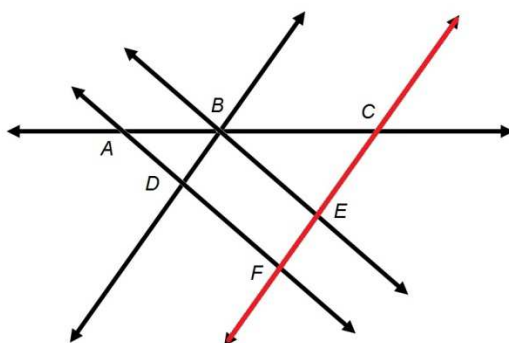




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Εξισώσεις των ευθειών στο επίπεδο



Σπουδαστής: **Κακακίος Στυλιανός** (AM7972)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς**, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: **2021– 2022**

Ημερομηνία ανάθεσης: **22.05.2021**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **02.02./2022**
 Ημερομηνία εξέτασης: **... / 02 / 2022**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

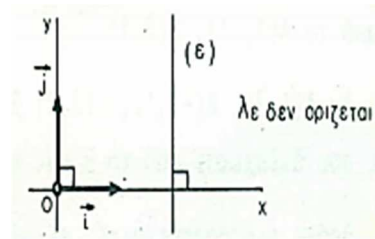
Περιεχόμενα

1. Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας.....	3
2. Εξισώσεις ευθείας.....	5
3. Παρατηρήσεις	5
4. Ανηγγμένη εξίσωση ευθείας.....	8
5. Εξίσωση ευθείας από τις συντεταγμένες επί την αρχή.....	8
6. Σχετική θέση δυο ευθειών	8
7. Καθετότητα ευθειών	9
7.1 Παρατήρηση.....	10
8. Γωνία δυο ευθειών.....	10
9. Συνθήκη για να διέρχονται τρεις ευθείες από το ίδιο σημείο	11
10. Συνθήκη για να ανήκουν τρεις ευθείες στην ίδια διεύθυνση.....	11
11. Πρόσημο του $f(x, y) = Ax + By + \Gamma, A + B \neq 0$	12
12. Απόσταση σημείου από ευθεία.....	14
13. Εξισώσεις διχοτόμων των γωνιών δυο ευθειών.....	14
14. Εξίσωση μεσοπαράλληλου δύο παραλλήλων ευθειών.....	15
15. Υπολογισμός εμβαδού τριγώνου	16
16. Δέσμη ευθειών στο επίπεδο	17
17. Παρατηρήσεις	18
18. Μέθοδοι για τη λύση ασκήσεων	22
18.1 Μέθοδος 1 ^η	22
18.2 Μέθοδος 2 ^η	24
18.3 Μέθοδος 3 ^η	36
18.4 Μέθοδος 4 ^η	38
18.5 Μέθοδος 5 ^η	39

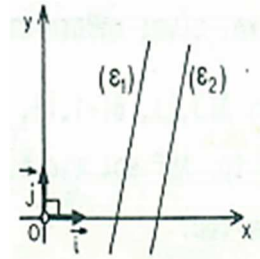
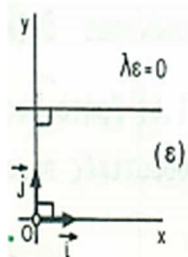
1. Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Ορίζουμε ως συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε) και γράφουμε λ_ε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{a} \neq \vec{0}$ που έχει φορέα την (ε) . Άρα $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{a}}$. Είναι φανερό ότι:

- Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ τότε δεν ορίζεται ο λ_ε .



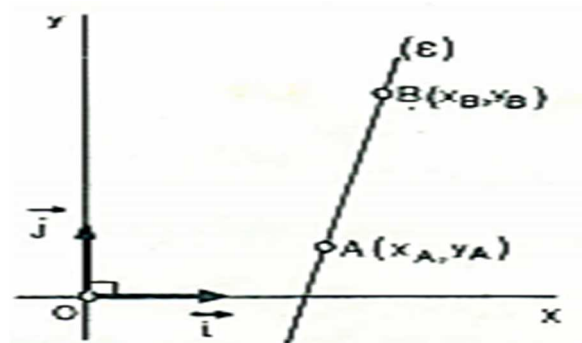
- Αν $(\varepsilon) // xx'$ τότε $\lambda_\varepsilon = 0$.



- Αν $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$.

Ορίζουμε ως συντελεστή διεύθυνσης του τμήματος AB (και γράφουμε λ_{AB}) τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε) που ορίζουν τα σημεία A, B.

- Αν $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ σημεία της ευθείας (ε) με $x_A \neq x_B$ τότε $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



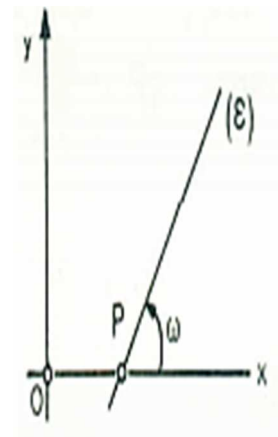
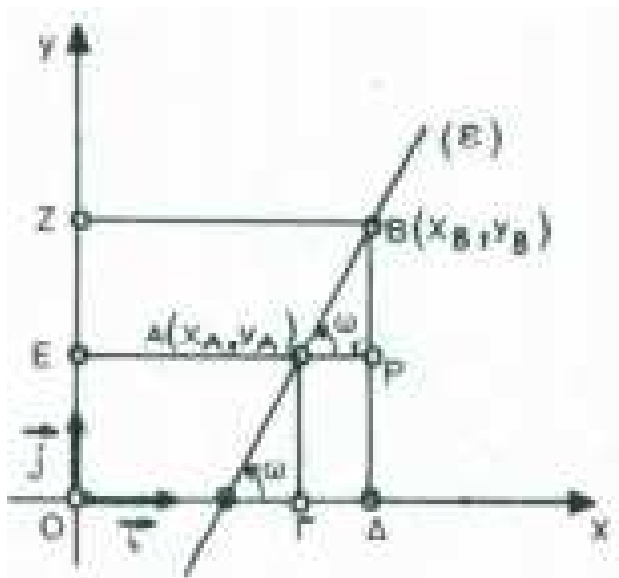
Απόδειξη Το διάνυσμα $\vec{AB}$ έχει φορέα την (ε) οπότε: $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{AB}}$. Αλλά

$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ οπότε: $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Θεωρούμε ευθεία (ε) που τέμνει

τον άξονα xx' στο P. Συμβολίζουμε με ω τη γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί περί το P ο άξονας xx' , με θετική φορά πάνω στο επίπεδο, ώστε να συμπίσει με την (ε) . Η γωνία ω ορίζεται ως η γωνία του άξονα xx' και της ευθείας (ε) .

Είναι φανερό ότι ο άξονας xx' σχηματίζει ίσες γωνίες με ευθείες που ανήκουν στην ίδια διεύθυνση και ότι $0 < \omega < \pi$. Όταν $(\varepsilon) // xx'$, ως γωνία του xx' και της (ε) θεωρείται η μηδενική.

Άρα, γενικά είναι $0 < \omega < \pi$.



- Αν ω η γωνία άξονα xx' και της (ε) τότε $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{\varepsilon}$, $\omega \neq \frac{\pi}{2}$

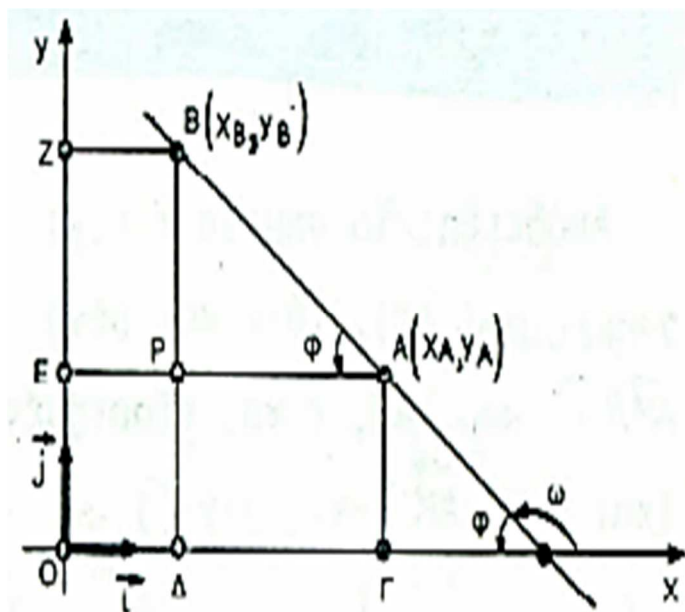
Απόδειξη Με $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\|\overrightarrow{PB}\|}{\|\overrightarrow{AP}\|} = \frac{\|\overrightarrow{EZ}\|}{\|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\|} = \frac{\overrightarrow{EZ}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \frac{y_Z - y_E}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \lambda_{\varepsilon}$$

Αντικαταστήσαμε $\|\overrightarrow{EZ}\| = \overrightarrow{EZ}$ και $\|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\| = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ αφού $\overrightarrow{EZ} \nearrow \nearrow \vec{j}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} \nearrow \nearrow \vec{i}$.

Με $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi\varphi = -\frac{\|\overrightarrow{PB}\|}{\|\overrightarrow{PA}\|} = -\frac{\|\overrightarrow{EZ}\|}{\|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\|} = -\frac{\overrightarrow{EZ}}{\overrightarrow{\Delta\Gamma}} = -\frac{\overrightarrow{EZ}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \frac{y_Z - y_E}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \lambda_{\varepsilon}$$

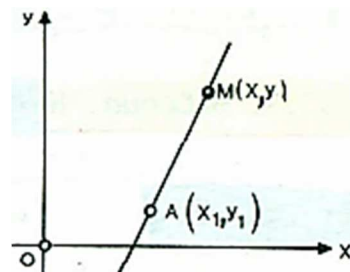


2. Εξισώσεις ευθείας

Η ευθεία (ε) που διέρχεται από το $A(x_1, y_1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έχει εξίσωση $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$

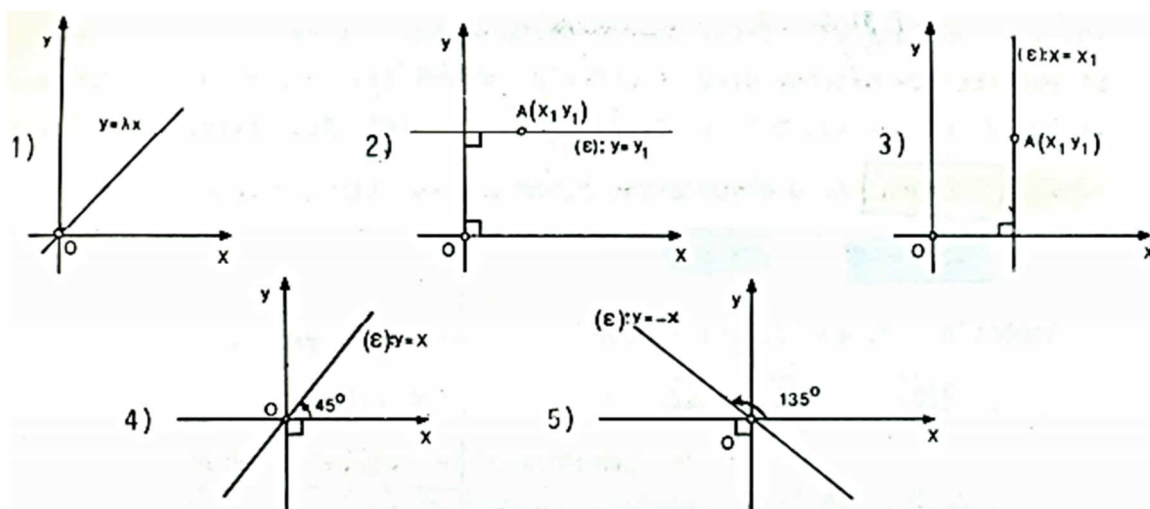
Απόδειξη Το σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου ανήκει στην (ε) , τότε και μόνο τότε, αν

$$\lambda_{AM} = \lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \lambda \Leftrightarrow y - y_1 = \lambda(x - x_1)$$



3. Παρατηρήσεις

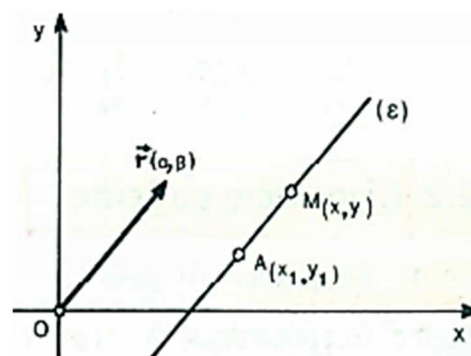
- Αν $A=0$ οπότε $x_1 = y_1 = 0$ έχουμε $(\varepsilon): y = \lambda x$.
- Αν $\lambda=0$ οπότε $(\varepsilon) // x'$ η εξίσωση γίνεται $y - y_1 = 0 \Leftrightarrow y = y_1$.
- Αν $\lambda \notin \mathbb{R}$ οπότε $(\varepsilon) // y'$ η εξίσωση γίνεται $x - x_1 = 0 \Leftrightarrow x = x_1$.
- Η διχοτόμος της $1^{\text{ης}}-3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων έχει $\lambda = \tan 45^\circ = 1$ και άρα εξίσωση $y = x$.
- Η διχοτόμος της $2^{\text{ης}}-4^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων έχει $\lambda = \tan 135^\circ = -1$ και άρα εξίσωση $y = -x$. Τα παραπάνω αποδίδονται σχηματικά από τα παρακάτω σχήματα.



- Η ευθεία (ε) που διέρχεται από το $A(x_1, y_1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα

$$\vec{r}(\alpha, \beta) \text{ έχει εξίσωση } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη Το σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου ανήκει στην (ε) , τότε και μόνο τότε, αν $\overline{AM} // \vec{r}$ γρ.



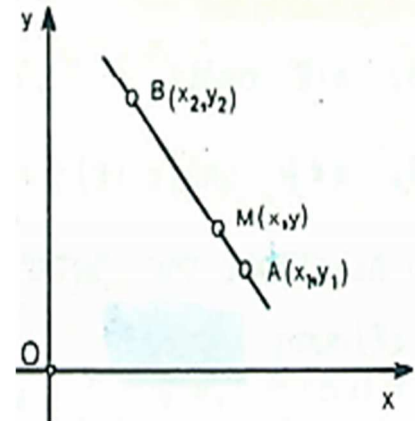
$$\text{εξαρτημένα (και αφού } \overrightarrow{AM}(x-x_1, y-y_1)) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, έχει εξίσωση

$$(ε): \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Απόδειξη Το σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου ανήκει στην (ε), τότε και μόνο τότε αν $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ γραμμικά εξαρτημένα (και αφού $\overrightarrow{AM}(x-x_1, y-y_1)$, $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1, y_2-y_1)$)

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Αν $y_2 - y_1 \neq 0$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\frac{x-x_1}{y-y_1} = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ ή και

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

- Η εξίσωση (ε): $Ax+By+\Gamma=0$ με $|A|+|B| \neq 0$ είναι εξίσωση ευθείας.

Απόδειξη Θεωρούμε το σημείο $P(x_1, y_1)$ τέτοιο, ώστε $Ax_1 + By_1 + \Gamma = 0$ και το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u}(A, B)$. Αν $M(x, y)$ σημείο του επιπέδου τέτοιο ώστε $Ax + By + \Gamma = 0 \Leftrightarrow Ax + By + \Gamma - (Ax_1 + By_1 + \Gamma) = 0$ είναι

$\overrightarrow{PM}(x-x_1, y-y_1) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$ (1). Επειδή το $P(x_1, y_1)$ είναι σταθερό σημείο, το $\vec{u}(A, B)$ σταθερό διάνυσμα και από (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \perp \vec{u}$, έπεται ότι το M έχει ως τόπο ευθεία (ε) που άγεται από το P και είναι κάθετη στο φορέα του $\vec{u}$.

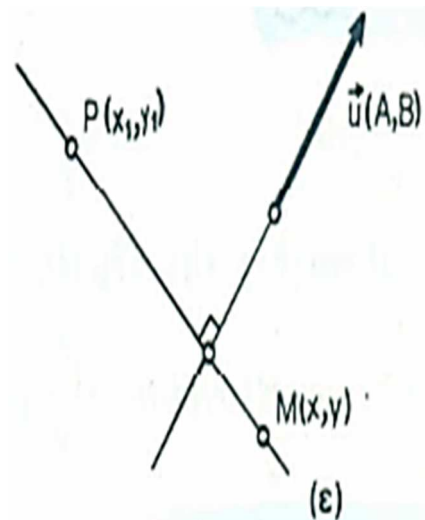
Άρα, η γεωμετρική εικόνα της εξίσωσης $Ax + By + \Gamma = 0$ με $|A|+|B| \neq 0$ είναι ευθεία (ε).

Το $\vec{u}(A, B)$ είναι κάθετο επί την (ε).

Επειδή για το $\vec{V}(B, -A)$ είναι $\vec{u} : \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{V} \perp \vec{u}$

οπότε $\vec{V} // (ε)$ είναι $\lambda_{(ε)} = \lambda_{\vec{V}} = \frac{-A}{B}$ όταν $B \neq 0$.

Αν $B=0$ τότε το $\lambda_{\vec{V}}$ δεν ορίζεται και είναι $(ε) // y'y$. Άρα:



Η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $|A|+|B|\neq 0$ έχει ως γεωμετρική εικόνα ευθείας (ε) με $\lambda_{\varepsilon} = \frac{-A}{B}$ όταν $B \neq 0$.

Αν $B=0$ τότε $(\varepsilon) // y'y$.

Αν $A=0$ τότε $(\varepsilon) // xx'$.

Το $\vec{u}(A,B)$ είναι κάθετο επί την (ε) .

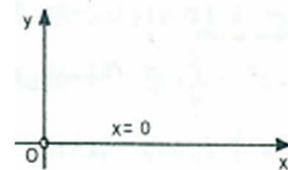
Το $\vec{V}(B,-A)$ είναι παράλληλο προς την (ε) .

• Διερεύνηση της (E): $Ax+By+\Gamma=0$ με $|A|+|B|\neq 0$.

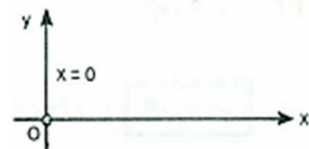
Είδαμε ότι η γεωμετρική εικόνα της (E) είναι ευθεία (ε) . Θα μελετήσουμε τη θέση της (ε) ως προς το σύστημα Oxy των αξόνων.

A) Αν $A=\Gamma=0$ τότε $(E) \Leftrightarrow By=0 \Leftrightarrow y=0$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y=0$ διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ και είναι παράλληλη προς τον xx' , άρα η (ε) ταυτίζεται με τον xx' .

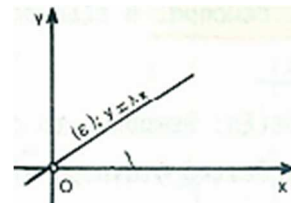


B) Αν $B=\Gamma=0$ τότε $(E) \Leftrightarrow Ax=0 \Leftrightarrow x=0$. Η ευθεία $(\varepsilon): x=0$ διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ και είναι παράλληλη προς τον yy' , άρα η (ε) ταυτίζεται με τον yy' .



Γ) Αν $\Gamma=0$ τότε $(E) \Leftrightarrow Ax+By=0 \Leftrightarrow y = \frac{-A}{B}x$, $y = \lambda x$.

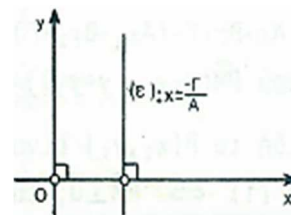
Η ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x$ διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$.



Δ) Αν $B=0$ τότε $(E) Ax+\Gamma=0 \Leftrightarrow x = \frac{-\Gamma}{A}$. Η ευθεία $(\varepsilon):$

$x = \frac{-\Gamma}{A}$ είναι παράλληλη προς τον άξονα yy' και τέμνει

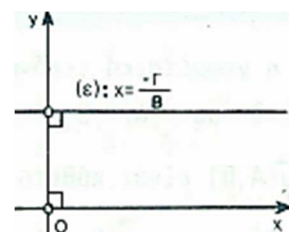
τον άξονα xx' στο σημείο με τετμημένη $\frac{-\Gamma}{A}$.



Ε) Αν $A=0$ τότε $(E) \Leftrightarrow By+\Gamma=0 \Leftrightarrow y = \frac{-\Gamma}{B}$. Η ευθεία

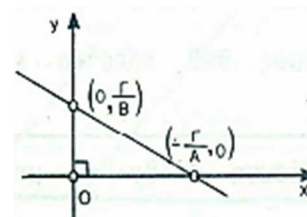
$(\varepsilon): y = \frac{-\Gamma}{B}$ είναι παράλληλη προς τον άξονα xx' και

τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο με τεταγμένη $\frac{-\Gamma}{B}$.



ΣΤ) Αν $A \cdot B \cdot \Gamma \neq 0$, η ευθεία $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$ τέμνει

τον άξονα xx' στο σημείο $\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$ και τον άξονα yy'



στο σημείο $\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$. Οι πραγματικοί $-\frac{\Gamma}{A} = \alpha$, $-\frac{\Gamma}{B} = \beta$ που δίνουν τα σημεία στα οποία η (ε) τέμνει τους άξονες λέγονται «συντεταγμένες επί την αρχή» της (ε) και ειδικά, ο $-\frac{\Gamma}{A} = \alpha$ «τετμημένη επί την αρχή» ενώ ο $-\frac{\Gamma}{B} = \beta$ «τεταγμένη επί την αρχή».

4. Ανηγμένη εξίσωση ευθείας

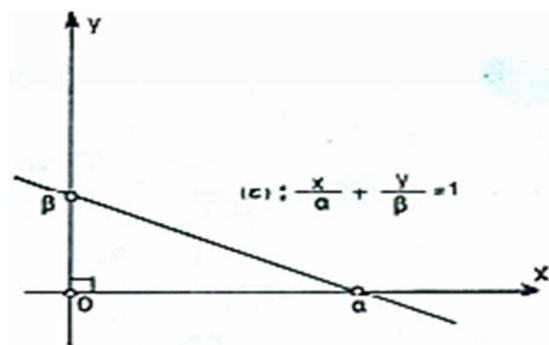
Η γενική εξίσωση ευθείας (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ με $|A| + |B| \neq 0$ όταν $B \neq 0$ γράφεται ισοδύναμα $y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{\Gamma}{B}\right)$, και επειδή $-\frac{A}{B} = \lambda$ (συντελεστής διεύθυνσης της

(ε) και $-\frac{\Gamma}{B} = \beta$ (τεταγμένη επί την αρχή της (ε)) έχουμε τελικά (ε): $y = \lambda x + \beta$. Η μορφή $y = \lambda x + \beta$ λέγεται «ανοιγμένη εξίσωση» της ευθείας (ε).

5. Εξίσωση ευθείας από τις συντεταγμένες επί την αρχή

Η γενική εξίσωση της ευθείας (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ με $|A| + |B| \neq 0$ όταν $A \cdot B \cdot \Gamma \neq 0$ γράφεται ισοδύναμα $Ax + By = \Gamma \Leftrightarrow \frac{Ax}{-\Gamma} + \frac{By}{-\Gamma} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\left(-\frac{\Gamma}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{\Gamma}{B}\right)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$

όπου α, β οι συντεταγμένες επί την αρχή της ευθείας (ε).



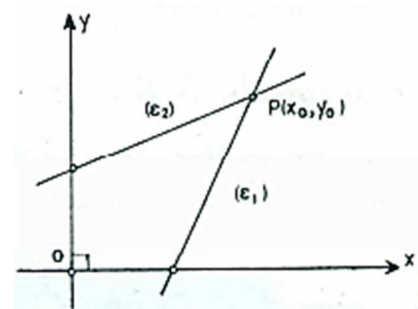
6. Σχετική θέση δυο ευθειών

Έστω ευθείες (ε_1) : $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $|A_1| + |B_1| \neq 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, $|A_2| + |B_2| \neq 0$ Τότε:

A) Οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται στο $P(x_0, y_0)$ αν και μόνο ισχύουν $\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2 = 0 \end{cases}$, ισοδύναμα, αν και

μόνο το σύστημα $\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{cases}$ έχει μια μονή

λύση στο R^2 την $(x_0, y_0) \Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Άρα:



$$\Delta D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ οι ευθείες } \begin{cases} (\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ (\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{cases}$$

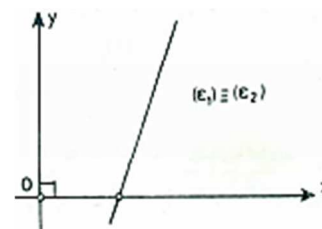
$$\text{τέμνονται στο } P \left(\frac{\begin{vmatrix} -\Gamma_1 & B_1 \\ -\Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -\Gamma_1 \\ A_2 & -\Gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \right) = \frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}$$

Β) Οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ ταυτίζονται, αν και μόνο το

σύστημα $\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2 = 0 \end{cases}$ είναι αόριστο

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Άρα, οι

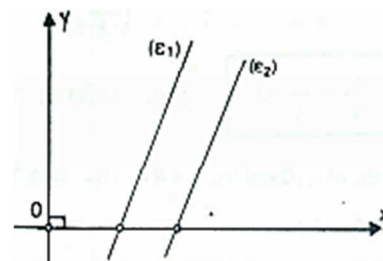


ευθείες $\begin{cases} (\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ (\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{cases}$ ταυτίζονται $\Leftrightarrow D = D_x = D_y = 0$

Γ) Οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες, αν και μόνο

το σύστημα $\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{cases}$ είναι αδύνατο

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ και } \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ή } \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Άρα}$$



Άρα

Οι ευθείες $\begin{cases} (\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ (\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{cases}$ είναι παράλληλες $\Leftrightarrow D = 0$ και $|D_x| + |D_y| \neq 0$.

7. Καθετότητα ευθειών

Θεωρούμε τις ευθείες $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $|A_1| + |B_1| \neq 0$ και $(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, $|A_2| + |B_2| \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι $\vec{u}_1(A_1, B_1) \perp (\varepsilon_1)$ και $\vec{u}_2(A_2, B_2) \perp (\varepsilon_2)$. Έχουμε συνεπώς: Οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι κάθετες, αν και μόνο, τα κάθετα σε αυτές διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι μεταξύ τους κάθετα $\Leftrightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Άρα,

Οι ευθείες $\begin{cases} (\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ (\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{cases}$ είναι κάθετες $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

7.1 Παρατήρηση

Αν $B_1, B_2 \neq 0$ οπότε ορίζονται οι $\lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2}$, η συνθήκη $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ γράφεται

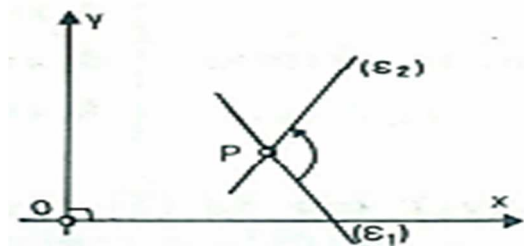
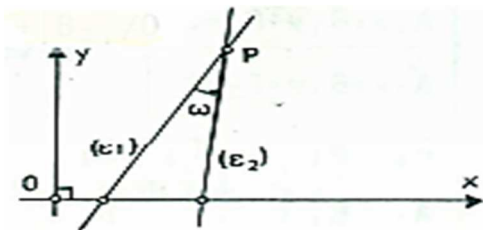
$$\text{ισοδύναμα } A_1 A_2 = B_1 B_2 \Leftrightarrow \frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{-A_1}{B_1} \right) \left(\frac{-A_2}{B_2} \right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2} = -1. \text{ Άρα,}$$

$$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2} = -1, \text{ εφόσον ορίζονται τα } \lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2}$$

8. Γωνία δυο ευθειών

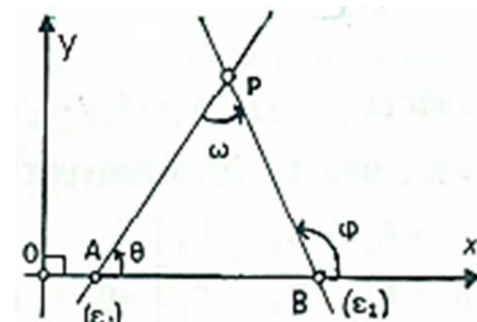
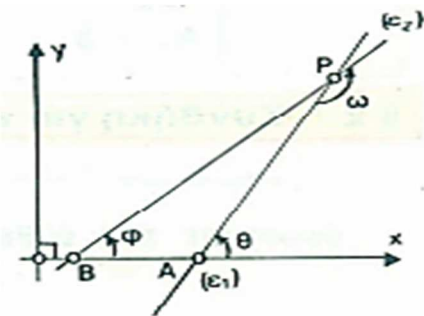
Θεωρούμε τις ευθείες $(\varepsilon_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$, $|A_1| + |B_1| \neq 0$ και $(\varepsilon_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$, $|A_2| + |B_2| \neq 0$ που τέμνονται στο σημείο P. Ορίζουμε ως γωνία του διατεταγμένου ζεύγους των ευθειών $((\varepsilon_1), (\varepsilon_2))$ και γράφουμε $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, τη γωνία ω κατά την οποία πρέπει να στραφεί με θετική φορά περί το P η πρώτη ευθεία (ε_1) , ώστε να συμπίσει με τη δεύτερη ευθεία (ε_2) . Είναι συνεπώς $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in [0, \pi)$.

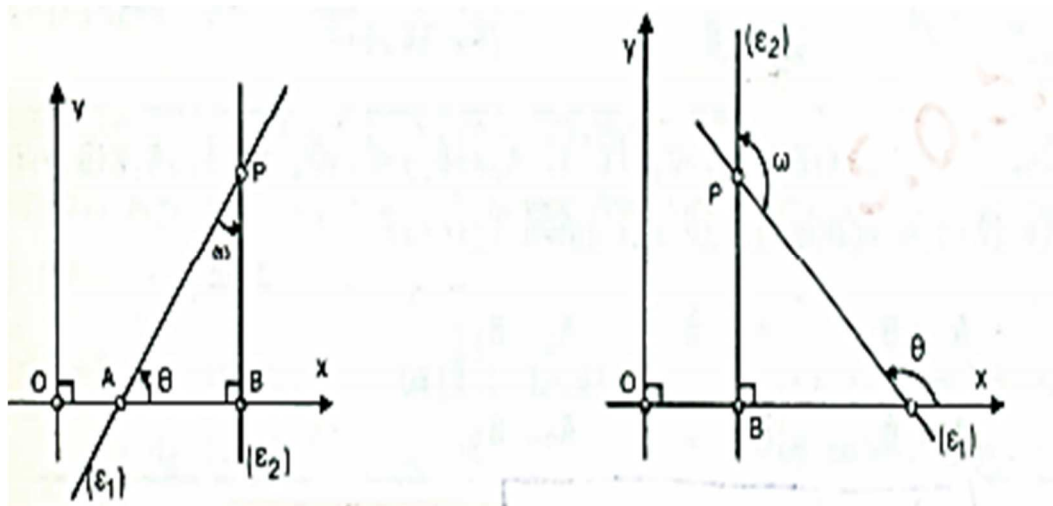
Για τη γωνία των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ εφόσον ορίζονται οι $\lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2}$ και είναι $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq \frac{\pi}{2}$, ισχύει $\varepsilon\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2}}$.



Απόδειξη Ονομάζουμε θ, φ τις γωνίες που σχηματίζει ο άξονας xx' με τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα. Τότε η γωνία $\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ θα είναι εσωτερική ή εξωτερική γωνία στο τρίγωνο PAB που σχηματίζει ο άξονας xx' με τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ οπότε είναι: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varphi - \theta$ ή $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \pi + (\varphi - \theta)$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $\varepsilon\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon\varphi(\varphi - \theta) = \frac{\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\theta}{1 + \varepsilon\varphi\varphi \cdot \varepsilon\varphi\theta} \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2}}$. Αν $(\varepsilon_2) \parallel y'y$ οπότε δεν ορίζεται

ο λ_{ε_2} τότε από τα σχηματιζόμενα ορθογώνια τρίγωνα έχουμε ότι $\omega = \frac{\pi}{2} - \theta$ ή $\omega = \frac{\pi}{2} + (\pi - \theta) = \frac{3\pi}{2} - \theta$. Σε κάθε περίπτωση είναι $\varepsilon\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{1}{\lambda_{\varepsilon_1}}$.





9. Συνθήκη για να διέρχονται τρεις ευθείες από το ίδιο σημείο

Έστω οι ευθείες
$$\begin{cases} (\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, & |A_1| + |B_1| \neq 0 \\ (\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, & |A_2| + |B_2| \neq 0 \\ (\varepsilon_3): A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0, & |A_3| + |B_3| \neq 0 \end{cases}$$
. Οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$ θα

διέρχονται από το ίδιο πραγματικό σημείο $P(x_0, y_0)$, αν και μόνο το σύστημα

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0, \end{cases} \quad (\Sigma)$$
 έχει ως μοναδική λύση στο $\mathbb{R}^2$ τη $(x_0, y_0) \Leftrightarrow$ το (Σ) είναι

συμβιβαστό $\Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ και $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0$ και $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Άρα, οι ευθείες $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, $(\varepsilon_3): A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0$ διέρχονται από το ίδιο πραγματικό σημείο, αν και μόνο

ισχύουν τα: $D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ και $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0$ και $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

10. Συνθήκη για να ανήκουν τρεις ευθείες στην ίδια διεύθυνση

Θεωρούμε τις ευθείες
$$\begin{cases} (\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, & |A_1| + |B_1| \neq 0 \\ (\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, & |A_2| + |B_2| \neq 0 \\ (\varepsilon_3): A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0, & |A_3| + |B_3| \neq 0 \end{cases}$$
. Οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$

ανήκουν στην ίδια διεύθυνση αν και μόνο αν τα κάθετα σε αυτές διανύσματα

$\vec{u}_1(A_1, B_1), \vec{u}_2(A_2, B_2), \vec{u}_3(A_3, B_3)$ είναι παράλληλα $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0$

και $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0$. Άρα, οι ευθείες

$(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, (\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, (\varepsilon_3): A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0$ ανήκουν στην ίδια διεύθυνση, αν και μόνο ισχύει $\left| \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \right| = 0$

11. Πρόσημο του $f(x, y) = Ax + By + \Gamma, |A| + |B| \neq 0$

Θεωρούμε τη γεωμετρική εικόνα της ευθείας $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$. Είναι φανερό ότι τα σημεία της (ε) έχουν συντεταγμένες που μηδενίζουν το $f(x, y)$. Ας είναι λοιπόν $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ δυο σημεία που δεν κινούνται στην (ε) και $P_1P_2 \nparallel (\varepsilon)$. Τότε $Ax_1 + By_1 + \Gamma_1 \neq 0, Ax_2 + By_2 + \Gamma_2 \neq 0$ και οι ευθείες $(\varepsilon), P_1P_2$

τέμνονται σε πραγματικό σημείο K . Αν $(P_1P_2K) = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x_K = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y_K = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$ και αφού το

K είναι σημείο της (ε) , θα ισχύει

$$Ax_K + By_K + \Gamma = 0 \Leftrightarrow A \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + \Gamma = 0$$

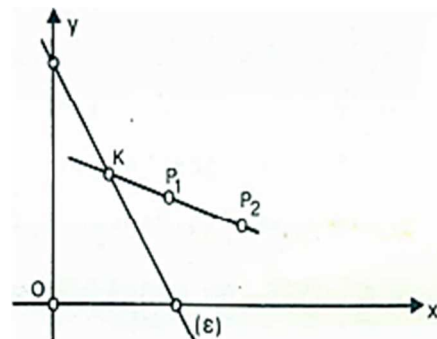
$$\Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + \Gamma) + \lambda(Ax_2 + By_2 + \Gamma) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + \Gamma}{Ax_2 + By_2 + \Gamma}$$

$$\Leftrightarrow (P_1P_2K) = -\frac{f(x_1, y_1)}{f(x_2, y_2)}. \text{ Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:}$$

A) Τα σημεία P_1, P_2 είναι σημεία του ίδιου ημιεπιπέδου ως προς την $(\varepsilon) \Leftrightarrow$ το K είναι εξωτερικό σημείο του $P_1, P_2 \Leftrightarrow$

$$(P_1P_2K) < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1, y_1)}{f(x_2, y_2)} > 0 \Leftrightarrow \text{τα } f(x_1, y_1),$$

$f(x_2, y_2)$ είναι αριθμοί ομόσημοι. Άρα, για τις συντεταγμένες σημείων του ίδιου ημιεπιπέδου το $f(x, y)$ παίρνει τιμές ομόσημες.

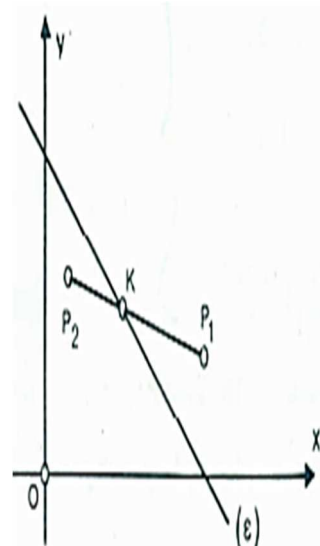


B) Τα σημεία P_1, P_2 είναι σημεία διαφορετικών ημιεπιπέδων ως προς την $(\varepsilon) \Leftrightarrow$ το K είναι εσωτερικό σημείο του $P_1, P_2 \Leftrightarrow (P_1P_2K) > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1, y_1)}{f(x_2, y_2)} < 0 \Leftrightarrow$ τα

$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)$ είναι αριθμοί ετερόσημοι. Άρα, για τις συντεταγμένες σημείων διαφορετικών ημιεπιπέδων το $f(x, y)$ παίρνει τιμές ετερόσημες.

Συμβολίζουμε με H_θ, H_α τα δυο ημιεπίπεδα.

Τότε, αν για το σημείο $M(x_M, y_M)$ του H_θ είναι $f(x_M, y_M) > 0 \Rightarrow$ ότι και για οποιοδήποτε άλλο σημείο $N(x_N, y_N)$ του H_θ θα είναι $f(x_N, y_N) > 0$ ενώ για



οποιοδήποτε άλλο σημείο $\Lambda(x_\Lambda, y_\Lambda)$ του H_α θα είναι $f(x_\Lambda, y_\Lambda) < 0$.

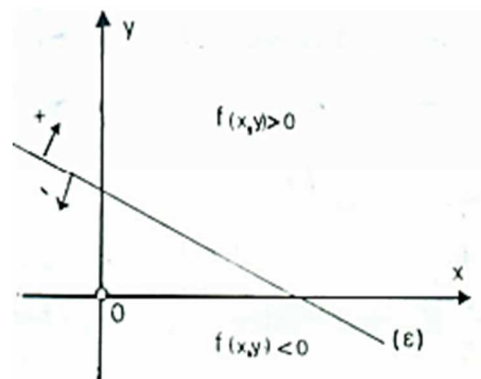
Τα H_θ, H_α συμβολίζουν αντίστοιχα το «θετικό» και «αρνητικό» ημιεπίπεδο.

- Να λυθεί γραφικά η ανισότητα $x+2y-4 < 0$.

Λύση Αν $f(x, y) = x + 2y - 4$ και (ε) η γεωμετρική εικόνα της $f(x, y) = 0$, παρατηρούμε ότι η (ε) δεν διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ και ισχύει $f(0,0) = -4 < 0$.

Άρα, και για τις συντεταγμένες του τυχαίου σημείου M του ημιεπίπεδου που περιέχει το O είναι $f(x_M, y_M) < 0$.

Άρα, η λύση της ανισότητας είναι το ημιεπίπεδο H_α , που περιέχει την αρχή των αξόνων.

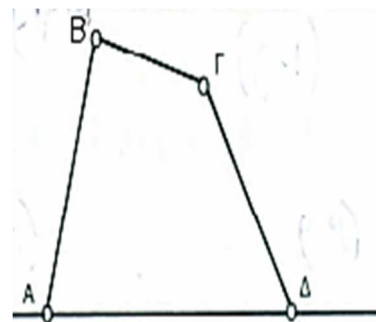


- Ναδειχθεί ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A(-3,5)$, $B(-1,-4)$, $\Gamma(7,-1)$, $\Delta(2,9)$ είναι κυρτό.

Λύση έχουμε $AD: \frac{x+3}{y-5} = \frac{2+3}{9-5} \Leftrightarrow 4x - 5y + 37 = 0$.

Αν $f(x, y) = 4x - 5y + 37$ παρατηρούμε ότι: Για τις συντεταγμένες του $B(-1,-4)$ έχουμε $f(-1,-4) = -4 + 20 + 37 > 0$. Για τις συντεταγμένες του $\Gamma(7,-1)$ έχουμε $f(7,-1) = 28 + 5 + 37 > 0$.

Συνεπώς, τα B, Γ κείνται σε σχέση με την ευθεία AD , στο ίδιο ημιεπίπεδο. Όμοια αποδεικνύεται ότι, σε σχέση με κάθε πλευρά του τετράπλευρου, οι απομένουσες δυο κορυφές κείνται στο ίδιο ημιεπίπεδο και άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι κυρτό τετράπλευρο.



- Να λυθεί γράφικα η ανισότητα $(4x-y+4), (6x+y-3), (x+2y+2) < 0$.

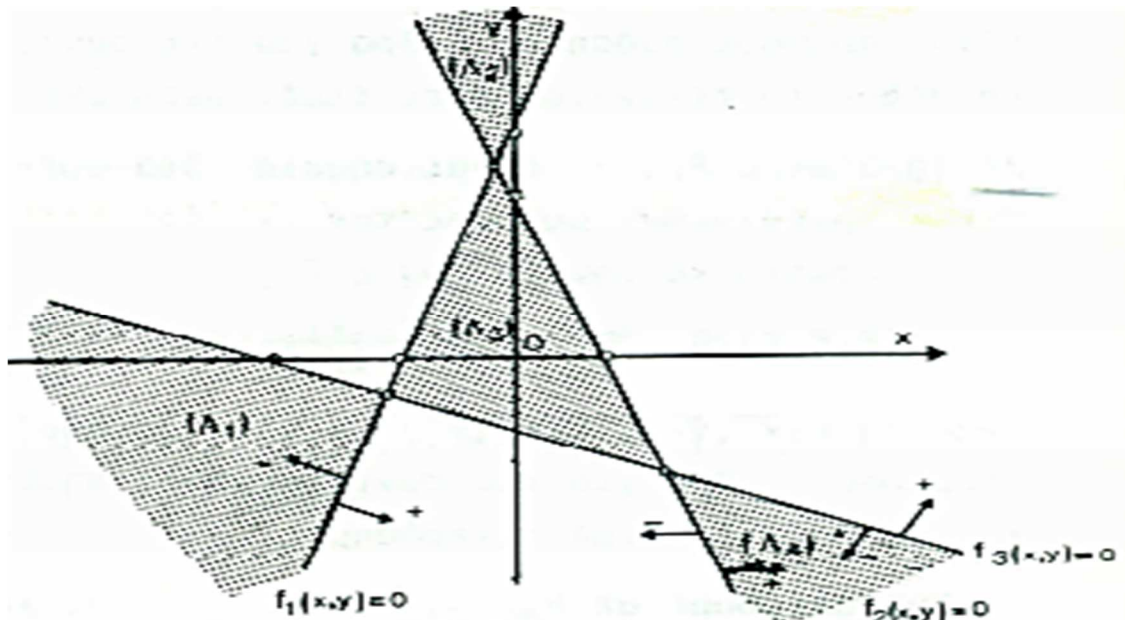
Λύση Ονομάζουμε $\begin{cases} f_1(x, y) = 4x - y + 4 \\ f_2(x, y) = 6x + y - 3 \\ f_3(x, y) = x + 2y + 2 \end{cases}$ και κάνουμε τη γεωμετρική εικόνα των

ευθειών $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0, f_3(x, y) = 0$ και σημειώνουμε τα πρόσημα των $f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)$ ως εξής: $f_1(0,0) = 4 > 0$ άρα το ημιεπίπεδο που περιέχει το $O(0,0)$, είναι το θετικό για την ευθεία $f_1(x,y) = 0$. Όμοια και για τις άλλες ευθείες.

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις της (α), είναι οι λύσεις των συστημάτων:

$$\begin{array}{lll} - \left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) < 0 \\ f_2(x, y) < 0 \end{array} \right\} (\Sigma_1) & - \left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) < 0 \\ f_2(x, y) > 0 \end{array} \right\} (\Sigma_2) & + \left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) > 0 \\ f_2(x, y) < 0 \end{array} \right\} (\Sigma_3) \\ - \left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) < 0 \\ f_3(x, y) < 0 \end{array} \right\} & + \left\{ \begin{array}{l} f_2(x, y) > 0 \\ f_3(x, y) > 0 \end{array} \right\} & + \left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) > 0 \\ f_3(x, y) > 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$+ \begin{cases} f_1(x, y) > 0 \\ f_2(x, y) > 0 \\ f_3(x, y) < 0 \end{cases} (\Sigma_4) .$$
 Στο σχήμα $(\Lambda_1), (\Lambda_2), (\Lambda_3), (\Lambda_4)$ συμβολίζουμε τις λύσεις των συστημάτων $(\Sigma_1), (\Sigma_2), (\Sigma_3), (\Sigma_4)$.



12. Απόσταση σημείου από ευθεία

Ονομάζουμε K την προβολή του σημείου $M(x_0, y_0)$ επί την ευθεία $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$, $|A| + |B| \neq 0$. Τότε $d(M, (\varepsilon)) = \|KM\|$. Αν $K(x_1, y_1)$ τότε, αφού $K \in (\varepsilon) \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + \Gamma = 0 \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 = -\Gamma$ (1) θεωρούμε το $\vec{u} / / \vec{KM} \Rightarrow |\sin(\vec{u}, \vec{KM})| = |\pm 1| = 1$. Ακόμα είναι: $\vec{KM}(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ οπότε

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{KM} \cdot \vec{u}| = \|\vec{KM}\| \cdot \|\vec{u}\| \sin(\vec{KM}, \vec{u}) = d(M, (\varepsilon)) \cdot \sqrt{A^2 + B^2} \cdot 1 \\ |\vec{KM} \cdot \vec{u}| = |A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)| = |Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)| \stackrel{(1)}{=} |Ax_0 + By_0 + \Gamma| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(M, (\varepsilon)) \cdot \sqrt{A^2 + B^2} = |Ax_0 + By_0 + \Gamma| \Rightarrow \boxed{d(M, (\varepsilon)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

- Να βρεθεί η απόσταση του $M(-2, 1)$ από την $(\varepsilon): 4x + 3y - 5 = 0$.

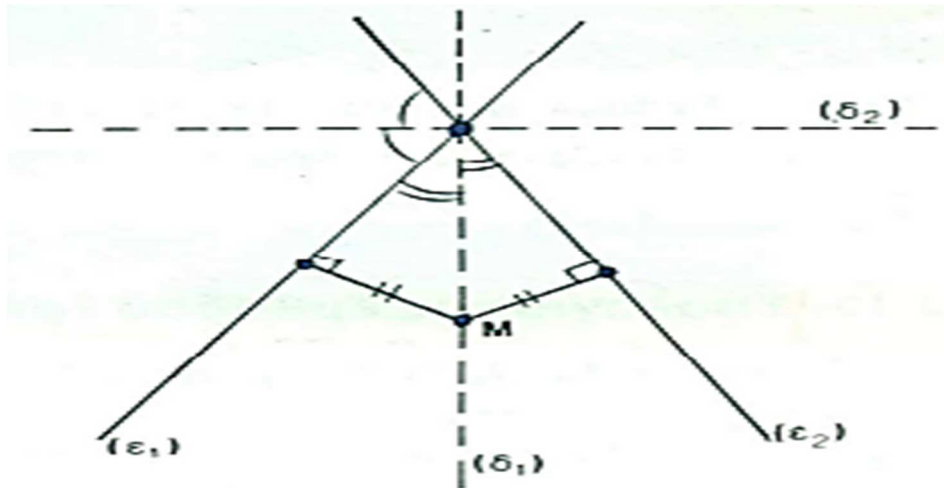
Λύση Είναι $d(M, (\varepsilon)) = \frac{|4(-2) + 3 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-8 + 3 - 5|}{5} = 2$

13. Εξισώσεις διχοτόμων των γωνιών δυο ευθειών

Θεωρούμε τις ευθείες $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $|A_1| + |B_1| \neq 0$ και $(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, $|A_2| + |B_2| \neq 0$ με $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ οπότε οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται. Τότε το $M(x, y)$ κείται στις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζονται, αν

και μόνο $d(M, (\varepsilon_1)) = d(M, (\varepsilon_2)) \Leftrightarrow \frac{|A_1x + B_1y + \Gamma_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + \Gamma_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_1x + B_1y + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \\ \frac{A_1x + B_1y + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \end{array} \right\} \text{ που είναι οι εξισώσεις των διχοτόμων } (\delta_1), (\delta_2).$$



- Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x+4y-5=0$, $(\varepsilon_2): 5x-12y+3=0$.

Λύση

Οι διχοτόμοι έχουν εξισώσεις $\left\{ \begin{array}{l} \frac{3x+4y-5}{\sqrt{9+16}} = \frac{5x-12y+3}{\sqrt{25+144}} \\ \frac{3x+4y-5}{\sqrt{9+16}} = -\frac{5x-12y+3}{\sqrt{25+144}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x+56y-40=0 \\ 16x-2y-25=0 \end{array} \right\}$

14. Εξίσωση μεσοπαράλληλου δύο παραλλήλων ευθειών

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_1): Ax + By + \Gamma_1 = 0$ και $(\varepsilon_2): Ax + By + \Gamma_2 = 0$.

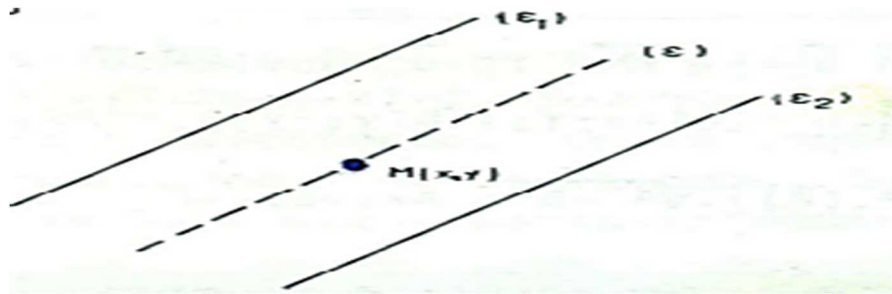
Τότε το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην μεσοπαράλληλη (ε) των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2) \Leftrightarrow$

$$d(M, (\varepsilon_1)) = d(M, (\varepsilon_2)) \Leftrightarrow \frac{|Ax + By + \Gamma_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax + By + \Gamma_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\Leftrightarrow |Ax + By + \Gamma_1| = |Ax + By + \Gamma_2| \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax + By + \Gamma_1 = Ax + By + \Gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2 \rightarrow \text{αδύνατον αφού } (\varepsilon_1) \neq (\varepsilon_2) \\ Ax + By + \Gamma_1 = -Ax - By - \Gamma_2 \Leftrightarrow Ax + By + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} = 0 \end{array} \right.$$

Άρα, η μεσοπαράλληλη είναι η $(\varepsilon): \boxed{Ax + By + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} = 0}$



- Να βρεθεί η μεσοπαράλληλη των $(\varepsilon_1): 2x - 3y + 1 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 6y + 5 = 0$.

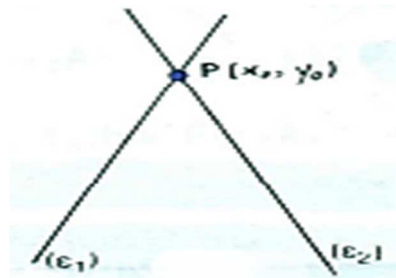
Λύση

Έχουμε αρχικά

$$(\varepsilon_1): 2x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x - 6y + 2 = 0 \quad \text{και}$$

$(\varepsilon_2): 4x - 6y + 5 = 0$. Άρα, μεσοπαράλληλη των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι η

$$(\varepsilon): 4x - 6y + \frac{2+5}{2} = 0 \Leftrightarrow 8x - 12y + 7 = 0$$



15. Υπολογισμός εμβαδού τριγώνου

Έστω $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), \Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ οι κορυφές του τριγώνου. Τότε:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} d(B, \Gamma), d(A, \Gamma) \Rightarrow (1) \text{ Επειδή}$$

$$B\Gamma: \begin{vmatrix} x - x_B & x_\Gamma - x_B \\ y - y_B & y_\Gamma - y_B \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma: (y_\Gamma - y_B)x - (x_\Gamma - x_B)y + (x_\Gamma y_B - x_B y_\Gamma) = 0 \Leftrightarrow$$

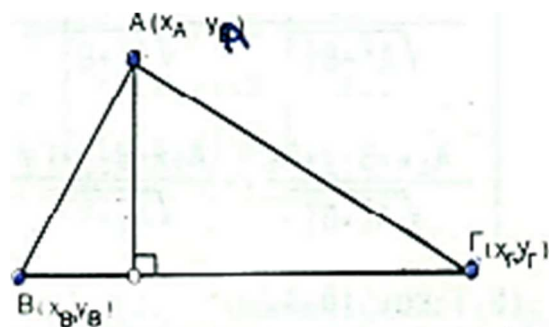
$$B\Gamma: (y_B - y_\Gamma)x - (x_B - x_\Gamma)y + (x_B y_\Gamma - x_\Gamma y_B) = 0$$

$$d(A, B\Gamma) = \frac{|(y_B - y_\Gamma)x_A - (x_B - x_\Gamma)y_A + (x_B y_\Gamma - x_\Gamma y_B)|}{\sqrt{(y_B - y_\Gamma)^2 + (x_B - x_\Gamma)^2}} \text{ οπότε}$$

$$d(B, \Gamma), d(A, B\Gamma) = \left\| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} \right\| \stackrel{(1)}{\Rightarrow} E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

Άρα, τα A, B, Γ είναι ομοευθειακά

$$\Leftrightarrow E_{AB\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$



- Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(1, -1), B(2, 2), \Gamma(-1, -3)$.

$$\text{Λύση Είναι } E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & y_2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |2+1-0+2+2+3| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

16. Δέσμη ευθειών στο επίπεδο

Ορίζουμε ως επίπεδη δέσμη ευθειών, με κέντρο το πραγματικό σημείο P, το σύνολο των ευθειών του επιπέδου που διέρχονται από το P. Θα ζητήσουμε την εξίσωση της δέσμης των ευθειών όταν είναι γνωστές δυο ευθείες $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, |A_1| + |B_1| \neq 0$

και

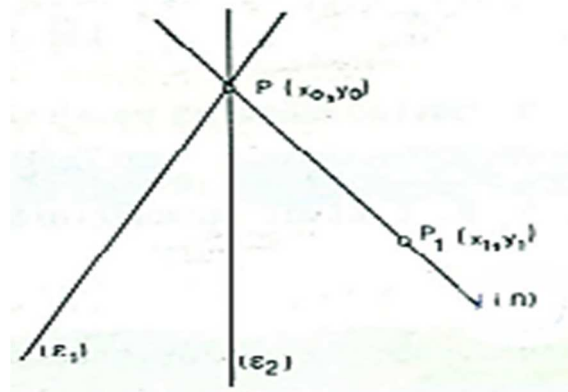
$$(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, |A_2| + |B_2| \neq 0$$

που ανήκουν στην δέσμη.

Αν $P(x_0, y_0)$ είναι η τομή των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$

$$\text{τότε θα ισχύουν } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1) \text{ και}$$

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$



Θεωρούμε την $(E): \kappa(A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$ με $|\kappa| + |\mu| \neq 0 \Leftrightarrow (E): (A_1\kappa + A_2\mu)x + (B_1\kappa + B_2\mu)y + (\Gamma_1\kappa + \Gamma_2\mu) = 0$ με $|\kappa| + |\mu| \neq 0$.

Παρατηρούμε ότι είναι $|A_1\kappa + A_2\mu| + |B_1\kappa + B_2\mu| \neq 0$ γιατί, αν ήταν $\begin{cases} A_1\kappa + A_2\mu = 0 \\ B_1\kappa + B_2\mu = 0 \end{cases} (\Sigma)$ το γραμμικό ομογενές σύστημα (Σ) , έχοντας

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ από την (1), θα είχε ως μονή λύση την προφανή δηλαδή}$$

$\kappa = \mu = 0$ που αντίκειται στην υπόθεση $|\kappa| + |\mu| \neq 0$. Άρα είναι: $(E) \Leftrightarrow (A_1\kappa + A_2\mu)x + (B_1\kappa + B_2\mu)y + (\Gamma_1\kappa + \Gamma_2\mu) = 0$ με $|A_1\kappa + A_2\mu| + |B_1\kappa + B_2\mu| \neq 0$.

Συνεπώς η (E) είναι εξίσωση για κάθε $(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ η οποία επιπλέον διέρχεται από το $P(x_0, y_0)$ αφού από τις (2), έχουμε ότι οι συντεταγμένες του P επαληθεύουν την εξίσωση (E) . Έστω (η) μια ευθεία της δέσμης, που καθορίζεται από το $P(x_0, y_0)$ και το $P_1(x_1, y_1)$ με $P \neq P_1$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ που αν αντικατασταθούν στην (E) δίνουν την εξίσωση της (η) .

Πράγματι, η (E) είναι εξίσωση της (η) αν και μόνο επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του $P_1 \Leftrightarrow$ ισχύει $\kappa(A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$ με $|\kappa| + |\mu| \neq 0$ (3)

Επειδή $P \neq P_1$, το P_1 δεν κείται ταυτόχρονα στις (ε_1) και (ε_2) οπότε $|A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1| + |A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2| \neq 0$ και αν υποθεθεί $A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 \neq 0$ η

$$(3) \Leftrightarrow \kappa = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1} \cdot \mu \text{ με } |\kappa| + |\mu| \neq 0 \quad (4). \text{ Συνεπώς, για να βρεθεί η}$$

εξίσωση της τυχαίας ευθείας (η) που καθορίζουν τα P, P_1 αρκεί στην (E) να αντικατασταθούν τα κ, μ με τιμές που καθορίζονται από τις σχέσεις (4).

Άρα, η δέσμη των ευθειών που καθορίζεται από τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι μια παραμετρική οικογένεια ευθειών με εξίσωση: $(E): \kappa(A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$ με $\Pi|\kappa| + |\mu| \neq 0$

17. Παρατηρήσεις

- Αν $\kappa=0$ (οπότε $\mu \neq 0$) η $(E) \Leftrightarrow A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ δηλαδή η (E) είναι η εξίσωση της (ε_2) .
- Αν $\mu=0$ (οπότε $\kappa \neq 0$) η $(E) \Leftrightarrow A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ δηλαδή η (E) είναι η εξίσωση της (ε_1) .
- Με $\kappa \neq 0$ η $(E) \Leftrightarrow (A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \frac{\mu}{\kappa}(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$ (και αν θέσουμε $\frac{\mu}{\kappa} = t \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow (A_1x + B_1y + \Gamma_1) + t(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$ (5). Η μονοπαραμετρική αυτή οικογένεια των ευθειών είναι το σύνολο των ευθειών της δέσμης εκτός της (ε_2)

Προσοχή ! Σε ασκήσεις, με δέσμη ευθειών, πρέπει να εξετάζουμε ξεχωρά αν η ευθεία $A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2 = 0$ είναι η λύση του προβλήματος. Το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από το $P(x_0, y_0)$ δίνεται από τις εξισώσεις $x = x_0$ $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ ή επειδή το P είναι τομή των ευθειών $x - x_0 = 0$ και $y - y_0 = 0$ δίνεται από τη δέσμη με εξίσωση $\kappa(x - x_0) + \mu(y - y_0) = 0$, $|\kappa| + |\mu| \neq 0$.

- Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (η) όταν:

α) διέρχεται από το $A(3,0)$ και είναι παράλληλη στην (ε) : $5x - 3y + 7 = 0$.

β) διέρχεται από το $A(-2,1)$ και είναι κάθετη στην (ε) : $3x + y - 12 = 0$.

γ) διέρχεται από το $A(2,1)$ και είναι $((\varepsilon), (\eta)) = 45^\circ$ όπου (ε) : $2x + 3y + 4 = 0$.

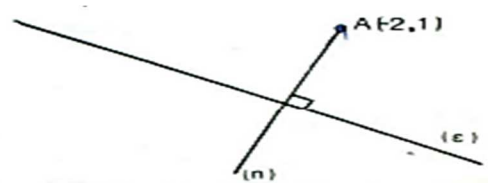
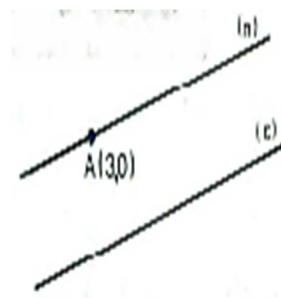
Λύση: **α)** Δίνεται (ε) : $5x - 3y + 7 = 0 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{5}{3}$. Πρέπει $(\eta) \parallel (\varepsilon)$

$$\Rightarrow \lambda_\eta = \frac{5}{3} \text{ άρα } (\eta): y - 0 = \frac{5}{3}(x - 3) \Leftrightarrow (\eta): 5x - 3y - 15 = 0.$$

β) Δίνεται (ε) : $3x + y - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = -3$.

Πρέπει $(\eta) \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_\eta = \frac{1}{3}$ άρα

$$(\eta): y - 1 = \frac{1}{3}(x + 2) \Leftrightarrow (\eta): x - 3y + 5 = 0.$$



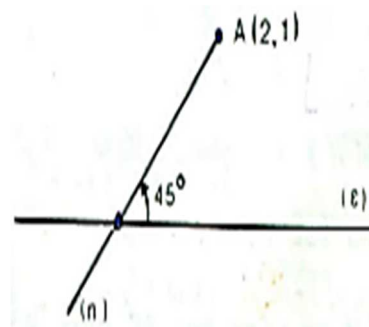
γ) Πρέπει

$$\left(\widehat{(\varepsilon)}, \widehat{(\eta)} \right) = 45^\circ \Rightarrow \varepsilon \varphi \left(\widehat{(\varepsilon)}, \widehat{(\eta)} \right) = \varepsilon \varphi 45^\circ \Rightarrow \frac{\lambda_\eta - \lambda_\varepsilon}{1 + \lambda_\eta \cdot \lambda_\varepsilon} = 1 \Rightarrow$$

$$\lambda_\eta - \lambda_\varepsilon = 1 + \lambda_\eta \cdot \lambda_\varepsilon \text{ και επειδή } \lambda_\varepsilon = -\frac{2}{3} \text{ έχουμε}$$

$$\lambda_\eta + \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} \lambda_\eta \Rightarrow \frac{5}{3} \lambda_\eta = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_\eta = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Άρα } (\eta): y - 1 = \frac{1}{5}(x - 2) \Leftrightarrow (\eta): x - 5y + 3 = 0.$$



- Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού P' του P(-5,13) ως προς την (ε): $2x - 3y - 3 = 0$.

Λύση

Φέρνουμε την (η) από το P κάθετη στην (ε) και ας είναι P' το συμμετρικό του P ως προς την (ε).

$$\text{Έχουμε } \lambda_\varepsilon = \frac{2}{3} \Rightarrow \lambda_\eta = -\frac{2}{3} \quad \text{οπότε}$$

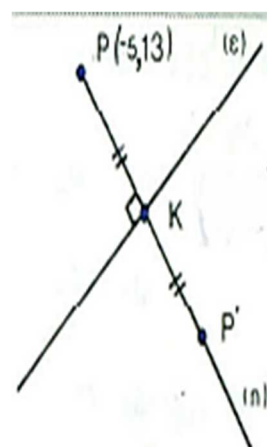
$$(\eta): y - 13 = -\frac{3}{2}(x + 5) \Leftrightarrow (\eta): 3x + 2y - 11 = 0$$

Αν K η τομή των (ε), (η), οι συντεταγμένες του είναι η λύση

$$\text{του } \begin{cases} 2x - 3y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ δηλ. } K(3,1).$$

Επειδή το K είναι μέσο του PP' ισχύουν

$$\begin{cases} x_P + x_{P'} = 2x_K \\ y_P + y_{P'} = 2y_K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 + x_{P'} = 6 \\ 13 + y_{P'} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = 11 \\ y_{P'} = -11 \end{cases} \text{ άρα } P'(11, -11).$$



- Αν η ευθεία (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$, $|A| + |B| \neq 0$ τέμνει την ευθεία MN στο P και είναι $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ τότε $(MNP) = -\frac{Ax_1 + By_1 + \Gamma}{Ax_2 + By_2 + \Gamma}$, ($P \neq B$)

Λύση

$$\text{Έστω ότι } (MNP) = \lambda, \lambda \neq -1. \text{ Τότε } \begin{cases} x_P = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y_P = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right) \text{ και αφού}$$

P είναι σημείο της (ε) ισχύει

$$A \cdot \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B \cdot \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + \Gamma = 0 \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + \Gamma + \lambda(Ax_2 + By_2 + \Gamma) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + \Gamma}{Ax_2 + By_2 + \Gamma},$$

$$\text{ή τελικά, } (MNP) = -\frac{Ax_1 + By_1 + \Gamma}{Ax_2 + By_2 + \Gamma}$$

- Στο τρίγωνο ABΓ με A(1,6), B(3,5), Γ(3,-4) να βρεθούν οι εξισώσεις των U_0, μ_β και της εσωτερικής διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$.

Λύση

α) Το ύψος U_0 άγεται από το A κάθετα επί τη ΒΓ. Είναι $\lambda_{B\Gamma} = \frac{-4-5}{3-3}$ δηλαδή ο $\lambda_{B\Gamma}$

δεν ορίζεται $\Rightarrow B\Gamma // y' y \Rightarrow U_0 // x' x \Rightarrow \lambda_{U_0} = 0$ άρα $U_0 : y - 6 = 0$.

β) Αν Μ μέσο της ΑΓ είναι

$$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{6-4}{2}\right) \Rightarrow M(2,1). \text{ Άρα, εξίσωση της } \mu_\beta$$

είναι

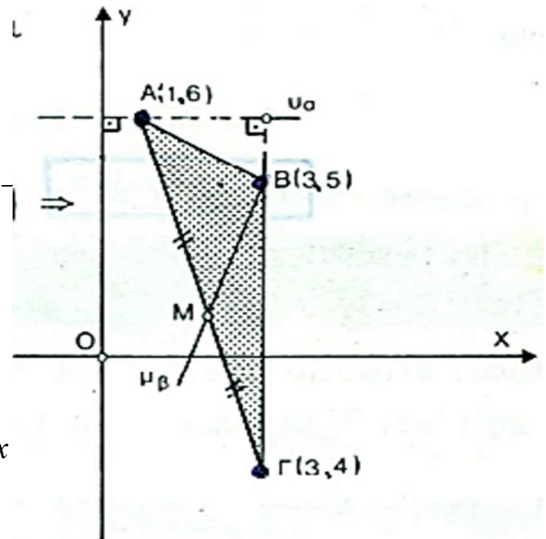
$$\frac{x-3}{y-5} = \frac{2-3}{1-5} \Leftrightarrow \mu_\beta : -4x + 12 = -y + 5 \Leftrightarrow \mu_\beta : 4x - y - 7 = 0$$

γ) Για να βρούμε την εξίσωση της εσωτερικής

διχοτόμου δ_γ της $\hat{\Gamma}$, αρχικά θα βρούμε τις

εξισώσεις των διχοτόμων της $\hat{\Gamma}$ (2.10). Έχουμε

$$A\Gamma : \frac{x-1}{y-6} = \frac{3-1}{-4-6} \Leftrightarrow A\Gamma : 5x - 5 = -y + 6 \Leftrightarrow A\Gamma : 5x + y - 11 = 0$$



και $B\Gamma : x = 3 \Leftrightarrow B\Gamma : x - 3 = 0$. Οι διχοτόμοι, (εσωτερική και εξωτερική), της Γ δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5x+y-11}{\sqrt{5^2+1^2}} = \frac{x-3}{\sqrt{1^2+0^2}} \\ \frac{5x+y-11}{\sqrt{5^2+1^2}} = \frac{x-3}{\sqrt{1^2+0^2}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x+y-11 = \sqrt{26}x - 3\sqrt{26} \\ 5x+y-11 = -\sqrt{26}x + 3\sqrt{26} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (5-\sqrt{26})x + y + 3\sqrt{26} - 11 = 0 \\ (5+\sqrt{26})x + y - 3\sqrt{26} - 11 = 0 \end{array} \right\} \text{ Για να διαπιστώσουμε ποιά από τις δυο εξισώσεις,}$$

είναι η εξίσωση της εσωτερικής διχοτόμου δ_γ και ποια της εξωτερικής Δ_γ , έχουμε τους εξής 2 τρόπους:

1ος τρόπος: Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x,y) \equiv (5-\sqrt{26})x + y + 3\sqrt{26} - 11$ και

εξετάζουμε το πρόσημο του για τις συντεταγμένες των A,B. Έτσι

$$f(1,6) = 2\sqrt{26} > 0, f(3,5) = 5 > 0$$

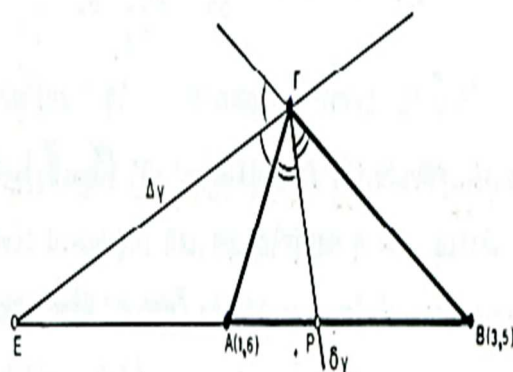
δηλαδή $f(1,6), f(3,5)$ ομόσημα άρα τα

A, B κείνται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την ευθεία

$$(5-\sqrt{26})x + y + 3\sqrt{26} - 11 = 0 \text{ άρα}$$

$$(5-\sqrt{26})x + y + 3\sqrt{26} - 11 = 0 \text{ εξίσωση}$$

της εξωτερικής διχοτόμου Δ_γ της $\hat{\Gamma}$.



$(5 - \sqrt{26})x + y - 3\sqrt{26} - 11 = 0$ εξίσωση της εσωτερικής διχοτόμου δ_v της $\hat{\Gamma}$.

2ος τρόπος: Η εσωτερική διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$ τέμνει το τμήμα AB στο εσωτερικό σημείο P $\Leftrightarrow (ABP) > 0$. Για την ευθεία $(5 - \sqrt{26})x + y - 3\sqrt{26} - 11 = 0$, έχουμε

$$(ABP) = -\frac{(5 + \sqrt{26}) \cdot 1 + 6 - 3\sqrt{26} - 11}{(5 + \sqrt{26}) \cdot 3 + 5 - 3\sqrt{26} - 11} = -\frac{-2\sqrt{26}}{9} > 0, \text{ οπότε η εσωτερική διχοτόμος}$$

της $\hat{\Gamma}$ έχει εξίσωση $(5 + \sqrt{26})x + y - 3\sqrt{26} - 11 = 0$.

• Να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x + 4y - 5$, $(\varepsilon_2): 5x - 12y + 3 = 0$.

Λύση: Οι εξισώσεις διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3x + 4y - 5}{5} = \frac{5x - 12y + 3}{13} \\ \frac{3x + 4y - 5}{5} = \frac{-5x + 12y - 3}{13} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x + 56y - 40 = 0 \\ 32x - 4y - 25 = 0 \end{array} \right\}$$

δηλαδή $\left\{ \begin{array}{l} (\delta_1): 7x + 56y - 40 = 0 \text{ με } \lambda_{\delta_1} = -\frac{1}{8} \\ (\delta_2): 32x - 4y - 25 = 0 \text{ με } \lambda_{\delta_2} = 8 \end{array} \right\}$

(Σχόλιο $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$).

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}(4, -3) // (\varepsilon_1)$, $\vec{\beta}(-12, -5) // (\varepsilon_2)$.

Βρίσκουμε τις προσαρτημένες διανυσματικές τους

μονάδες, οπότε $\vec{\alpha}_0\left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right), \vec{\beta}_0\left(\frac{-12}{13}, \frac{-5}{13}\right)$.

Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{-48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{-33}{65} < 0 \Rightarrow \widehat{(\vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0)}$

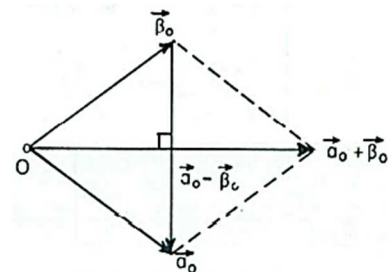
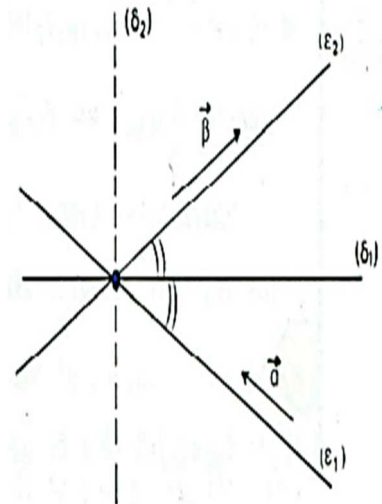
αμβλεία.

Το $\vec{\alpha}_0 + \vec{\beta}_0$ είναι συγγραμμικό με τη διχοτόμο $\widehat{(\vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0)}$

και το $\vec{\alpha}_0 - \vec{\beta}_0$ είναι κάθετο επί τη διχοτόμο της $\widehat{(\vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0)}$.

Αφού η $\widehat{(\vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0)}$ είναι αμβλεία $\Rightarrow$ η παραπληρωματική της γωνία είναι οξεία και συνεπώς, η διχοτόμος της οξείας γωνίας που ζητάμε, θα είναι εκείνη από τις $(\delta_1), (\delta_2)$ που είναι παράλληλη προς το $(\vec{\alpha}_0 - \vec{\beta}_0) = \left(\frac{112}{65}, \frac{-14}{65}\right) \Leftrightarrow$ θα είναι εκείνη που έχει ίσο συντελεστή διεύθυνσης με το $\vec{\alpha}_0 - \vec{\beta}_0$.

Επειδή $\lambda_{\vec{\alpha}_0} - \lambda_{\vec{\beta}_0} = \frac{-7}{56}$ έπεται ότι η $(\delta_1): 7x + 56y - 40 = 0$ είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.



18. Μέθοδοι για τη λύση ασκήσεων

18.1 Μέθοδος 1^η

Όταν θέλουμε να βρούμε τις συντεταγμένες του P τότε:

A) Αν P μέσο του AB $\Rightarrow P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

B) Αν P διαιρεί το AB σε γνωστό απλό λόγο $\lambda \neq -1$ είναι $(ABP) = \lambda \Rightarrow P\left(\frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}\right)$

Γ) Αν το P πρέπει να κείται στη γραμμή (C): $f(x,y)=0$ και να πληροί μια ακόμα σχέση (σ) τότε εκφράζουμε τη σχέση (σ) με τη βοήθεια των συντεταγμένων του P οπότε έχουμε $\sigma(x_P, y_P) = 0$ (1). Επειδή $P \in (C) \Leftrightarrow f(x_P, y_P) = 0$ (2). Οι

πραγματικές λύσεις του συστήματος των (1), (2) αν και όσες υπάρχουν είναι οι συντεταγμένες του P.

Δ) Αν P κοινό σημείο των γραμμών $(C_1): f_1(x,y)=0$ και $(C_2): f_2(x,y)=0$ τότε οι συντεταγμένες του P είναι οι πραγματικές λύσεις, αν και όσες υπάρχουν, του συστήματος $\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$.

Ε) Αν P κοινό σημείο των γραμμών $(C_1), (C_2)$ που δίνονται με τις παραμετρικές του εξισώσεις $(C_1): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi'(t) \end{cases}, (C_2): \begin{cases} x = \sigma(\mu) \\ y = \sigma'(\mu) \end{cases}$ όπου t, μ πραγματικές παράμετροι,

τότε αν $P(x_0, y_0)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} P \in (C_1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \varphi(t_0) \\ y_0 = \varphi'(t_0) \end{cases} \\ P \in (C_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sigma(\mu_0) \\ y_0 = \sigma'(\mu_0) \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{cases} \varphi(t_0) = \sigma(\mu_0) \\ \varphi'(t_0) = \sigma'(\mu_0) \end{cases} \quad (\Sigma).$$

Υπολογίζοντας από το (Σ) τα t_0, μ_0 έχουμε τα x_0, y_0 άρα τις συντεταγμένες του P.

Ανάλογα εργαζόμαστε αν δοθεί η (C_1) με τις παραμετρικές και η (C_2) με την αναλυτική της εξίσωση.

- Έστω γραμμή (περιφέρεια) (C) με εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$ και τα σημεία A(1,-3), B(5,-1), Γ(4,2). Να βρεθεί σημείο P της (C) τέτοιο ώστε $PG \parallel AB$.

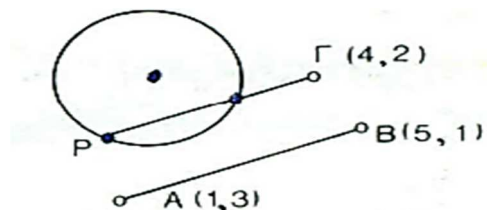
Λύση

Αν $P(\alpha, \beta)$ το ζητούμενο σημείο πρέπει

$$\begin{cases} P \in (C) \\ PG \parallel AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ \lambda_{PG} = \lambda_{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ \frac{\beta - 2}{\alpha - 4} = \frac{-1 - (-3)}{5 - 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ \alpha = 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\beta^2 + \beta^2 = 5 \\ \alpha = 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \pm 1 \\ \alpha = 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha = 2, \beta = 1) \\ (\alpha = -2, \beta = -1) \end{cases}$$

Και άρα P(2,1) ή P(-2,-1)



- Να βρεθούν τα κοινά σημεία των $(C_1): x+2y-7=0$, $(C_2): x^2+4y^2=25$.

Λύση

Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x+2y-7=0 \\ x^2+4y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7-2y \\ (7-2y)^2+4y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7-2y \\ 2y^2+7y^2+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7-2y \\ y=2 \quad \text{ή} \quad y=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=3, \quad y=2) \\ (x=4, \quad y=\frac{3}{2}) \end{cases}$$

Άρα, τα κοινά σημεία των $(C_1), (C_2)$ είναι τα σημεία $A(3,2)$ και $B(4, \frac{3}{2})$.

- Να βρεθεί το κοινό σημείο των ευθειών $(\varepsilon_1): \begin{cases} x=-2+3t \\ y=1+2t \end{cases}$ και $(\varepsilon_2): \begin{cases} x=6+4\mu \\ y=3+\mu \end{cases}$

με $t, \mu \in \mathbb{R}$.

Λύση

Αν $P(x_0, y_0)$ το κοινό σημείο των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ έπεται ότι υπάρχουν τιμές t_0, μ_0 των $t, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι:

$$\begin{cases} x_0 = -2 + 3t_0 \\ y_0 = 1 + 2t_0 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} x_0 = 6 + 4\mu_0 \\ y_0 = 3 + \mu_0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα, } \begin{cases} -2 + 3t_0 = 6 + 4\mu_0 \\ 1 + 2t_0 = 3 + \mu_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t_0 - 4\mu_0 = 8 \\ 2t_0 - \mu_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \\ \mu_0 = -2 \end{cases} \text{ οπότε}$$

$$x_0 = -2 + 3 \cdot 0 = -2, \quad y_0 = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \text{ και συνεπώς } P(-2, 1).$$

- Να βρεθεί το κοινό σημείο των ευθειών $(\varepsilon_1): \begin{cases} x=-1+2t \\ y=3-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ και $(\varepsilon_2): 2x+y-1=0$.

Λύση

Αν $P(x_0, y_0)$ το κοινό σημείο των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, τότε υπάρχει $t_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $x_0 = -1 + 2t_0, y_0 = 3 - 3t_0$.

$$\text{Επειδή } P \in (\varepsilon_2) \Leftrightarrow 2(-1 + 2t_0) + (3 - 3t_0) - 1 = 0 \Leftrightarrow -2 + 4t_0 + 3 - 3t_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 0.$$

Άρα, $x_0 = -1$ και $y_0 = 3$, συνεπώς $P(-1, 3)$ είναι το κοινό σημείο των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

- Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $A(1, -2)$, $B(2, 3)$ και εμβαδόν 8. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Γ αν τούτο κείται στην ευθεία $(\varepsilon): 2x+y-2=0$.

Λύση: Έστω ότι είναι $\Gamma(\alpha, \beta)$. Έχουμε τότε

$$\begin{cases} \Gamma \in (\varepsilon) \\ E_{AB\Gamma} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - 2 = 0 \\ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - 2 = 0 \\ |-5\alpha + \beta + 7| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2\alpha + \beta - 2 = 0 \\ -5\alpha + \beta + 7 = 16 \end{cases} (\Sigma_1) \\ \begin{cases} 2\alpha + \beta - 2 = 0 \\ -5\alpha + \beta + 7 = -16 \end{cases} (\Sigma_2) \end{cases}$$

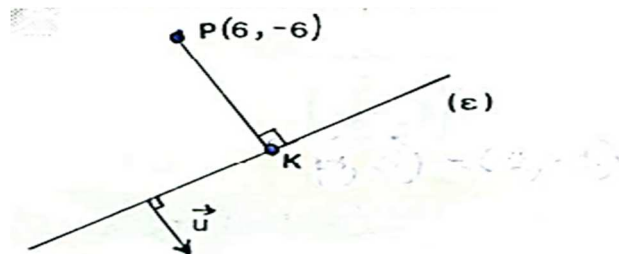
Από $(\Sigma_1) \Leftrightarrow (\alpha = -1, \beta = 4)$ και $(\Sigma_2) \Leftrightarrow (\alpha = \frac{25}{7}, \beta = -\frac{36}{7})$ άρα $\Gamma(-1, 4)$ ή $\Gamma\left(\frac{25}{7}, -\frac{36}{7}\right)$.

- Υπολογίστε τις συντεταγμένες της προβολής του $P(6, -6)$ επί την ευθεία $(\varepsilon): 4x - 5y + 13 = 0$.

Λύση

Αν $K(\alpha, \beta)$ η προβολή του P επί την (ε) και $\vec{u}(4, -5)$ κάθετο διάνυσμα επί την (ε)

$$\begin{aligned} \text{έχουμε } \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PK} // \vec{u} \\ K \in (\varepsilon) \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PK}(\alpha - 6, \beta + 6) \\ \overrightarrow{PK} // \vec{u} \\ K \in (\varepsilon) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} \alpha - 6 & \beta + 6 \\ 4 & -5 \end{array} \right| = 0 \\ 4\alpha - 5\beta + 13 = 0 \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5\alpha + 4\beta = 6 \\ 4\alpha - 5\beta = -13 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow K(2, -1) \end{aligned}$$



18.2 Μέθοδος 2^η

Όταν θέλουμε να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας (η) θα ξέρουμε ότι:

A) Αν είναι γνωστά δυο σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ της (η) τότε

$$(\eta): \frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

B) Αν είναι γνωστό το σημείο $A(x_1, y_1)$ της (η) και ο συντελεστής διεύθυνσης της λ , τότε $(\eta): y - y_1 = \lambda(x - x_1)$.

Ειδικά: **i)** Αν η (η) πρέπει να είναι παράλληλη προς γνωστή ευθεία (ε) τότε έχουμε $\lambda_\eta = \lambda_\varepsilon$ οπότε γράφουμε $(\eta): y = \lambda_\varepsilon x + \beta$ και προσπαθούμε να υπολογίσουμε την τεταγμένη επί την αρχή β .

ii) Αν η (η) πρέπει είναι κάθετη επί γνωστή ευθεία (ε) τότε έχουμε $\lambda_\eta = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon}$,

$\lambda_\varepsilon \neq 0$ οπότε γράφουμε $(\eta): y = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon}x + \beta$ και υπολογίζουμε το β .

iii) Αν η (η) πρέπει να σχηματίζει γωνία φ με γνωστή ευθεία (ε) π.χ. $(\varepsilon \hat{\eta}) = \varphi$ τότε από $\varepsilon \varphi = \frac{\lambda_\eta - \lambda_\varepsilon}{1 + \lambda_\eta \cdot \lambda_\varepsilon}$ βρίσκουμε το λ_η και στη συνέχεια την (η) . $\left(\varphi \neq \frac{\pi}{2} \right)$.

iv) Αν η (η) πρέπει να διέρχεται από το γνωστό σημείο $P(x_0, y_0)$ τότε, αφού οι ευθείες που διέρχονται από το $P(x_0, y_0)$ είναι οι $y - y_0 = \lambda(x - x_0), \lambda \in \mathbb{R}$

εξετάζουμε αρχικά αν η ευθεία $x = x_0$ είναι λύση του προβλήματος. Στη συνέχεια απαιτούμε η ευθεία $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ να πληροί τις υπόλοιπες απαιτήσεις του προβλήματος και έτσι προσδιορίζουμε το λ , άρα και την (η).

v) Αν η (η) ανήκει στη γνωστή δέσμη $\kappa(A_1x + B_1y\Gamma_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$ με $|\kappa| + |\mu| \neq 0$ τότε, ή βρίσκουμε το κέντρο της δέσμης, ή προσδιορίζουμε απ' ευθείας το $(\kappa, \mu) \in R^2 - \{(0,0)\}$. Αν η δέσμη δοθεί ως **μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών** δηλαδή με τη μορφή $(A_1x + B_1y\Gamma_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0, \mu \in R$ εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο υπολογίζοντας απ' ευθείας το $\mu \in R$. Στην περίπτωση αυτή δεν πρέπει να ξεχνάμε να εξετάσουμε αν η ευθεία $A_1x + B_1y\Gamma_1 = 0$ είναι λύση του προβλήματος. Σε κάθε περίπτωση, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αν η (η) ανήκει στη δέσμη $\kappa(A_1x + B_1y\Gamma_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0, |\kappa| + |\mu| \neq 0$ τότε οι ευθείες (η), $A_1x + B_1y\Gamma_1 = 0, A_2x + B_2y\Gamma_2 = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

vi) Αν η (η) είναι γεωμετρικός τόπος, π.χ. διχοτόμος γωνίας, μεσοκάθετη τμήματος, μεσοπαράλληλη παραλλήλων ευθειών, τότε η εξίσωση της βρίσκεται άμεσα από την ιδιότητα του τόπου.

- Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $M(3,-7)$ και έχει ίσες συντεταγμένες επί την αρχή (όχι μηδενικές).

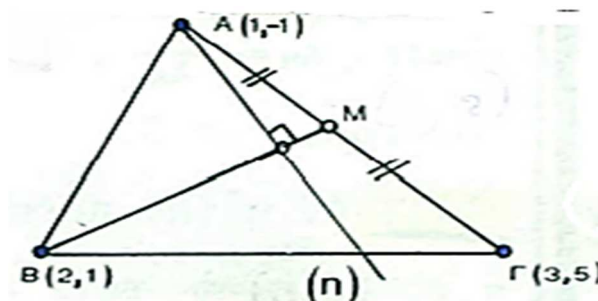
Λύση

Αν α, β είναι οι συντεταγμένες επί την αρχή με $\alpha = \beta$ τότε η ζητούμενη ευθεία (ε) είναι $(\varepsilon): \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow (\varepsilon): x + y = \alpha$.

Επειδή $M \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 3 - 7 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = -4$ οπότε (ε): $x + y + 4 = 0$.

- Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,-1), B(2,1), \Gamma(3,5)$ να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης που άγεται από το A επί την μ_β .

Λύση: Αν M το μέσο της $A\Gamma$ είναι $M(2,2)$ οπότε $\lambda_{BM} = \frac{2-1}{2-2}$ δηλαδή το λ_{BM} δεν ορίζεται $BM \parallel y'y$ και αφού $(\eta) \perp BM \Rightarrow (\eta) \parallel xx'$ οπότε $\lambda_\eta = 0$. Άρα (η): $y - (-1) = 0$. $(x - 1) \Leftrightarrow (\eta): y + 1 = 0$.



- Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,-2), B(5,4), \Gamma(-2,0)$ να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων (εσωτερικών και εξωτερικών) της $\hat{A}$ και η απόσταση των ιχνών τους στην $B\Gamma$.

Λύση

Είναι $AB: \frac{x-1}{y+2} = \frac{5-1}{4+2} \Leftrightarrow AB: 3x-2y-7=0$ και

$AG: \frac{x-1}{y-2} = \frac{-2-1}{0+2} \Leftrightarrow AG: 2x+3y+4=0$. Άρα, το $M(x,y)$ ανήκει σε διχοτόμο της

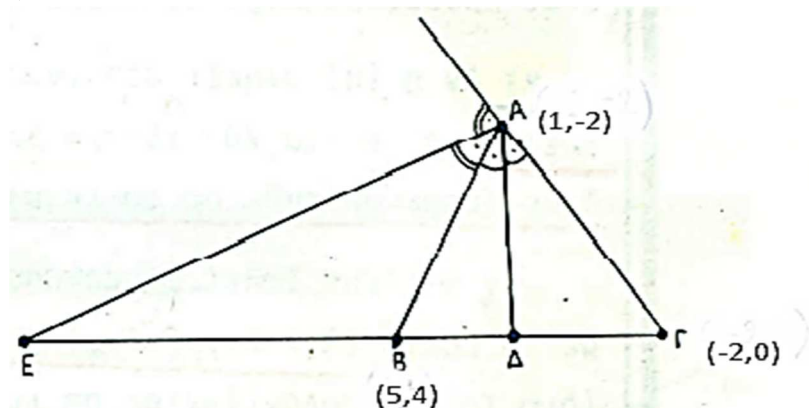
$$\hat{A} \Leftrightarrow d(M, AB) = d(M, AG) \Leftrightarrow \frac{|3x-2y-7|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|2x+3y+4|}{\sqrt{4+9}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-7=2x+3y+4 \Leftrightarrow x-5y-11=0 & (\delta_1) \\ 3x-2y-7=-2x-3y-4 \Leftrightarrow 5x+y-3=0 & (\delta_2) \end{cases}$$

Επειδή $B\Gamma: \frac{x-5}{y-4} = \frac{-2-5}{0-4} \Leftrightarrow B\Gamma: 4x-7y+8=0$.

Οι συντεταγμένες των Δ, E είναι οι λύσεις των συστημάτων
 $\begin{cases} 5x+y=3 \\ 4x-7y=-8 \end{cases} \Rightarrow \Delta\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ και $\begin{cases} x-5y=11 \\ 4x-7y=-8 \end{cases} \Rightarrow E(-9, -4)$.

Άρα, $d(\Delta, E) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}+9\right)^2 + \left(\frac{4}{3}+4\right)^2} = \frac{4\sqrt{65}}{3}$



- Το σημείο $A(-4, 5)$ είναι κορυφή τετραγώνου με διαγώνιο $7x-y+8=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

Λύση

Επειδή οι συντεταγμένες του A δεν επαληθεύουν την εξίσωση της διαγώνιου συμπεραίνουμε ότι δόθηκε η εξίσωση της $BD: 7x-y+8=0$.

Παρατηρούμε ότι $(B\Delta, BA) = 45^\circ$.

Άρα, $\varepsilon\varphi 45^\circ = \frac{\lambda_{BA} - \lambda_{B\Delta}}{1 + \lambda_{BA} \cdot \lambda_{B\Delta}} \Leftrightarrow 1 = \frac{\lambda_{BA} - 7}{1 + 7\lambda_{BA}} \Leftrightarrow \lambda_{BA} = -\frac{4}{3}$ και αφού

$$A\Delta \perp AB \Rightarrow \lambda_{A\Delta} = \frac{3}{4}.$$

Συνεπώς,

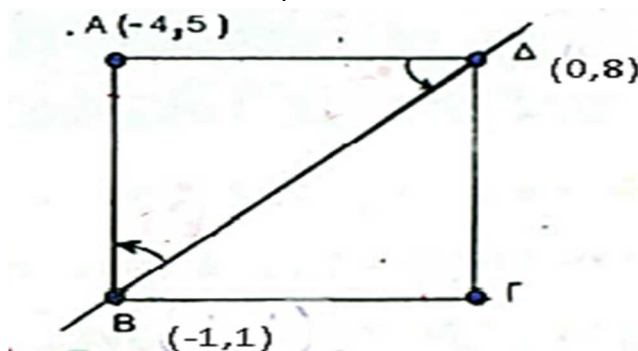
$$\begin{cases} AB: y-5 = -\frac{4}{3}(x+4) \Leftrightarrow AB: 4x+3y+1=0 \\ A\Delta: y-5 = \frac{3}{4}(x+4) \Leftrightarrow A\Delta: 3x-4y+32=0 \end{cases}$$

Οι συντεταγμένες του Β είναι η λύση του $\begin{cases} A\Delta: 4x + 3y = -1 \\ B\Delta: 7x - y = -8 \end{cases} \Rightarrow B(-1,1)$

Οι συντεταγμένες του Δ είναι η Λύση του : $\begin{cases} A\Delta: 3x - 4y = -32 \\ B\Delta: 7x - y = -8 \end{cases} \Rightarrow \Delta(0,8)$

Για τη ΓΔ είναι $\lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{AB} = -\frac{4}{3}$ άρα ΓΔ: $y - 8 = -\frac{4}{3}(x - 0) \Leftrightarrow \Gamma\Delta: 4x + 3y - 24 = 0$

Για την ΒΓ έχουμε : $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{A\Delta} = \frac{3}{4}$ οπότε: ΒΓ : $y - 1 = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow B\Gamma: 3x - 4y + 7 = 0$



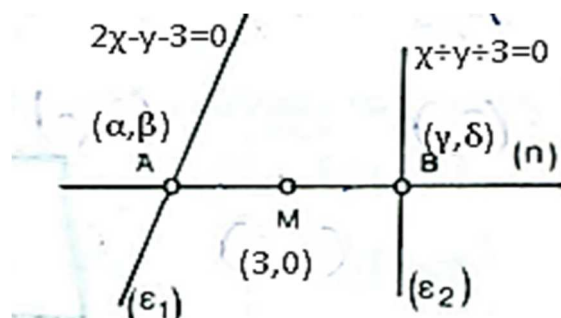
- Να βρεθεί ευθεία που διέρχεται από το $M(3,0)$ και τέμνει τις $(\varepsilon_1): 2x - y - 3 = 0$, $(\varepsilon_2): x + y + 3 = 0$ στα Α,Β ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

Λύση: Έστω ότι είναι $A(\alpha, \beta)$ και $B(\gamma, \delta)$. Τότε πρέπει να έχουμε:

$$\begin{cases} A \text{ σημείο της } (\varepsilon_1) \\ B \text{ σημείο της } (\varepsilon_2) \\ M \text{ μέσο του } AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta - 3 = 0 \\ \gamma + \delta + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \frac{\alpha + \gamma}{2} \\ 0 = \frac{\beta + \delta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = -\beta \\ \gamma = 6 - \alpha \\ 2\alpha - \beta = 3 \\ (6 - \alpha) + (-\beta) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = -\beta \\ \gamma = 6 - \alpha \\ 2\alpha - \beta = 3 \\ \alpha + \beta = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 5 \\ \gamma = 2 \\ \delta = -5 \end{cases} \Leftrightarrow A(4,5), B(2,-5)$$

Οπότε (η):

$$\frac{x-4}{y-5} = \frac{2-4}{-5-5} \Leftrightarrow (η): 5x - y - 15 = 0$$



- Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $P(1,1)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 2.

Λύση

Από το $P(1,1)$ διέρχονται οι ευθείες $\chi=1$ και $y-1=\lambda(\chi-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Η $\chi=1$ δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες και άρα δεν είναι Λύση του προβλήματος.

Η ευθεία $(\varepsilon): y-1=\lambda(\chi-1) \Leftrightarrow (\varepsilon): \lambda\chi - y - \lambda + 1 = 0$ έχει ως συντεταγμένες επί την αρχή τις $\alpha = \frac{\lambda-1}{\lambda}, \beta = \lambda-1$ με $\lambda \neq 0$.

$$\text{Είναι } E_{OAB} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\alpha\beta| = 2 \Leftrightarrow |\alpha\beta| = 4 \Leftrightarrow \left| \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda} \right| = 4$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 4|\lambda| \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0, & \lambda > 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, & \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 + 2\sqrt{2} \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Οπότε λύσεις του προβλήματος είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1): y-1=(2+2\sqrt{2})\chi-1$ και $(\varepsilon_2): y-1=-(\chi-1)$

Για $\lambda=0$ η (ε) είναι παράλληλη στον $\chi\chi'$ και δε σχηματίζεται τρίγωνο.

- Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το μεταξύ των ευθειών $(\varepsilon_1): 2\chi - y + 5 = 0$, $(\varepsilon_2): 2\chi - y + 10 = 0$. Το τμήμα της έχει μετρό 5.

Λύση: οι ευθείες που διέρχονται από το 0 είναι οι $\chi=0$, $y=\lambda\chi$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν Γ , Δ είναι τα σημεία τομής της ευθείας $\chi=0$ (άξονας $y'y$) με τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα, έχουμε:

Οι συντεταγμένες του Γ είναι η λύση του $\begin{cases} \chi = 0 \\ 2\chi - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(0,5)$.

Οι συντεταγμένες του Δ είναι η λύση του $\begin{cases} \chi = 0 \\ 2\chi - y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta(0,10)$.

Επειδή $d(\Gamma, \Delta)=5$ ο άξονας $y'y$ είναι μια λύση του προβλήματος.

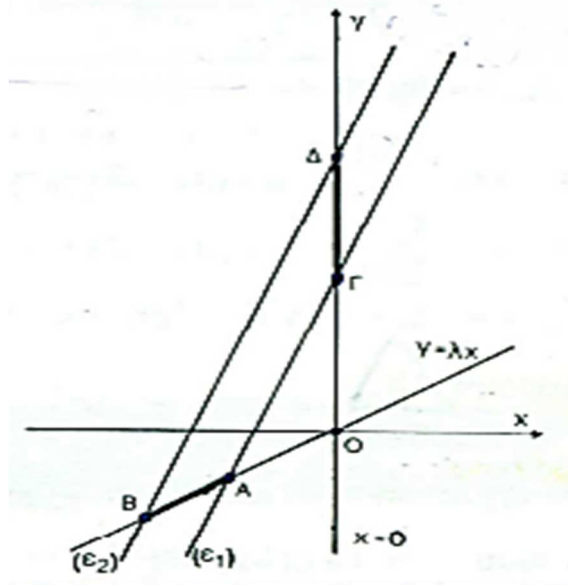
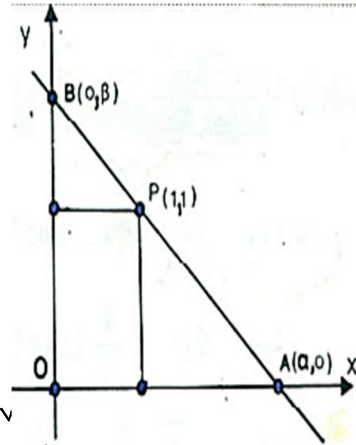
Αν A, B είναι τα σημεία τομής της ευθείας $y=\lambda\chi$ με τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα, τότε οι συντεταγμένες των A, B είναι οι

λύσεις των συστημάτων $\begin{cases} y = \lambda\chi \\ 2\chi - y + 5 = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = \lambda\chi \\ 2\chi - y + 10 = 0 \end{cases}$ αντίστοιχα.

Έτσι έχουμε $A\left(\frac{-5}{2-\lambda}, \frac{-5\lambda}{2-\lambda}\right), B\left(\frac{-10}{2-\lambda}, \frac{-10\lambda}{2-\lambda}\right)$ με $\lambda \neq 2$.

$$\text{Πρέπει } d(A, B) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{5}{2-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{5\lambda}{2-\lambda}\right)^2} = 5 \Rightarrow \frac{25(1+\lambda)^2}{(2-\lambda)^2} = 25 \Leftrightarrow$$

$1+\lambda^2 = (2-\lambda)^2 \Leftrightarrow 1+\lambda^2 = 4-4\lambda+\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$ και άρα η ευθεία $y = \frac{3}{4}\chi$ είναι μια ακόμα λύση του προβλήματος.



Για $\lambda=2$ η ευθεία $y=\lambda x$ είναι παράλληλη προς τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και δεν υπάρχουν σημεία τομής A, B.

- Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης $(x+2y-4)+\mu(x-y-1)=0$ που διέρχεται από το κέντρο βάρους του τριγώνου ABΓ με A(4,-4), B(6,-1), Γ(-1,2).

Λύση

Αν θ το κέντρο βάρους του τριγώνου ABΓ είναι $\theta\left(\frac{x_A+x_B+x_\Gamma}{3}, \frac{y_A+y_B+y_\Gamma}{3}\right) \Rightarrow \theta(3,-1)$. Οι συντεταγμένες του κέντρου P της

δέσμης είναι η λύση του $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ οπότε έχουμε P(2,1).

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η Pθ με εξίσωση: $P\theta: \frac{x-3}{y+1} = \frac{2-3}{1+1} \Leftrightarrow 2x+y-5=0$.

Παρατηρούμε ότι η ευθεία $x-y-1=0$ δεν είναι η λύση του προβλήματος.

- Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης $(x+y+1)+\mu(2x-y+2)=0$ από την οποία ισαπέχουν τα A(3, 1), B(1, -5).

Λύση

Η τυχαία ευθεία της δέσμης έχει εξίσωση $(\varepsilon): (2\mu+1)x + (1-\mu)y + (2\mu+1) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Θέλουμε} \quad d(A, (\varepsilon)) &= d(B, (\varepsilon)) \Leftrightarrow \frac{|(2\mu+1)3 + (1-\mu)1 + (2\mu+1)|}{\sqrt{(2\mu+1)^2 + (1-\mu)^2}} = \\ &= \frac{|(2\mu+1) \cdot 1 + (1-\mu) \cdot (-5) + (2\mu+1)|}{\sqrt{(2\mu+1)^2 + (1-\mu)^2}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |7\mu+5| = |9\mu-3| \Leftrightarrow \begin{cases} 7\mu+5=9\mu-3 & \Leftrightarrow \mu=4 \\ 7\mu+5=-9\mu+3 & \Leftrightarrow \mu=-\frac{1}{8} \end{cases}$$

Άρα λύσεις είναι οι ευθείες:

Για $\mu=4$ $(\varepsilon_1): 3x-y+3=0$.

Για $\mu=-\frac{1}{8}$ $(\varepsilon_2): 2x-3y+2=0$ αφού, είναι εύκολο να ελεγχτεί, η ευθεία $2x-y+2=0$ δεν είναι λύση του προβλήματος.

- Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης $(x-3y-3)+\mu(x+y-2)=0$ που είναι παράλληλη στην $y=5x$ ή, είναι κάθετη στην $x+y-4=0$.

Λύση

Η τυχαία ευθεία (ε) της δέσμης, έχει εξίσωση $(\varepsilon): (\mu+1)x + (\mu-3)y - 2\mu - 3 = 0$.

Έστω $(\eta_1): 5x-y=0$ και $(\eta_2): x+y-4=0$.

Τα διανύσματα $\vec{u}_1(\mu+1, \mu-3), \vec{u}_2(5, -1), \vec{u}_3(1, 1)$ είναι αντίστοιχα κάθετα επί τις $(\varepsilon), (\eta_1), (\eta_2)$. Άρα,

$$\text{A)} (\varepsilon) \perp (\eta_1) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mu+1 & \mu-3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6\mu=14 \Leftrightarrow \mu=\frac{7}{3} \text{ οπότε}$$

$$(\varepsilon): (x-3y-3) + \frac{7}{3}(x+y-2) = 0 \Leftrightarrow 10x - 2y - 23 = 0.$$

$$\text{B)} (\varepsilon) \perp (\eta_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow \mu + 1 + \mu - 3 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ οπότε}$$

$$(\varepsilon): (x-3y-3) + 1(x+y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - 5 = 0.$$

Παρατήρηση. Η ευθεία $x+y-2=0$ δεν είναι λύση, ούτε στην Α ούτε στη Β ερώτηση.

- Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης $(x+y-5)+\mu(2x-y-1)=0$, $\mu \in \mathbb{R}$ που είναι κάθετη επί την $(\eta): 2x+4y-3=0$.

Λύση

Η τυχαία ευθεία (ε) της δέσμης έχει εξίσωση: $(\varepsilon): (2\mu+1)x + (1-\mu)y + (-\mu-5) = 0$.

Τα διανύσματα $\vec{u}_1(2\mu+1, 1-\mu)$, $\vec{u}_2(2, 4)$ είναι κάθετα επί τις (ε) , (η) αντίστοιχα.

Άρα, για είναι $(\varepsilon) \perp (\eta) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow 2(2\mu+1) + 4(1-\mu) = 0 \Leftrightarrow 0\mu + 6 = 0$ (εξίσωση αδύνατη).

Εξετάζουμε τώρα αν η ευθεία $(\varepsilon'): 2xy-1=0$ είναι λύση του προβλήματος:

Πράγματι είναι $\lambda_{\varepsilon'} = 2$, $\lambda_{\eta} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\varepsilon') \perp (\eta)$.

Άρα, η ευθεία της δέσμης που είναι κάθετη επί την $2x+4y-3=0$ είναι η $2x-y-1=0$.

Σημείωση Αν η εξίσωση της δέσμης είχε δοθεί με δυο παραμέτρους θα είχαμε $\kappa(x+y-5)+\mu(2x-y-1)=0$, $(\kappa, \mu) \neq (0, 0) \Rightarrow (\varepsilon): (2\mu+\kappa)x + (\kappa-\mu)y + (-5\kappa-\mu) = 0$

και $(\eta): 2x+4y-3=0$. Είναι $\vec{u}_1(2\mu+\kappa, \kappa-\mu) \perp (\varepsilon)$, $\vec{u}_2(2, 4) \perp (\eta)$ οπότε:

$$(\varepsilon) \perp (\eta) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow 2(2\mu+\kappa) + 4(\kappa-\mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\mu + \kappa + 2\kappa - \mu = 0 \Leftrightarrow 3\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ και αφού } (\kappa, \mu) \neq (0, 0) \text{ έχουμε } \kappa=0 \text{ και } \mu \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon): 2\mu x - \mu y - \mu = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0.$$

➤ Στο τρίγωνο ABΓ έχουμε A(-10, 2), B(6, 4) και ορθόκεντρο H(5, 2). Βρείτε τις συντεταγμένες του Γ και τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

Λύση

Θα βρούμε το Γ ως τομή των ΑΕ, ΒΔ.

Η ΑΕ άγεται από το Α, κάθετα επί την ΒΗ.

$$\lambda_{BH} = 2 \Rightarrow \lambda_{AE} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AE: y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 10)$$

$$\Leftrightarrow AE: x + 2y + 6 = 0.$$

Η ΒΔ άγεται από το Β, κάθετα επί την ΑΗ.

$$\lambda_{AH} = 0 \Rightarrow \lambda_{BG} \text{ δεν ορίζεται} \Rightarrow BG \parallel y'y$$

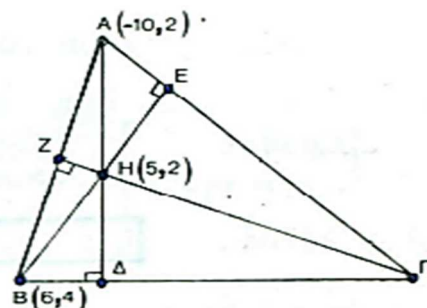
και διέρχεται από το B(6, 4).

Άρα ΒΓ: $x=6$.

$$\text{Οι συντεταγμένες του } \Gamma \text{ είναι η λύση του συστήματος } \begin{cases} x + 2y + 6 = 0 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -6 \end{cases}$$

άρα Γ(6, -6).

Οι εξισώσεις των πλευρών βρίσκονται απλά.



- Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ABΓ με A(1,3) , αν $x-2y+1=0$, $y-1=0$ είναι οι εξισώσεις δύο διαμέσων του.

Λύση

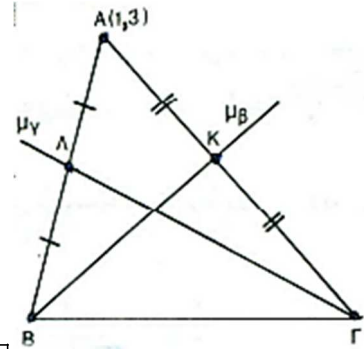
Επειδή οι συντεταγμένες του A δεν επαληθεύουν τις εξισώσεις των διαμέσων, έπεται ότι οι διάμεσοι αυτές άγονται από τα B, Γ. Ας είναι $\mu_\beta : x-2y+1=0$ και

$$\mu_\gamma : y-1=0. \text{ Αν } B(\alpha, \beta) \text{ τότε } \Lambda\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+3}{2}\right).$$

Επειδή

$$\Lambda \in \mu_\gamma \Rightarrow \frac{\beta+3}{2} - 1 = 0 \quad (1), \quad B \in \mu_\beta \Rightarrow \alpha - 2\beta + 1 = 0 \quad (2).$$

Το σύστημα των (1), (2) δίνει τις συντεταγμένες του B. Όμοια εργαζόμαστε για το Γ, οπότε εύκολα βρίσκουμε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

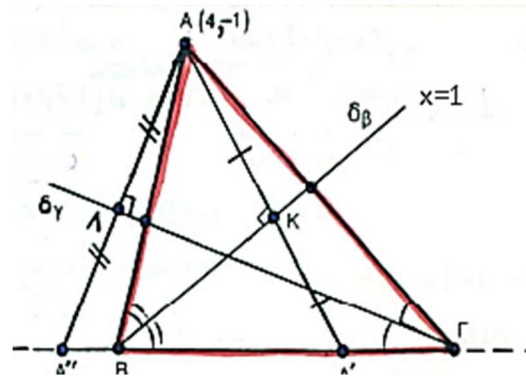


- Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ABΓ με A(4,-1) αν $x-1=0$ και $x-y-1=0$ είναι οι εξισώσεις δύο διχοτόμων του.

Λύση: Παρατηρούμε ότι το A δεν κείται στις δοσμένες διχοτόμους.

Έστω ότι: $\delta_\beta : x-1=0$, $\delta_\gamma : x-y-1=0$. Επειδή η διχοτόμος μίας γωνίας, είναι άξονας συμμετρίας της έπεται ότι, τα συμμετρικά A', A'' του A ως προς τις $\delta_\beta, \delta_\gamma$ είναι σημεία της ΒΓ.

Τότε η εξίσωση της ΒΓ θα βρεθεί από τα A', A'' και τα B, Γ, ως τομές της ΒΓ με τις $\delta_\beta, \delta_\gamma$. Έτσι έχουμε:



Για το A': Ο λ_{δ_β} δεν ορίζεται $\lambda_{\delta_\beta} \Rightarrow AA' // \chi' \chi \Rightarrow AA' : y = -1$.

Οι συντεταγμένες του K είναι η λύση του $\begin{cases} x-1=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow K(1, -1)$.

Επειδή K μέσο του AA' $\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} + 4 = 2 \\ y_{A'} + (-1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -2 \\ y_{A'} = -1 \end{cases} \Rightarrow A'(-2, -1)$.

Όμοια βρίσκω A'' (0,3) οπότε

$$B\Gamma : \frac{x+2}{y+1} = \frac{0+2}{3+1} \Leftrightarrow 2x+4 = y+1 \Leftrightarrow B\Gamma : 2x - y + 3 = 0.$$

Οι συντεταγμένες του B είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1, 5)$ και

του Γ, η λύση του συστήματος $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(-4, -5).$

- Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το P(-2, 3) και από τις οποίες ισαπέχουν τα A(-6, 1), B(2, 7).

Λύση

Οι ευθείες που διέρχονται από το $P(-2,3)$ είναι οι: $x=-2$ και $y-3=\lambda(x+2)$, $\lambda \in R$.
Εξετάζουμε αν η (ε) : $x+2=0$ είναι η λύση του προβλήματος.

$$\text{Είναι } d(A,(\varepsilon)) = \frac{|-6+2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 4, d(B,(\varepsilon)) = \frac{|2+2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 4 \text{ δηλαδή η ευθεία } x+2=0 \text{ είναι}$$

λύση του προβλήματος.

Για τις ευθείες (η) : $y-3=\lambda(x+2) \Leftrightarrow \lambda x - y + 2\lambda + 3 = 0$ έχουμε:

$$d(A,(\eta)) = d(B,(\eta)) \Leftrightarrow \frac{|-6\lambda - 1 + 2\lambda + 3|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}} = \frac{|2\lambda - 7 + 2\lambda + 3|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow |2 - 4\lambda| = |4\lambda - 4| \Leftrightarrow |1 - 2\lambda| = |2\lambda - 2| \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4} \text{ και άρα, η άλλη λύση του}$$

$$\text{προβλήματος είναι η ευθεία } (\eta): y - 3 = \frac{3}{4}(x + 2) \Leftrightarrow 3x - 4y + 18 = 0.$$

- Να βρεθούν οι ευθείες που είναι παράλληλες στην (η) : $2x+3y+6=0$ και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνα εμβαδού 3.

Λύση

Αν (ε) η ζητούμενη ευθεία με συντεταγμένες επί την αρχή α, β θα έχουμε

$$(\varepsilon): \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0 \text{ και άρα: } \lambda_\varepsilon = \frac{-\beta}{\alpha}.$$

$$\text{Πρέπει } (\varepsilon) \parallel (\eta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta \Leftrightarrow \frac{-\beta}{\alpha} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Πρέπει } E_{OAB} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \alpha \cdot \beta = 3 \Leftrightarrow \alpha\beta = 6.$$

$$\text{Το σύστημα } \left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta = 6 \\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \pm 3 \\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (\alpha = 3, & \beta = 2) \\ & \text{ή} \\ (\alpha = -3, & \beta = -2) \end{array} \right\} \text{ οπότε}$$

$$(\varepsilon_1): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0 \text{ και } (\varepsilon_2): \frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6 = 0$$

- Έστω οι δέσμες $k_1(x+2y-5)+\mu_1(3x-y-1)=0$, $|k_1|+|\mu_1| \neq 0$ και $k_2(x+2)+\mu_2(x+y-1)=0$, $|k_2|+|\mu_2| \neq 0$. Να βρεθεί η ευθεία που ανήκει και στις δυο δέσμες χωρίς να βρεθούν τα κέντρα τους.

Λύση

Αν (ε) : $Ax+By+\Gamma=0$, $|A|+|B| \neq 0$ η ζητούμενη ευθεία, τότε:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Οι } Ax + By + \Gamma = 0, \quad x + 2y - 5 = 0, \quad 3x - y - 1 = 0, \text{ διέρχονται από το ίδιο σημείο} \\ \text{Οι } Ax + By + \Gamma = 0, \quad x + 2 = 0, \quad x + y - 1 = 0, \text{ διέρχονται από το ίδιο σημείο} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

γράφεται: $Ax+3Ay-7A=0 \Leftrightarrow (\varepsilon): x+3y-7=0$

- ## Λύση

Λύση

Λύση

Αν P η τομή των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, οι συντεταγμένες του P είναι η λύση του $\begin{cases} x-3y+1=0 \\ 2x+5y-9=0 \end{cases}$ οπότε $P(2, 1)$.

Οι ευθείες που διέρχονται από το $P(2, 1)$ είναι οι $(\eta_1): x-2=0$ και $(\eta_2): y-1=\lambda(x-2) \Leftrightarrow (\eta_2): \lambda x-y+(1-2\lambda)=0$ με $\lambda \in R$.

Έχουμε τότε $d(0, (\eta_1)) = \frac{|0-2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 2 \Rightarrow \eta_1: x-2=0$ είναι η λύση του

προβλήματος.

Για τις ευθείες (η_2) πρέπει

$$d(0, (\eta_2)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 + (1-2\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow |1-2\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-3}{4} \text{ οπότε μια}$$

άλλη λύση του προβλήματος είναι η ευθεία

$$(\eta_2): y-1 = -\frac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow (\eta_2): 3x+4y-10=0.$$

2ος τρόπος: Αν $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$, $|A|+|B| \neq 0$ η ζητούμενη ευθεία πρέπει:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} P \in (\varepsilon) \\ d(0, (\varepsilon)) = 2 \\ |A|+|B| \neq 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2A+B+\Gamma=0 \\ \frac{|A \cdot 0 + B \cdot 0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \\ |A|+|B| \neq 0 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2A+B+\Gamma=0 \\ 4A^2+4B^2-\Gamma^2=0 \\ |A|+|B| \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2A+\Gamma=-B \\ (2A+\Gamma)(2A-\Gamma)=-4B^2 \\ |A|+|B| \neq 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

A) Αν $B \neq 0$ έχουμε ισοδύναμα $\begin{cases} 2A+\Gamma=-B \\ 2A-\Gamma=4B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{4}B \\ \Gamma=\frac{-5}{2}B \end{cases}$ οπότε

$$(\varepsilon): \frac{3}{4}Bx + By - \frac{5}{2}B = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon): \frac{3}{4}x + y - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon): 3x + y - \frac{5}{2} = 0$$

B) Αν $B=0$ έχουμε ισοδύναμα $\begin{cases} 2A+\Gamma=0 \\ 2A-\Gamma=k \\ A \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{k}{4} \\ \Gamma=\frac{-k}{2} \\ A \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{k}{4} \\ \Gamma=\frac{-k}{2} \\ k \neq 0 \end{cases}$ οπότε

$$(\varepsilon): \frac{k}{4}x + 0 \cdot y - \frac{-k}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon): x-2=0. \text{ Άρα, λύσεις του προβλήματος είναι οι ευθείες με εξισώσεις } x-2=0 \text{ και } 3x+4y-10=0.$$

- Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): \mu x + (\mu-1)y - 4 = 0, (\varepsilon_2): (3\mu+1)x - 2\mu y - 7 = 0$ να είναι κάθετες.

Λύση

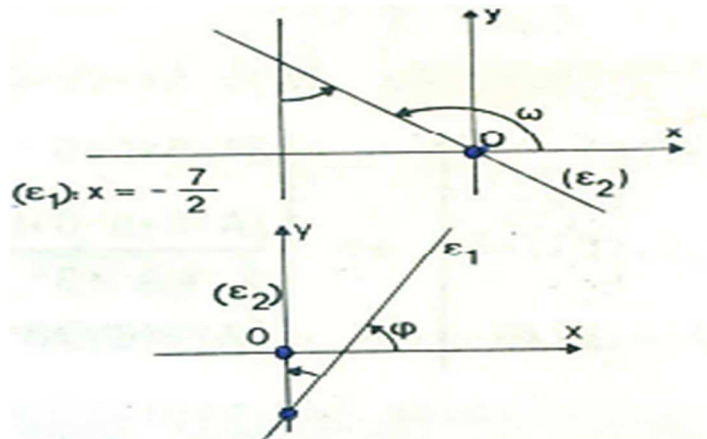
Αρχικά πρέπει $|\mu| + |\mu-1| \neq 0, |3\mu+1| + |-2\mu| \neq 0$, πράγμα που συμβαίνει.

Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = (\mu-1, -\mu), \vec{v} = (-2\mu, -(3\mu+1))$ που είναι αντίστοιχα παράλληλα προς τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

Τότε έχουμε

$$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -2\mu(\mu-1) + \mu(3\mu+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu \cdot [-2\mu + 2 + 3\mu + 1] = 0 \Leftrightarrow \mu(\mu+3) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0 \text{ ή } \mu = -3.$$



- Αν $(\varepsilon_1): (3\mu+2)x - \mu y + 7 = 0, (\varepsilon_2): (\mu+2)x + (\mu+1)y = 0$ να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = 45^\circ$.

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι $|3\mu+2| + |-\mu| \neq 0, |\mu+2| + |\mu+1| \neq 0$.

- Για $\mu=0$ δεν ορίζεται ο λ_{ε_1} και έχουμε $(\varepsilon_1): x = -\frac{7}{2}, (\varepsilon_2): 2x + y = 0$ οπότε

$$\sigma\varphi(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = -\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{\varepsilon_2} = -2 \Rightarrow (\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) \neq 45^\circ.$$

- Για $\mu=-1$ δεν ορίζεται ο λ_{ε_2} . Τότε $(\varepsilon_1): -x + y + 7 = 0, (\varepsilon_2): x = 0$ οπότε

$$\sigma\varphi(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{\varepsilon_1} = 1 \Rightarrow (\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = 45^\circ$$

Άρα για $\mu=-1$ είναι $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = 45^\circ$

- Στην γενική περίπτωση με $\mu \neq 0, \mu \neq -1$ οπότε ορίζονται τα $\lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2}$ έχουμε :

$$\lambda_{\varepsilon_1} = \frac{3\mu+2}{\mu}, \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{\mu+2}{\mu+1} \quad \text{οπότε} \quad \varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = 45^\circ \Rightarrow \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1} = 1 + \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow -\frac{\mu+2}{\mu+1} - \frac{3\mu+2}{\mu} = 1 - \frac{(\mu+2)(3\mu+2)}{\mu(\mu+1)} \Leftrightarrow$$

$$-\mu(\mu+2) - (\mu+1) \cdot (3\mu+2) = \mu(\mu+1) - (\mu+2) \cdot (3\mu+2) \Leftrightarrow$$

$$(\mu+2)(3\mu+2) - (\mu+1)(3\mu+2) = \mu(\mu+1) + \mu(\mu+2) \Leftrightarrow$$

$3\mu + 2 = \mu(2\mu + 3) \Leftrightarrow 2\mu^2 = 2 \Leftrightarrow \mu = \pm 1$. Τελικά έχουμε ότι για $\mu = \pm 1$ είναι $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 45^\circ$.

18.3 Μέθοδος 3^η

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια σχέση ή ιδιότητα της ευκλείδειας γεωμετρίας, εκλέγουμε αρχικά ένα σύστημα αξόνων. Η εκλογή του συστήματος γίνεται με βασικό κριτήριο την εύκολη έκφραση, με συντεταγμένες και εξισώσεις, των γεωμετρικών στοιχείων που εμφανίζονται στο πρόβλημα.

- Να δειχτεί ότι σε κάθε τρίγωνο τα ύψη του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Θεωρούμε ως άξονα των x την $B\Gamma$ και ως άξονα των y την κάθετη επί την $B\Gamma$, που άγεται από το A .

Έστω ότι $A(0, \alpha)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, 0)$ με $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

Είναι $v_\alpha \equiv A0 \Rightarrow A0: x = 0 \Leftrightarrow v_\alpha: x + 0y + 0 = 0$.

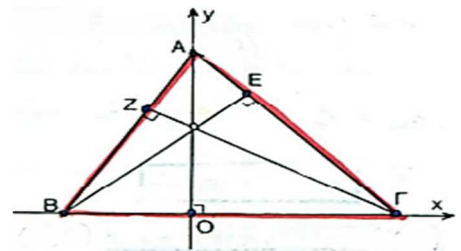
$$v_\beta \equiv BE, \lambda_{A\Gamma} = \frac{\alpha}{-\gamma} \Rightarrow \lambda_{BE} = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow BE: y = \frac{\gamma}{\alpha}(x - \beta) \Leftrightarrow$$

$$v_\beta: \gamma x - \alpha y - \beta\gamma = 0$$

$$v_\gamma \equiv \Gamma Z, \lambda_{AB} = \frac{-\alpha}{\beta} \Rightarrow \lambda_{\Gamma Z} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \Gamma Z: y = \frac{\beta}{\alpha}(x - \gamma) \Leftrightarrow v_\gamma: \beta x - \alpha y - \beta\gamma = 0$$

Παρατηρούμε ότι $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & -\alpha & -\beta\gamma \\ \beta & -\alpha & -\beta\gamma \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha \neq 0$ πράγμα που σημαίνει ότι

οι ευθείες $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



- Να δειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο οι διάμεσοι του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Θεωρούμε ως άξονα των x την $B\Gamma$ και ως άξονα των y τη μεσοκάθετη της $B\Gamma$.

Έστω ότι $A(\alpha, \beta)$, $\Gamma(\gamma, 0)$, $B(-\gamma, 0)$ με $\beta\gamma \neq 0$.

Αν K, Λ τα μέσα των $A\Gamma, AB$ αντίστοιχα, είναι

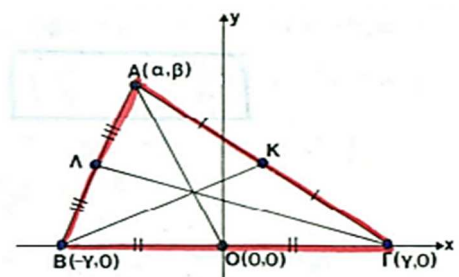
$K\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}, \frac{\beta}{2}\right), \Lambda\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ άρα βρίσκουμε BK :

$$\beta x - (\alpha + 3\gamma)y + \beta\gamma = 0 \quad \Gamma\Lambda: \beta x (\alpha - 3\gamma)y - \beta\gamma = 0 \text{ και } \Lambda_{0\Lambda} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$0A: y = \frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow A0: \beta x - \alpha y = 0.$$

Παρατηρούμε ότι $\begin{vmatrix} \beta & -(\alpha + 3\gamma) & \beta\gamma \\ \beta & -(\alpha - 3\gamma) & -\beta\gamma \\ \beta & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} \beta & -(\alpha - 3\gamma) \\ \beta & -\alpha \end{vmatrix} = -3\beta\gamma \neq 0$ άρα, οι

διάμεσοι του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.



- Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=1$ ορθ) και τα τετράγωνα $AB\Delta E$, $AGZH$ εξωτερικά του τριγώνου. Δείξτε ότι το ύψος AP του τριγώνου $AB\Gamma$ και οι ευθείες $\Gamma\Delta$, BZ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη: Θεωρούμε ως σύστημα αξόνων τις πλευρές της ορθής γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$ και έστω ότι $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$ με $\beta\gamma \neq 0$. Είναι $\lambda_{B\Gamma} = \frac{\gamma}{-\beta} \Rightarrow \lambda_{AP} = \frac{\beta}{\gamma}$ άρα

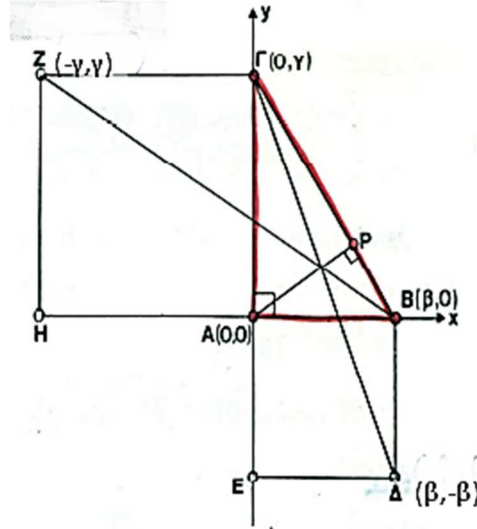
$$AP: y = \frac{\beta}{\gamma}x \Leftrightarrow AP: \beta x - \gamma y = 0 \quad (1).$$

Επειδή $\Delta(\beta, -\beta)$ και $\Gamma(0, \gamma)$ βρίσκουμε $\Gamma\Delta: (\beta + \gamma)x + \beta y - \beta\gamma = 0 \quad (2).$

Επειδή $Z(-\gamma, \gamma)$ και $B(\beta, 0)$ βρίσκουμε $BZ: \gamma x + (\beta + \gamma)y - \beta\gamma = 0 \quad (3).$

Παρατηρούμε ότι: $\begin{vmatrix} \beta & -\gamma & 0 \\ \beta + \gamma & \beta & -\beta\gamma \\ \gamma & \beta + \gamma & -\beta\gamma \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} \beta & -\gamma \\ \beta + \gamma & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma \neq 0$ οπότε

οι ευθείες (1), (2), (3) διέρχονται από το ίδιο σημείο.



- Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, σημείο P της $B\Delta$ και το συμμετρικό H του Γ ως προς το P . Αν $HE \perp AB$, $HZ \perp A\Delta$, δείξτε ότι τα σημεία P , E , Z είναι ομοευθειακά.

Λύση

Θεωρούμε ως σύστημα αξόνων τους Ax , Ay . Τότε $A(0, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\beta, \delta)$, $\Delta(0, \delta)$. Υποθέτουμε ότι $H(\alpha, \gamma)$ οπότε $E(\alpha, 0)$ και $Z(0, \gamma)$.

Επειδή P είναι μέσο του $\Gamma H \Rightarrow P\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\gamma + \delta}{2}\right)$.

Τα P, E, Z είναι ομοευθειακά, αν και μόνο

$$E_{PEZ} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\alpha + \beta}{2} & \frac{\gamma + \delta}{2} & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma - \alpha\frac{\gamma + \delta}{2} - \gamma\frac{\alpha + \beta}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha\gamma - \alpha\gamma - \alpha\delta - \alpha\gamma - \beta\gamma = 0 \Leftrightarrow -\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\delta + \beta\gamma = 0.$$

Αυτό ισχύει αφού B, P, Δ ομοευθειακά

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \\ \frac{\alpha + \beta}{2} & \frac{\gamma + \delta}{2} & 1 \\ 0 & \delta & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta\frac{\gamma + \delta}{2} + \delta\frac{\alpha + \beta}{2} - \beta\delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta\gamma + \beta\delta + \alpha\delta + \beta\delta - 2\beta\delta = 0 \Leftrightarrow \beta\gamma + \alpha\delta = 0.$$

18.4 Μέθοδος 4^η

Όταν δοθεί η εξίσωση μια ευθείας (ε), που οι συντελεστές εκφράζονται με τη βοήθεια μιας παραμέτρου λ, και ζητηθεί να αποδειχτεί ότι διέρχεται από το σταθερό σημείο τότε:

- Αν οι συντελεστές είναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα του λ, αρκεί να δώσουμε στην εξίσωση της (ε), τη μορφή εξίσωσης δέσμης, οπότε το σταθερό σημείο είναι το κέντρο της δέσμης.

- Αν οι συντελεστές είναι ως προς λ βαθμού μεγαλύτερου ή όσου του 2, τότε απαιτούμε η (ε) να διέρχεται από το $P(x_0, y_0) \forall \lambda \in R$ και φτάνουμε έτσι σε μηδενικό πολυώνυμο ως προς λ, που από το μηδενισμό των συντελεστών του, βρίσκουμε τα x_0, y_0 και άρα το σταθερό σημείο $P(x_0, y_0)$.

- Δείξτε ότι η ευθεία (ε): $(2\lambda+1)x + (2\lambda-3)y + 5\lambda - 7 = 0$ διέρχεται από το σταθερό σημείο, για κάθε $\lambda \in R$.

Λύση

Είναι

$(\varepsilon): (2\lambda+1)x + (2\lambda-3)y + 5\lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon): (x-3y-7) + \lambda(2x+2y+5) = 0}$ που είναι εξίσωση δέσμης με κέντρο, που έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος $\begin{cases} x-3y-7=0 \\ 2x+2y+5=0 \end{cases}$.

- Δείξτε ότι η ευθεία (ε): $(2\lambda^2 - \lambda - 1)x - (\lambda^2 - 3\lambda + 1)y - (\lambda^2 + 2\lambda - 2) = 0$ διέρχεται από το σταθερό σημείο, για κάθε $\lambda \in R$.

Λύση

Η (ε) διέρχεται από το σταθερό σημείο $P(x_0, y_0) \forall \lambda \in R \Leftrightarrow$ Το P κείται στην $(\varepsilon) \forall \lambda \in R \Leftrightarrow (2\lambda^2 - \lambda - 1)x_0 - (\lambda^2 - 3\lambda + 1)y_0 - (\lambda^2 + 2\lambda - 2) = 0 \forall \lambda \in R \Leftrightarrow$

$$(2x_0 - y_0 - 1)\lambda^2 + (-x_0 + 3y_0 - 2)\lambda + (-x_0 - y_0 + 2) = 0 \forall \lambda \in R \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ -x_0 + 3y_0 - 2 = 0 \\ -x_0 - y_0 + 2 = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα τούτο είναι συμβιβαστό με λύση την $(x_0 = 1, y_0 = 1)$. Άρα πράγματι η ευθεία (ε) διέρχεται, $\forall \lambda \in R$, από το σταθερό σημείο $P(1,1)$.

- Δείξτε ότι η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$ (1) για κάθε πραγματική τιμή του μ, εκτός από μια η οποία και να βρεθεί, είναι εξίσωση ευθείας που διέρχεται από σταθερό σημείο.

Λύση

Η (1) είναι εξίσωση ευθείας (ε), αν και μόνο

$$|\mu^2 - 1| + |3\mu^2 - 2\mu - 1| \neq 0 \Leftrightarrow |(\mu+1)(\mu-1)| + |(\mu-1)(3\mu+1)| \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 1.$$

Συνεπώς, η (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο $P(x_0, y_0) \forall \mu \in R - \{1\}$, αν και μόνο

$$\text{ισχύει,} \quad (\mu^2 - 1)x_0 + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y_0 - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0 \quad \forall \mu \in R - \{1\}$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 3y_0 - 5)\mu^2 + (-2y_0 + 4)\mu + (-x_0 - y_0 + 1) = 0 \quad \forall \mu \in R - \{1\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 3y_0 - 5 = 0 \\ -2y_0 + 4 = 0 \\ -x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα τούτο είναι συμβιβαστό με λύση την $(x_0 = -1, y_0 = 2)$. Άρα η (ε) διέρχεται από το σταθερό σημείο $P(-1, 2) \quad \forall \mu \in R - \{1\}$

18.5 Μέθοδος 5^η

Όταν σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα με μεταβλητό στοιχείο (q) , (σημείο, ευθεία, τμήμα) θέλουμε να δείξουμε ότι η μεταβλητή ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο, τότε:

- Αρχικά εκλέγουμε ένα σύστημα αξόνων.
- Με τη βοήθεια μιας παραμέτρου t «εκφράζουμε» τον τρόπο μεταβολής του (q) .
- Βρίσκουμε την εξίσωση της (ε) . οπότε έχουμε πρόβλημα που ανάγεται στη μέθοδο 4.

- Στις πλευρές Ox , Oy ορθής γωνίας $\hat{\chi O y}$ κινούνται τα A, B ώστε $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k}$

(k =σταθερά, $k > 0$). Δείξτε ότι η AB διέρχεται από το σταθερό σημείο.

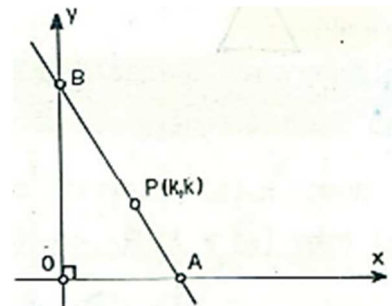
Λύση

Θεωρούμε ως άξονες τους Ox , Oy . Το ότι τα A, B κινούνται στις Ox , Oy εκφράζεται από τα $y_A = 0, \quad \chi_B = 0$.

Αν τεθεί $OA = t \Rightarrow \chi_A = t$ και

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{OB} = \frac{1}{k} - \frac{1}{t} \Leftrightarrow OB = \frac{kt}{t-k} \Leftrightarrow y_B = \frac{kt}{t-k}.$$

Συνεπώς $A(t, 0), B(0, \frac{kt}{t-k})$ οπότε

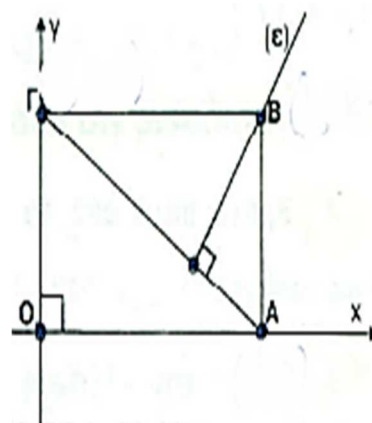


$$AB: \frac{x}{t} + \frac{y}{\frac{kt}{t-k}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{t} + \frac{(t-k)y}{kt} = 1 \Leftrightarrow kx + (t-k)y = kt \Leftrightarrow$$

$AB: k(\chi - y) + t(y - k) = 0$ (εξίσωση δέσμης). Άρα η AB διέρχεται από σταθερό σημείο P , το κέντρο της δέσμης, που έχει συντεταγμένες τη Λύση του συστήματος $\begin{cases} k(x - y) = 0 \\ y - k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = k \end{cases}$ Άρα $P(k, k)$.

- Θεωρούμε ορθή γωνία $\hat{\chi O y}$ και τα μεταβλητά σημεία A, Γ των Ox, Oy αντίστοιχα, ώστε $OA + O\Gamma = k$, k =σταθερό. Αν $OAB\Gamma$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ναδειχθεί ότι η ευθεία (ε) , που άγεται από το B , κάθετη επί την $A\Gamma$, διέρχεται από σταθερό σημείο.

Λύση



Θεωρούμε ως σύστημα αξόνων τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας $\hat{\chi O y}$.

Ότι τα A, Γ κινούνται στις Ox, Oy αντίστοιχα, αυτό “εκφράζεται” από τα $y_A = 0, \chi_\Gamma = 0$.

Ακόμα, αν τεθεί $OA = t$ με $0 < t < k$ η σχέση $OA + O\Gamma = k$ δίνει $O\Gamma = k - t$ και άρα είναι $A(t, 0), \Gamma(0, k - t)$ οπότε και $B(t, k - t)$.

Επειδή $\lambda_{A\Gamma} = \frac{k-t}{-t}$ και $(\varepsilon) \perp A\Gamma \Rightarrow \lambda_{(\varepsilon)} = \frac{t}{k-t}$. Συνεπώς,

$$(\varepsilon): y - (k - t) = \frac{t}{k - t}(\chi - t) \Leftrightarrow (\varepsilon): (k - t)y - (k - t)^2 = t\chi - t^2 \Leftrightarrow$$

$(\varepsilon): (k - t)y - k^2 + 2kt - t^2 = t\chi - t^2 \Leftrightarrow (\varepsilon): (ky - k^2) + t(2k - \chi - y) = 0$ Παρατηρούμε ότι η εξίσωση της (ε) , είναι εξίσωση δέσμης και άρα η (ε) για $0 < t < k$ διέρχεται από σταθερό σημείο, το κέντρο της δέσμης, που οι συντεταγμένες του είναι η Λύση του
$$\left\{ \begin{array}{l} ky - k^2 = 0 \\ 2k - \chi - y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = k \\ \chi = k \end{array} \right\}$$
 δηλαδή η (ε) διέρχεται από το σταθερό σημείο $P(k, k)$.

• Έστω ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο OAB ($\hat{O} = 1$ ορθή) και μεταβλητό σημείο P της AB . Ονομάζουμε P_1, P_2 τις ορθές προβολές του P επι τις OA, OB αντίστοιχα, και (ε) τη μεσοκαίριτη του P_1, P_2 . Δείξτε ότι η (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο.

Λύση

Θεωρούμε ως σύστημα αξόνων τις πλευρές της ορθής γωνίας $\hat{O}$ οπότε, αν υποθέσουμε ότι $OA = a$ έχουμε $A(a, 0)$ και $B(0, a)$.

Τότε είναι $AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow AB: x + y - a$

Αν $x_P = t$, επειδή $P \in AB \Rightarrow y_P = a - t$ άρα η $P(t, a - t)$ «εκφράζει» ότι το P κινείται στην AB .

Είναι τότε $P_1(t, 0)$ και $P_2(0, a - t)$ οπότε, αν K είναι το μέσο των P_1, P_2 , έχουμε

$$K\left(\frac{t}{2}, \frac{a-t}{2}\right) \text{ και } \lambda_{P_1, P_2} = \frac{a-t}{-t} \Rightarrow \lambda_{(\varepsilon)} = \frac{t}{a-t}$$

Άρα $(\varepsilon): y - \frac{a-t}{2} = \frac{t}{a-t}\left(x - \frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow a(2y - a) + 2t(a - x - y) = 0$ (εξίσωση δέσμης)

και άρα η (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο P , το κέντρο της δέσμης, που έχει

$$\text{συντεταγμένες τη λύση του συστήματος } \left\{ \begin{array}{l} 2y - a = 0 \\ a - x - y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right).$$