



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Σπουδαστές: **Αμπελακιώτης Κωνσταντίνος** (AM 7938)
Ελευθεριάδης Αλέξιος (AM 7961)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς**, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: **2021– 2022**

Ημερομηνία ανάθεσης: 24.01.2021

Ημερομηνία κατάθεσης: 02.02.2022

Ημερομηνία εξέτασης: 02.2022

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Ιστορία	3
2. Οι αριθμοί Fibonacci	5
3. Η ακολουθία Fibonacci.....	6
4. Η ακολουθία Fibonacci και η φύση.....	7
5. Η ακολουθία Fibonacci και η σπείρα στο κέλυφος του ναυτίλου	10
6. Ακολουθία Fibonacci σε τραγούδι.....	13
7. Αριθμοί Fibonacci, το αριθμητικό σύστημα της φύσης	14
8. Αριθμοί Fibonacci και τρίγωνο Pascal	23

**1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,
233, 377**

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 5 = 8$$

$$5 + 8 = 13$$

$$8 + 13 = 21$$

$$13 + 21 = 34$$

$$21 + 34 = 55$$

$$34 + 55 = 89$$

$$55 + 89 = 144$$

$$89 + 144 = 233$$

$$144 + 233 = 377$$



1. Ιστορία

Ο Fibonacci ήταν πολύ γνωστός στην εποχή του και αναγνωρίζεται σήμερα ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός του μεσαίωνα. Γεννήθηκε στη δεκαετία του 1170 και πέθανε στη δεκαετία του 1240. Άγαλμά του υπάρχει στο νεκροταφείο, δίπλα στον καθεδρικό ναό της Pisa, κοντά στον περίφημο πύργο. Το όνομά του έχει δοθεί σε δύο δρόμους στην Pisa και σε δύο αντίστοιχα στη Φλωρεντία. Το πραγματικό του όνομα ήταν Leonardo Pisano, όμως ο ίδιος αποκαλούσε τον εαυτό του Fibonacci, σύντμηση του Filius Bonacci (γιός του Bonacci), από το όνομα του πατέρα του. Ο πατέρας του Leonardo, Guglielmo Bonacci, ήταν τελωνειακός υπάλληλος στη Βορειοαφρικανική πόλη Bugia. Ο Fibonacci μεγάλωσε εκεί και η εκπαίδευσή του επηρεάστηκε σημαντικά από τους Μαυριτανούς και τα ταξίδια που έκανε αργότερα σε όλο το μήκος της μεσογειακής ακτής. Έτσι, γνώρισε πολλούς εμπόρους και έμαθε τα αριθμητικά συστήματα που αυτοί χρησιμοποιούσαν για τις συναλλαγές και τους λογαριασμούς τους. Σύντομα διαπίστωσε τα πλεονεκτήματα του «Ινδοαραβικού» αριθμητικού συστήματος και έγινε από τους πρώτους που το εισήγαγαν στην Ευρώπη. Πρόκειται για το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιείται και σήμερα, με δέκα ψηφία, ένα εκ των οποίων το μηδέν και την υποδιαστολή. Το βιβλίο του Liber abbaci (βιβλίο των υπολογισμών) το οποίο ολοκληρώθηκε το 1202 έπεισε αρκετούς Ευρωπαίους μαθηματικούς να χρησιμοποιήσουν το «νέο» σύστημα.

Το βιβλίο, γραμμένο στα λατινικά, περιγράφει με λεπτομέρεια τους μαθηματικούς κανόνες που σήμερα διδάσκονται στο δημοτικό για την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση και περιέχει πολλές ασκήσεις–παραδείγματα με λεπτομέρειες για την εφαρμογή αυτών των κανόνων. Το βιβλίο έτυχε θερμής υποδοχής ανάμεσα στους λογίους της Ευρώπης και τους επηρέασε σημαντικά αν και το σύστημα έγινε ευρέως γνωστό μετά την εφεύρεση της τυπογραφίας. Ο αυτοκράτορας Φρειδερίκος Β΄ της Αγίας Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας ήταν σύμμαχος της πολιτείας της Πίζας στον πόλεμο της κατά της Γένοβας και ενισχύθηκε τόσο πολύ η επιρροή του στην Ιταλία, που το 1224 ίδρυσε το Πανεπιστήμιο της Νάπολης προς άντληση επιστημονικού ανθρώπινου δυναμικού.

Γνώρισε το έργο του Fibonacci μέσω των λογίων της αυλής και ένας από αυτούς, ο φιλόσοφος Δομίνικος Ισπανός, του συνέστησε να συναντήσει τον Fibonacci στην επίσκεψη της αυλής στην Πίζα το 1225. Ένα άλλο μέλος της αυλής, ο Ιωάννης του Παλέρμο, παρουσίασε στον Fibonacci έναν αριθμό προβλημάτων, τρία από τα οποία έλυσε. Έπειτα χάνονται τα ίχνη του αφού μετά το 1228 υπάρχει μόνο

μία αναφορά του ονόματος του σε ένα διασωθέν έγγραφο μισθοδοσίας της πολιτείας της Πίζα του 1240.

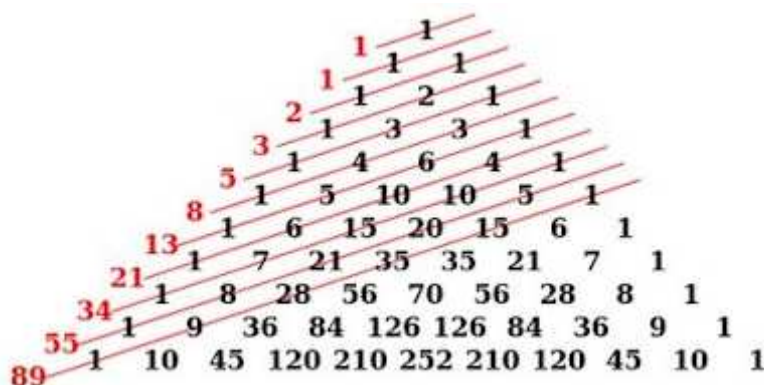


Σελίδα του βιβλίου Liber Abaci όπου περιέχεται η συγκεκριμένη ακολουθία.



Αγαλμα του Fibonacci

2. Οι αριθμοί Fibonacci

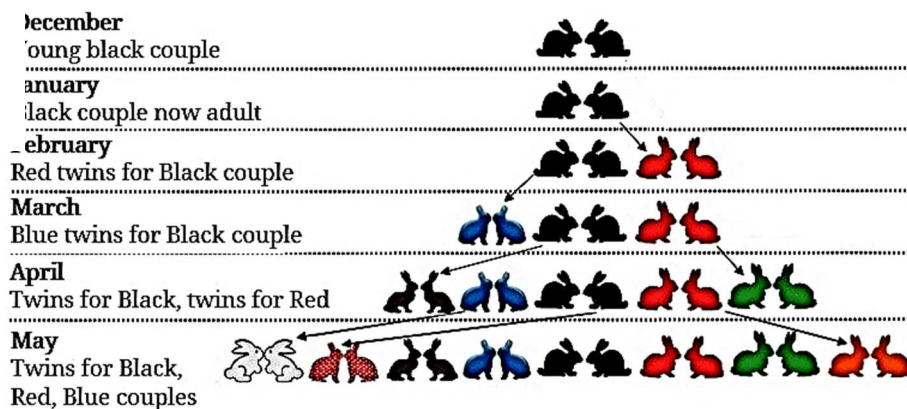
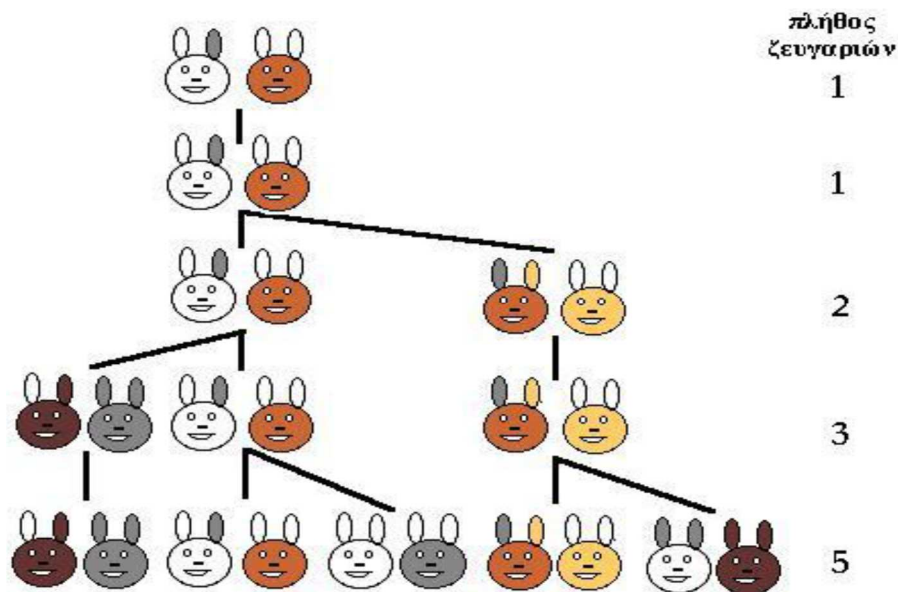


Οι αριθμοί Fibonacci είναι το αριθμητικό σύστημα της φύσης. Εμφανίζονται παντού στη φύση, από τη διάταξη των φύλλων στα φυτά μέχρι το μοτίβο των πετάλων στα λουλούδια, τις πευκοβελόνες, ή τα στρώματα φλοιού ενός ανανά. Φαίνεται πως οι αριθμοί Fibonacci σχετίζονται με την ανάπτυξη κάθε ζωντανού οργανισμού, ενός κυττάρου, ενός σπυριού σταριού, μίας κυψέλης μελισσών, ακόμα της ίδιας της ανθρωπότητας. Στη Δύση, οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται για πρώτη φορά στο βιβλίο *Liber Abaci* (1202) του Λεονάρντο της Πίζας, γνωστού και ως Fibonacci. Ο Fibonacci παίρνει ως δεδομένο ένα ιδανικό πληθυσμό κουνελιών και κάνει τις εξής υποθέσεις: έχουμε ένα νεογέννητο ζευγάρι κουνελιών (αρσενικό και θηλυκό) σε ένα χωράφι, τα κουνέλια είναι σε θέση να ζευγαρώσουν σε ηλικία ενός μήνα από τη γέννησή τους, έτσι ώστε στο τέλος του δεύτερου μήνα το θηλυκό να μπορεί να γεννήσει ένα ζευγάρι κουνελιών, τα κουνέλια δεν πεθαίνουν ποτέ και κάθε ζευγάρι κουνελιών γεννά ένα νέο ζευγάρι (ένα αρσενικό και ένα θηλυκό) κάθε μήνα από το δεύτερο μήνα και μετά.

Το ερώτημα που έθεσε ο Fibonacci ήταν: πόσα ζεύγη κουνελιών θα έχουν γεννηθεί μέσα σε ένα έτος;

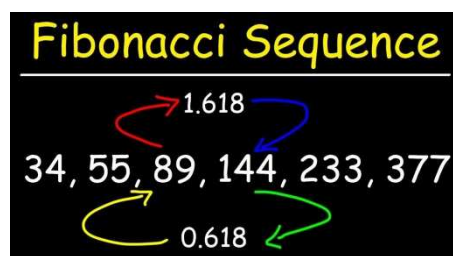
- Στο τέλος του 1^{ου} μήνα, ζευγαρώνουν, αλλά ακόμη υπάρχει μόνο ένα ζεύγος.
- Στο τέλος του 2^{ου} μήνα το θηλυκό γεννά ένα νέο ζεύγος, οπότε στο χωράφι υπάρχουν δύο ζεύγη κουνελιών.
- Στο τέλος του 3^{ου} μήνα, το πρώτο θηλυκό γεννά και 2^ο ζεύγος, οπότε έχουμε 3 ζεύγη κουνελιών.
- Στο τέλος του 4^{ου} μήνα, το 1^ο θηλυκό γεννά ακόμη ένα ζεύγος, το θηλυκό που γεννήθηκε δύο μήνες πριν γεννά το πρώτο της ζεύγος, οπότε έχουμε 5 ζεύγη κουνελιών στο χωράφι.

Στο τέλος του νιοστού μήνα, το πλήθος των ζευγών των κουνελιών είναι ίσος με το πλήθος των νέων ζευγαριών ($n-2$) προσθέτοντας το πλήθος ζευγαριών που υπήρχαν στο χωράφι τον προηγούμενο μήνα ($n-1$). Αυτός είναι ο νιοστός αριθμός Fibonacci.



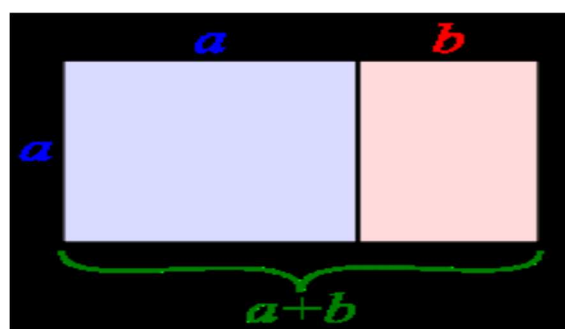
3. Η ακολουθία Fibonacci

Ο Λεονάρντο της Πίζας ή Fibonacci έζησε κοντά στην πόλη της Μπεζάνια, η οποία αποτελούσε ένα σημαντικό εξαγωγέα κεριού την εποχή του Fibonacci (από εκεί προέρχεται και η γαλλική εκδοχή του ονόματος της πόλης αυτής, "μπουζί" (bougie), που σημαίνει "κερί" στα γαλλικά). Μια πρόσφατη μαθηματικο-ιστορική ανάλυση της περιόδου και της περιοχής στην οποία έζησε ο Fibonacci προτείνει ότι στην πραγματικότητα οι μελισσοκόμοι της Μπεζάνια και οι γνώσεις τους σχετικά με την αναπαραγωγή των μελισσών αποτέλεσαν την πηγή έμπνευσης της ακολουθίας Fibonacci και όχι το ευρύτερα ίσως γνωστό μοντέλο της αναπαραγωγής κουνελιών.



Ο όρος «ακολουθία Fibonacci» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά τον 19^ο αιώνα από το Γάλλο μαθηματικό Εδουάρδο Λούκας. Η ακολουθία αριθμών στην οποία κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων είναι γνωστή ως ακολουθία Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,

1597, 2584, 4181, ... (κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων). Επιπλέον, ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας τείνει προς την αποκαλούμενη χρυσή τομή, ή χρυσή αναλογία, ή αριθμό $\phi = 1.618033989$. Ο αντίστροφος της χρυσής τομής $1/\phi = 0.618033989$, με αποτέλεσμα να ισχύει: $1/\phi = \phi - 1$. Ένα ορθογώνιο τετράπλευρο του οποίου ο λόγος των πλευρών είναι ίσος με $1/\phi$ ονομάζεται χρυσό ορθογώνιο. Η ακολουθία Fibonacci παράγεται από τη σχέση $f(1)=f(2)=1$, $f(n+1)=f(n)+f(n-1)$ και απαντάται συχνά σε πολλούς τομείς των μαθηματικών και των άλλων επιστημών.



Είναι σημαντικό και το πόσο συχνά συναντάται στη φύση, σε μοτίβα όπως τα λουλούδια ή τα φύλλα των φυτών. Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται στα μαθηματικά των Ινδών και συγκεκριμένα σε Σανσκριτικές Προσωδίες. Στη Σανσκριτική προφορική παράδοση, δίνονταν μεγάλη έμφαση κατά πόσο οι μακρόσυρτες συλλαβές (M) συνέπιπταν με τις σύντομες (Σ) και μετρούσαν τα διαφορετικά πρότυπα των M και των Σ μέσα σε ένα προκαθορισμένο διάστημα, κάτι που οδήγησε στους αριθμούς Fibonacci. Ο αριθμός των προτύπων που γίνονται m σύντομες συλλαβές μακρόσυρτες είναι ο αριθμός Fibonacci F_{m+1} .

Η ανάπτυξη τη ακολουθίας αποδίδεται στον Πινγκάλα (200 π.Χ.), αλλά η πρώτη ξεκάθαρη αναφορά στην ακολουθία γίνεται στα έργα του Βιραχάνκα (700 μ.Χ.), τα έργα του οποίου δε σώζονται, αλλά μεταφέρθηκαν αυτούσια στα έργα του Γκοπάλα (1153 μ.Χ.).

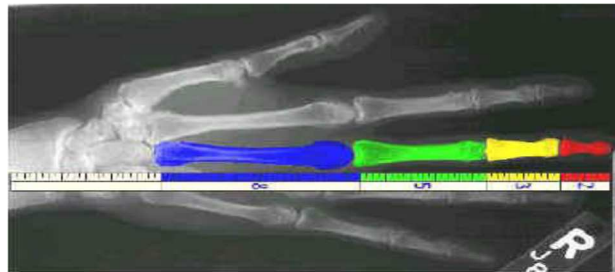
4. Η ακολουθία Fibonacci και η φύση

Τα φυτά δε γνωρίζουν για την ακολουθία Fibonacci, απλά μεγαλώνουν με τον πιο πρόσφορο και αποδοτικό τόπο. Όμως η ακολουθία κάνει την εμφάνισή της στη διάταξη των φύλων γύρω από το μίσχο. Εμφανίζεται επίσης στην ανάπτυξη των βελόνων αρκετών ειδών ελάτου, καθώς επίσης και στη διάταξη των πετάλων στις μαργαρίτες και τα ηλιοτρόπια. Μερικά κωνοφόρα δένδρα παρουσιάζουν τη σειρά αριθμών στη δομή της επιφάνειας των κορμών τους, ενώ τα φοινικόδενδρα στους δακτυλίους των κορμών τους. Όμως πώς προκύπτει αυτή η διάταξη, αυτή η συμμετρία σε σχέση με την ακολουθία; Στην περίπτωση του φυλλώματος μπορεί να σχετίζεται με τη μεγιστοποίηση του χώρου που είναι διαθέσιμος για την ανάπτυξη κάθε φύλλου ή το φως που πρέπει να πέφτει πάνω στο κάθε φύλλο. Η φύση προφανώς δεν προσπαθεί να χρησιμοποιήσει την ακολουθία Fibonacci, αυτή εμφανίζεται ως το δευτερεύον αποτέλεσμα μιας πολύ βαθύτερης φυσικής διαδικασίας.



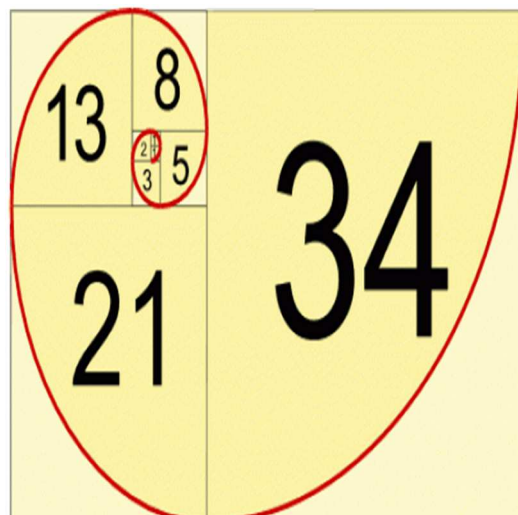
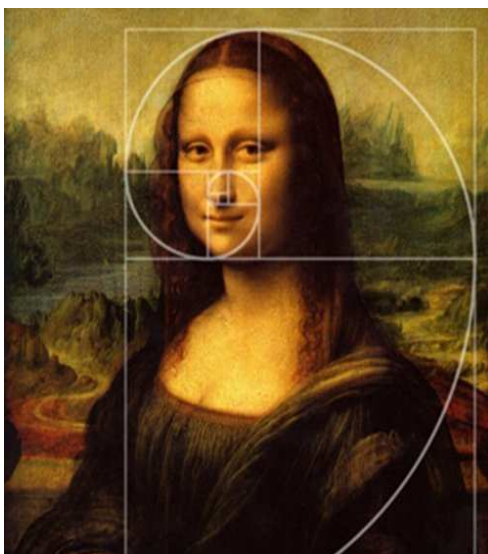
Βελόνες από έλατο

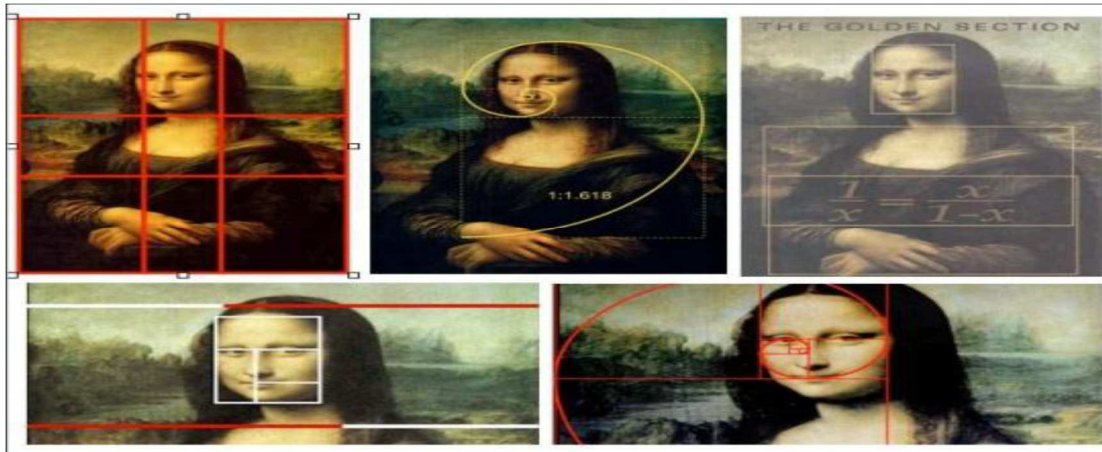
Ένα άλλο παράδειγμα είναι το ίδιο το ανθρώπινο χέρι. Κάθε άνθρωπος έχει 2 χέρια, κάθε ένα από τα οποία έχει 5 δάκτυλα, κάθε δάκτυλο αποτελείται από 3 τμήματα που χωρίζονται από 2 αρθρώσεις. Όλοι αυτοί οι αριθμοί ανήκουν στην ακολουθία Fibonacci.



Η γνώση του αριθμού ϕ και του χρυσού ορθογώνιου ανάγεται στους αρχαίους Έλληνες οι οποίοι βάσισαν πάνω τους το πιο γνωστό έργο τέχνης. Ο Παρθενώνας είναι γεμάτος από χρυσά ορθογώνια. Οι μαθητές του μαθηματικού και φιλοσόφου Πυθαγόρα έφταναν στο σημείο να θεωρούν τη χρυσή αναλογία, θεόπνευστη. Οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται σε καλές τέχνες (όπως ζωγραφική, μουσική).

Αργότερα, ο Leonardo Da Vinci ζωγράφησε το πρόσωπο της Mona Lisa ώστε αυτό να χωρά τέλεια σε ένα χρυσό ορθογώνιο και δόμησε τον υπόλοιπο πίνακα γύρω από το πρόσωπο χωρίζοντάς τον επίσης σε χρυσά ορθογώνια.





Ο Wolfgang Amadeus Mozart διαίρεσε μεγάλο αριθμό από τις σονάτες του σε δύο μέρη, η χρονική αναλογία των οποίων αντιστοιχεί στη χρυσή τομή, τον αριθμό φ, αν και υπάρχει σημαντική διχογνωμία για το κατά πόσο αυτό έγινε σκόπιμα. Σύμφωνα με την αδελφή του, στα μαθητικά του χρόνια ασχολούνταν μόνο με αριθμούς. Στα περιθώρια μερικών από τις συνθέσεις του σημείωνε μαθηματικές εξισώσεις, οι οποίες δεν έχουν σχέση με το έργο του, αλλά αποδεικνύουν το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά. Η οκτάβα στο πληκτρολόγιο του πιάνου αποτελείται από 13 πλήκτρα (8 λευκά και 5 μαύρα). Τα μαύρα πλήκτρα αποτελούνται από μία ομάδα των 2 πλήκτρων και μία των τριών πλήκτρων. Οι αριθμοί 2, 3, 5, 8, 13 είναι διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci.



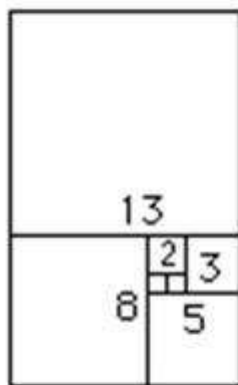
Πιο πρόσφατα, ο Ούγγρος συνθέτης Bela Bartok και ο Γάλλος αρχιτέκτονας Le Corbusier χρησιμοποίησαν σκόπιμα τη χρυσή αναλογία στα έργα τους. Όμως ακόμα και ο χριστιανικός σταυρός αποτελείται από δύο κάθετες μεταξύ τους γραμμές με την αναλογία ανάμεσα στην κατακόρυφη και την οριζόντια να μην είναι άλλη από τον αριθμό φ. Ακόμη και σήμερα η χρυσή αναλογία απαντάται σε πλήθος αντικείμενα φτιαγμένα από τον άνθρωπο. Αν θέλει κανείς να δει ένα χρυσό ορθογώνιο αρκεί να κοιτάξει μια πιστωτική κάρτα το σχήμα της οποίας είναι ακριβώς αυτό.

Οι πολυάριθμες εμφανίσεις της χρυσής αναλογίας, και των χρυσών ορθογώνιων στην τέχνη, είναι αντικείμενο συζητήσεων και ερευνών μεταξύ των ψυχολόγων για το κατά πόσο οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται το χρυσό ορθογώνιο για παράδειγμα, ως πιο όμορφο και αρμονικό σχήμα από οποιοδήποτε άλλο ορθογώνιο. Το 1995 ο καθηγητής Christopher Green του Πανεπιστημίου York στο Toronto, σε ένα άρθρο του στο περιοδικό Perception παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας σειράς

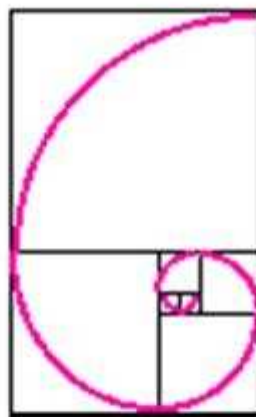
πειραμάτων που δεν έδειξαν κάποια μετρήσιμη προτίμηση για το χρυσό ορθογώνιο, δεν παραλείπει όμως να αναφέρει ότι αρκετοί άλλοι συνάδελφοί του έχουν αντίστοιχα δεδομένα που υποδηλώνουν ακριβώς το αντίθετο, ότι δηλαδή υπάρχει μια τέτοια τάση. Πέρα από τα επιστημονικά δεδομένα η χρυσή αναλογία, ο αριθμός φ, περιβάλλεται από ένα πέπλο μυστηρίου, κυρίως γιατί εντυπωσιακές προσεγγίσεις του απαντώνται, εντελώς απρόσμενα σε ένα σωρό μέρη στη φύση. Ακόμα και μια τομή του ανθρώπινου DNA φαίνεται να ενσωματώνεται άψογα σε ένα χρυσό δεκάγωνο. Η χρυσή αναλογία και τα σχήματα που σχετίζονται με αυτή συνεχίζουν να κινούν το ενδιαφέρον των μαθηματικών, αλλά και των απλών ανθρώπων.

	A	B	C	D	E
1	0				
2	1				
3	1				
4	2				
5	3				
6	5				
7	8				
8	13				
9	21				
10	34				
11	55				
12	89				
13	144				
14	233				
15	377				
16	610				
17	987				
18	1597				
19					
20					

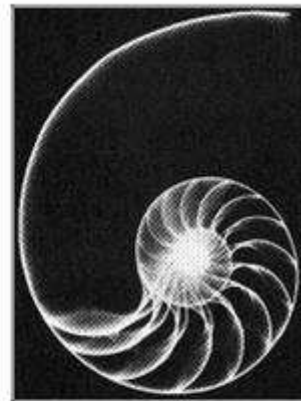
5. Η ακολουθία Fibonacci και η σπείρα στο κέλυφος του ναυτίλου



I. Ορθογώνια Fibonacci



II. Η σπείρα Fibonacci



III. Τομή από το κέλυφος του ναυτίλου

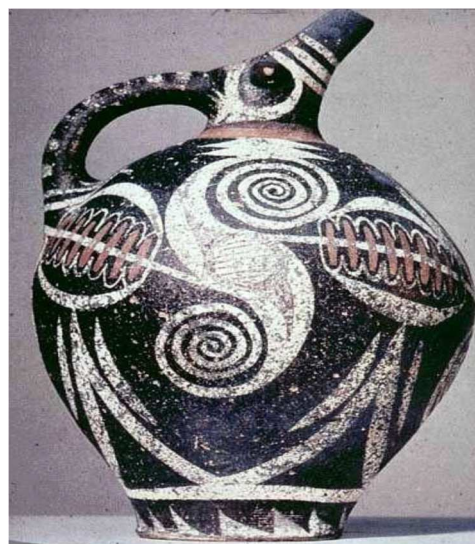
Στη μινωική αρχιτεκτονική συναντώνται οι σπείρες ως γεωμετρικά μοτίβα σε καθημερινά αντικείμενα (αγγεία, κοσμήματα). Η μινωική κεραμική βασιζόταν σε γεωμετρικά και γραμμικά μοτίβα (σπείρες, τρίγωνα, καμπύλες).



Στην Κνωσό και στις Μυκήνες συναντώνται σπειροειδή μοτίβα που συμβολίζουν φυσικά φαινόμενα (πχ. κυκλώνα) σαν προσπάθεια του ανθρώπου να εξευμενίσει τα φυσικά στοιχεία. Ο δημιουργός του δίσκου της Φαιστού εκμεταλλεύτηκε την ιδιότητα της σπείρας, να μη διακόπτεται. Πρόκειται για μία κυκλική πήλινη πλάκα στην οποία έχουν τυπωθεί συμβολογραφικά στοιχεία (πουλιά, ψάρια, έντομα, ζώα, άνθρωποι, φυτικά μοτίβα) που δεν έχουν ακόμη αποκρυπτογραφηθεί, σε μία συνεχή σπείρα, οπότε το κείμενο παρουσιάζεται ενιαίο από την αρχή ως το τέλος του.



Ο δίσκος της Φαιστού



Μινωικό αγγείο

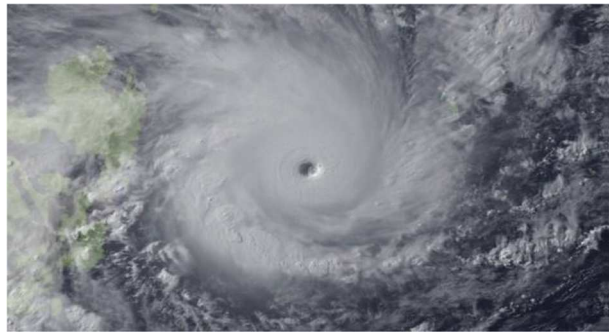
Στον τομέα της αρχιτεκτονικής, οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται και στο αρχαίο θέατρο της Επιδάου, στην Παναγία των Παρισίων, στο Ταζ Μαχάλ και στη μεγάλη πυραμίδα του Χέοπα. Οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται σε κλάδους των φυσικών επιστημών όπως ατομική σχάση, προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών,

ηλεκτρονική ανάλυση δεικτών, κύματα ωκεανών, ανεμοστρόβιλους, ηλιακό σύστημα, γαλαξίες.

Κύμα ωκεανού



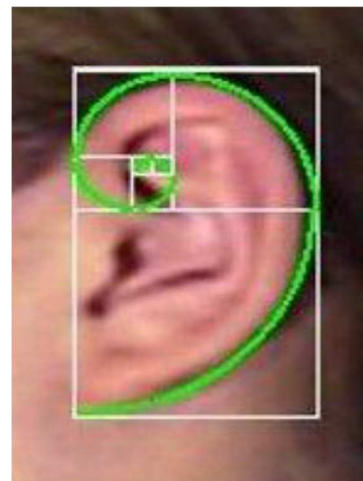
Ανεμοστρόβιλος



Γαλαξίες



Η σπείρα στο αυτί



6. Ακολουθία Fibonacci σε τραγούδι

Στο progressive metal / hard rock τραγούδι των Tool, το Lateralus, οι στίχοι σχετίζονται με την ακολουθία Fibonacci, καθώς οι συλλαβές κάθε στίχου αυξάνονται όπως οι αριθμοί στην ακολουθία Fibonacci (1,1,2,3,5,8..) Μετρώντας μεταξύ των παύσεων, οι συλλαβές στα φωνητικά του Maynard James Keenan κατά τη διάρκεια των στίχων αποτελούν τους πρώτους αριθμούς Fibonacci.

Tool-Lateralus:

Black then white are all i see in my infancy.

red and yellow then came to be, reaching out to me.

lets me see.

as below, so above and beyond, I imagine

drawn beyond the lines of reason.

Push the envelope. Watch it bend.

Over thinking, over analyzing separates the body from the mind.

Withering my intuition, missing opportunities and I must

Feed my will to feel my moment drawing way outside the lines.

Black then white are all i see in my infancy.

red and yellow then came to be, reaching out to me.

lets me see there is so much more and

beckons me to look thru to these infinite possibilities.

as below, so above and beyond, I imagine

drawn outside the lines of reason.

Push the envelope. Watch it bend.

over thinking, over analyzing separates the body from the mind.

Withering my intuition leaving opportunities behind.

Feed my will to feel this moment urging me to cross the line.

Reaching out to embrace the random.

Reaching out to embrace whatever may come.

I embrace my desire to

I embrace my desire to

feel the rhythm, to feel connected enough to step aside and weep like a widow

to feel inspired to fathom the power, to witness the beauty,

to bathe in the fountain,

to swing on the spiral

to swing on the spiral

to swing on the spiral of our divinity and still be a human.

With my feet upon the ground I move myself between the sounds and open wide to suck it in.

I feel it move across my skin.

I'm reaching up and reaching out. I'm reaching for the random or whatever will bewilder me.

whatever will bewilder me.

And following our will and wind we may just go where no one's been.

We'll ride the spiral to the end and may just go where no one's been.

Spiral out. Keep going.

(1) Black,

(1) then,

(2) white are,

(3) all I see,

(5) *in my in-fan-cy,*
 (8) *red and yel-low then came to be,*
 (5) *rea-ching out to me,*
 (3) *lets me see.*
 (2) *There is,*
 (1) *so,*
 (1) *much,*
 (2) *more and*
 (3) *beckons me,*
 (5) *to look through to these,*
 (8) *infinite possibilities.*
 (13) *As be-low so a-bove and be-yond I im-ag-ine,*
 (8) *drawn out-side the lines of rea-son.*
 (5) *Push the envelope.*
 (3) *Watch it bend.*

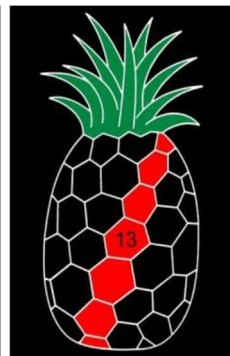
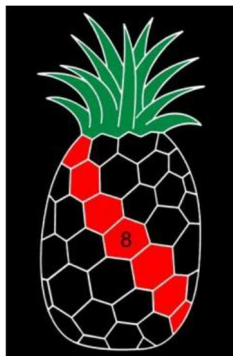
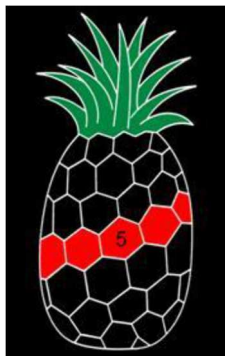
Διαπιστώνουμε ότι η εφαρμογή του αριθμού ϕ και κατ' επέκταση της ακολουθίας Fibonacci ξεκινά από την αναλογία της φύσης, του προσώπου μας, του σώματος μας. Περνά στην τέχνη, στη μουσική, στους ζωντανούς οργανισμούς και πολλά άλλα που πιθανό να μην έχουν παρατηρηθεί. Αν μετρήσουμε τις μέλισσες σε μια κυψέλη οπουδήποτε στον κόσμο, θα παρατηρήσουμε ότι η αναλογία των θηλυκών προς τις αρσενικές μέλισσες καταλήγει πάντα σε έναν αριθμό.

Αν μετρήσουμε την απόσταση από την κορυφή του κεφαλιού μέχρι το πάτωμα και την διαιρέσουμε με την απόσταση από τον αφαλό μέχρι το πάτωμα προκύπτει πάντα ο ίδιος αριθμός. Αν μετρήσουμε την απόσταση από τον ώμο μέχρι τις άκρες των δακτύλων και τη διαιρέσουμε με την απόσταση από τον αγκώνα μέχρι τις άκρες των δακτύλων προκύπτει πάντα ο ίδιος αριθμός, ο αριθμός αυτός είναι ο 1.618 ή αριθμός ϕ !

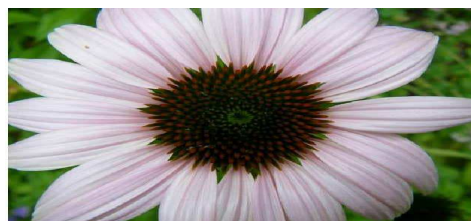
7. Αριθμοί Fibonacci, το αριθμητικό σύστημα της φύσης

Οι αριθμοί Fibonacci είναι η ακολουθία 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Οι πρώτοι δύο αριθμοί Fibonacci είναι το 0 και το 1 και κάθε επόμενος αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Επιπλέον, ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας Fibonacci τείνει προς την χρυσή τομή ή χρυσή αναλογία, δηλαδή τον αριθμό $\phi = 1,618033989$.

Υπέροχοι και μυστήριοι χαρακτηρίζονται αυτοί οι αριθμοί και απαντώνται παντού και σε διάφορες επιστήμες. Εκπληκτικός όμως είναι ο τρόπος με τον οποίο οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται στη φύση. Είναι το αριθμητικό σύστημα της φύσης. Συναντώνται παντού, στη διάταξη των φύλλων ενός φυτού, στο μοτίβο των πετάλων ενός λουλουδιού, στο άνθος της αγκινάρας, σε ένα κουκουνάρι ή στο φλοιό ενός ανανά.



Ισχύουν για την ανάπτυξη κάθε ζωντανού οργανισμού, ενός κυττάρου, ενός κόκκου σιταριού, μιας κυψέλης μελισσών, ακόμη και για όλη την ανθρωπότητα. Τα φυτά δε γνωρίζουν την ακολουθία Fibonacci - απλά μεγαλώνουν με τον πιο αποτελεσματικό τρόπο. Αν μετρήσει κανείς τα πέταλα ενός λουλουδιού, θα διαπιστώσει ότι ο αριθμός τους είναι συχνά 3, 5, 8, 13, 21, 34 ή ακόμα και 55. Λουλούδια με δύο πέταλα είναι εξαιρετικά σπάνια. Υπάρχουν εκατοντάδες είδη, τόσο άγρια όσο και καλλιεργημένα με πέντε πέταλα. Τα λουλούδια με οκτώ πέταλα δεν είναι τόσο κοινά όπως με τα πέντε, αλλά υπάρχουν αρκετά γνωστά είδη. Λουλούδια με 13, 21 και 34 πέταλα είναι επίσης αρκετά κοινά. Οι μαργαρίτες διαθέτουν 13, 21, 34, 55, ή και 89 πέταλα. Οι κοινές μαργαρίτες του αγρού έχουν συνήθως 34 πέταλα γεγονός που σίγουρα επηρεάζει το αποτέλεσμα του παιχνιδιού «μ' αγαπά δεν μ' αγαπά». Ο κρίνος έχει τρία πέταλα, η νεραγκούλα έχει πέντε, κ.λπ.



Οι σπόροι του ηλίανθου κατανέμονται κυκλικά. Η σπείρα είναι προς τα έξω ενώ έχει διπλή κατεύθυνση, δηλαδή και όπως κινούνται οι δείκτες του ρολογιού και αντίστροφα από το κέντρο του λουλουδιού. Ο αριθμός των σπειρών στο κάθε φυτό δεν είναι ίδιος. Γιατί γενικά είναι είτε 21 και 34, είτε 34 και 55, είτε 55 και 89, ή 89 και 144;



Ο αριθμός των σπειρών ενός ηλίανθου και προς τις δύο κατευθύνσεις είναι δύο διαδοχικοί αριθμοί στην ακολουθία Fibonacci. Όλα τα κουκουνάρια αναπτύσσονται σε σπείρες, ξεκινώντας από τη βάση όπου ήταν ο μίσχος, και ανεβαίνοντας κυκλικά μέχρι την κορυφή.



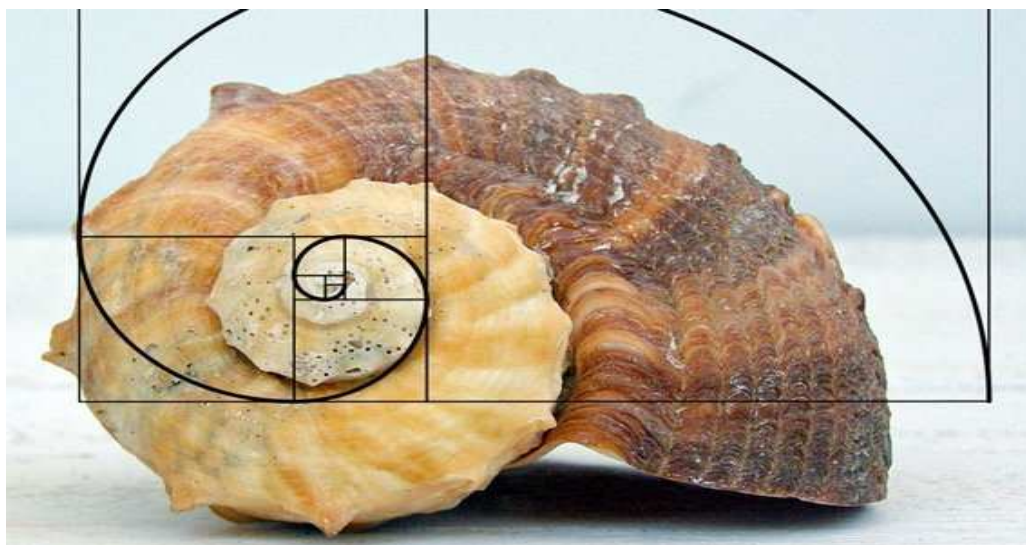
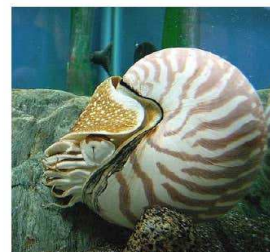
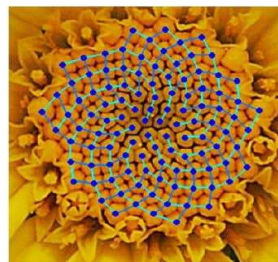
Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται στις βελόνες αρκετών ειδών έλατου, τα φύλλα της λεύκας, της κερασιάς, της μηλιάς, της δαμασκηλιάς, της βελανιδιάς και της φιλύρας, στη διάταξη των πετάλων της μαργαρίτας και του ηλιοτρόπιου. Είναι εμφανής στην επιφάνεια των κορμών των κωνοφόρων δέντρων και στους δακτυλίους των κορμών των φοινικόδεντρων.

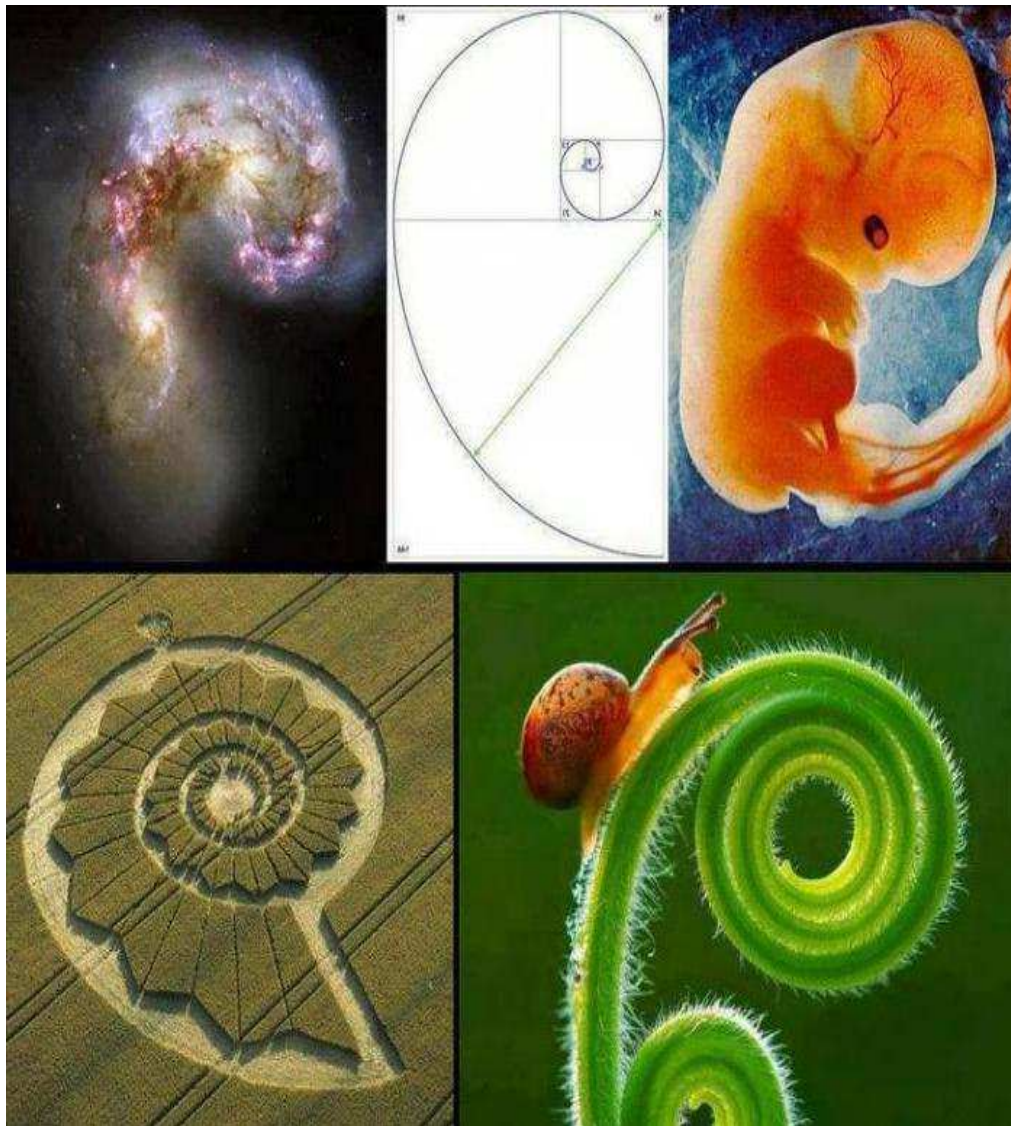
Η παραπάνω φωτογραφία είναι από ένα μικρό χαμομήλι. Τα πέταλα που βρίσκονται στο κέντρο του λουλουδιού σχηματίζουν σπείρες, σύμφωνα με τη ακολουθία Fibonacci. Υπάρχουν 21 πιο σκούρες μπλε σπείρες και 13 σπείρες με τυρκουάζ χρώμα. Το 13 και το 21 είναι διαδοχικοί αριθμοί στην ακολουθία Fibonacci.

Το κέλυφος των σαλιγκαριών ακολουθεί και αυτό την ακολουθία Fibonacci. Το ίδιο και το κέλυφος του ναυτίλου (μαλάκιο). Η μόνη διαφορά μεταξύ των δύο είναι ότι το κέλυφος του ναυτίλου αναπτύσσεται σε τρισδιάστατες σπείρες, ενώ το κέλυφος των σαλιγκαριών αναπτύσσεται σε δισδιάστατες σπείρες.

Η ακολουθία απαντάται στο σώμα του δελφινιού, στον αστερία και στο ανθρώπινο σώμα. Η αναλογία του μήκους του πήχη του χεριού προς το μήκος του χεριού ισούται με 1.618, δηλαδή ισούται με τη χρυσή αναλογία.

Η αναλογία μεταξύ μήκους και φάρδους του προσώπου και η αναλογία μήκους του στόματος προς το φάρδος μύτης είναι μερικά ακόμα παραδείγματα των αριθμών αυτών στο ανθρώπινο σώμα. Σίγουρα, αυτός ο συνδυασμός φύσης και μαθηματικών δεν είναι τυχαίος. Άραγε, τα μαθηματικά αντιγράφουν τη φύση ή η φύση τα μαθηματικά;













1 πέταλο Κρίνος



2 πέταλα Euphorbia



3 πέταλα Lily



3 πέταλα Iris



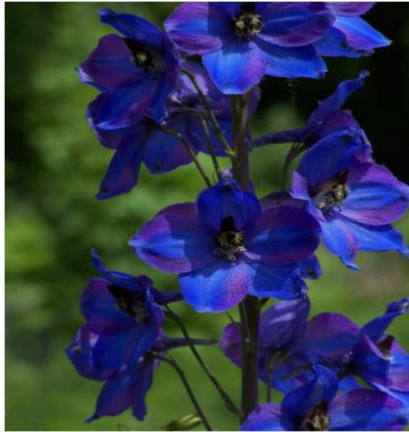
3 πέταλα Trillium



5 πέταλα



5 πέταλα Buttercup



5 πέταλα Larkspur



5 πέταλα Columbine (aquilegia)



8 πέταλα Delphinium



13 πέταλα Ragwort

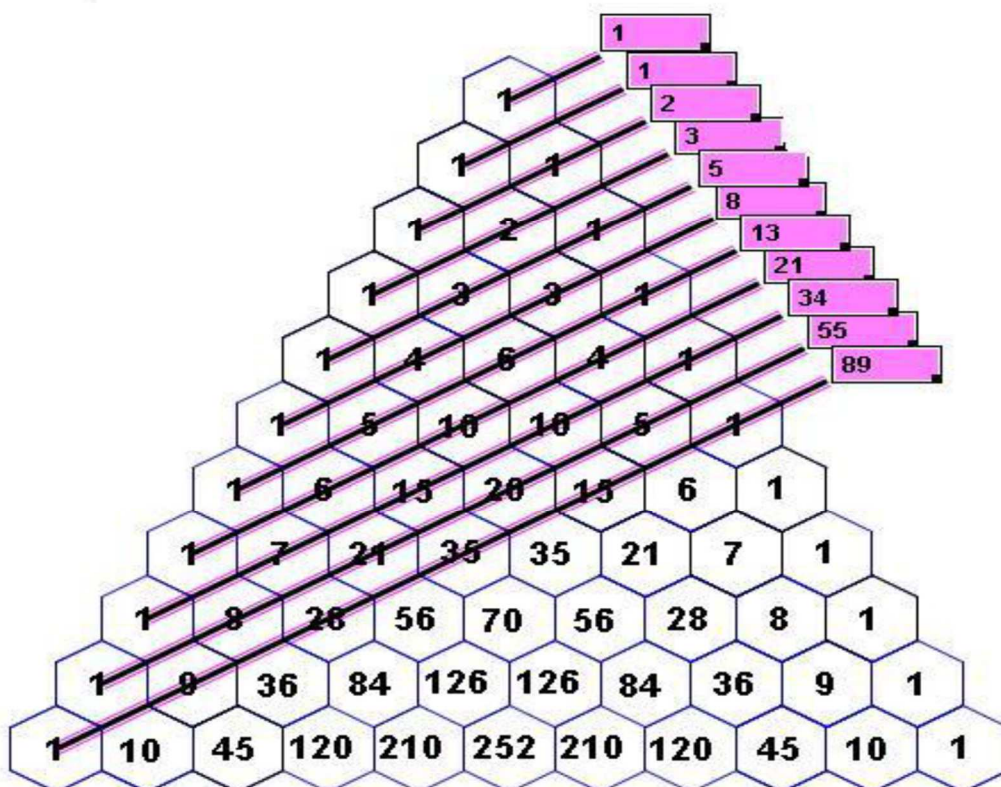
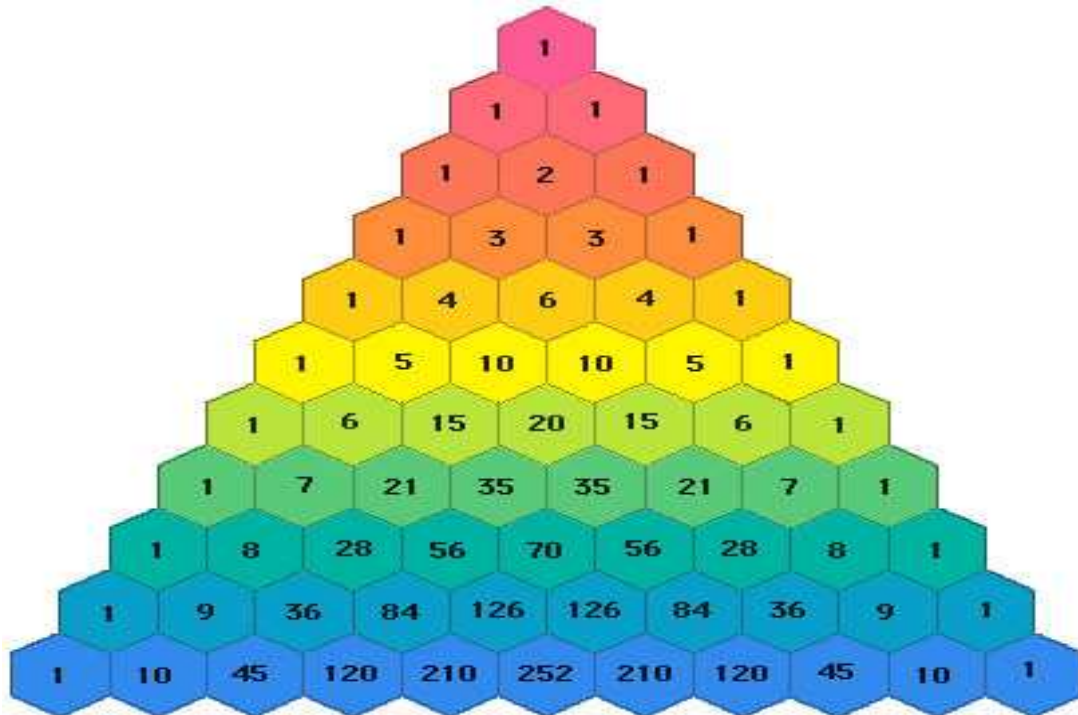


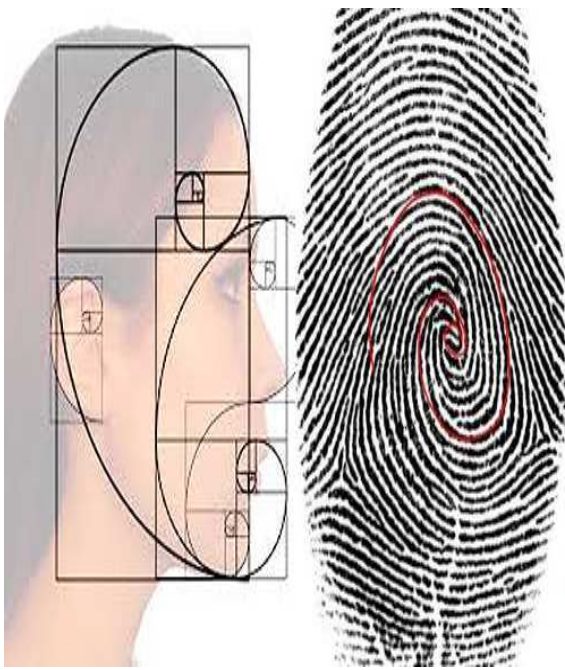
13 πέταλα Corn marigold



13 πέταλα Cinenaria

8. Αριθμοί Fibonacci και τρίγωνο Pascal





Fibonacci Sequence

