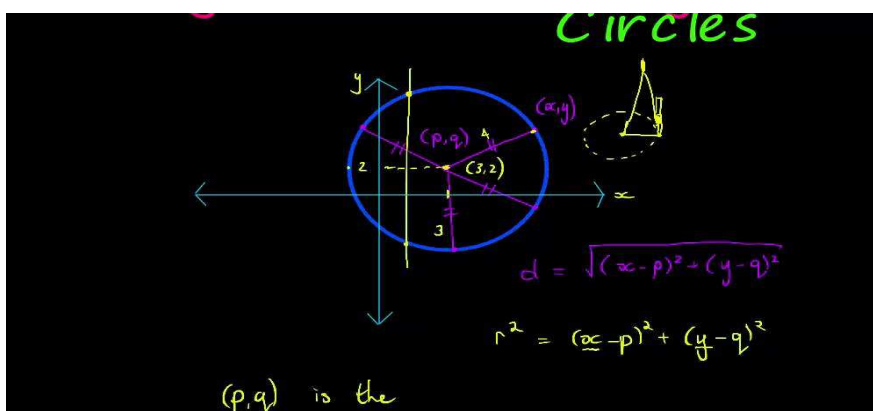




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Ο κύκλος και οι ιδιότητες του



Σπουδαστής: Κουνουπάκης Δημήτρης (AM 79797)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2021–2022

Ημερομηνία ανάθεσης: 24.05. 2021
Ημερομηνία κατάθεσης: 02.02.2022
Ημερομηνία εξέτασης: ...02.2022

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	4
1. Αναλυτική εξίσωση του κύκλου	4
1.1 Παρατηρήσεις	4
1.2 Παράδειγμα	4
2. Παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$	4
3. Γενική εξίσωση του κύκλου	5
3.1 Παράδειγμα	5
4. Ριζικός άξονας δυο κύκλων	5
4.1 Θεώρημα	6
5. Εξίσωση εφαπτόμενης κύκλου σε σημείο του.....	6
5.1 Θεώρημα	6
5.2 Παρατήρηση.....	7
5.3 Θεώρημα	7
6. Σχετικές θέσεις ευθείας (ε) και κύκλου (C).....	7
7. Σχετικές θέσεις δυο κύκλων (C_1) , (C_2)	8
8. Μέθοδοι για τη λύση των ασκήσεων.....	9
8.1 Μέθοδος 1	9
8.2 Μέθοδος 2	13
8.2.1 Σημείωση	13
8.3 Μέθοδος 3	16
8.4 Μέθοδος 4	19
8.5 Μέθοδος 5	22
8.6 Μέθοδος 6	25

Εισαγωγή

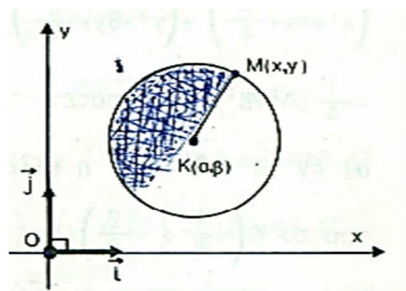
Ορίζουμε ως κύκλο (C) , με κέντρο K και ακτίνα R ,το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία είναι $d(M,K)=R$ δηλαδή, $M \in (C) \Leftrightarrow d(K,M)=R$.

1. Αναλυτική εξίσωση του κύκλου

Θεωρούμε κύκλο (C) με κέντρο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα R. Τότε το τυχαίο σημείο $M(x,y)$ είναι σημείο κύκλου ,αν και μόνο ισχύει $d(M,K)=R \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = R$
 $\Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

Άρα, ο κύκλος με κέντρο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα R έχει εξίσωση $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

Αν ειδικά ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,0)$ οπότε $\alpha=\beta=0$ τότε έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$



1.1 Παρατηρήσεις

1) Το σημείο $P(x_0, y_0)$ είναι **εσωτερικό** του κύκλου (K,R) , αν και μόνο αν ισχύει $d(M,K) < R \Leftrightarrow (x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 < R^2$

2) Το σημείο $P(x_0, y_0)$ είναι **εξωτερικό** του κύκλου (K,R) , αν και μόνο αν ισχύει $d(M,K) > R \Leftrightarrow (x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 > R^2$

1.2 Παράδειγμα

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $K(2,-1)$ και ακτίνα 3. Ποια η θέση των $M(3,1)$, $P(5,4)$ ως προς τον κύκλο ;

Λύση

Ο κύκλος έχει εξίσωση $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$.

Επειδή $(3-2)^2 + (1+1)^2 < 3^2 \Rightarrow$ το $M(3,1)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. Επειδή $(5-2)^2 + (4+1)^2 > 3^2 \Rightarrow$ το $P(5, 4)$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.

2. Παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

Θεωρούμε τον κύκλο (C): $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ και τις πραγματικές συναρτήσεις

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + R \cos \nu t \\ y = \beta + R \sin \mu t \end{array} \right., t \in \mathbb{R} \left\} \text{ Παρατηρούμε ότι } (\alpha + R \cos \nu t - \alpha)^2 + (\beta + R \sin \mu t - \beta)^2 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$R^2 (\cos^2 \nu t + \sin^2 \mu t) = R^2 \Leftrightarrow \cos^2 \nu t + \sin^2 \mu t = 1 \text{ (ταυτότητα ως προς } t \text{)}. \text{ Άρα,}$$

Οι συναρτήσεις $\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + R \cos \nu t \\ y = \beta + R \sin \mu t \end{array} \right., t \in \mathbb{R} \left\}$ είναι παραμετρικές εξισώσεις του (C).

3. Γενική εξίσωση του κύκλου

Θεωρούμε τον κύκλο (C) : $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$. Η εξίσωση του κύκλου γράφεται ισοδύναμα $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = -2\alpha, B = -2\beta, \Gamma = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$.

Αντίστροφα Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ γράφεται ισοδύναμα $\left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + By + \frac{B^2}{4}\right) = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma \Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 - 4\Gamma)$ οπότε:

α) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $R = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$.

β) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 0$ δηλαδή ο κύκλος εκφυλίζεται σε σημεία.

γ) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση ενός φανταστικού κύκλου. Άρα:

Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση ενός πραγματικού κύκλου με κέντρο το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $R = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$.

3.1 Παράδειγμα

Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

Λύση

Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(1, -3)$ και ακτίνα $R = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 6^2 - 4 \cdot 6} = 2$

2ος τρόπος

$$0 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1 + y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + 9 + 6 = 1 + 9 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2$$

Άρα $K(1, -3)$ και $R=2$

4. Ριζικός άξονας δυο κύκλων

Ορίζουμε ως ριζικό άξονα των κύκλων $(C_1): x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $(C_2): x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ την ευθεία (ε): $(A_2 - A_1)x + (B_2 - B_1)y + (\Gamma_2 - \Gamma_1) = 0$ (Οι κύκλοι δεν είναι ομόκεντροι).

Αν $K\left(-\frac{A_1}{2}, -\frac{B_1}{2}\right)$, $\Lambda\left(-\frac{A_2}{2}, -\frac{B_2}{2}\right)$ τα κέντρα των (C_1) , (C_2) αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{K\Lambda}\left(\frac{A_1-A_2}{2}, \frac{B_1-B_2}{2}\right)$, $\vec{V}(B_2-B_1, -(A_2-A_1))/\sqrt{\varepsilon}$ οπότε $\overrightarrow{K\Lambda} \cdot \vec{V} = 0$ άρα ο ριζικός άξονας είναι κάθετος επί την διάκεντρο των δυο κύκλων.

4.1 Θεώρημα

Τα σημεία που έχουν ίσες δυνάμεις ως προς τους δύο κύκλους, κείνται στο ριζικό άξονα των κύκλων.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $\partial M / (K, R) = MK^2 - R^2$.

Για τον (C_1) : Κέντρο $K\left(-\frac{A_1}{2}, -\frac{B_1}{2}\right)$, ακτίνα $R = \frac{1}{2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 4\Gamma_1}$.

Για τον (C_2) : Κέντρο $\Lambda\left(-\frac{A_2}{2}, -\frac{B_2}{2}\right)$, ακτίνα $R = \frac{1}{2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 - 4\Gamma_2}$ οπότε

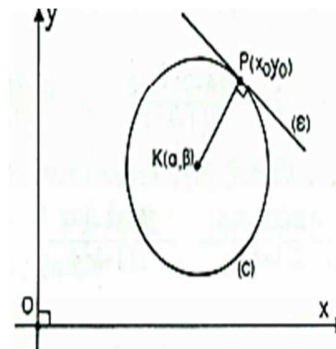
Αν για το σημείο $M(x_0, y_0)$ είναι $\partial M / (C_1) = \partial M / (C_2) \Leftrightarrow MK^2 - R^2 = M\Lambda^2 - \rho^2 \Leftrightarrow$

$$\left(x_0 + \frac{A_1}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{B_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(A_1^2 + B_1^2 - 4\Gamma_1) = \left(x_0 + \frac{A_2}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{B_2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(A_2^2 + B_2^2 - 4\Gamma_2)$$

$\Leftrightarrow (A_2 - A_1)x_0 + (B_2 - B_1)y_0 + (\Gamma_2 - \Gamma_1) = 0$ και άρα το $M(x_0, y_0)$ κείται στο ριζικό άξονα (ε) των κύκλων (C_1) , (C_2) .

5. Εξίσωση εφαπτόμενης κύκλου σε σημείο του

Ορίζουμε την ευθεία (ε) ως εφαπτόμενη του κύκλου (C) στο σημείο P , αν και μόνο αν είναι κάθετη επί την ακτίνα KP στο P . Παρατηρούμε ότι η (ε) εφάπτεται στον $(C) \Leftrightarrow d(K, (\varepsilon)) = R$



5.1 Θεώρημα

Αν $P(x_0, y_0)$ είναι σημείο του κύκλου (C) : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ τότε η εφαπτόμενη (ε) του (C) στο $P(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $(x - \alpha)(x_0 - \alpha) + (y - \beta)(y_0 - \beta) = R^2$

Απόδειξη

Το σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου ανήκει στην εφαπτόμενη (ε) αν και μόνο αν ισχύει $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{KP} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{KP} = 0$ (και αφού $\overrightarrow{PM}(x - x_0, y - y_0)$, $\overrightarrow{KP}(x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$) έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
&(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \\
&(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) + R^2 = R^2 \Leftrightarrow \\
&(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) + (x_0 - a)^2 + (y_0 - \beta)^2 = R^2 \Leftrightarrow \\
&(x_0 - \alpha)[(x - x_0)(x_0 - \alpha)] + (y_0 - \beta)[(y - y_0)(y_0 - \beta)] = R^2 \Leftrightarrow \\
&(x_0 - \alpha)(x - \alpha) + (y_0 - \beta)(y - \beta) = R^2 \\
&\text{που είναι η εξίσωση της } (\varepsilon).
\end{aligned}$$

5.2 Παρατήρηση

Αν ο κύκλος (C) έχει κέντρο το $O(0,0)$ τότε $\alpha=\beta=0$ η εφαπτόμενη στο σημείο $P(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $xx_0 + yy_0 = R^2$

5.3 Θεώρημα

Αν $P(x_0, y_0)$ είναι σημείο του κύκλου (C): $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ τότε η εφαπτόμενη (ε) της (C) στο σημείο του $P(x_0, y_0)$ έχει την εξίσωση

$$xx_0 + yy_0 + A\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + B\left(\frac{y+y_0}{2}\right) + \Gamma = 0$$

Απόδειξη

$$\text{Είναι (C): } x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

Άρα η εφαπτόμενη (ε) του (C) στο σημείο του $P(x_0, y_0)$, από το προηγούμενο θεώρημα

$$\text{έχει εξίσωση} \quad \left(x_0 + \frac{A}{2}\right)\left(x + \frac{A}{2}\right) + \left(y_0 + \frac{B}{2}\right)\left(y + \frac{B}{2}\right) = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma \quad \Leftrightarrow$$

$$xx_0 + yy_0 + A\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + B\left(\frac{y+y_0}{2}\right) + \Gamma = 0.$$

6. Σχετικές θέσεις ευθείας (ε) και κύκλου (C)

Θεωρούμε την ευθεία (ε): $y = \lambda x + \beta$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και τον κύκλο (C): $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$. Τα κοινά σημεία της (ε) και του (C), αν και όσα υπάρχουν, έχουν ως συντεταγμένες τις πραγματικές λύσεις του συστήματος

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x + \beta \\ x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x + \beta \\ (1 + \lambda^2)x^2 + (A + B\lambda + 2\lambda B)x + (\beta^2 + B\beta + \Gamma) = 0 \quad (1) \end{array} \right\}$$

Επειδή $1 + \lambda^2 \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, η (1) είναι δευτεροβάθμια εξίσωση $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

- Αν $\Delta < 0$ η (ε) και ο (C) δεν έχουν κοινά σημεία.
- Αν $\Delta > 0$ η (ε) και ο (C) έχουν δύο, διάφορα μεταξύ τους, κοινά σημεία.

- Αν $\Delta=0$ τότε η (1) έχει διπλή ρίζα την $x_0 = \frac{-(A+B\lambda+2\lambda B)}{2(1+\lambda^2)}$ οπότε και

$$y_0 = \lambda x_0 + \beta = \frac{-\lambda(A+B\lambda+2\lambda B)}{2(1+\lambda^2)} + \beta = \frac{2\beta - \lambda A - \lambda^2 B}{2(1+\lambda^2)}.$$

Στην περίπτωση αυτή η ευθεία (ε) και ο κύκλος (C), έχουν κοινά δυο σημεία που συμπίπτουν στο $P\left(\frac{-(A+B\lambda+2\lambda B)}{2(1+\lambda^2)}, \frac{2\beta - \lambda A - \lambda^2 B}{2(1+\lambda^2)}\right)$.

Επειδή $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ είναι το κέντρο του (C) έχουμε ότι:

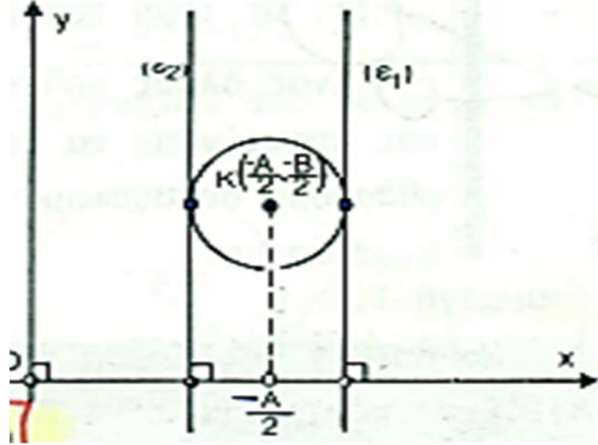
$$\overline{KP}(x_p - x_k, y_p - y_k) \Leftrightarrow \overline{KP}\left(\frac{\lambda(A\lambda - 2\beta - B)}{2(1+\lambda^2)}, \frac{-(A\lambda - 2\beta - B)}{2(1+\lambda^2)}\right) \text{ ενώ το } \vec{u}(\lambda, -1) \text{ είναι}$$

κάθετο επί την (ε). Όμως $\overline{KP} \parallel \vec{u}$ πράγμα που σημαίνει ότι η (ε) είναι κάθετη επί την KP στο P και έπεται ότι η (ε) είναι εφαπτόμενη του (C).

Ειδικά για την ευθεία (ε): $x=k$ (της οποίας δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσεως) και το κύκλο (C): $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ έχουμε ανάλογα το σύστημα

$$\begin{cases} x=k \\ x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k \\ y^2+By+(k^2+Ak+\Gamma)=0 \end{cases} \quad (1)$$

Τότε η (ε) εφάπτεται στον (C), αν και



μόνο η (1) έχει $\Delta=0 \Leftrightarrow B^2 - 4(k^2 + Ak + \Gamma) = 0 \Leftrightarrow k^2 + Ak + \Gamma - \frac{B^2}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} \Leftrightarrow k = -\frac{A}{2} \pm R.$$

Άρα οι κατακόρυφες εφαπτόμενες του κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα R,

είναι οι ευθείες (ε1): $x = -\frac{A}{2} + R$ και (ε2): $x = -\frac{A}{2} - R$.

7. Σχετικές θέσεις δυο κύκλων (C1), (C2)

Θεωρούμε τους κύκλους (C1): $x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και (C2): $x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$. Τα κοινά σημεία των (C1), (C2), αν και όσα υπάρχουν έχουν ως συντεταγμένες τις

πραγματικές λύσεις του συστήματος $\begin{cases} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 0 \text{ (εξίσωση κοινής χορδής)} \end{cases}$$

Για τον ακριβή προσδιορισμό της θέσης των (C_1) , (C_2) χρησιμοποιούμε τις , γνωστές από την Ευκλείδεια Γεωμετρία , σχέσεις μεταξύ διακέντρου και ακτινών των κύκλων.

8. Μέθοδοι για τη λύση των ασκήσεων

8.1 Μέθοδος 1

Για να βρούμε την εξίσωση ενός κύκλου (C) , πρέπει να προσδιορίσουμε ή το κέντρο του $K(\alpha, \beta)$ και την ακτίνα R , ή τις σταθερές A, B, Γ στη γενική εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις τρεις αγνώστους, τους α, β, R ή τους A, B, Γ . Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι:

α) Αν είναι γνωστό το κέντρο $K(\alpha, \beta)$, τότε εφ' όσον ο κύκλος διέρχεται από το γνωστό σημείο A πρέπει $d(K, A) = R$ ενώ, αν ο κύκλος εφάπτεται σε γνωστή ευθεία (ε) πρέπει $d(K, (\varepsilon)) = R$.

β) Αν ο κύκλος εφάπτεται σε γνωστή ευθεία (ε) στο δοσμένο σημείο της A , πρέπει $KA \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} \perp \vec{u}$, όπου $\vec{u}$ το κάθετο διάνυσμα επί την (ε) .

γ) Αν ο κύκλος εφάπτεται σε δύο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ πρέπει: $d(K, (\varepsilon_1)) = d(K, (\varepsilon_2))$.

δ) Αν ο κύκλος διέρχεται από τρία γνωστά σημεία $P(x_1, y_1), \Lambda(x_2, y_2), M(x_3, y_3)$ τότε το κέντρο του $K(\alpha, \beta)$ προσδιορίζεται:

i. Από το σύστημα $\begin{cases} d(K, P) = d(K, \Lambda) \\ d(K, P) = d(K, M) \end{cases}$ ή

ii. Ως τομή των μεσοκαθέτων των PL, PM .

Ένας άλλος τρόπος είναι να υποθέσουμε ότι $(C): x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ και απαιτώντας να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των P, Λ, M να φθάσουμε σε σύστημα με αγνώστους A, B, Γ απ' όπου θα τους προσδιορίσουμε.

Εφαρμογή 1

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου (C) στις περιπτώσεις:

α) Έχει κέντρο το $K(-1, 2)$ και διέρχεται από το $A(2, 6)$

β) Έχει διάμετρο το AB με $A(3, 2)$ και $B(-1, 6)$

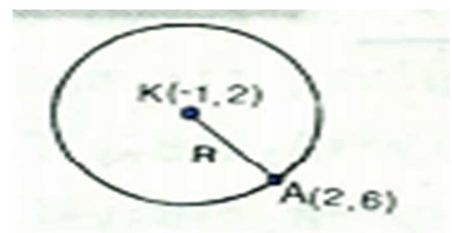
γ) Έχει κέντρο το $K(-2, 3)$ και εφάπτεται στην $(\varepsilon): x - y - 2 = 0$

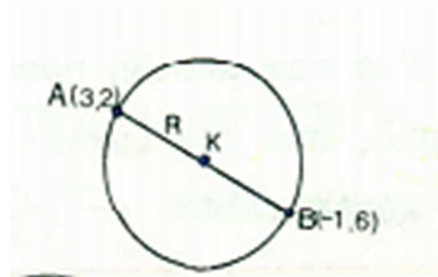
Λύση

α) Επειδή $A \in (C) \Leftrightarrow d(K, A) = R \Leftrightarrow R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, οπότε $(C): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$

β) Αν K είναι το κέντρο του $(C) \Leftrightarrow$ το K είναι μέσο του $AB \Leftrightarrow K(1, 4)$. Τότε

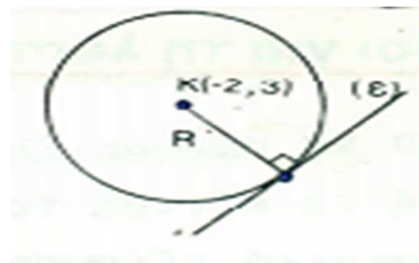
$R = d(K, A) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ οπότε $(C): (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$





γ) Επειδή ο (C) εφάπτεται στην (ε): $x-y-2=0$ $R = d(K, (ε)) = \frac{|-2-3-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$ και

συνεπώς (C): $(x+2)^2 + (y-3)^2 = \frac{49}{2}$.



Εφαρμογή 2

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου (C) όταν:

α) Διέρχεται από τα A(3, 1), B(-1, 3) και το κέντρο του είναι σημείο της (ε): $3x-y-2=0$.

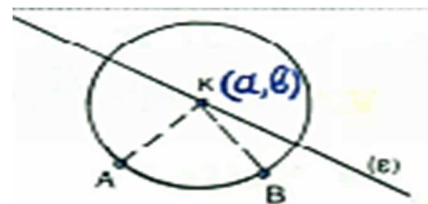
β) Διέρχεται από το A(1, 2) και εφάπτεται στην ευθεία (ε) : $2x-3y-18=0$ στο σημείο της B(3, -4).

Λύση

α) Αν $K(\alpha, \beta)$ είναι το κέντρο του (C) τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} K \in (ε) \Leftrightarrow 3\alpha - \beta - 2 = 0 \\ A \in (C) \Leftrightarrow d(K, A) = R \\ B \in (C) \Leftrightarrow d(K, B) = R \end{array} \right\} \Leftrightarrow d(K, A) = d(K, B) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha - \beta - 2 = 0 \\ \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\beta - 1)^2} = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + (\beta - 3)^2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha - \beta = 2 \\ \beta = 2\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{array} \right\}. \quad \text{Οπότε}$$

$K(2,4)$. Επιπλέον $R = d(K, A) = \sqrt{10}$ και συνεπώς (C): $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$.

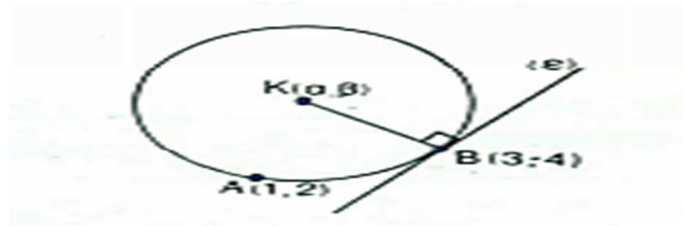


β) Έστω $K(\alpha, \beta)$ το κέντρο του (C). Επειδή ο (C) διέρχεται από τα A, B $\Leftrightarrow d(K, A) = d(K, B) \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\beta + 4)^2} \Leftrightarrow \alpha - 3\beta = 5$ (1)

Επειδή ο (C) εφάπτεται στην (ε) στο B $\Leftrightarrow KB \perp (ε) \Leftrightarrow \overrightarrow{KB} \parallel \vec{u}$ όπου $\vec{u}(2,-3)$ διάνυσμα κάθετο επί την (ε), και επειδή $\overrightarrow{KB}(3-\alpha, -4-\beta) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\alpha & -4-\beta \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta = 1$ (2).

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\alpha = \frac{13}{11}$, $\beta = -\frac{14}{11}$ και οπότε $K\left(\frac{13}{11}, -\frac{14}{11}\right)$.

Ακόμη $R = d(K, A) = \frac{10\sqrt{13}}{11}$ οπότε (C): $\left(x - \frac{13}{11}\right)^2 + \left(y + \frac{14}{11}\right)^2 = \frac{1300}{121}$



Εφαρμογή 3

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου (C) που διέρχεται από τα A(1, 1), B(1, -1), Γ(2, 0).

Λύση

Έστω (C): $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ ο ζητούμενος κύκλος. Τότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1,1) \in (C) \Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + \Gamma = 0 \\ B(1,-1) \in (C) \Leftrightarrow 1^2 + (-1)^2 + A \cdot 1 + B \cdot (-1) + \Gamma = 0 \\ \Gamma(2,0) \in (C) \Leftrightarrow 2^2 + 0^2 + A \cdot 2 + B \cdot 0 + \Gamma = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B + \Gamma = -2 \\ A - B + \Gamma = -2 \\ 2A + \Gamma = -4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ A = -2 \\ \Gamma = 0 \end{array} \right\}$$

και άρα (C): $x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (C): (x-1)^2 + y^2 = 1$.

Εφαρμογή 4

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην (ε): $x+y+13=0$ και στην (η): $7x-y-5=0$ στο σημείο της A(1, 2).

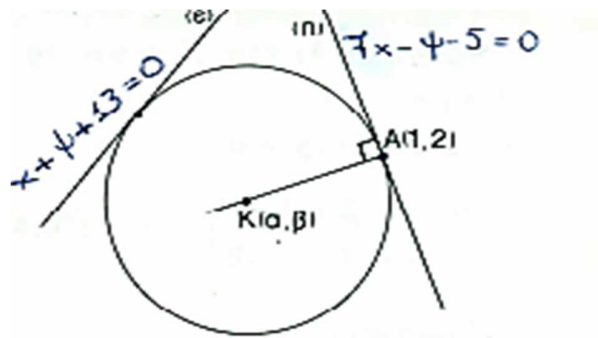
Λύση

Αν $K(\alpha, \beta)$ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου, τότε πρέπει

$$\alpha) d(K, (ε)) = d(K, (η)) \Leftrightarrow \frac{|\alpha + \beta + 13|}{\sqrt{2}} = \frac{|7\alpha - \beta - 5|}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow 5|\alpha + \beta + 13| = |7\alpha - \beta - 5| \quad (1)$$

$$\beta) AK \perp (η) \text{ και επειδή το } \vec{u}(7, -1) \perp (η) \text{ θα είναι } \overrightarrow{AK} \parallel \vec{u}. \text{ Όμως } \overrightarrow{AK}(\alpha - 1, \beta - 2) \text{ οπότε ισοδύναμα πρέπει } \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \beta - 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha + 7\beta = 15 \quad (2).$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $(\alpha = 29, \beta = -2)$ ή $(\alpha = -6, \beta = 3)$ και άρα το πρόβλημα έχει ως λύσεις τους κύκλους (C₁), (C₂) με κέντρα τα K₁(29, -2), K₂(-6, 3) αντίστοιχα και ακτίνες $R_1 = d(K_1, A) = \sqrt{28^2 + 4^2} = \sqrt{784}$, $R_2 = d(K_2, A) = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$, οπότε (C₁): $(x - 29)^2 + (y + 2)^2 = 784$ και (C₂): $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$.



Εφαρμογή 5

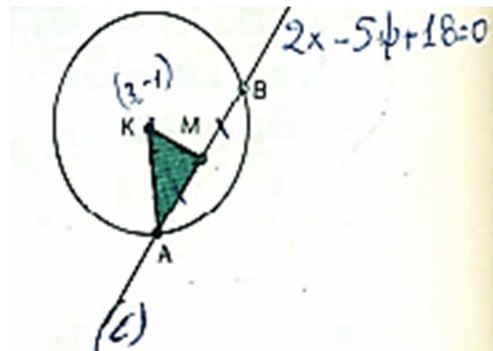
Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(3, -1)$ και αποτέμνει από την $(\varepsilon): 2x - 5y + 18 = 0$ χορδή μήκους 6.

Λύση

Αν $KM \perp (\varepsilon) \Rightarrow$ το M είναι μέσο του $AB \Rightarrow \|MA\| = \frac{1}{2}\|AB\| = 3$ και

$\|KM\| = d(K, (\varepsilon)) = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο KMA έχουμε:

$$R^2 = \|KM\|^2 + \|MA\|^2 = 38 \text{ οπότε } (C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 38$$



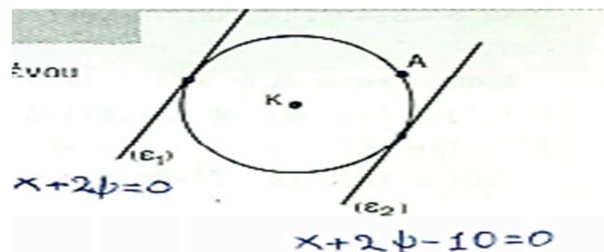
Εφαρμογή 6

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις $(\varepsilon_1): x + 2y = 0$, $(\varepsilon_2): x + 2y - 10 = 0$ και διέρχεται από το $A(1, 2)$.

Λύση

Αν $K(\alpha, \beta)$ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου πρέπει $\begin{cases} d(K, (\varepsilon_1)) = d(K, (\varepsilon_2)) \\ d(K, (\varepsilon_1)) = d(K, A) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{|\alpha + 2\beta|}{\sqrt{5}} = \frac{|\alpha + 2\beta - 10|}{\sqrt{5}} \\ \frac{|\alpha + 2\beta|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = \pm(\alpha + 2\beta - 10) \\ (\alpha + 2\beta)^2 = 5[(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2] \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 5 - 2\beta \\ \beta^2 - 4\beta + 3 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \beta = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\alpha = 3, \beta = 1) \\ \text{ή} \\ (\alpha = -1, \beta = 3) \end{array} \right\}$$

Άρα το πρόβλημα έχει δυο λύσεις, τους κύκλους $(C_1), (C_2)$ με κέντρα αντίστοιχα τα $K_1(3, 1), K_2(-1, 3)$ και ακτίνες $R_1 = d(K_1, A) = \sqrt{5}, R_2 = d(K_2, A) = \sqrt{5}$ δηλαδή τους $(C_1): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5, (C_2): (x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

8.2 Μέθοδος 2

Για να βρούμε την εξίσωση μιας εφαπτόμενης (ε) του κύκλου (C) που σχηματίζει γνωστή γωνία με δοσμένη ευθεία (η) τότε:

α) Από τη γνωστή γωνία $(\widehat{\eta, \varepsilon})$ υπολογίζουμε αρχικά το λ_ε από το λ_η (εφόσον ορίζεται). Έτσι: $\text{An } (\varepsilon) \parallel (\eta) \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta$. $\text{An } (\varepsilon) \perp (\eta) \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{-1}{\lambda_\eta}, \lambda_\eta \neq 0$.

$\text{An } (\widehat{\varepsilon, \eta}) = \varphi$ οπότε $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\lambda_\varepsilon - \lambda_\eta}{1 + \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta} \Rightarrow \lambda_\varepsilon$ γνωστό οπότε είναι $(\varepsilon): y = \lambda x + k$ και απομένει να υπολογιστεί ο $k \in \mathbb{R}$.

β) Ο υπολογισμός του k γίνεται από την ισοδυναμία: $H(\varepsilon)$ εφάπτεται στον κύκλο (C) , αν και μόνο αν, η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την (ε) είναι ίση με την ακτίνα R του κύκλου ή από την απαίτηση το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου και της (ε) να έχει διπλή λύση.

Ένας άλλος τρόπος λύσης του προβλήματος, είναι ο ακόλουθος:

1) Υποθέτουμε $P(x_0, y_0)$ το σημείο επαφής του (C) και της ζητούμενης ευθείας (ε) οπότε γράφουμε την εξίσωση της (ε) . Βρίσκουμε το λ_ε (με την βοήθεια των x_0, y_0) και το εξισώνουμε με την τιμή που πρέπει να έχει από τις απαιτήσεις του προβλήματος και όπως αναπτύχθηκε στο α) προκύπτει εξίσωση (1) με αγνώστους τα x_0, y_0 .

2) Από το ότι οι συντεταγμένες του $P(x_0, y_0)$ επαληθεύουν και την εξίσωση (C) προκύπτει εξίσωση (2) με αγνώστους τα x_0, y_0 . Λύνοντας το σύστημα των (1),(2) προσδιορίζουμε το $P(x_0, y_0)$ και άρα την (ε) .

8.2.1 Σημείωση

Αν ο λ_ε δεν ορίζεται τότε έχουμε $(\varepsilon): x = k$ και από την απαίτηση «η (ε) πρέπει να εφάπτεται στον (C) », προσδιορίζουμε το $k \in \mathbb{R}$.

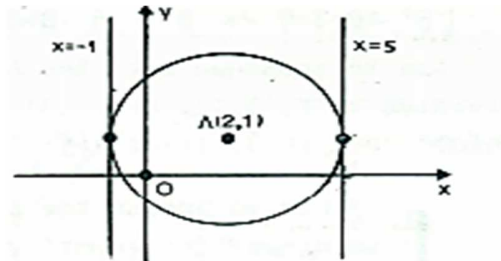
Εφαρμογή 7

Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ που είναι παράλληλες προς τον άξονα $y'y$.

Λύση

Η ζητούμενη εφαπτόμενη (ε) έχει εξίσωση $x = k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\varepsilon): x - k = 0$. Ο δοσμένος κύκλος έχει κέντρο το $\Lambda(2,1)$ και ακτίνα $R=3$. Συνεπώς:

Η (ε) εφάπτεται στον (C) $\Leftrightarrow d(\Lambda, (\varepsilon)) = R \Leftrightarrow \frac{|2-k|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 3 \Leftrightarrow |2-k| = 3 \Leftrightarrow k = -1$ ή $k=5$
 οπότε οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι (ε₁): $x = -1$, (ε₂): $x = 5$.



Εφαρμογή 8

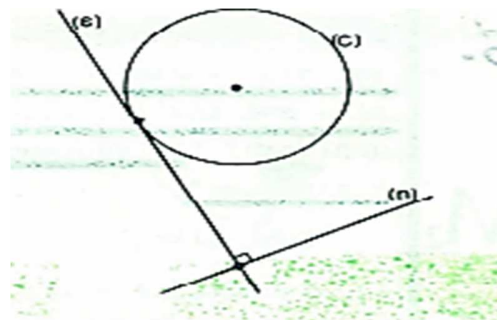
Να βρεθούν οι εφαπτόμενες (ε) του (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ που είναι κάθετες επί την (η): $x - 2y + 9 = 0$.

Λύση

Είναι $\lambda_\eta = \frac{1}{2}$ και αφού $(\varepsilon) \perp (\eta) \Rightarrow \lambda_\varepsilon = -2$. Άρα, (ε): $y = -2x + k \Leftrightarrow (\varepsilon): 2x + y - k = 0$

ο δοσμένος κύκλος έχει κέντρο $\Lambda(1, -2)$ και ακτίνα $R = \sqrt{5}$. Άρα, η (ε) εφάπτεται στον (C) $\Leftrightarrow d(\Lambda, (\varepsilon)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + (-2) - k|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |k| = 5 \Leftrightarrow k = \pm 5$.

Άρα, οι λύσεις του προβλήματος είναι οι ευθείες (ε₁): $y = -2x + 5$, (ε₂): $y = -2x - 5$



Εφαρμογή 9

Να βρεθούν οι εφαπτόμενες (ε) του (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$ που είναι παράλληλες προς την (η): $2x + 3y + 1 = 0$.

Λύση

α τρόπος

Θα λύσουμε το πρόβλημα προσδιορίζοντας το σημείο επαφής $P(x_0, y_0)$ της (ε) και του (C). Η (ε) ως εφαπτόμενη του (C) στο $P(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση

$$xx_0 + yy_0 - 4 \frac{x+x_0}{2} + 2 \frac{y+y_0}{2} - 8 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)x + (y_0 + 1)y + (y_0 - 2x_0 - 8) = 0$$

και επειδή πρέπει να είναι παράλληλη στην (η) : $2x + 3y + 1 = 0$, πρέπει και αρκεί να είναι

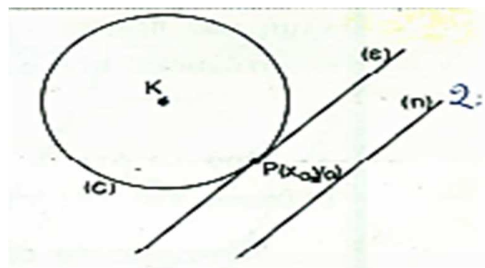
$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{x_0-2}{2} - \frac{y_0+1}{3} \right| = 0 \\ \left| \frac{y_0-2x_0-8}{1} - \frac{y_0+1}{3} \right| + \left| \frac{x_0-2}{2} - \frac{y_0-2x_0-8}{1} \right| \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_0-2y_0=8 \\ |-6x_0+2y_0+25| + |5x_0-2y_0+14| \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_0-2y_0=8 \\ x_0 \neq -11, y_0 \neq -\frac{41}{2} \end{array} \right\}$$

Είναι όμως το $P(x_0, y_0)$ σημείο του (C) $\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 + 2y_0 - 8 = 0$

Λύνοντας το σύστημα $\left\{ \begin{array}{l} 3x_0-2y_0=8 \\ x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 + 2y_0 - 8 = 0 \\ x_0 \neq -11, y_0 \neq -\frac{41}{2} \end{array} \right\}$ βρίσκουμε $\left\{ \begin{array}{l} (x_0 = 0, y_0 = -4) \\ \text{ή} \\ (x_0 = 4, y_0 = 2) \end{array} \right\}$

Άρα, τα σημεία επαφής της (ε) και του (C) είναι τα $P_1(0, -4)$, $P_2(4, 2)$ και συνεπώς οι ζητούμενες εφαπτόμενες οι $(ε_1): 2x+3y+12=0$, $(ε_2): 2x+3y-14=0$.



β τρόπος

Είναι $\lambda_\eta = -\frac{2}{3}$ και αφού πρέπει να είναι $(ε)/(η) \Rightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{2}{3}$ οπότε

$(ε): y = -\frac{2}{3}x + k$. Έστω το $\left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + k \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + k \\ 13x^2 - 12(k+4)x + 9(k^2 + 2k - 8) = 0 \quad (1) \end{array} \right\}$. Η (ε) εφάπτεται στον (C), αν και μόνο η (1)

έχει ως διπλή ρίζα $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 3k^2 - 2k - 56 = 0 \Leftrightarrow k = -4$ ή $k = \frac{14}{3}$. Συνεπώς, λύσεις του

προβλήματος είναι οι ευθείες $(ε_1): y = -\frac{2}{3}x - 4$, $(ε_2): y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$.

γ τρόπος

Ο δοσμένος κύκλος έχει κέντρο $\Lambda(2, -1)$ και ακτίνα $R = \sqrt{13}$. Η ζητούμενη ευθεία (ε) είναι $(\varepsilon): y = -\frac{2}{3}x + k \Leftrightarrow (\varepsilon): 2x + 3y - 3k = 0$. Η (ε) εφάπτεται στον $(C) \Leftrightarrow d(\Lambda, (\varepsilon)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 - 3 - 3k|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Leftrightarrow |1 - 3k| = 13 \Leftrightarrow k = -4$ ή $k = \frac{14}{3}$ κ.ο.κ.

Εφαρμογή 10

Να βρεθούν οι εφαπτόμενες (ε) του $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$ που σχηματίζουν γωνία 45° με την $(\eta): x - 5y + 1 = 0$

Λύση

Πρέπει να είναι $\widehat{(\eta, \varepsilon)} = 45^\circ$ ή $\widehat{(\varepsilon, \eta)} = 45^\circ$ ενώ $\lambda_\eta = \frac{1}{5}$. Άρα,

$$\begin{cases} \varepsilon\varphi(\widehat{(\eta, \varepsilon)}) = \frac{\lambda_\varepsilon - \lambda_\eta}{1 + \lambda_\eta \cdot \lambda_\varepsilon} \Leftrightarrow 1 = \frac{\lambda_\varepsilon - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}\lambda_\varepsilon} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{(\varepsilon): y = \frac{3}{2}x + k} \\ \varepsilon\varphi(\widehat{(\varepsilon, \eta)}) = \frac{\lambda_\eta - \lambda_\varepsilon}{1 + \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta} \Leftrightarrow 1 = \frac{\frac{1}{5} - \lambda_\varepsilon}{1 + \frac{1}{5}\lambda_\varepsilon} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{(\varepsilon): y = -\frac{2}{3}x + k} \end{cases}$$

Συνεπώς, οι ζητούμενες ευθείες είναι της μορφής $(\varepsilon_1): 3x - 2y + 2k = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x + 3y - 3k = 0$. Ο δοσμένος κύκλος έχει κέντρο το $\Lambda(1, -2)$ και ακτίνα $R = \sqrt{13}$. Άρα,

- Η (ε_1) εφάπτεται στον $(C) \Leftrightarrow d(\Lambda, (\varepsilon_1)) = R \Leftrightarrow \frac{|3 + 4 + 2k|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Leftrightarrow k = 3$ ή

$k = -10$ οπότε, δυο λύσεις του προβλήματος είναι οι ευθείες με εξισώσεις $3x - 2y + 6 = 0$, $3x - 2y - 20 = 0$.

- Η (ε_2) εφάπτεται στον $(C) \Leftrightarrow d(\Lambda, (\varepsilon_2)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 - 6 - 3k|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Leftrightarrow k = 3$ ή

$k = -\frac{17}{3}$ οπότε, άλλες δυο λύσεις του προβλήματος είναι οι ευθείες με εξισώσεις $2x + 3y - 9 = 0$, $2x + 3y + 17 = 0$.

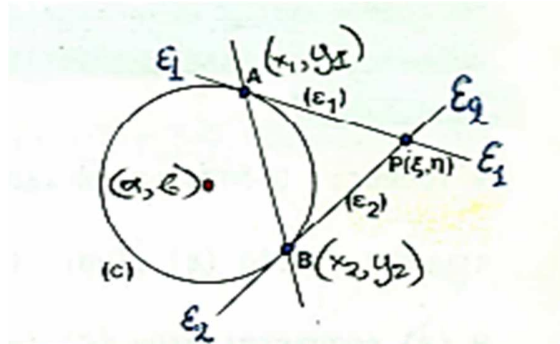
8.3 Μέθοδος 3

Αν από το σημείο $P(\xi, \eta)$ που είναι εξωτερικό του κύκλου $(C): (x-a)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$, φέρουμε τις εφαπτόμενες PA, PB όπου A, B είναι τα σημεία επαφής, τότε η εξίσωση AB βρίσκεται ως εξής: Υποθέτουμε ότι είναι $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ οπότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_1): (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - \beta)(y - \beta) = R^2 \\ (\varepsilon_2): (x_2 - a)(x - a) + (y_2 - \beta)(y - \beta) = R^2 \end{array} \right\} \text{ και αφού το } P(\xi, \eta) \text{ είναι σημείο των } (\varepsilon_1), (\varepsilon_2) \text{ έπεται}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 - \alpha)(\xi - \alpha) + (y_1 - \beta)(\eta - \beta) = R^2 \\ (x_2 - \alpha)(\xi - \alpha) + (y_2 - \beta)(\eta - \beta) = R^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow AB: (x - \alpha)(\xi - \alpha) + (y - \beta)(\eta - \beta) = R^2$$

διότι, είναι φανερό από τις σχέσεις (1) ότι η εξίσωση $(x - \alpha)(\xi - \alpha) + (y - \beta)(\eta - \beta) = R^2$ επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των Α,Β. Άμεσα στη συνέχεια, μπορούν να προσδιοριστούν τα Α,Β ως τομές της ευθείας ΑΒ και του (C). Με βάση τα παραπάνω λύνουμε προβλήματα στα οποία ζητάμε την απόσταση του Ρ από το ΑΒ ή το εμβαδόν του τριγώνου ΡΑΒ.



Εφαρμογή 11

Από σημείο $P(6,1)$ φέρνουμε εφαπτόμενες ΡΑ, ΡΒ προς τον κύκλο (C): $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Να βρεθεί η εξίσωση της ΑΒ.

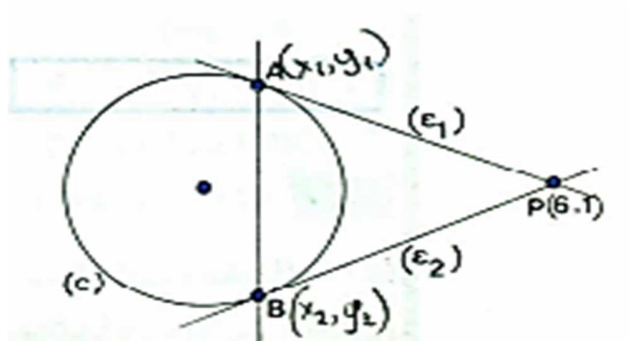
Λύση

Υποθέτουμε ότι είναι $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Τότε έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_1): (x_1 + 1)(x + 1) + (y_1 - 2)(y - 2) = 4 \\ (\varepsilon_2): (x_2 + 1)(x + 1) + (y_2 - 2)(y - 2) = 4 \end{array} \right\} \text{ και αφού το } P(6,1) \text{ είναι σημείο των } (\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$$

έπεται ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 + 1)(6 + 1) + (y_1 - 2)(1 - 2) = 4 \\ (x_2 + 1)(6 + 1) + (y_2 - 2)(1 - 2) = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow AB: (x + 1)(6 + 1) + (y - 2)(1 - 2) = 4 \Leftrightarrow AB: 7x - y + 5 = 0.$$



Εφαρμογή 12

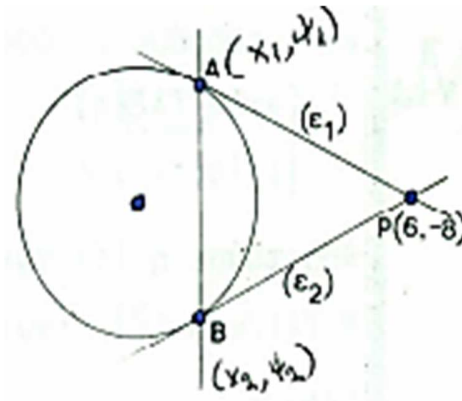
Από σημείο $P(6, -8)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΡΑ, ΡΒ προς τον κύκλο (C): $x^2 + y^2 = 25$. Να υπολογιστεί η απόσταση Ρ από την ΑΒ.

Λύση

Υποθέτουμε ότι είναι $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Τότε έχουμε $\begin{cases} (\varepsilon_1): xx_1 + yy_1 = 25 \\ (\varepsilon_2): xx_2 + yy_2 = 25 \end{cases}$ και αφού

$$P(6, -8) \text{ είναι σημείο των } (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ έπεται } \begin{cases} 6x_1 - 8y_1 = 25 \\ 6x_2 - 8y_2 = 25 \end{cases} \Rightarrow AB: 6x - 8y = 25.$$

$$\text{Συνεπώς, είναι } d(P, AB) = \frac{|6 \cdot 6 - 8 \cdot (-8) - 25|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{75}{10} = 7,5$$



Εφαρμογή 13

Από το σημείο $O(0, 0)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες OA , OB προς τον κύκλο (C) : $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

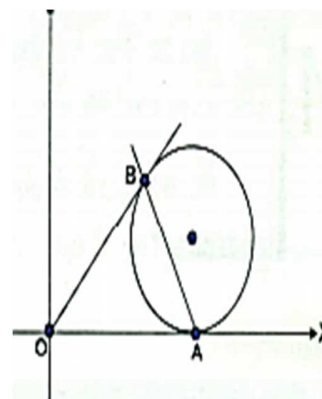
Λύση

Βρίσκουμε αρχικά την εξίσωση AB εργαζόμενοι όπως παραπάνω. Έτσι έχουμε $AB: (x-2)(0-2) + (y-4)(0-4) = 4 \Leftrightarrow AB: x+2y-8=0$.

Οι συντεταγμένες των A , B είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=0, y=4) \\ (x=\frac{16}{5}, y=\frac{12}{5}) \end{cases} \text{ Οπότε } A(0,4) \text{ και } B(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}). \text{ Συνεπώς,}$$

$$\text{για το εμβαδόν του τριγώνου } OAB \text{ έχουμε } E_{OAB} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ \frac{16}{5} & \frac{12}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ \frac{16}{5} & \frac{12}{5} \end{vmatrix} = \frac{32}{5}.$$



8.4 Μέθοδος 4

Αν από σημείο $P(\xi, \eta)$ που είναι εξωτερικό του κύκλου (C): $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ φέρουμε τις εφαπτόμενες PA, PB και ζητάμε τις εξισώσεις τους ή τη γωνία $(\widehat{PA, PB})$ (οπότε αρκεί να βρεθούν τα $\lambda_{PA}, \lambda_{PB}$) εργαζόμαστε ως εξής:

α) Θεωρούμε τις ευθείες που διέρχονται από το $P(\xi, \eta)$, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις $x=\xi$, $y-\eta=\lambda(x-\xi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Εξετάζουμε αν η ευθεία (ε): $x=\xi$ εφάπτεται στον κύκλο (C), δηλαδή αν το σύστημα $\begin{cases} x = \xi \\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \end{cases}$ έχει διπλή λύση στο $\mathbb{R}^2$, ή ισοδύναμα αν το κέντρο $\Lambda(\alpha, \beta)$ του κύκλου έχει την ιδιότητα: $d(\Lambda, (ε))=R$.

γ) Έστω το $\begin{cases} y = \lambda x - (\lambda\xi - \eta) \\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x - (\lambda\xi - \eta) \\ (x-\alpha)^2 + [\lambda x - (\lambda\xi - \eta) - \beta]^2 - R^2 = 0 \quad (1) \end{cases}$. Απαιτούμε η (1) να έχει διπλή ρίζα ως προς $x \Leftrightarrow \Delta=0$ (2). Η εξίσωση (2) είναι εξίσωση ως προς λ , με ρίζες τα ζητούμενα $\lambda_{PA}, \lambda_{PB}$. Είναι φανερό ότι αν έχει διαπιστωθεί πως η ευθεία $x=\xi$ είναι εφαπτόμενη του (C), τότε η (2) είναι πρωτοβάθμια εξίσωση ως προς λ . Στη συνέχεια βρίσκουμε τις εξισώσεις των PA, PB ή την γωνία τους.

Είναι δυνατόν οι συντελεστές διευσθύνσεως των ευθειών (ε): $y-\eta=\lambda(x-\xi) \Leftrightarrow (ε): \lambda x - y + (\eta - \lambda\xi) = 0$ που εφάπτεται στον (C), να προσδιοριστούν και από την απαίτηση $d(\Lambda, (ε))=R$, όπου $\Lambda(\alpha, \beta)$ το κέντρο του δοσμένου κύκλου.

Εφαρμογή 14

Από την αρχή O των αξόνων φέρνουμε τις εφαπτόμενες προς τον κύκλο (C): $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$. Να βρεθεί η γωνία τους.

Λύση

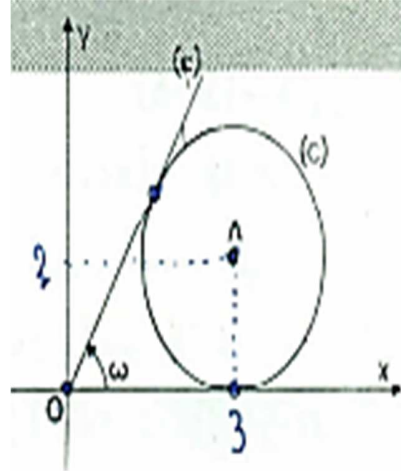
Οι ευθείες που διέρχονται από το $O(0,0)$ έχουν εξισώσεις $x=0$ και $y=\lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Επειδή το σύστημα $\begin{cases} x = 0 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$ δεν έχει πραγματικές λύσεις, έπεται ότι η ευθεία $x=0$ και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία. Άρα οι εφαπτόμενες που άγονται από το 0 ως προς τον (C) είναι της μορφής $y=\lambda x$. Για να τις βρούμε θεωρούμε το σύστημα: $\begin{cases} y = \lambda x \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ (1+\lambda^2)x^2 - 2(2\lambda+3)x + 9 = 0 \quad (1) \end{cases}$ Η ευθεία (ε): $y=\lambda x$ εφάπτεται στον (C) αν και μόνο αν η (1) έχει διπλή ρίζα $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 4(2\lambda+3)^2 - 4 \cdot 9(1+\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = \frac{12}{5}$. Άρα, οι εφαπτόμενες του (C) που

άγονται από το $O(0,0)$ είναι ο άξονας $x'x$ και η ευθεία (ε): $y = \frac{12}{5}x$ οπότε η γωνία τους ω προσδιορίζεται από της σχέση $\epsilon\omega = \lambda_\epsilon = \frac{12}{5}$.

β τρόπος

Ο δοσμένος κύκλος έχει κέντρο $\Lambda(3, 2)$ και ακτίνα $R=2$. Οι ευθείες που διέρχονται από το $0(0,0)$ είναι οι $y'y$: $x=0$, (ε) : $y=\lambda x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Επειδή $d(\Lambda, y'y)=3 \neq R$ ο άξονας $y'y$ δεν εφάπτεται στον κύκλο. Η (ε) : $y=\lambda x \Leftrightarrow (\varepsilon)$: $\lambda x - y = 0$ εφάπτεται στον κύκλο $d(\Lambda, (\varepsilon))=R \Leftrightarrow \frac{|3\lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 4\lambda^2 + 4 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 12\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή

$$\lambda = \frac{12}{5} \text{ κ.ο.κ.}$$



Εφαρμογή 15

Να βρεθεί η γωνία των εφαπτομένων που άγονται από το $P(3, 6)$ προς την περιφέρεια (C) : $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Λύση

Οι ευθείες που άγονται από το $P(3,6)$ είναι οι $\boxed{x=3}$, $\boxed{y-6=\lambda(x-3)}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε το σύστημα: $\begin{cases} x = 3 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y_1 = y_2 = 0 \end{cases}$.

Άρα η ευθεία $\boxed{x=3}$ είναι εφαπτόμενη του (C) .

Θεωρούμε το $\begin{cases} (\eta) : y - 6 = \lambda(x - 3) \\ (C) : (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x - (3\lambda - 6) \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y = \lambda x - (3\lambda - 6) \\ x - 2x + 1 + \lambda^2 x^2 + (3\lambda - 6)^2 - 2\lambda(3\lambda - 6)x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

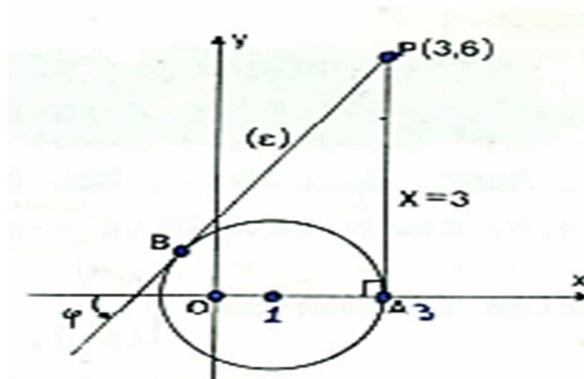
$$\begin{cases} y = \lambda x - (3\lambda - 6) \\ (1 + \lambda^2)x^2 - 2[\lambda(3\lambda - 6) + 1]x + (3\lambda - 6)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Η (η) εφάπτεται στην (C) , αν η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει διπλή ρίζα $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 4[\lambda(3\lambda - 5) + 1] - 4(1 + \lambda^2)[(3\lambda - 6)^2 - 3] = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda(3\lambda - 5)^2 + 1 + 2\lambda(3\lambda - 6) - (3\lambda - 6)^2 + 3 - \lambda^2(3\lambda - 6)^2 + 3\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}. \quad \text{Οπότε η}$$

δεύτερη εφαπτόμενη που άγεται από το P προς την (C) είναι η (ε) : $y - 6 = \frac{4}{3}(x - 3) \Leftrightarrow (\varepsilon) : 4x - 3y + 6 = 0$.

$$\text{Άρα } \widehat{PA, PB} = \varepsilon\varphi = \lambda_{PB} = \lambda_{\varepsilon} = \frac{4}{3}.$$



Εφαρμογή 16

Από το σημείο $P(4, 2)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA , PB προς την περιφέρεια (C) : $x^2 + y^2 = 10$. Να βρεθεί η γωνία (PA, PB) .

Λύση

Οι ευθείες που διέρχονται από το $P(4,2)$ έχουν εξισώσεις: $x=4$ και $y-2=\lambda(x-4)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases} x=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y \notin \mathbb{R} \end{cases}$

Άρα η ευθεία $x=4$ δεν έχει κοινά σημεία, συνεπώς δεν εφάπτεται στην (C) .

Έστω το σύστημα $\begin{cases} y-2=\lambda(x-4) \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x-(4\lambda-2) \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y=\lambda x-2(2\lambda-1) \\ x^2+[\lambda x-2(2\lambda-1)]^2-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\lambda x-(4\lambda-2) \\ (1+\lambda^2)x^2-4\lambda(2\lambda-1)x+4(2\lambda-1)^2-10=0 \quad (1) \end{cases} (\Sigma)$$

Η ευθεία $y-2=\lambda(x-4)$ εφάπτεται στην (C) , αν και μόνο αν το (Σ) έχει διπλή λύση $\Leftrightarrow$ η (1)

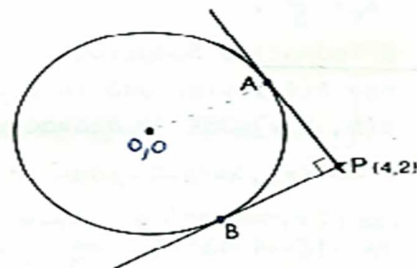
έχει διπλή λύση ως προς $x \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda^2 \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$16\lambda^2(2\lambda-1)^2-4(1+\lambda^2)[4(2\lambda-1)^2-10]=0 \Leftrightarrow$$

$$16\lambda^2(2\lambda-1)^2-16(2\lambda-1)^2+40-16\lambda^2(2\lambda-1)^2+40\lambda^2=0 \Leftrightarrow 5\lambda^2-2(2\lambda+1)^2+5=0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda^2-8\lambda-3=0 \quad (2). \text{ Οι ρίζες της (2) είναι τα } \lambda_{PA}, \lambda_{PB}.$$

Επειδή $\lambda_{PA} \cdot \lambda_{PB} = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow PA \perp PB \Rightarrow \widehat{APB} = 1$ ορθή.



8.5 Μέθοδος 5

Για να βρούμε τις κοινές εφαπτόμενες των κύκλων (C_1) : $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, (C_2) : $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ εργαζόμαστε ως εξής:

α) Βρίσκουμε τα κέντρα και υπολογίζουμε τις ακτίνες των (C_1) , (C_2) .

$$\text{Έτσι } K\left(\frac{-A_1}{2}, \frac{-B_1}{2}\right), \Lambda\left(\frac{-A_2}{2}, \frac{-B_2}{2}\right), R = \frac{1}{2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 4\Gamma_1}, \rho = \frac{1}{2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 - 4\Gamma_2}$$

β) Κατακόρυφες εφαπτόμενες της (C_1) είναι οι ευθείες $x = \frac{-A_1}{2} \pm R$.

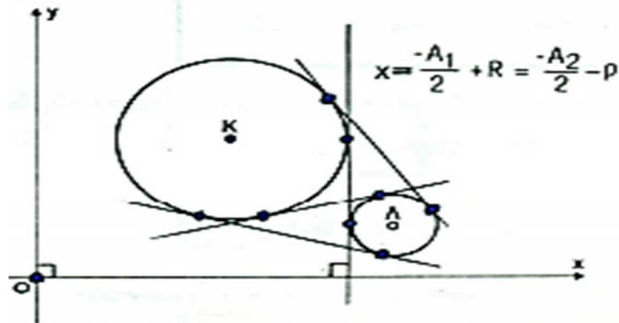
Κατακόρυφες εφαπτόμενες της (C_2) είναι οι ευθείες $x = \frac{-A_2}{2} \pm \rho$.

Βρίσκουμε αν υπάρχει κοινή εφαπτόμενη των (C_1) , (C_2) δηλαδή κοινή εφαπτόμενη των (C_1) , (C_2) της οποίας δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης.

γ) Για να βρούμε τις κοινές εφαπτόμενες της μορφής $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τα συστήματα $\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon): y = \lambda x + \beta \\ (C_1): x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon): y = \lambda x + \beta \\ (C_2): x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{array} \right\}$

Απαιτούμε καθένα από αυτά να έχει διπλή λύση. Από το μηδενισμό των διακρινουσών των δευτεροβάθμιων εξισώσεων που θα προκύψουν, θα έχουμε σύστημα ως προς λ, β που από τις πραγματικές λύσεις του θα έχουμε τις κοινές εφαπτόμενες των (C_1) , (C_2) . Στο ίδιο σύστημα ως προς λ, β θα καταλήξουμε και αν απαιτήσουμε $d(K, (\varepsilon))=R$ και $d(\Lambda, (\varepsilon))=\rho$.

δ) Ο διαχωρισμός των εσωτερικών από τις εξωτερικές κοινές εφαπτόμενες γίνεται με βάση την παρατήρηση ότι τα κέντρα των περιφερειών κείνται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα σε σχέση με την εσωτερική κοινή εφαπτόμενη και στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την εξωτερική κοινή εφαπτόμενη.



Εφαρμογή 17

Να βρεθούν οι κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των περιφερειών (C_1) : $x^2 + y^2 = 4$ και (C_2) : $(x-6)^2 + y^2 = 9$

Λύση

Η (C_1) έχει κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $R=2$ ενώ η (C_2) έχει κέντρο το $K(6, 0)$ και $\rho=3$. Παρατηρούμε ότι η (C_1) έχει ως κατακόρυφες εφαπτόμενες τις ευθείες $x=0+2$, $x=0-2$ ενώ η (C_2) τις $x=6+3$, $x=6-3$ άρα οι περιφέρειες δεν έχουν κατακόρυφη κοινή εφαπτόμενη. Ας είναι τώρα $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow (\varepsilon): \lambda x - y + \beta = 0$ μια κοινή εφαπτόμενη των

$$\begin{aligned}
(C_1), (C_2). \text{ Τότε } \left\{ \begin{array}{l} d(0, (\varepsilon)) = R \\ d(K, (\varepsilon)) = \rho \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\beta| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \\ |6\lambda + \beta| = 3\sqrt{\lambda^2 + 1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\beta| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \\ |6\lambda + \beta| = \frac{3}{2}|\beta| \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
\left\{ \begin{array}{l} |\beta| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \\ 6\lambda + \beta = \pm \frac{3}{2}\beta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\beta| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \\ 12\lambda = \beta \text{ ή } -\frac{12}{5}\lambda = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\beta = 12\lambda, 6|\lambda| = \sqrt{\lambda^2 + 1}) \\ \left(\beta = -\frac{12}{5}\lambda, 6|\lambda| = 5\sqrt{\lambda^2 + 1} \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \beta = \frac{12}{\sqrt{35}} \right) \text{ ή } \left(\lambda = -\frac{1}{\sqrt{35}}, \beta = \frac{-12}{\sqrt{35}} \right) \text{ ή } \lambda = \left(\frac{5}{\sqrt{11}}, \beta = \frac{-12}{\sqrt{11}} \right) \\
\text{ή } \left(\lambda = \frac{-5}{\sqrt{11}}, \beta = \frac{12}{\sqrt{11}} \right). \text{ Συνεπώς οι 4 κοινές εφαπτόμενες των } (C_1), (C_2) \text{ έχουν}
\end{aligned}$$

εξισώσεις

$(\varepsilon_1): y = \frac{1}{\sqrt{35}}x + \frac{12}{\sqrt{35}}, (\varepsilon_2): y = -\frac{1}{\sqrt{35}}x - \frac{12}{\sqrt{35}}, (\varepsilon_3): y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{12}{\sqrt{11}}$
$(\varepsilon_4): y = \frac{-5}{\sqrt{11}}x + \frac{12}{\sqrt{11}}$

Για να βρούμε τις εσωτερικές και εξωτερικές εφαπτόμενες έχουμε

Από την $(\varepsilon_1): y = \frac{1}{\sqrt{35}}x + \frac{12}{\sqrt{35}}$. Θεωρούμε το $f_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{35}}x - y + \frac{12}{\sqrt{35}}$.

Επειδή $f_1(0, 0) = \frac{12}{\sqrt{35}} > 0$ και $f_1(6, 0) = \frac{18}{\sqrt{35}} > 0$ τα κέντρα $O(0, 0)$, $K(6, 0)$ των $(C_1), (C_2)$

κείνται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την κοινή εφαπτόμενη (ε_1) . Άρα, η (ε_1) είναι κοινή εξωτερική εφαπτόμενη. Όμοια συνεχίζουμε για τις $(\varepsilon_2), (\varepsilon_3), (\varepsilon_4)$.

Εφαρμογή 18

Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των περιφερειών $(C_1): x^2 + (y-3)^2 = 4$ και $(C_2): (x-5)^2 + y^2 = 9$.

Λύση

Αν K, Λ τα κέντρα των $(C_1), (C_2)$ και R, ρ οι ακτίνες τους αντίστοιχα, έχουμε $\boxed{K(0, 3)}$, $\boxed{R=2}$ και $\boxed{\Lambda(5, 0), \rho=3}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\text{Κατακόρυφες εφαπτόμενες της } (C_1) \text{ είναι οι } \left\{ \begin{array}{l} x = 0 - 2 \\ x = 0 + 2 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Η ευθεία } x = 2 \\ \text{είναι κοινή κα} - \\ \text{τακόρυφη εφα} - \\ \text{πτόμενη των} \\ (C_1), (C_2) \end{array} \right\} \\
\text{Κατακόρυφες εφαπτόμενες της } (C_2) \text{ είναι οι } \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - 3 \\ x = 5 + 3 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τυχαία ευθεία (ε) : $y=\lambda x+\beta$, $\lambda \in \mathbb{R}$ του επιπέδου. Η (ε) είναι κοινή εφαπτόμενη

$$\begin{aligned} \text{των } (C_1),(C_2) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(K, (\varepsilon)) = R \\ d(\Lambda, (\varepsilon)) = \rho \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{|-3+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 2 \\ \frac{|5\lambda+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} |\beta-3| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \\ |5\lambda+\beta| = 3\sqrt{\lambda^2+1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\beta-3| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \\ |5\lambda+\beta| = \frac{3}{2}|\beta-3| \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\beta-3| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \\ 5\lambda+\beta = \frac{3}{2}(\beta-3) \\ \text{ή} \\ |\beta-3| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \\ 5\lambda+\beta = -\frac{3}{2}(\beta-3) \end{array} \right\} \\ \text{Έχουμε } (\Sigma_1): &\left\{ \begin{array}{l} |\beta-3| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \\ \beta = 10\lambda+9 \end{array} \right\} \text{ και } (\Sigma_2): \left\{ \begin{array}{l} |\beta-3| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \\ \beta = \frac{9-10\lambda}{5} \end{array} \right\} \\ \text{Έχουμε } (\Sigma_1): &\left\{ \begin{array}{l} \beta = 10\lambda+9 \\ |10\lambda+6| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = 10\lambda+9 \\ (5\lambda+3)^2 = \lambda^2+1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = 10\lambda+9 \\ \lambda = \frac{-15 \pm \sqrt{33}}{24} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} \left(\lambda = \frac{-15+\sqrt{33}}{24}, \beta = \frac{33+5\sqrt{33}}{12} \right) \\ \text{ή} \\ \left(\lambda = \frac{-15-\sqrt{33}}{24}, \beta = \frac{33-5\sqrt{33}}{12} \right) \end{array} \right\}. \text{ Άρα οι ευθείες } y = \left(\frac{-15+\sqrt{33}}{24} \right)x + \left(\frac{33+5\sqrt{33}}{12} \right) \\ \text{και } y = &\left(\frac{-15-\sqrt{33}}{24} \right)x + \left(\frac{33-5\sqrt{33}}{12} \right) \text{ είναι κοινές εφαπτόμενες των } (C_1),(C_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ακόμη είναι } (\Sigma_2) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{9-10\lambda}{5} \\ |\beta-3| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{9-10\lambda}{5} \\ \left(\frac{3+5\lambda}{5} \right)^2 = \lambda^2+1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{9-10\lambda}{5} \\ \lambda = \frac{8}{15} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left(\lambda = \frac{8}{15}, \beta = \frac{11}{15} \right) \text{ οπότε και η } y = \frac{8}{15}x + \frac{11}{15} \text{ είναι κοινή εφαπτόμενη} \end{aligned}$$

των $(C_1), (C_2)$. Τελικά λοιπόν, οι κοινές εφαπτόμενες των $(C_1),(C_2)$ είναι οι ευθείες:

$$x=2, \quad y=\left(\frac{-15+\sqrt{33}}{24}\right)x+\left(\frac{33+5\sqrt{33}}{12}\right), \quad y=\left(\frac{-15-\sqrt{33}}{24}\right)x+\left(\frac{33-5\sqrt{33}}{12}\right),$$

$$y=\frac{8}{15}x+\frac{11}{15}$$

8.6 Μέθοδος 6

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι ο μεταβλητός κύκλος διέρχεται από ένα ή δυο σταθερά σημεία, τότε απαιτούμε η εξίσωση του κύκλου να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σταθερού σημείου $P(x_0, y_0)$ για κάθε τιμή της παραμέτρου (που υπάρχει στην εξίσωση του κύκλου), οπότε φθάνουμε σε μηδενικό πολυώνυμο που, από το μηδενισμό των συντελεστών του έχουμε το ζητούμενο.

Εφαρμογή 19

Δείξτε ότι οι κύκλοι (C): $(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 - 2x - 2\lambda = 0$ με $1+\lambda \neq 0$ διέρχονται από 2 σταθερά σημεία.

Λύση

Οι κύκλοι (C) διέρχονται από το σταθερό σημείο $P(x_0, y_0)$ αν και μόνο ισχύει ότι

$$(1+\lambda)x_0^2 + (1+\lambda)y_0^2 - 2x_0 - 2\lambda = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow (x_0^2 + y_0^2 - 2)\lambda + (x_0^2 + y_0^2 - 2x_0) = 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = \pm 1 \end{cases}$$

Δηλαδή διέρχονται από τα σταθερά σημεία $P_1(1, 1)$ και $P_2(1, -1)$.

Εφαρμογή 20

Στους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy κινούνται τα A, B ώστε $\overline{OA} + \overline{OB} = \mu$ σταθερό. Ναδειχθεί ότι οι κύκλοι με διάμετρο AB , διέρχονται από σταθερό σημείο, διάφορο του O .

Λύση

Έστω ότι $\overline{OA} = t$, $t \in (0, \mu)$ οπότε $\overline{OB} = \mu - t$ και άρα $A(t, 0)$, $B(0, \mu - t)$. Αν K το κέντρο ενός κύκλου διαμέτρου AB , τότε $K\left(\frac{t}{2}, \frac{\mu - t}{2}\right)$ και

$$R = \frac{1}{2} \|\overline{AB}\| \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4} [t^2 + (\mu - t)^2] \text{ οπότε}$$

$$(C): \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\mu - t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} [t^2 + (\mu - t)^2] \Leftrightarrow (C): x^2 + y^2 - tx + (t - \mu)y = 0.$$

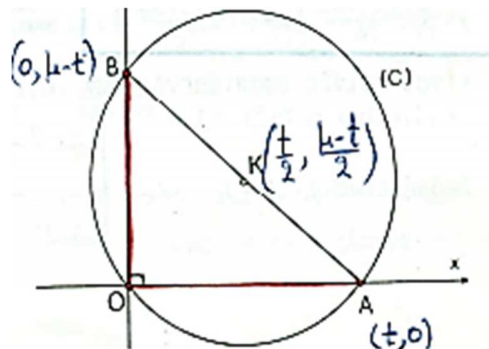
Ο (C) διέρχεται από σταθερό σημείο $P(x_0, y_0)$ διάφορο του $O(0, 0)$, αν και μόνο αν ισχύει

$$x_0^2 + y_0^2 - tx_0 + (t - \mu)y_0 = 0 \quad \forall t \in (0, \mu) \quad \text{με} \quad (x_0, y_0) \neq (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$(y_0 - x_0)t + (x_0^2 + y_0^2 - \mu y_0) = 0 \quad \forall t \in (0, \mu) \quad \text{με} \quad (x_0, y_0) \neq (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 - x_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - \mu y_0 = 0 \\ (x_0, y_0) \neq (0, 0) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 - \mu y_0 = 0 \\ y_0 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = y_0 \neq 0 \\ 2y_0^2 = \mu y_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = \frac{\mu}{2} \quad \text{και}$$

άρα ο (C) διέρχεται από το σταθερό σημείο $P\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$.



Εφαρμογή 21

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου (C) που διέρχεται από τα κοινά σημεία των $(C_1): (x-1)^2 + (y+5)^2 = 50$, $(C_2): (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας (ε): $x+y=0$.

Λύση

Τα κοινά σημεία των (C_1) , (C_2) έχουν συντεταγμένες τις λύσεις του

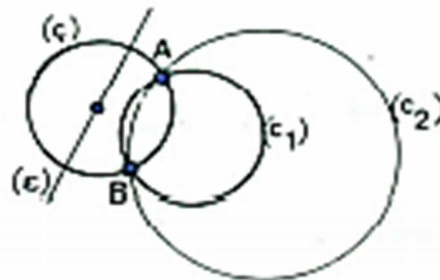
$$\left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y+5)^2 = 50 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x + 10y - 24 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4x + 8y - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x = -4, y = 0) \\ \text{ή} \\ (x = 0, y = 2) \end{array} \right\}$$

Άρα, ο ζητούμενος κύκλος (C) διέρχεται από τα $A(-4, 0)$, $B(0, 2)$ και το κέντρο του K ανήκει στην (ε): $x+y=0$. Αν συνεπώς είναι $K(\alpha, \beta)$ πρέπει: $\left\{ \begin{array}{l} K \in (\varepsilon) \\ d(K, A) = d(K, B) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \sqrt{(\alpha+4)^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta-2)^2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = -3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -3 \\ \beta = 3 \end{array} \right\} \text{ δηλαδή } K(-3, 3) \text{ και}$$

$R=d(K,A)=\sqrt{10}$ οπότε $(C): (x+3)^2 + (y-3)^2 = 10$



Εφαρμογή 22

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου (C) που διέρχεται από τα A(1, 2), B(3, 4) και εφάπτεται στην (ε): $3x+y-3=0$.

Λύση

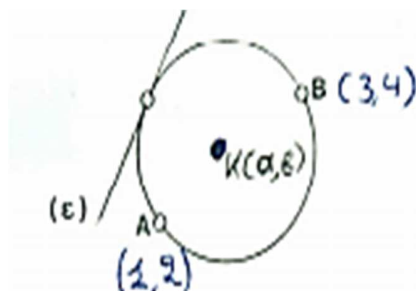
Αν K(α, β) είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου (C) πρέπει:

$$\begin{cases} d(K, A) = d(K, B) \\ d(K, A) = d(K, (\varepsilon)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\beta-2)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (\beta-4)^2} \\ \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\beta-2)^2} = \frac{|3\alpha + \beta - 3|}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha^2 + 9\beta^2 - 6\alpha\beta - 2\alpha - 34\beta + 41 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha = 4, \beta = 1) \Leftrightarrow K_1(4, 1) \\ \text{ή} \\ \left(\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow K_2\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \end{cases}$$

Είναι τότε $R_1 = d(K_1, A) = \sqrt{10}$, $R_2 = d(K_2, A) = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Οπότε (C₁): $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$

και (C₂): $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$.



Εφαρμογή 23

Να βρεθεί η εξίσωση του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε): $3x-5y+15=0$ με τους άξονες.

Λύση

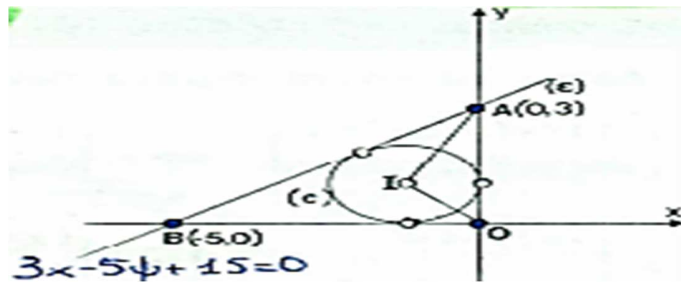
Η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες στα A(0, 3) και B(-5, 0). Το κέντρο I του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο OAB θα είναι η τομή των εσωτερικών διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου. Η διχοτόμος OI, ως διχοτόμος της δεύτερης γωνίας των αξόνων, έχει εξίσωση $y=-x$. Οι διχοτόμοι της γωνίας A έχουν εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3x-5y+15}{\sqrt{9+25}} = \frac{x}{\sqrt{1^2+0^2}} \Leftrightarrow (3-\sqrt{34})x-5y+15=0 \\ \frac{3x-5y+15}{\sqrt{9+25}} = -\frac{x}{\sqrt{1^2+0^2}} \Leftrightarrow (3+\sqrt{34})x-5y+15=0 \end{array} \right\} \quad \text{Θεωρούμε το πολυώνυμο}$$

$f(x, y) = (3+\sqrt{34})x-5y+15$ και έχουμε $f(0, 0)=15>0$, $f(-5, 0)=-5\sqrt{34}<0$ δηλαδή τα $f(x, y)$ παίρνει τιμές ετερόσημες για τις συντεταγμένες των O, B. Άρα, η εξίσωση $(3+\sqrt{34})x-5y+15=0$ είναι η εξίσωση της εσωτερικής διχοτόμου της A.

Το κέντρο I του εγγεγραμμένου κύκλου, θα έχει ως συντεταγμένες τη λύση του συστήματος $\begin{cases} y = -x \\ (3 + \sqrt{34})x - 5y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \frac{-15}{8 + \sqrt{34}} \end{cases}$ οπότε $I\left(\frac{-15}{8 + \sqrt{34}}, \frac{15}{8 + \sqrt{34}}\right)$ και $\rho = d(I, x'x) = |y_I| = \frac{15}{8 + \sqrt{34}}$. Συνεπώς είναι

$$(C): \left(x + \frac{15}{8 + \sqrt{34}}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{8 + \sqrt{34}}\right)^2 = \left(\frac{15}{8 + \sqrt{34}}\right)^2.$$



Εφαρμογή 24

Από το σημείο $P(6, 4)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA, PB προς την περιφέρεια $(C): x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$. Να βρεθούν **α)** $d(P, AB)$, **β)** E_{PAB} , **γ)** Η γωνία καθεμιάς από τις PA, PB με τον άξονα $y'y$.

Λύση

α) Για να βρούμε την εξίσωση της AB έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \text{Αν } A(x_1, y_1) \Rightarrow PA: xx_1 + yy_1 - 8\frac{x+x_1}{2} + 12 = 0 &\xrightarrow{P \in PA} 6x_1 + 4y_1 - 8\frac{6+x_1}{2} + 12 = 0 \\ \text{Αν } B(x_2, y_2) \Rightarrow PA: xx_2 + yy_2 - 8\frac{x+x_2}{2} + 12 = 0 &\xrightarrow{P \in PB} 6x_2 + 4y_2 - 8\frac{6+x_2}{2} + 12 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow AB: 6x + 4y - 8\frac{6+x}{2} + 12 = 0 \Leftrightarrow AB: x + 2y - 6 = 0$$

$$\text{Είναι συνεπώς } d(P, AB) = \frac{|6 + 2 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

β) Οι συντεταγμένες των A, B είναι οι λύσεις του συστήματος:

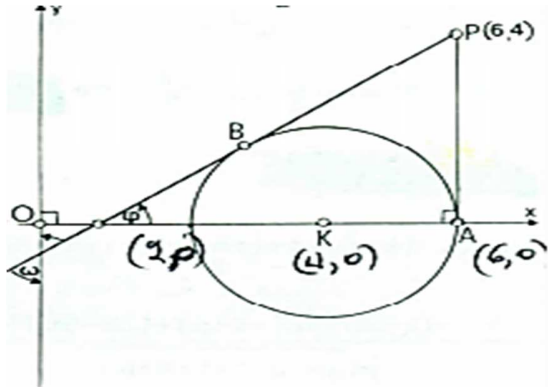
$$\left\{ \begin{aligned} AB: x + 2y - 6 = 0 \\ (C): x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x = 6 - 2y \\ y(5y - 8) = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} (x = 6, y = 0) \\ (x = \frac{14}{5}, y = \frac{8}{5}) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} A(6, 0) \\ B\left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}\right) \end{aligned} \right\}.$$

$$\text{Τότε } d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{320}{5^2}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Οπότε } E_{PAB} = \frac{1}{2} d(A, B) \cdot d(P, AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{64}{10} = 6,4$$

γ) Επειδή $P(6, 4)$, $A(6, 0)$ ο λ_{AP} δεν ορίζεται οπότε $AP \parallel y'y$.

$$\text{Αν } \widehat{\omega} = (\widehat{BP}, y'y) \text{ έχουμε } \sigma\varphi\omega = \varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{BP} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{3}{4}.$$

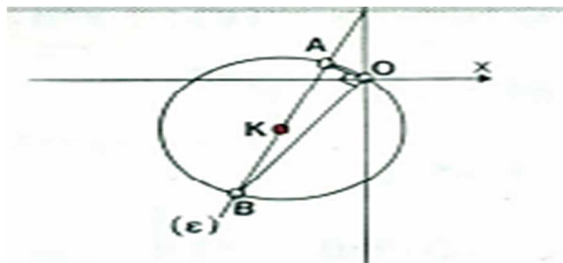


Εφαρμογή 25

Υπολογίστε το $\mu \in \mathbb{R}$ αν η χορδή που ορίζει η ευθεία $(\varepsilon): y=2x+3$ στην περιφέρεια $(C): x^2 + y^2 - 2\mu x - 2\mu y = 0$ φαίνεται υπό ορθή γωνία από την αρχή των αξόνων.

Λύση

Παρατηρούμε ότι η αρχή 0 των αξόνων είναι σημείο της περιφέρειας (C) . Αν συνεπώς AB είναι η χορδή που ορίζει η (ε) στην (C) , τότε αφού είναι $\widehat{AOB} = 1$ έπεται ότι η AB είναι διάμετρος της $(C) \Leftrightarrow$ το κέντρο K της (C) είναι σημείο της (ε) (και αφού $K(\mu, \mu) \Leftrightarrow \mu=2\mu+3 \Leftrightarrow \mu=-3$).



Εφαρμογή 26

Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης $\kappa(x-y+2)+\mu(2x+y-5)=0$, $|\kappa|+|\mu| \neq 0$ που ορίζει στην περιφέρεια $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ χορδή μήκους $\sqrt{6}$.

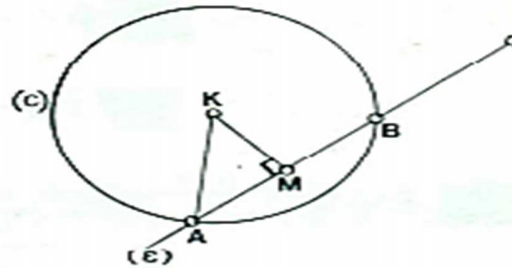
Λύση

Αν K είναι το κέντρο της (C) , έχουμε $K(1, -2)$ και $R=2$. Φέρνουμε $KM \perp (\varepsilon)$ όπου (ε) η ζητούμενη ευθεία. Είναι τότε $\|\overline{AM}\| = \frac{1}{2}\|\overline{AB}\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο

$$KMA \Leftrightarrow KM^2 = R^2 - AM^2 \Leftrightarrow KM^2 = 4 - \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{10}{4} \Leftrightarrow \|\overline{KM}\| = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$d(K, (\varepsilon)) = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Εφόσον η (ε) ανήκει στη δοσμένη δέσμη, έχει εξίσωση $(\varepsilon): (\kappa+2\mu)x + (-\kappa+\mu)y + (2\kappa-5\mu) = 0$. Τότε $d(K, (\varepsilon)) = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \frac{|(\kappa+2\mu) - 2(-\kappa+\mu) + (2\kappa-5\mu)|}{\sqrt{(\kappa+2\mu)^2 + (-\kappa+\mu)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow$

$8\kappa^2 - 22\kappa\mu + 5\mu^2 = 0 \Leftrightarrow (4\kappa - \mu)(2\kappa - 5\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = 4\kappa \text{ ή } \mu = \frac{2}{5}\kappa \text{ με } \kappa \neq 0 \text{ οπότε, με}$
 αντικατάσταση στην εξίσωση της δέσμης, βρίσκουμε τις ζητούμενες ευθείες που είναι οι $3x+y-6=0$ και $3x-y=0$.



Εφαρμογή 27

Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του (C): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ που σχηματίζουν γωνία 45° με την (η): $x - y - 4 = 0$.

Λύση

Αν (ε) η ζητούμενη εφαπτόμενη θέλουμε να είναι $\widehat{(\eta, \varepsilon)} = 45^\circ$ ή $\widehat{(\varepsilon, \eta)} = 45^\circ$. Επειδή $\lambda_\eta = 1$ πρέπει να είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi 45^\circ = \varepsilon\varphi(\widehat{\eta, \varepsilon}) = \frac{\lambda_\varepsilon - \lambda_\eta}{1 + \lambda_\varepsilon \lambda_\eta} \Leftrightarrow 1 = \frac{\lambda_\varepsilon - 1}{1 + \lambda_\varepsilon} \text{ εξίσωση αδύνατη} \\ \varepsilon\varphi 45^\circ = \varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon, \eta}) = \frac{\lambda_\eta - \lambda_\varepsilon}{1 + \lambda_\eta \lambda_\varepsilon} \Leftrightarrow 1 = \frac{1 - \lambda_\varepsilon}{1 + \lambda_\varepsilon} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \end{array} \right\}$$

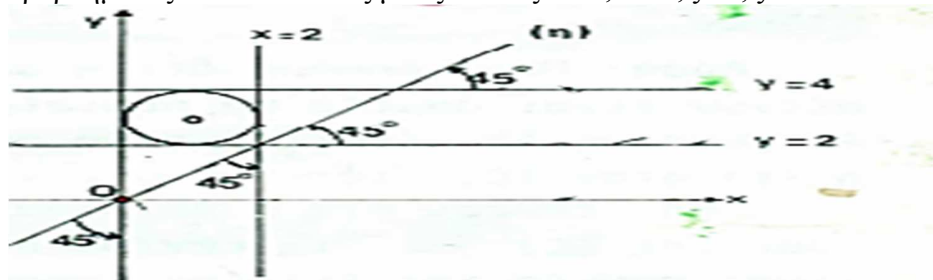
Επειδή $\lambda_\varepsilon = 0$ $\varepsilon\varphi 45^\circ = \Leftrightarrow (\varepsilon): \boxed{y = \beta}$.

Θεωρούμε το σύστημα $\left\{ \begin{array}{l} y = \beta \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \beta \\ x^2 - 2x + \beta^2 - 6\beta + 9 = 0 \quad (1) \end{array} \right\}$.

Η (ε) εφάπτεται στον (C) $\Leftrightarrow$ η (1) έχει διπλή ρίζα $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4(\beta^2 - 6\beta + 9) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 6\beta + 8 = 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \text{ ή } \beta = 4$ και άρα δυο λύσεις του προβλήματος είναι οι ευθείες με εξισώσεις $\boxed{y=2}$ και $\boxed{y=4}$. Επειδή κατά την αναζήτηση του λ_ε φθάσαμε σε εξίσωση αδύνατη, εξετάζουμε αν οι κατακόρυφες εφαπτόμενες του (C) είναι λύση του προβλήματος.

Ο δοσμένος κύκλος (C) έχει κέντρο $K(1, 3)$ και ακτίνα $R=1$ οπότε οι κατακόρυφες εφαπτόμενες του είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1): x=1-1=0$ και $(\varepsilon_2): x=1+1 \Leftrightarrow x=2$. Είναι τότε $\varepsilon\varphi(\widehat{\eta, \varepsilon_1}) = \frac{1}{\lambda_\eta} = 1 \Rightarrow \widehat{(\eta, \varepsilon_1)} = 45^\circ$ και $\varepsilon\varphi(\widehat{\eta, \varepsilon_2}) = \frac{1}{\lambda_\eta} = 1 \Rightarrow \widehat{(\eta, \varepsilon_2)} = 45^\circ$. Τελικά οι

λύσεις του προβλήματος είναι οι ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=2$, $y=2$, $y=4$.



Εφαρμογή 28

Βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που εφάπτονται στις ευθείες $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

Λύση

Αν $K(\alpha, \beta)$ το κέντρο ενός από τους ζητούμενους κύκλους, τούτο πρέπει και αρκεί να ισαπέχει από τις ευθείες $y'y: x=0$, $x'x: y=0$ και $(\varepsilon): 3x+2y-6=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{|a|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{|\beta|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|3\alpha+2\beta-6|}{\sqrt{3^2+2^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha|=|\beta| \\ |3\alpha+2\beta-6|=\sqrt{13}|\alpha| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = \pm\alpha \\ 3\alpha+2\beta-6 = \pm\alpha\sqrt{13} \end{cases} (\Sigma)$$

Οι λύσεις του (Σ) είναι η ένωση των λύσεων των συστημάτων:

$$\begin{cases} \beta = \alpha \\ 3\alpha+2\beta-6 = \alpha\sqrt{13} \end{cases} (\Sigma_1), \begin{cases} \beta = \alpha \\ 3\alpha+2\beta-6 = -\alpha\sqrt{13} \end{cases} (\Sigma_2), \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 3\alpha+2\beta-6 = \alpha\sqrt{13} \end{cases} (\Sigma_3), \\ \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 3\alpha+2\beta-6 = -\alpha\sqrt{13} \end{cases} (\Sigma_4). \text{ Λύνοντας τα συστήματα αυτά βρίσκουμε:}$$

$$\alpha) (\Sigma_1) \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{6}{5-\sqrt{13}} \text{ οπότε } K\left(\frac{6}{5-\sqrt{13}}, \frac{6}{5-\sqrt{13}}\right), R=|\alpha|=\frac{6}{5-\sqrt{13}}$$

$$\beta) (\Sigma_2) \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{6}{5+\sqrt{13}} \text{ οπότε } K\left(\frac{6}{5+\sqrt{13}}, \frac{6}{5+\sqrt{13}}\right), R=|\alpha|=\frac{6}{5+\sqrt{13}}$$

$$\gamma) (\Sigma_3) \Leftrightarrow \alpha = \frac{6}{1-\sqrt{13}}, \beta = \frac{6}{\sqrt{13}-1} \text{ οπότε } K\left(\frac{6}{1-\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}-1}\right), R=|\alpha|=\frac{6}{\sqrt{13}-1}$$

$$\delta) (\Sigma_4) \Leftrightarrow \alpha = \frac{6}{1+\sqrt{13}}, \beta = \frac{-6}{1+\sqrt{13}}, \text{ οπότε } K\left(\frac{6}{1+\sqrt{13}}, \frac{-6}{1+\sqrt{13}}\right), R=|\alpha|=\frac{6}{1+\sqrt{13}} \text{ οπότε}$$

εύκολα βρίσκουμε τις εξισώσεις των ζητούμενων κύκλων.

Εφαρμογή 29

Να βρεθεί η εξίσωση της περιφέρειας που διέρχεται από τα σημεία τομής των $(C_1): x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 6 = 0$ και το $A(2,0)$.

Λύση

Οι συντεταγμένες των σημείων τομής B, Γ των $(C_1), (C_2)$ είναι οι λύσεις του

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x - 6y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + y^2 + 4x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + 1 - 4x + 4x^2 + 4x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=1, y=-1) \\ (x=-1, y=3) \end{cases}$$

Άρα, τα σημεία τομής των $(C_1), (C_2)$ είναι τα $B(1, -1)$, $\Gamma(-1, 3)$. Αν $(C): x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι η περιφέρεια που διέρχεται από τα $A(2, 0)$, $B(1, -1)$, $\Gamma(-1, 3)$ έχουμε

$$\left. \begin{aligned} A(2,0) \in (C) &\Leftrightarrow 4+2A+\Gamma=0 \\ B(1,-1) \in (C) &\Leftrightarrow 2+A-B+\Gamma=0 \\ \Gamma(-1,3) \in (C) &\Leftrightarrow 10-A+4B+\Gamma=0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-2 \\ \Gamma=-4 \end{cases} \Leftrightarrow (C): x^2+y^2-2y-4=0.$$

Σημείωση

Οι άπειρες περιφέρειες που διέρχονται από τα σημεία τομής των (C_1) : $x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, (C_2) : $x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ αποτελούν **δέσμη**

περιφερειών με εξίσωση $\kappa(x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1)+\mu(x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2)=0$ με $|\kappa|+|\mu| \neq 0$ ή μονοπαραμετρικά

$$(x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1)+t(x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2)=0, t \neq -1.$$

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, η άσκηση λύνεται ως εξής: Η ζητούμενη περιφέρεια έχει εξίσωση της μορφής

$$(C): (x^2+y^2-8x-6y)+t(x^2+y^2+4x-6)=0 \text{ και αφού } A(2,0) \in (C)$$

$$\Leftrightarrow (2^2+0^2-8 \cdot 2-6 \cdot 0)+t(2^2+0^2+4 \cdot 2-6)=0 \Leftrightarrow 6t=12 \Leftrightarrow t=2 \text{ οπότε}$$

$$(C): (x^2+y^2-8x-6y)+2(x^2+y^2+4x-6)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y-4=0.$$

Εφαρμογή 30

Έστω οι περιφέρειες $(C): x^2+y^2-4\mu x-2\mu y+\frac{9\mu^2}{2}-\mu-\frac{1}{2}=0, \mu \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι όταν το μ μεταβάλλεται, εφάπτονται σε δυο σταθερές ευθείες.

Λύση

Οι περιφέρειες (C) έχουν κέντρα τα $K_\mu(2\mu, \mu)$ και αντίστοιχες ακτίνες

$$R_\mu = \frac{1}{2} \sqrt{(-4\mu)^2 + (-2\mu)^2 - 4 \left[\frac{9\mu^2}{2} - \mu - \frac{1}{2} \right]} = \frac{1}{2} \sqrt{2(\mu+1)^2} = \frac{|\mu+1|}{\sqrt{2}}.$$

Έστω ευθεία $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0, |A|+|B| \neq 0$. Η (ε) εφάπτεται στις περιφέρειες (C) αν και

$$\text{μόνο, για κάθε } \mu \in \mathbb{R} \text{ είναι } d(K_\mu, (\varepsilon))=R_\mu \Leftrightarrow \frac{|2\mu A + \mu B + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|\mu+1|}{\sqrt{2}} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2[\mu(2A+B)+\Gamma]^2 = (\mu+1)^2(A^2+B^2) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (7A^2+B^2+8AB)\mu^2 + 2[2\Gamma(2A+B)-A^2-B^2]\mu + (2\Gamma^2-A^2-B^2)=0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7A^2 + B^2 + 8AB = 0 \\ 2\Gamma(2A+B) - A^2 - B^2 = 0 \\ 2\Gamma^2 - A^2 - B^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (A+B)(7A+B) = 0 \\ 2\Gamma(2A+B) - A^2 - B^2 = 0 \\ 2\Gamma^2 - A^2 - B^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} B = -A \\ A\Gamma = A^2 \\ \Gamma^2 = A^2 \end{array} \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ \begin{array}{l} B = -7A \\ A\Gamma = -5A^2 \\ \Gamma^2 = 25A^2 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} B = -A \\ \Gamma = A \end{array} \right\} \Rightarrow (\varepsilon_1): Ax - Ay + A = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon_1): x - y + 1 = 0 \\ \text{ή} \\ \left\{ \begin{array}{l} B = -7A \\ \Gamma = -5A \end{array} \right\} \Rightarrow (\varepsilon_2): Ax - 7Ay - 5A = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon_2): x - 7y - 5 = 0 \end{array} \right\}$$

Το $A \neq 0$ γιατί, στην αντίθετη περίπτωση είναι και $B=0$, άτοπο από $|A| + |B| \neq 0$.

Εφαρμογή 31.

Κύκλος (C) εφάπτεται στους άξονες Ox, Oy στα A, B αντίστοιχα. Αν σημείο Γ του Ox φέρνουμε εφαπτόμενη ΓE του κύκλου και ονομάζουμε Δ την τομή της EA με τον άξονα $y'y$. Δείξτε ότι $\|\overline{O\Delta}\| = \|\overline{A\Gamma}\|$.

Λύση

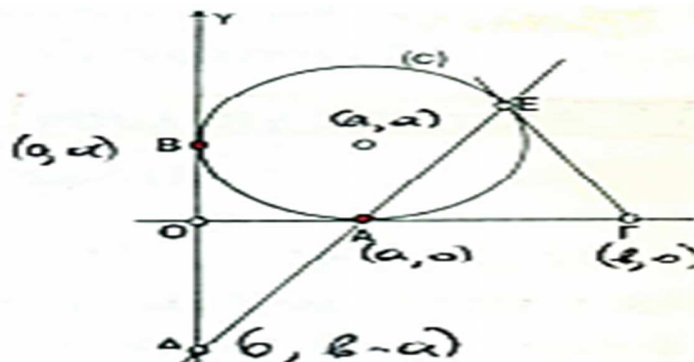
Αν $A(\alpha, 0)$ τότε $B(0, \alpha)$, $K(\alpha, \alpha)$, $R=\alpha$ και (C): $(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = \alpha^2$. Ας είναι $\Gamma(\beta, 0)$.

Τότε $\|\overline{A\Gamma}\| = |\overline{A\Gamma}| = |x_\Gamma - x_A| = |\beta - \alpha|$ (1). Η εξίσωση της AE είναι:

$$(x-\alpha)(\beta-\alpha) + (y-\alpha)(0-\alpha) = \alpha^2 \Leftrightarrow AE: (\beta-\alpha)x - \alpha y - \alpha(\beta-\alpha) = 0.$$

Επειδή το Δ είναι τομή της AE και του άξονα $y'y$ βρίσκουμε ότι $\Delta(0, -(\beta-\alpha))$ οπότε έχουμε $\|\overline{O\Delta}\| = |\overline{O\Delta}| = |y_\Delta| = |-(\beta-\alpha)| = |\beta-\alpha|$ (2).

Από (1), (2) έχουμε $\|\overline{O\Delta}\| = \|\overline{A\Gamma}\|$.



Εφαρμογή 32

Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και ευθεία (ε) που διέρχεται από το A και τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την $\Gamma\Delta$ στο Z . Αν M είναι το μέσο της BE , δείξτε ότι ZM εφάπτεται στην

εγγεγραμμένη περιφέρεια του τετραγώνου. Αν P είναι η τομή των ZM, ΔΕ. Δείξτε ότι το P κείται στην περιγεγραμμένη περιφέρεια του τετραγώνου.

Λύση

α) Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή A και $\vec{i} // \overrightarrow{AB}, \vec{j} // \overrightarrow{AD}$. Έστω ότι είναι B(2α, 0). Τότε Δ(0, 2α), Γ(2α, 2α), K(α, α), R=α από BΓ: x=2α, ΔΓ: y=2α.

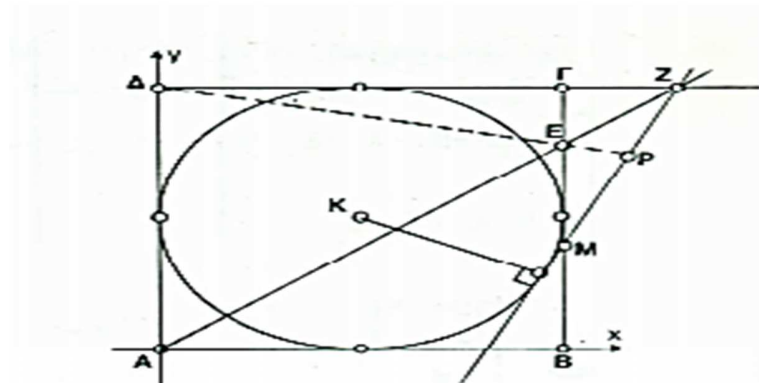
Αν (ε): y=λx τότε E(2α, 2αλ), $Z\left(\frac{2\alpha}{\lambda}, 2\alpha\right)$ και M(2α, αλ). Άρα ZM:

$\lambda(\lambda-2)x + 2(1-\lambda)y + 2\alpha\lambda = 0$. Παρατηρούμε ότι d(K, ZM)=

$$\frac{\alpha|\lambda^2 - 2\lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^2(\lambda-2)^2 + 4(1-\lambda)^2}} = \frac{\alpha|\lambda^2 - 2\lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4}} = \frac{\alpha\sqrt{(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2}}{\sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4}} = \alpha$$

οπότε πράγματι η ZM εφάπτεται στον κύκλο (C) αφού, η απόσταση του κέντρου του από την ZM είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

β) Για την ευθεία ΔΕ βρίσκουμε ΔΕ: $(\lambda-1)x - y + 2\alpha = 0$ οπότε, λύνοντας το σύστημα εξισώσεων των ZM, ΔΕ βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου P, δηλαδή $P\left(\frac{2(2-\lambda)\alpha}{\lambda^2 - 2\lambda + 2}, \frac{2\alpha\lambda}{\lambda^2 - 2\lambda + 2}\right)$. Τότε d(K, P)= $\alpha\sqrt{2}$ δηλαδή η απόσταση του P από το K είναι ίση με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου, δηλαδή το P είναι σημείο του περιγεγραμμένου στο τετράγωνο κύκλου.



Πόρισμα 1. Αν η περιφέρεια (K,R) έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$, τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης της στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ γίνεται $xx_0 + yy_0 = R^2$.

Πόρισμα 2. Αν η περιφέρεια c ορίζεται από την εξίσωση

$$c \rightarrow x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{(A^2 + B^2 - 4\Gamma)}{4} \quad \text{τότε} \quad \eta$$

εφαπτόμενη της c στο $P_0(x_0, y_0)$ ορίζεται από την εξίσωση

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)\left(x_0 + \frac{A}{2}\right) + \left(y + \frac{B}{2}\right)\left(y_0 + \frac{B}{2}\right) = \frac{(A^2 + B^2 - 4\Gamma)}{4} \Leftrightarrow$$

$$xx_0 + yy_0 + \frac{A}{2}(x + x_0) + \frac{B}{2}(y + y_0) + \Gamma = 0$$

Εφαρμογή 33

Δίνονται τρεις περιφέρειες c_1, c_2, c_3 . Να αποδειχθεί ότι οι τρεις ριζικοί άξονες τους διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Υποθέτουμε ότι οι τρεις περιφέρειες ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$c_1 \rightarrow x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \quad c_2 \rightarrow x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0,$$

$$c_3 \rightarrow x^2 + y^2 + A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0.$$

Οι εξισώσεις των ριζικών αξόνων τους είναι:

$$c_1 - c_2 \rightarrow (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

$$c_2 - c_3 \rightarrow (A_2 - A_3)x + (B_2 - B_3)y + \Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$$

$$c_3 - c_1 \rightarrow (A_3 - A_1)x + (B_3 - B_1)y + \Gamma_3 - \Gamma_1 = 0$$

Οι τρεις αυτές ευθείες περνούν από το ίδιο σημείο, γιατί έχουμε

$$\begin{vmatrix} A_1 - A_2 & B_1 - B_2 & \Gamma_1 - \Gamma_2 \\ A_2 - A_3 & B_2 - B_3 & \Gamma_2 - \Gamma_3 \\ A_3 - A_1 & B_3 - B_1 & \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Το σημείο αυτό ονομάζεται ριζικό κέντρο των c_1, c_2, c_3 .