|\overline{EM}\|} \Leftrightarrow \frac{\|\overline{\Gamma E'}\|}{\|\overline{\Gamma E}\|} = \frac{\|\overline{E'M}\|}{\|\overline{EM}\|}$$

η ΜΓ εσωτερική διχοτόμος της $E'\widehat{M}E$ οπότε, αφού $(\varepsilon) \perp M\Gamma \Rightarrow (\varepsilon)$ εξωτερική διχοτόμος της $E'\widehat{M}E$.

Παράδειγμα 30. Θεωρούμε χορδή AB της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που διέρχεται από την εστία της E. Αν P το σημείο τομής των εφαπτομένων της έλλειψης στα A, B και O το κέντρο της, τότε $d(O, AB) \cdot d(P, AB) = \beta^2$.

Λύση. Έχουμε ότι το P είναι σημείο της διευθετούσας $x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ που αντιστοιχεί στην

$E(\gamma, 0)$. Άρα είναι $P\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}, \mu\right), \mu \in \mathbb{R}$. Τότε από M_3 βρίσκουμε ότι

$$AB: \frac{\frac{\alpha^2}{\gamma} x}{\alpha^2} + \frac{\mu y}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow AB: \beta^2 x - \gamma \mu y - \beta^2 \gamma = 0. \text{ Συνεπώς } d(O, AB) = \frac{|\beta^2 \gamma|}{\sqrt{\beta^4 + \gamma^2 \mu^2}},$$

$$d(P, AB) = \frac{\beta^2 \cdot \frac{\alpha^2}{\gamma} + \gamma \mu^2 - \beta^2 \gamma}{\sqrt{\beta^4 + \gamma^2 \mu^2}} = \frac{|\beta^2(\alpha^2 - \gamma^2) + \gamma^2 \mu^2|}{\sqrt{\beta^4 + \gamma^2 \mu^2}} = \frac{|\beta^4 + \gamma^2 \mu^2|}{\gamma \sqrt{\beta^4 + \gamma^2 \mu^2}}$$

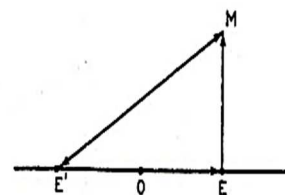
$$\text{οπότε } d(O, AB) \cdot d(P, AB) = \frac{\beta^2 \gamma}{\sqrt{\beta^4 + \gamma^2 \mu^2}} \cdot \frac{\beta^4 + \gamma^2 \mu^2}{\gamma \sqrt{\beta^4 + \gamma^2 \mu^2}} = \beta^2$$

Εξίσωση της έλλειψης. Πρόταση. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της ελλείψεως c στο $\mathbb{R}^2$ με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0), E(\gamma, 0), \gamma > 0$

και $|\overline{ME}| + |\overline{ME'}| = 2\alpha$ όπου $M \in c$ και $\alpha > \gamma$

δίνεται από τον τύπο $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2.$$



Σχ. 2.5α.

Απόδειξη. Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της ελλείψεως c , τότε η δεύτερη των

$$\text{εξισώσεων γράφεται : } \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}, \text{ άρα,}$$

$$(x+\gamma)^2 + y^2 = 4\alpha^2 - 4\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} + (x-\gamma)^2 + y^2 \Rightarrow \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} =$$

$$= \alpha - \frac{\gamma}{\alpha}x \Rightarrow \quad (2.72)$$

$$\Leftrightarrow x^2 2\gamma x + y^2 + y^2 = \alpha^2 - 2\gamma x + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2} x^2 + y^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \quad (2.73)$$

Επίσης $\alpha > \gamma$ η (2.73) μπορεί να γραφεί: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1 \quad (2.74)$ Επειδή $\alpha > \gamma$

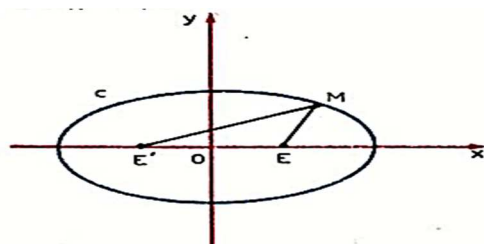
$\alpha > \gamma$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha^2 - \gamma^2 > 0$. Άρα μπορούμε να θέσουμε $\alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2$. Αντιστρόφως αν οι συντεταγμένες ενός σημείου $M(x, y)$ επαληθεύουν την (2.70) ή ισοδύναμα την (2.74), θα δείξουμε ότι το σημείο αυτό κείται σε μια έλλειψη με εστίες $E(\gamma, 0), E'(-\gamma, 0)$, δηλαδή θα δείξουμε ότι ισχύει η (2.71). Αλλά από την (2.74) προκύπτει αμέσως η (2.73) η οποία δίνει την (2.72) μόνο αν αποδειχθεί ότι: $\alpha - \frac{\gamma}{\alpha}x > 0 \quad (2.75)$. Επίσης από την (2.72) έπεται η (2.71) μόνο αν αποδειχθεί ότι:

$$2\alpha - \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} > 0 \text{ η οποία λόγω της (2.72) γίνεται } 2\alpha - \left(\alpha - \frac{\gamma}{\alpha}x\right) > 0 \text{ ή}$$

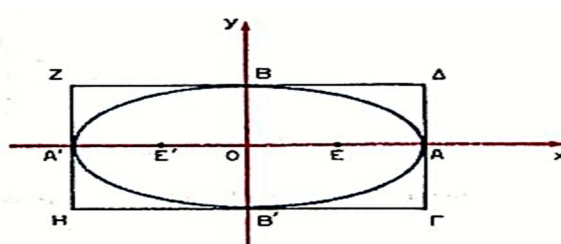
$$\alpha + \frac{\gamma}{\alpha}x > 0 \quad (2.76) \text{ Από την (2.74) είναι } \frac{x^2}{\alpha^2} = -\frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} \leq 1. \text{ Άρα } x^2 \leq \alpha^2 \text{ ή}$$

$$-\alpha \leq x \leq \alpha. \quad (2.77) \text{ Από την (2.77), επειδή } \frac{\gamma}{\alpha} < 1, \text{ συνάγουμε: } -\alpha \leq \frac{\gamma}{\alpha}x \leq \alpha. \text{ Από τις}$$

τελευταίες όμως ανισώσεις προκύπτουν αμέσως οι (2.75) και (2.76). Συνεπώς η (2.70) είναι εξίσωση ελλείψεως με εστίες $E'(-\gamma, 0), E(\gamma, 0)$ (σχ. 2.5β)

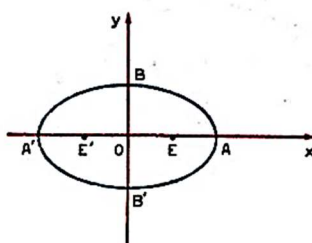


Σχ. 2.5β.

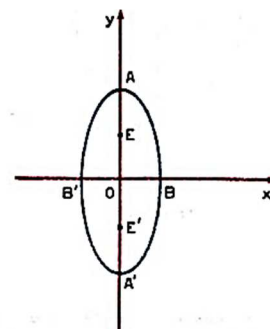


Σχ. 2.5γ.

Μερικές ιδιότητες της έλλειψης. Η εξίσωση (2.74) δεν μεταβάλλεται όταν θέσουμε όπου x το $-x$ και $y=y$ ή y το $-y$ και $x=x$ ή x το $-x$ και y το $-y$. Άρα, η έλλειψη είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy , τον άξονα Ox και ως προς την αρχή



Σχ. 2.5δ.



Σχ. 2.5ε.

0 . Η (2.74) μπορεί να γραφεί : $\frac{y^2}{\beta^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ (2.78) Από την (2.78) λαμβάνουμε

$1 - \frac{x^2}{a^2} \geq 0$, δηλαδή $-\alpha \leq x \leq \alpha$. Με ίδιο τρόπο προκύπτει $-\beta \leq y \leq \beta$. Κατά συνέπεια η έλλειψη περιλαμβάνεται μέσα στο ορθογώνιο, του οποίου οι πλευρές ορίζονται από τις εξισώσεις: $\Gamma\Delta \rightarrow x = \alpha$, $Z\text{H} \rightarrow x = -\alpha$, $\Delta Z \rightarrow y = \beta$, $\Gamma\text{H} \rightarrow y = -\beta$ (σχ. 2.5γ).

9. Στοιχεία έλλειψης

Η ευθεία, η οποία ενώνει τις εστίες της ελλείψεως ονομάζεται **κύριος άξονας** της ελλείψεως. Αυτός τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία $A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$, τα οποία λέγονται **κύριες κορυφές** της ελλείψεως. Το ευθύγραμμο τμήμα AA' λέγεται **μεγάλος άξονας** της ελλείψεως. Το μισό $A'O = OA = \alpha$ του μεγάλου άξονα λέγεται **μεγάλος ημιάξονας** της ελλείψεως. Ο άξονας Oy τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία $B(0, \beta)$ και $B'(0, -\beta)$ που καλούνται **δευτερεύουσες κορυφές**. Το ευθύγραμμο τμήμα BB' λέγεται **μικρός άξονας** της ελλείψεως. Το ευθύγραμμο τμήμα $OB = OB' = \beta$ λέγεται **μικρός ημιάξονας** της ελλείψεως. Ο λόγος $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$ λέγεται **εκκεντρότητα** της ελλείψεως. Προφανώς είναι $\varepsilon < 1$ (σχ. 2.5δ)

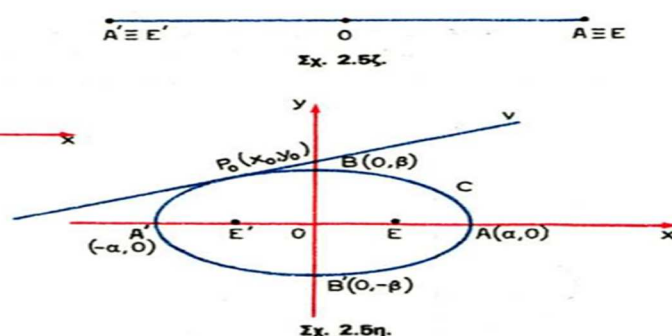
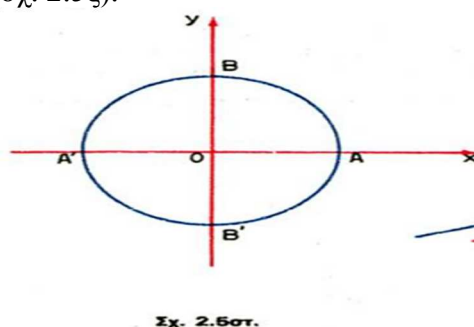
10. Ειδικές περιπτώσεις έλλειψης

Αν οι εστίες ληφθούν επάνω στον άξονα Oy δηλαδή $E(0, y)$, $E'(0, -y)$, τότε η εξίσωση της είναι : $\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ όπου οι αριθμοί α και β έχουν την ίδια σημασία όπως και στην εξίσωση (2.74) (σχ. 2.5ε).

➤ Αν $\gamma = 0$ τότε $\alpha = \beta$ και οι εστίες της ελλείψεως συμπίπτουν με το κέντρο της. Επομένως η έλλειψη γίνεται κύκλος, του οποίου το κέντρο συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Συνεπώς η εξίσωση αυτού του κύκλου είναι (σχ. 2.5στ):

$x^2 + y^2 = \alpha^2$, με $\gamma = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = 0$. Άρα ο κύκλος είναι ειδική περίπτωση ελλείψεως.

➤ Αν $\gamma = \alpha$ τότε οι δύο εστίες της ελλείψεως συμπίπτουν με τις κορυφές A και A' της ελλείψεως και η έλλειψη εκφυλίζεται σε διπλό ευθύγραμμο τμήμα AA' (σχ. 2.5ζ).



Από τα παραπάνω συνάγεται ότι αν διατηρήσουμε το α σταθερό και μεταβάλλουμε το γ από το 0 έως το α , τότε η έλλειψη ξεκινά από μία περιφέρεια κύκλου και γίνεται διαρκώς περισσότερο επιμήκης μέχρι να συμπέσει με το ευθύγραμμο τμήμα $A'A$ (σχ. 2.5ζ).

11. Εξίσωση της εφαπτόμενης μίας έλλειψης σε ένα σημείο της

Πρόταση. Έστω έλλειψη c που ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (2.79). Να δειχθεί ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης της c στο σημείο

$$P_0(x_0, y_0) \text{ είναι } \frac{xx_0}{\alpha^2} + \frac{yy_0}{\beta^2} = 1 \quad (2.80).$$

Απόδειξη. Επειδή το $P_0(x_0, y_0)$ είναι σημείο της ελλείψεως, έπεται ότι οι συντεταγμένες του πληρούν την (2.79), δηλαδή $\frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1$ (2.81). Η εξίσωση μιας τυχούσας ευθείας ω , που περνά από το σημείο

$$P_0(x_0, y_0) \text{ είναι } \nu \rightarrow y - y_0 = \lambda(x - x_0) \quad (2.82) \text{ όπου } \lambda \text{ ο συντελεστής διευσθύνσεως της } \nu. \text{ Τα κοινά σημεία της ελλείψεως } c \text{ με την ευθεία } \nu \text{ έχουν συντεταγμένες οι οποίες είναι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (2.79) και (2.82). Η εξίσωση (2.79) με την βοήθεια της (2.82) γίνεται } \beta^2 x^2 + \alpha^2 [\lambda x + (y_0 - \lambda x_0)]^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\beta^2 + \lambda^2 \alpha^2) x^2 + 2\lambda \alpha^2 (y_0 - \lambda x_0) x + \alpha^2 (y_0 - \lambda x_0)^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0 \quad (2.83)$$

Οι ρίζες της (2.83) ως προς x είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της c με την ν . Επειδή η ν πρέπει να εφάπτεται στην c προκύπτει ότι η (2.83) πρέπει να έχει διπλή ρίζα ίση με x_0 . Από (2.83) έπεται

$$x_0 = -\frac{\lambda \alpha^2 (y_0 - \lambda x_0)}{\beta^2 + \lambda^2 \alpha^2} \Rightarrow \beta^2 x_0 = -\lambda \alpha^2 y_0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\beta^2 x_0}{\alpha^2 y} \quad (2.84)$$

Η εξίσωση (2.82) με την βοήθεια της (2.84) δίνει την (2.80).

Εφαρμογή. Έστω σημεία $P_1(4,3)$ και $P_2\left(2, \frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$. Να βρεθούν η εξίσωση της έλλειψης που περνά από αυτά, τα στοιχεία της έλλειψης, οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα P_1, P_2 και η γωνία αυτών των εφαπτόμενων.

Λύση. Αν $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι η εξίσωση της έλλειψης τότε επειδή τα σημεία $(4,3)$ και

$$\left(2, \frac{3}{2}\sqrt{7}\right) \text{ ανήκουν στην έλλειψη, παίρνουμε: } \frac{16}{\alpha^2} + \frac{9}{\beta^2} = 1, \frac{4}{\alpha^2} + \frac{63}{4\beta^2} = 1. \text{ Από τη}$$

λύση του συστήματος ως προς $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$ βρίσκουμε $\alpha^2 = 32, \beta^2 = 18$. Άρα η

εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$. Τα στοιχεία της έλλειψης είναι

$\alpha = \sqrt{32}, \beta = \sqrt{18}, \gamma = \sqrt{14}, \varepsilon = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{32}}$. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης

στα σημεία P_1 , P_2 είναι $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$, $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$, $\frac{x}{16} + \sqrt{7} \frac{y}{12} = 1$, $\lambda_2 = -\frac{3}{4\sqrt{7}}$. Αν ω η

γωνία αυτών των εφαπτομένων, τότε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1 \lambda_2} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{3}{4\sqrt{7}}}{1 + \frac{9}{16\sqrt{7}}} = \frac{12(1 - \sqrt{7})}{9 + 16\sqrt{7}}$