



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων στην ιατρική



Σπουδαστής: Κόνδυλας Ιωάννης (ΑΜ 7808)

**Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής**

Ακαδημαϊκό έτος: 2021–2022

Ημερομηνία ανάθεσης: **18.06.2021**
Ημερομηνία κατάθεσης: **14.03. 2022**
Ημερομηνία εξέτασης: / **03.2022**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	4
1. Ανάπτυξη πληθυσμού βακτηρίων.....	4
2. Ρυθμός μεταβολής πληθυσμού	5
3. Μάζα κυττάρου	5
4. Συγκέντρωση μικροβίων.....	5
5. Ραδιενεργός διάσπαση	5
6. Ιονίζουσα ραδιοακτινοβολία.....	6
7. Ραδιενεργό ιώδιο ^{131}I	6
8. Χημική κινητική	6
9. Αντίδραση 1 ^{ης} τάξης στη χημική κινητική.....	7
10. Ενδοφλέβια ένεση γλυκόζης II	7
11. Χημική κινητική II.....	8
12. Ρυθμός μεταβολής πληθυσμού III	8
13. Νόμος ψύξης Newton	8
14. Νόμος του Fick	8
15. Ερεθισμός των νευρικών ινών	9
16. Μέσος ρυθμός μεταβολής πληθυσμού I	10
17. Εποχιακή μεταβολή πληθυσμού	10
18. Γεννήσεις και θάνατοι πληθυσμού	11
19. Παρασκευή διαλύματος φαρμάκου	11
20. Χημική Κινητική III.....	12
21. Όγκος διαλύματος φαρμάκου	12
22. Φαρμακοκινητική	13
23. Φορέας AIDS.....	13
24. Μέσος ρυθμός μεταβολής πληθυσμού II (αύξηση των καρκινικών κυττάρων)....	14
25. Μάθηση με τη μικρότερη προσπάθεια	15
26. Απόσταση διαλύματος από το σημείο κόρου	16
27. Αυτοκατάλυση στη χημική κινητική	17
28. Αντίδραση 3ης τάξης στη χημική κινητική	17
29. Αμφίδρομες και συντρέχουσες αντιδράσεις 1ης και 2ης τάξης στη χημική κινητική.....	19
30. Νομός αλλομετρίας.....	20
31. Διατροφή πρωτόζωων.....	20
32. Ανάπτυξη κυττάρου	20
33. Φαρμακοκινητική II.....	21
34. Αντιστροφή θερμοκρασίας	21
35. Ανάπτυξη παρασίτων.....	22

Εισαγωγή

Θα εξετάσουμε τον πληθυσμό των βακτηρίων, το πως μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου και ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του. Θα επισημανθεί η ραδιενεργός διάσπαση των ραδιενεργών πυρήνων και σε ποιο χρόνο θα υποδιπλασιαστούν και την ποσότητα ραδιενεργού ιωδίου που εισάγεται στο αίμα ενός ατόμου μέσω ένεσης και ποιο μέρος του ιωδίου αποβάλλεται με τα ούρα. Θα αναλυθεί ποιες μελέτες γίνονται στη χημική κινητική και ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης, μίας χημικής ουσίας που συμμετέχει σε μια χημική αντίδραση και ποιο μέρος της χημικής ουσίας συγχρόνως καταναλώνεται. Θα αναφέρουμε το ρυθμό μεταβολής των γεννήσεων και των θανάτων σε έναν πληθυσμό και τότε τείνει να σταθεροποιηθεί, την εποχιακή μεταβολή του και τους λόγους που μπορεί να συμβαίνει αυτό.

Βάση θα δοθεί στο νόμο ψύξης του Newton όσον αφορά τη θερμοκρασία ενός σώματος, το νόμο του Fick που εξηγεί την εισαγωγή του κυττάρου σε ένα διάλυμα με σταθερή συγκέντρωση C_0 , θα δούμε την παρασκευή διαλύματος φαρμάκου διαφορετικής συγκέντρωσης και την ανάμιξη του διαλύτη σε ένα άλλο διάλυμα και την ποσότητα φαρμάκου που χορηγείται σε έναν ασθενή και ποιο μέρος αυτού απορροφάτε από το σώμα, ενώ συγχρόνως ένα άλλο μέρος αποβάλλεται.

Τέλος, ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί σε έναν πληθυσμό τοξικομανών ή ατόμων όπου εισέρχεται ένας φορέας AIDS, αφού όσο περισσότερα άτομα είναι μολυσμένα τόσο συχνότερες θα είναι οι επαφές.

1. Ανάπτυξη πληθυσμού βακτηρίων

Ένας πληθυσμός βακτηρίων y μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t , δηλαδή είναι $y=x(t)$. Είναι λογικό να υποθέσουμε και επαληθεύεται πειραματικά ότι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι ανάλογος του πληθυσμού.

Να βρεθεί ο πληθυσμός $y=x(t)$, αν γνωρίζουμε ότι στην αρχή ήταν 1000 βακτήρια. Αν ο συντελεστής αναλογίας είναι 0,1 ποιος θα είναι ο πληθυσμός μετά από 10 ώρες; Ο ρυθμός μεταβολής είναι $\frac{dx(t)}{dt}$ και από τα δεδομένα έχουμε ότι $\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(t)$.

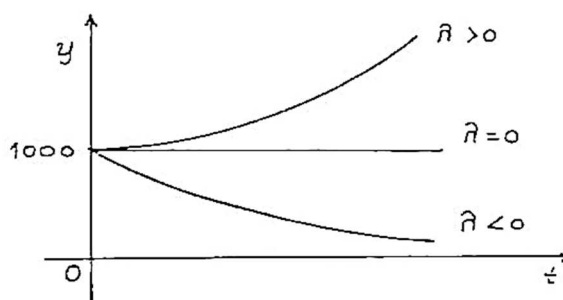
Η $y=x(t)$ είναι η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. 1^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές: $y' - \lambda y = 0$. Άρα $x(t) = ce^{\lambda t}$. Επειδή στην αρχή, δηλαδή για $t=0$, έχουμε $x(0)=1000 \Rightarrow x(0)=ce^0=c=1000$. Έτσι είναι $x(t)=1000e^{\lambda t}$.

- Αν $\lambda > 0$, τότε $x'(t)=1000\lambda e^{\lambda t} > 0$ και η $y=x(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση, δηλαδή ο πληθυσμός αυξάνει. Στην περίπτωση αυτή έχουμε έναν κύκλο επανατροφοδότησης όπως λέμε (feedback). Έχουμε ακόμα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\lambda=0$, τότε $x(t)=1000$ και $y=x(t)$ είναι σταθερή συνάρτηση δηλαδή ο πληθυσμός μένει σταθερά ίσος με τον αρχικό.

- Αν $\lambda < 0$, τότε είναι $x'(t) < 0$ και η $y=x(t)$ είναι φθίνουσα, δηλαδή ο πληθυσμός ελαττώνεται (και τείνει στο μηδέν).

- Για $\lambda=0,1$ έχουμε $x(t)=1000e^{\frac{t}{10}}$. Οπότε για $t=10$
 $\Rightarrow x(10)=1000e \cong 2718$
βακτήρια.



2. Ρυθμός μεταβολής πληθυσμού

Ο ρυθμός μεταβολής ενός πληθυσμού $y = x(t)$ είναι η διαφορά του ρυθμού μεταβολής των γεννήσεων $y(t)$ και του ρυθμού μεταβολής των θανάτων $\theta(t)$. Αν οι ρυθμοί μεταβολής των γεννήσεων και των θανάτων είναι ανάλογοι του πληθυσμού $x(t)$, τότε να βρεθεί ο πληθυσμός. Για το ρυθμό μεταβολής έχουμε $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt}$. Επειδή είναι $\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta x(t)$, έχουμε $\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - \beta(t) = (\alpha - \beta)x(t)$.

Αυτή είναι μια γραμμική ομογενής Δ.Ε. 1^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές οπότε η γενική της λύση είναι $x(t) = ce^{(\alpha-\beta)t}$.

3. Μάζα κυττάρου

Η αρχική μάζα ενός κυττάρου είναι m_0 και μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου, δηλαδή είναι $m = \mu(t)$, χωρίς να μπορεί να υπερβεί την τιμή M . Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας του κυττάρου (ταχύτητα μεταβολισμού) είναι ανάλογος της μάζας του κυττάρου. Να βρεθεί σε πόσο χρόνο θα έχουμε $\mu(t) = M$.

Έχουμε ότι: $\frac{d\mu(t)}{dt} = \alpha \mu(t)$. Άρα, η $\mu(t)$ είναι η γενική λύση αυτής της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Δηλαδή είναι $\mu(t) = ce^{\alpha t} = m_0 e^{\alpha t}$, επειδή $\mu(0) = m_0$ έπεται ότι $c = m_0$. Για να έχουμε $\mu(t) = M$ πρέπει $M = m_0 e^{\alpha t}$, ή $\frac{M}{m_0} = e^{\alpha t}$. Λογαριθμίζοντας έχουμε $\ln \frac{M}{m_0} = \ln(e^{\alpha t}) = \alpha t \ln e = \alpha t$. Άρα, $t = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{M}{m_0}$ είναι ο ζητούμενος χρόνος.

4. Συγκέντρωση μικροβίων

Η συγκέντρωση μικροβίων τη χρονική στιγμή t είναι $c(t)$, με $c(0) = c_0$. Αν με τη χρήση ενός αποστειρωτικού μέσου, ο ρυθμός με τον οποίο φθίνει η $c(t)$ είναι ανάλογος της $c(t)$, να βρεθεί ο χρόνος υποδιπλασιασμού της $c(t)$ και το όριο της $c(t)$ για $t \rightarrow \infty$. Αφού η $c(t)$ φθίνει με ρυθμό ανάλογο προς $c(t)$, έχουμε ομογενή γραμμική Δ.Ε. 1^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές $\frac{dc(t)}{dt} = \lambda c(t)$, με $\lambda > 0$.

Άρα, $c(t) = ke^{-\lambda t}$ και επειδή $c(0) = c_0 = k$, είναι $c(t) = c_0 e^{-\lambda t}$. Αν τη χρονική στιγμή t , η συγκέντρωση έχει υποδιπλασιαστεί δηλαδή έχει γίνει το $1/2$ της αρχικής, έχουμε ότι $c(t_1) = \frac{1}{2} c_0$, δηλαδή $c_0 e^{-\lambda t_1} = \frac{1}{2} c_0$, ή $e^{-\lambda t_1} = \frac{1}{2}$ και λογαριθμίζοντας παίρνουμε: $-\lambda t_1 \ln e = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$, δηλαδή $\lambda t_1 = \ln 2$, οπότε $t_1 = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Από $c(t) = c_0 e^{-\lambda t}$, έχουμε $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_0 e^{-\lambda t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_0}{e^{-\lambda t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} c_0 * \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\lambda t}} = c_0 * 0 = 0$. Δηλαδή, η συγκέντρωση τείνει να μηδενισθεί.

5. Ραδιενεργός διάσπαση

Σε μία ραδιενεργό μετατροπή ραδιενεργού ουσίας A , ο μέσος ρυθμός διάσπασης του αριθμού ραδιενεργών πυρήνων $n(t)$ της A , είναι σταθερός. Να βρεθεί ο $n(t)$ και ο χρόνος υποδιπλασιασμού του. Αν γνωρίζουμε από εργαστηριακές μετρήσεις το χρόνο υποδιπλασιασμού της συνάρτησης $n(t)$ για την A , να βρεθεί η ηλικία ενός σώματος που περιέχει την A και έχει αποβάλει τα 90% του n_0 της A .

Επειδή πρόκειται για ελάττωση του αριθμού των ραδιενεργών πυρήνων, η συνάρτηση $n(t)$ είναι φθίνουσα άρα, ο ρυθμός μεταβολής της θα είναι αρνητικός. Τότε, για το μέσο ρυθμό μεταβολής της έχουμε: $\frac{dn(t)}{dt} = -\lambda$, $\lambda > 0$ και $\frac{dn(t)}{dt} = \lambda n(t)$,

που είναι γραμμική ομογενής Δ.Ε. 1^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές. Άρα, $n(t) = ce^{-\lambda t}$, με $n(0) = n_0 = c$, δηλαδή $n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$. Για το χρόνο υποδιπλασιασμού t_1 , έχουμε

$n(t_1) = \frac{1}{2} n$, οπότε $n_0 e^{-\lambda t_1} = \frac{1}{2} n_0$, ή $e^{-\lambda t_1} = \frac{1}{2}$. Λογαριθμίζοντας παίρνουμε $t_1 = \frac{\ln 1}{\lambda}$. Αν είναι γνωστός ο χρόνος υποδιπλασιασμού t_1 , από την τελευταία σχέση υπολογίζουμε ότι $\lambda = \frac{\ln 2}{t_1}$, οπότε έχουμε $n_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_1} t}$.

Επειδή το σώμα που περιέχει την Α, έχουν απομείνει $n(t) = \frac{n_0}{10}$ ραδιενεργοί πυρήνες της Α, έχουμε: $\frac{n_0}{10} = n_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_1} t}$, ή $\frac{1}{10} = e^{-\frac{\ln 2}{t_1} t}$. Λογαριθμίζοντας βρίσκουμε $-\ln 10 = \frac{\ln 2}{t_1} \cdot t$, λύνοντας $t = \frac{t_1 \ln 10}{\ln 2}$ που είναι η ζητούμενη ηλικία του σώματος.

6. Ιονίζουσα ραδιοακτινοβολία

Ζώντες ιστοί εκτεθειμένοι σε ιονίζουσα ακτινοβολία υφίστανται καταστροφή των μορίων τους. Αν καλέσουμε δ τη ραδιενεργό δόση κατά μια συνεδρία, δηλαδή τον αριθμό των ιονιζόντων σωματίων που διαπερνούν τη μονάδα επιφάνειας του στόχου και n τον αριθμό των μορίων του ιστού που δεν έχουν καταστραφεί, τότε το n είναι συνάρτηση του δ , $n=n(\delta)$ και ο ρυθμός μεταβολής της $n(\delta)$ είναι ανάλογος του $n(\delta)$. Να βρεθεί η $n(\delta)$.

Η συνάρτηση $n(\delta)$ είναι φθίνουσα αφού τα μόρια του ιστού καταστρέφονται. Τότε έχουμε $\frac{dn(\delta)}{d\delta} = -\lambda n(\delta)$, $\lambda > 0$. Η γενική λύση της γραμμικής αυτής ομογενούς Δ.Ε.1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι $n(\delta) = ce^{-\lambda \delta}$.

7. Ραδιενεργό ιώδιο ^{131}I

Έστω $Q(t)$ η ποσότητα ραδιενεργού ιωδίου ^{131}I , που εισάγεται στο αίμα ενός ατόμου με ένεση, κατά τη χρονική στιγμή t . Μέσος όρος $Q_1(t)$ του ιωδίου αποβάλλεται με τα ούρα, ένα άλλο $Q_2(t)$ εισέρχεται στο θυρεοειδή και ένα άλλο $Q_3(t)$ διασπάται ραδιενεργά. Οι ρυθμοί μεταβολής $\frac{dQ_i(t)}{dt} = i$, $i = 1, 2, 3$ είναι ανάλογοι της $Q(t)$. Να βρεθεί η $Q(t)$. Η συνάρτηση $Q(t)$ είναι φθίνουσα και ο ρυθμός μεταβολής της είναι

$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{dQ_1(t)}{dt} = \frac{dQ_2(t)}{dt} = \frac{dQ_3(t)}{dt}$, Όπου $\frac{dQ_1(t)}{dt} = \lambda_1 Q(t)$, με $\lambda_1 > 0$, $i = 1, 2, 3$. Άρα $\frac{dQ(t)}{dt} = \lambda_1 Q(t) - \lambda_2 Q(t) - \lambda_3 Q(t)$, ή $\frac{dQ(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) Q(t)$, η οποία είναι ομογενής γραμμική Δ.Ε.1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές έτσι:

Επειδή η $Q(t)$ διοχετεύεται σε τρία «διαμερίσματα» και η μελέτη της γίνεται μέσω της μελέτης των επιμέρους «διαμερισμάτων» αυτών, λέμε ότι έχουμε μία μέθοδο μελέτης με ανάλυση κατά διαμερίσματα. Η μέθοδος μελέτης με ανάλυση κατά διαμερίσματα είναι συνηθισμένη μέθοδος της βιοφυσικής και άλλων επιστημών.

8. Χημική κινητική

Στη χημική κινητική μελετάμε και το ρυθμό μεταβολής της συγκέντρωσης μιας χημικής ουσίας που συμμετέχει σε χημική αντίδραση (γιατί μας πληροφορεί για την ταχύτητα της χημικής αντίδρασης). Αν η συγκέντρωση $c(t)$ είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου t και ο ρυθμός μεταβολής της είναι ανάλογος της $c(t)$, να βρεθεί η $c(t)$, αν υποθέσουμε ότι η χημική ουσία που συμμετέχει σε κάποια συγκεκριμένη χημική αντίδραση, μετατρέπεται σε άλλες και αν η αρχική συγκέντρωση είναι c_0 . Πότε έχει μετατραπεί το 90% της c_0 ;

Η $c(t)$ τότε είναι, φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Άρα έχουμε την ομογένεια δυναμική Δ.Ε. 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές: $\frac{dc(t)}{dt} = -\lambda c(t)$, $\lambda > 0$.

Η γενική λύση της Δ.Ε. αυτής είναι $c(t) = ke^{-\lambda t}$. Επειδή $c(0)=c_0=k$ έχουμε ότι $c(t)=c_0e^{-\lambda t}$. Τη χρονική στιγμή t_1 που έχει μετατραπεί το 90% της αρχικής συγκέντρωσης, η $c(t_1)$ που απομένει θα είναι ίση με το 10% της c_0 , άρα $c(t_1) = c_0e^{-\lambda t_1} = \frac{c_0}{10}$, ή $e^{-\lambda t_1} = \frac{1}{10}$ και λογαριθμίζοντας: $t_1 = \frac{\ln 10}{\lambda}$.

9. Αντίδραση 1ης τάξης στη χημική κινητική

Έστω ότι σε χημική αντίδραση η ουσία Α μετατρέπεται στο προϊόν Ρ και ότι οι αρχικές συγκεντρώσεις των Α και Ρ είναι α και 0 αντίστοιχα. Αν ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης $x=c(t)$ του Ρ είναι ανάλογος προς τη συγκέντρωση της Α κατά τη χρονική στιγμή t (αντίδραση 1ης τάξης), να βρεθεί η $c(t)$ και ο χρόνος υποδιπλασιασμού της Α. Η συγκέντρωση της Α κατά τη χρονική στιγμή t είναι $\alpha-c(t)$.

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της επαληθεύει τη Δ.Ε. $\frac{dx}{dt}=\lambda(\alpha-x)$,
(1) ή $\frac{dx}{dt} = \lambda x = \lambda \alpha$, (2) η οποία είναι γραμμική μη ομογενής 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και της οποίας τη γενική λύση μπορούμε να βρούμε χωρίζοντας τις μεταβλητές στην (1) $\frac{dx}{\alpha-x} = \lambda dt$, ή ακόμη $\frac{d(x-\alpha)}{\alpha-x} = \lambda dt$.

Ολοκληρώνοντας και αφού $\alpha > x$ έχουμε: $\ln(\alpha-x) = \lambda t + k$ οπότε $\alpha-x = e^k * e^{-\lambda t} = k'e^{-\lambda t}$ ή τέλος $x = c(t) = \alpha - k'e^{-\lambda t}$. Επειδή $c(0)=0$ έπεται $k'=\alpha$ και άρα $c(t) = \alpha(1-e^{-\lambda t})$.

Για το χρόνο υποδιπλασιασμού της Α, έχουμε ότι τη χρονική στιγμή t_1 που θα συμβεί αυτό, η συγκέντρωση $\alpha-x$ της Α θα είναι ίση με το 1/2 της αρχικής της, δηλαδή $\alpha-x = \alpha/2$. Έτσι $\alpha-c(t_1) = \alpha e^{-\lambda t_1} = \frac{\alpha}{2}$, ή $e^{-\lambda t_1} = \frac{1}{2}$ λογαριθμίζοντας βρίσκουμε ότι $t_1 = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Παρατήρηση. Έστω ότι μεταλλαγές μεταξύ των αλληλόμορφων γονιδίων Α και α μπορούν να συμβούν και προς τις δύο κατευθύνσεις με συχνότητα μ και ν . Αν τα Α και α εμφανίζονται με αναλογίες $p(t)$ και $q(t)=1-p(t)$ σε έναν πληθυσμό αντίστοιχα, τότε καταλήγουμε στη Δ.Ε. $p'(t)=-\mu p(t)+\nu q(t)=-\mu p(t)+\nu(1-p(t))=\nu-(\mu+\nu)p(t)$, που είναι της παραπάνω μορφής και μελετάται στη γενετική.

10. Ενδοφλέβια ένεση γλυκόζης II

Στο αίμα ασθενούς εισάγεται με ένεση γλυκόζη. Συγχρόνως, μέρος της γλυκόζης μετατρέπόμενο, αποβάλλεται. Αν ο ρυθμός με τον οποίο εισάγεται η γλυκόζη είναι σταθερός και ίσος με c gr/min ο δε ρυθμός με τον οποίο αποβάλλεται γλυκόζη, είναι ανάλογος προς την ποσότητα $G(t)$ γλυκόζης που υπάρχει στο αίμα σε κάθε χρονική στιγμή t , να βρεθεί η $G(t)$, αν $G=0$. Που τείνει να σταθεροποιηθεί η $G(t)$ με την πάροδο του χρόνου; Ποιος ο χρόνος υποδιπλασιασμού;

Ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας $G(t)$, είναι η διαφορά όταν ρυθμών εισαγωγής και αποβολής γλυκόζης. Δηλαδή $\frac{dG(t)}{dt} = c - \alpha G(t)$, $\alpha > 0$, που είναι μη ομογενής γραμμική Δ.Ε. 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Από τον τύπο που δίνει το γενικό ολοκλήρωμα Δ.Ε. αυτής έχουμε $G(t) = ke^{-\alpha t} + \frac{c}{\alpha}$. Επειδή $G(0) = G_0 = K + \frac{c}{\alpha} \Rightarrow K + \frac{c}{\alpha} \Rightarrow K = G_0 - \frac{c}{\alpha}$, οπότε $G(t) = \left(G_0 - \frac{c}{\alpha}\right)e^{-\alpha t} + \frac{c}{\alpha} = G_0e^{-\alpha t} + \frac{c}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$. Έχουμε $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c}{\alpha} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(G_0 - \frac{c}{\alpha}\right)e^{-\alpha t} = \frac{c}{\alpha} + \left(G_0 - \frac{c}{\alpha}\right) * \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\alpha t}} = \frac{c}{\alpha} + \left(G_0 - \frac{c}{\alpha}\right) * 0 = \frac{c}{\alpha}$.

Αν t_1 είναι ο χρόνος υποδιπλασιασμού, τότε $\frac{G_0}{2} = G(t_1) = \left(G_0 - \frac{c}{a}\right)e^{-at_1} + \frac{c}{a}$, ή ακόμη $e^{-at_1} = \frac{aG_0 - 2c}{2(aG_0 - c)}$. Λογαριθμίζοντας έχουμε $-at_1 = \ln \frac{aG_0 - 2c}{2(aG_0 - c)}$, οπότε $t_1 = -\frac{1}{a} \ln \frac{aG_0 - 2c}{2(aG_0 - c)}$.

Παρατήρηση: Ο χρόνος υποδιπλασιασμού εξαρτάται από την αρχική ποσότητα G_0 . Γνωρίζοντας το χρόνο υποδιπλασιασμού της αρχικής ποσότητας Φ_0 γενικά ενός φαρμάκου, σε υγιή άτομα μπορούμε χορηγώντας την ίδια Φ_0 σε ένα άτομο και βρίσκοντας το χρόνο υποδιπλασιασμού της στο άτομο αυτό, να ελέγξουμε αν η κατάστασή του είναι φυσιολογική π.χ. κακή λειτουργία των νεφρών συνοδεύεται από αυξημένο χρόνο υποδιπλασιασμού.

11. Χημική κινητική II

Κατά τη διάρκεια μίας χημικής αντίδρασης, παράγεται μία χημική ουσία μέρος της οποίας, συγχρόνως καταναλώνεται. Αν ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται η χημική ουσία είναι σταθερός και ίσος με r moles/min, ενώ ο ρυθμός με τον οποίο καταναλώνεται είναι ανάλογος προς τον αριθμό $m = \mu(t)$ των moles της ουσίας που υπάρχουν σε κάθε χρονική στιγμή t να βρεθεί η $\mu(t)$.

Ο ρυθμός μεταβολής $\frac{d\mu(t)}{dt}$ επαληθεύει τη μη ομογενή γραμμική Δ.Ε. 1^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές $\frac{d\mu(t)}{dt} = r - a\mu(t)$, $a > 0$, για την οποία $\mu(t) = ce^{-at} + \frac{r}{a}$.

12. Ρυθμός μεταβολής πληθυσμού III

Αν ο ρυθμός μεταβολής των γεννήσεων και των θανάτων σε έναν πληθυσμό είναι ανάλογος του πληθυσμού $x(t)$ και επιπλέον στον πληθυσμό εισέρχονται και νέα άτομα, λόγω μετανάστευσης σε σταθερό αριθμό c ανά μονάδα χρόνου, να βρεθεί ο πληθυσμός $x(t)$, αν $x(0) = x_0$. Πότε τείνει να σταθεροποιηθεί ο πληθυσμός; Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού πρέπει να ικανοποιεί τη Δ. Ε. $\frac{dx(t)}{dt} = (a - \beta)x(t) + c$, όπου $a > 0$ και $\beta > 0$ συντελεστής αναλογίας για το ρυθμό μεταβολής γεννήσεων και θανάτων αντίστοιχα. Η Δ.Ε. είναι μη ομογενής γραμμική 1^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές έτσι βρίσκουμε: $x(t) = ke^{(a-\beta)t} - \frac{c}{a-\beta}$.

Επειδή $x(0) = x_0$, έχουμε $k - \frac{c}{a-\beta} = x_0$, δηλαδή $k = x_0 + \frac{c}{a-\beta}$.

Άρα $x(t) = \left(x_0 + \frac{c}{a-\beta}\right)e^{-(a-\beta)t} - \frac{c}{a-\beta} = x_0 e^{-(a-\beta)t} + \frac{c}{a-\beta} (e^{-(a-\beta)t} - 1)$. Εξάλλου, αν $\beta > a$, τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{c}{a-\beta}$. Αν $\beta \leq a$, τότε ο πληθυσμός αυξάνεται απεριόριστα.

13. Νόμος ψύξης Newton

Έστω $\theta(t)$ η θερμοκρασία ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου και θ_π η θερμοκρασία του περιβάλλοντος, για την οποία μπορούμε να υποθέσουμε ότι παραμένει σταθερή. Αν κατά τη χρονική στιγμή t είναι $\theta(t) - \theta_\pi$ με την πάροδο του χρόνου το σώμα ψύχεται με ρυθμό ανάλογο προς τη διαφορά $\theta(t) - \theta_\pi$. Αν $\theta(0) = \theta_0$ να βρεθεί η $\theta(t)$. Η συνάρτηση $\theta(t)$ είναι φθίνουσα και έχουμε $\frac{d\theta(t)}{dt} = -\lambda(\theta(t) - \theta_\pi)$ (Νόμος ψύξης του Newton). Η γραμμική Δ.Ε. είναι ομογενής με σταθερούς συντελεστές 1^{ης} τάξης. Άρα, $\theta(t) = \theta_\pi + ke^{-\lambda t} \Rightarrow \theta(0) = \theta_\pi + ke^0 \Rightarrow \theta_0 = \theta_\pi + k \Rightarrow \theta_0 - \theta_\pi = k$. Επειδή $\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow k = \theta_0 - \theta_\pi$. Οπότε $\theta(t) = \theta_\pi + (\theta_0 - \theta_\pi)e^{-\lambda t} = \theta_0 e^{-\lambda t} + \theta_\pi(1 - e^{-\lambda t})$.

14. Νόμος του Fick

Κύτταρο σταθερού όγκου V και με κυτταρική μεμβράνη ολικής επιφάνειας E , εισάγεται σε διάλυμα που έχει σταθερή συγκέντρωση C_0 (ως προς χρόνο και χώρο).

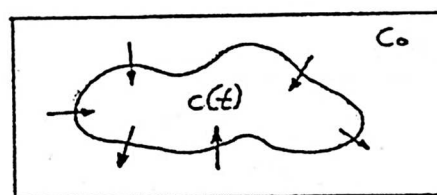
Αν η συγκεκριμένη $c(t)$ του διαλύματος μέσα στο κύτταρο, εξαρτάται μόνο από το χρόνο και όχι και από το χώρο, τότε ο νόμος του Fick λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής (λόγω διάχυσης) της μάζας $m(t)$ του διαλύματος μέσα στο κύτταρο, είναι ανάλογος προς την επιφάνεια E και προς τη διαφορά, $c_0 - c(t)$. Να βρεθεί η $c(t)$, αν είναι γνωστή η $c(0)$, καθώς και που τείνει να σταθεροποιηθεί όταν $c_0 - c(0) > 0$.

Ο νόμος του Fick οδηγεί στη Δ. Ε. $\frac{dM(t)}{dt} = \lambda E (c_0 - c(t))$ (1).

Επειδή εξ ορισμού $c(t) = \frac{M(t)}{V}$, παραγωγίζοντας έχουμε $\frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{V} \frac{dM(t)}{dt}$ και αντικαθιστώντας τη Δ.Ε. (1) παίρνουμε τη Δ.Ε. $\frac{dc(t)}{dt} = \frac{\lambda E}{V} (c_0 - c(t))$, η οποία είναι 1ης τάξης γραμμική μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές. Έτσι βρίσκουμε

$c(t) = k e^{-\frac{\lambda E}{V} t} + c_0$. (2) Γνωρίζοντας τη $c(0)$, έχουμε $a_0 = \pi_0$ τη (2): $c_0 = K + c_0$, δηλαδή $k = c(0) - c_0$, οπότε η (2) γίνεται: $c(t) = (c(0) - c_0) e^{-\frac{\lambda E}{V} t} + c_0$ (3)

Αν $c_0 - c(0) > 0$ από την (3) $\Rightarrow$ και $c_0 - c(t) > 0$, αφού η συνάρτηση e^x είναι πάντα θετικοί. Για $c_0 - c(0) > 0$, μεγαλύτερος αριθμός μορίων διαλύματος εισέρχεται στο κύτταρο, από ότι εξέρχεται και η μάζα $m(t)$ αυξάνει, δηλαδή στην (1) το λ είναι θετικό (οπότε και η $c(t)$ είναι αύξουσα) τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c_0$



15. Ερεθισμός των νευρικών ινών

Μία νευρική ίνα που υφίσταται ερεθισμό, μπορεί να παρομοιαστεί με αγωγό που τον διαρρέει ηλεκτρικό ρεύμα: στο πρωτόπλασμα των κυττάρων της ίνας υπάρχουν ιόντα (ανιόντα με αρνητικό φορτίο και κατιόντα με θετικό φορτίο), που όταν διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα κινούνται, τα μεν κατιόντα προς την κάθοδο, τα δε ανιόντα προς την άνοδο και έτσι διαταράσσεται η ισορροπία οπότε έχουμε ερεθισμό της ίνας. Ο ακριβής μηχανισμός δεν είναι γνωστός. Από την παρατήρηση ότι ο ερεθισμός πηγάζει από την κάθοδο, ο N. Rashevsky διατυπώνει μία θεωρία, κατά την οποία υποθέτει την ύπαρξη δύο ειδών κατιόντων που συμμετέχουν στον ερεθισμό, εκείνα που τον προκαλούν και εκείνα που τον αποτρέπουν.

Αν καλέσουμε $\varepsilon(t)$ και $\alpha(t)$ τις συγκεντρώσεις των ερεθιστικών αποτρεπτικών κατιόντων, τότε ερεθισμός υπάρχει αν ο λόγος $\frac{\varepsilon(t)}{\alpha(t)} \geq c$ (=σταθερά), ενώ αν $\frac{\varepsilon(t)}{\alpha(t)} < c$ δεν υπάρχει ερεθισμός. Αν η ένταση I του ρεύματος θεωρηθεί σταθερή και ότι (κατά τη θεωρία του Rashevsky) οι ρυθμοί μεταβολής των συγκεντρώσεων $\varepsilon(t)$ και $\alpha(t)$ πληρούν τις Δ. Ε. $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = kI - k'(\varepsilon(t) - \varepsilon_0)$ και $\frac{d\alpha(t)}{dt} = \lambda I - \lambda'(\alpha(t) - \alpha_0)$, όπου $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, $\alpha(0) = \alpha_0$, $k, k', \lambda, \lambda' > 0$ σταθερές να βρεθεί ο λόγος $\frac{\varepsilon(t)}{\alpha(t)}$.

Καθεμία από τις Δ.Ε. είναι γραμμική μη ομογενής 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές Έτσι: $\varepsilon(t) = A e^{-k't} + \frac{k}{k'} I + \varepsilon_0$ και $\alpha(t) = B e^{-\lambda't} + \frac{\lambda}{\lambda'} I + \alpha_0$ αντίστοιχα.

Επειδή $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ και $\alpha(0) = \alpha_0 \Rightarrow A = \frac{k}{k'} I$ και $B = \frac{\lambda}{\lambda'} I$

$$\varepsilon(t) = \frac{k}{k'} I (1 - e^{-k't}) + \varepsilon_0 \text{ και}$$

$$\alpha(t) = \frac{\lambda}{\lambda'} I (1 - e^{-\lambda't}) + \alpha_0 \text{ αντίστοιχα.}$$

Διαιρώντας κατά μέλη, έχουμε το ζητούμενο λόγο. (Αν $\varepsilon_0 = \alpha_0 = 0$ έχουμε

$$\frac{\varepsilon(t)}{\alpha(t)} = \frac{\kappa\lambda'(1-e^{-\kappa' \lambda})}{\kappa'\lambda(1-e^{-\lambda' t})}, \text{ δηλαδή ο λόγος αυτός είναι ανεξάρτητος του ρεύματος I).}$$

16. Μέσος ρυθμός μεταβολής πληθυσμού I

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής ενός πληθυσμού βακτηρίων είναι $\frac{1}{1+2t}$, t ώρες. Αν ο αρχικός πληθυσμός είναι $x(0)=1000$, ποιος είναι ο πληθυσμός μετά από 4 ώρες και μετά από 12 ώρες; Για τον πληθυσμό $x(t)$ θα έχουμε ότι

$$\frac{dx(t)/dt}{x(t)} = \frac{1}{1+2t}, \text{ ή } \frac{dx(t)}{dt} - \frac{1}{1+2t} x(t) = 0,$$

που είναι μία πρώτης τάξης ομογενής γραμμική Δ.Ε. μεταβλητούς συντελεστές. Έτσι βρίσκουμε:

$$x(t) = ce^{\int \frac{dt}{1+2t}}. \text{ Αλλά } \int \frac{dt}{1+2t} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2t)}{1+2t} = \frac{1}{2} \ln(1+2t).$$

$$x(t) = ce^{\frac{1}{2} \ln(1+2t)} = ce^{\ln(1+2t)^{1/2}} = c(1+2t)^{1/2}.$$

Άρα,

Επειδή $x(0)=1000=c$, θα είναι $x(t)=1000(1+2t)^{1/2}$.

Για $t=4$ ώρες $x(4)=1000(1+8)^{1/2}=1000 \cdot 3 = 3.000$ βακτήρια.

Για $t=12$ ώρες $x(12)=1000(1+24)^{1/2}=1000 \cdot 5 = 5.000$ βακτήρια.

17. Εποχιακή μεταβολή πληθυσμού

Οι Δ.Ε. $\frac{dx(t)}{dt} = kx(t)$ συντ, $k>0$ σταθερά, μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει (είναι υπόδειγμα - μοντέλο) την εποχική μεταβολή ενός πληθυσμού επειδή ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού $x(t)$: γίνεται θετικός και αρνητικός καθώς το t μεταβάλλεται, έπειτα ότι ο πληθυσμός αυξάνεται και ελαττώνεται, εναλλάξ. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί λόγω εποχιακών παραγόντων, όπως η δυσκολία στην ανεύρεση τροφής. Να λυθεί η Δ.Ε. και να μελετηθεί η λύση της.

Η Δ.Ε. είναι ομογενής γραμμική 1^{ης} τάξης με μεταβλητούς συντελεστές. Έχουμε $x(t) = ce^{k \int \sin t dt} = ce^{k \eta \mu t}$. Επειδή $x(0)=c$, έχουμε $x(t) = x(0) e^{k \eta \mu t}$.

• Όταν $\eta \mu t = 1 \Rightarrow x(t) = x(0)e^k$, που είναι και ο μέγιστος πληθυσμός.

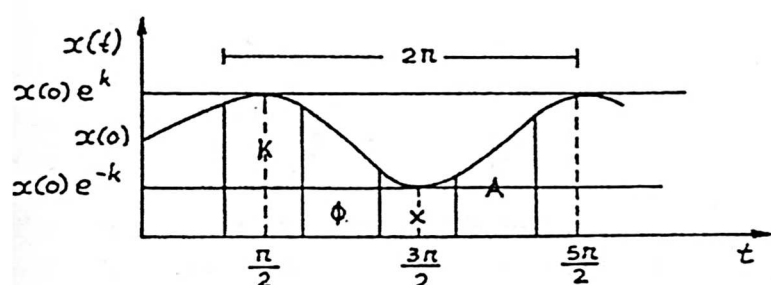
• Όταν $\eta \mu t = -1 \Rightarrow x(t) = x(0)e^{-k}$, που είναι και ο ελάχιστος πληθυσμός.

Ο πληθυσμός γίνεται max για $t = \frac{\pi}{2} + 2\lambda\pi$, $\lambda=0,1,2,\dots$

Ο πληθυσμός γίνεται min για $t = \frac{3\pi}{2} + (2\lambda+1)\pi$, $\lambda=0,1,2,\dots$ (1)

Τα παρακάτω επαληθεύονται αν αντικαταστήσουμε τις ρίζες (1) της $x'(t)=x(0) \cdot k \cdot e^{k \eta \mu t}$ συντ, στη $x''(t)=x(0) k e^{k \eta \mu t} (k \sin^2 t - \eta \mu t)$.

Η περίοδος 2π μπορεί να θεωρηθεί ως η ετήσια διάρκεια. Το max, μέσα στο έτος μπορούμε να υποθέσουμε ότι παρουσιάζεται στο μέσο του καλοκαιριού (άφθονη τροφή) και το min στο μέσο του χειμώνα (λίγη τροφή). Τέτοια μοντέλα ενδιαφέρουν την οικολογία.



18. Γεννήσεις και θάνατοι πληθυσμού

Έχουμε βρει ότι $x(t)=ce^{(\alpha-\beta)t}$, ενώ είναι $\frac{dy(t)}{dt}=\alpha x(t)$ και $\frac{d\theta(t)}{dt}=\beta x(t)$. Αντικαθιστώντας τη $x(t)$ στις δύο Δ.Ε. αυτές παίρνουμε $\frac{dy(t)}{dt}=\alpha ce^{(\alpha-\beta)t}$ και $\frac{d\theta(t)}{dt}=\beta ce^{(\alpha-\beta)t}$, οι οποίες είναι γραμμικές μη ομογενείς 1^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Επειδή σε αυτές, ο συντελεστής του $y(t)$ και $\theta(t)$, αντίστοιχα είναι 0, μπορούμε να τις ολοκληρώσουμε ως Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών. Έχουμε δηλαδή

$dy(t)=\alpha ce^{(\alpha-\beta)t} dt$ και $d\theta(t)=\beta ce^{(\alpha-\beta)t} dt$, οπότε

$$y(t)=\alpha c \int e^{(\alpha-\beta)t} dt = \frac{\alpha c}{\alpha-\beta} \int (\alpha-\beta)t d(\alpha-\beta)t \frac{\alpha c}{\alpha-\beta} e^{(\alpha-\beta)t} + k,$$

$$\theta(t)=\beta c \int e^{(\alpha-\beta)t} dt = \frac{\beta c}{\alpha-\beta} \int (\alpha-\beta)t d(\alpha-\beta)t \frac{\beta c}{\alpha-\beta} e^{(\alpha-\beta)t} + k'.$$

19. Παρασκευή διαλύματος φαρμάκου

Ένα δοχείο περιέχει 100 cm^3 διαλύματος φαρμάκου Φ , στο οποίο διάλυμα, η αρχική συγκέντρωση του Φ είναι $1,5 \text{ mgr/cm}^3$. Θέλοντας να παρασκευάσουμε διάλυμα Φ διαφορετικής συγκέντρωσης, αφήνουμε και εισρέουν στο δοχείο $3 \text{ cm}^3/\text{min}$ αλλού διαλύματος του Φ συγκέντρωση 2 mgr/cm^3 . Έστω ότι κάθε χρονική στιγμή t , η ανάμειξη του Φ και του διαλύτη είναι πλήρης και η ροή ομοιόμορφη, να βρεθεί η ποσότητα και η συγκέντρωση Φ που υπάρχει, κάθε χρονική στιγμή t στο δοχείο.

Αφού σε 1 min εισρέουν 3 cm^3 και εκρέουν 5 cm^3 μετά από $t \text{ min}$ θα υπάρχουν στο δοχείο, εκτός από τα αρχικά 100 cm^3 και $(3-5)t=-2t \text{ cm}^3$ δηλαδή $100-2t \text{ cm}^3$. Αν στο δοχείο υπάρχουν $y=x(t) \text{ mgr}$ φάρμακου Φ τη χρονική στιγμή t τότε σε 1 cm^3 θα υπάρχουν $\frac{y}{100-2t} \text{ mgr}$. Εξάλλου ο ρυθμός εισροής φαρμάκου είναι $2 \cdot 3=6$ και ρυθμός εκροής $5 \cdot \frac{y}{100-2t} = \text{mgr/min}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της $y = x(t)$, είναι $\frac{dy}{dt} = 6 - \frac{5y}{100-2t}$.

Οι Δ.Ε. αυτή είναι γραμμική 1^{ης} τάξης μη ομογενής με μεταβλητούς συντελεστές που γράφετε και $\frac{dy}{dt} + \frac{5}{2(50-t)} y = 6$ και η οποία έχει έννοια για $100-2 \neq 0$, δηλαδή $0 \leq t \leq 50 \text{ min}$. Η γενική λύση είναι

$$x(t) = ce^{-\int \frac{5dt}{2(50-t)}} + 6e^{-\int \frac{5dt}{2(50-t)}} \cdot \int e^{\int \frac{5dt}{2(50-t)}} \cdot dt,$$

$$\frac{5}{2} \int \frac{dt}{50-t} = -\frac{5}{2} \ln(50-t). \text{ Η } x(t) \text{ γίνεται τότε :}$$

$$x(t) = ce^{\ln(50-t)^{5/2}} + 6e^{\ln(50-t)^{5/2}} \cdot \int e^{\ln(50-t)^{-5/2}} \cdot dt, \text{ ή ακόμη}$$

$$x(t) = c(50-t)^{5/2} + 6(50-t)^{5/2} \cdot \int (50-t)^{-5/2} \cdot dt, \text{ ή ακόμη}$$

$$x(t) = c(50-t)^{5/2} + 4(50-t)^{5/2} \cdot \int d(50-t)^{-3/2} \cdot dt, \text{ ή ακόμη}$$

$$x(t) = c(50-t)^{5/2} + 4(50-t).$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t=0$ υπήρχαν $1,5 \cdot 100 = 150$ mgr φαρμάκου, έχουμε $x(0) = 150 = c50^{5/2} + 200 \Rightarrow c = -50^{-3/2}$, δηλαδή $x(t) = 4(50-t) - \frac{(50-t)^{5/2}}{50^{3/2}}$ και η συγκέντρωση του φαρμάκου για κάθε χρονική στιγμή t (< 50) θα είναι

$$c(t) = \frac{x(t)}{2(50-t)} = 2 - \frac{(50-t)^{3/2}}{2 \cdot 50^{3/2}}.$$

20. Χημική Κινητική ΙΙΙ

Σε μία χημική αντίδραση από την ουσία Α παράγονται οι ουσίες Β και Γ, με ρυθμό μεταβολής των συγκεντρώσεων τους ανάλογο προς τη συγκέντρωση της Α. Να βρεθούν οι συγκεντρώσεις Β και Γ. Αν $\alpha(t)$ είναι συγκέντρωση της Α, $\beta(t)$ της Β και $\gamma(t)$ της Γ τότε

$$-\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{d\beta(t)}{dt} + \frac{d\gamma(t)}{dt} = k_1\alpha(t) + k_2\alpha(t) = (k_1 + k_2)\alpha(t).$$

Από τη Δ.Ε. $\frac{d\alpha(t)}{dt} = -(k_1 + k_2)\alpha(t)$, παίρνουμε $\alpha(t) = ce^{-(k_1 + k_2)t}$

Τότε $\frac{d\beta(t)}{dt} = k_1ce^{-(k_1 + k_2)t}$ και $\frac{d\gamma(t)}{dt} = k_2ce^{-(k_1 + k_2)t}$, από τις οποίες βρίσκουμε

$$\beta(t) = \frac{-k_1c}{k_1 + k_2} e^{-(k_1 + k_2)t} + c_1 \text{ και } \gamma(t) = \frac{-k_2c}{k_1 + k_2} e^{-(k_1 + k_2)t} + c_2.$$

21. Όγκος διαλύματος φαρμάκου

Διάλυση φαρμάκου όγκου $V_1(t)$, από ένα δοχείο στο οποίο περιέχεται, ρέει με ρυθμό μεταβολής ανάλογο του $V_1(t)$, σε ένα άλλο δοχείο, από που ρέει και πάλι με ρυθμό μεταβολής σταθερά ίσο με $b > 0$ και όπου ο όγκος της $V_2(t)$, να βρεθούν οι όγκοι $V_1(t)$ και $V_2(t)$ αν $V_1(0) = 1000$ και $V_2(0) = 100$. Ο όγκος $V_1(t)$ ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου, άρα

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = -\alpha V_1(t), \quad \alpha > 0. \text{ Τότε ο ρυθμός μεταβολής του } V_2(t)$$

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = \alpha V_1(t) - b. \text{ Από την πρώτη έχουμε } \frac{dV_1(t)}{V_1(t)} = -\alpha dt$$

$$\int \frac{dV_1(t)}{V_1(t)} = -\alpha \int dt, \text{ ή ακόμη } \ln V_1(t) = -\alpha t + c'.$$

Τότε $V_1(t) = ke^{-\alpha t}$ και αφού $V_1(0) = 1000$, έπεται

$$V_1(t) = 1000e^{-\alpha t}.$$

Η δεύτερη Δ.Ε. γίνεται τότε $\frac{dV_2(t)}{dt} = 1000\alpha e^{-\alpha t} - b,$

$dV_2(t) = (1000\alpha e^{-\alpha t} - b)dt$ και συνεπώς :

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \int (1000\alpha e^{-\alpha t} - b)dt = -1000 \int e^{-\alpha t} d(-\alpha t) - b \int dt \\ &= -1000e^{-\alpha t} + c_1 - bt + c_2 = -1000e^{-\alpha t} - bt + c. \end{aligned}$$

Επειδή $V_2(0) = 100$, έπεται $100 = -1000 + c$, δηλαδή $c = 1100$. Έπ

$$V_2(t) = -1000e^{-\alpha t} - bt + 1100.$$

22. Φαρμακοκινητική

Έστω D_0 η δόση ενός φαρμάκου Φ . Η αρχική ποσότητα του Φ που χορηγείται σε έναν ασθενή ελαττώνεται με το χρόνο t , δηλαδή είναι $\delta=D(t)$, με ρυθμό μεταβολής ανάλογο προς $D(t)$. Ένα μέρος του Φ απορροφάται από το σώμα ενώ ένα άλλο μέρος αποβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Έστω $Q(t)$ η ποσότητα που παραμένει στο σώμα τη χρονική στιγμή t και $A(t)$ ποσότητα που αποβάλλεται τη χρονική στιγμή t με ρυθμό μεταβολής ανάλογο προς $Q(t)$. Να βρεθεί η $Q(t)$ και η $\max Q(t)$.

Αφού $D(t)=Q(t)+A(t)$, έχουμε $\frac{dD(t)}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{dA(t)}{dt}$, άρα $\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{dD(t)}{dt} - \mu Q(t)$, $\mu > 0$

Επειδή $D(t)$ είναι φθίνουσα $\frac{dD(t)}{dt} = -\lambda D(t)$, $\lambda > 0$, οπότε $\frac{dQ(t)}{dt} = -\lambda D(t) - \mu Q(t)$ (όπου το πρόσημο + δικαιολογείται από την φορά των διανυσμάτων των ταχυτήτων), ενώ για τη $D(t)$ έχουμε $D(t) = ke^{-\lambda t}$ και η σχέση $D(0)=D_0 \Rightarrow k=D_0$.

Δηλαδή $D(t)=D_0e^{-\lambda t}$. Τότε $\frac{dQ(t)}{dt} + \mu Q(t) = -\lambda D_0e^{-\lambda t}$, η οποία είναι γραμμική 1ης τάξης μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές. Έχουμε συνεπώς

$$\begin{aligned} Q(t) &= ce^{-\mu \int dt} + \lambda D_0 e^{-\mu \int dt} \cdot \int e^{\mu \int dt} \cdot e^{-\lambda t} dt \\ &= ce^{-\mu t} + \lambda D_0 e^{-\mu t} \cdot \int e^{\mu t} \cdot e^{-\lambda t} dt = ce^{-\mu t} + \lambda D_0 e^{-\mu t} \int e^{(\mu-\lambda)t} dt \\ &= ce^{-\mu t} + \frac{\lambda D_0}{\mu-\lambda} e^{-\mu t} \int e^{(\mu-\lambda)t} d(\mu-\lambda)t \\ &= ce^{-\mu t} + \frac{\lambda D_0}{\mu-\lambda} e^{-\mu t} \cdot e^{(\mu-\lambda)t} \end{aligned}$$

Επειδή για $t=Q(0)=0$, έχουμε $c = \frac{-\lambda D_0}{\mu-\lambda}$ και $Q(t) = \frac{-\lambda D_0}{\mu-\lambda} e^{-\mu t} + \frac{-\lambda D_0}{\mu-\lambda} e^{-\lambda t} = \frac{-\lambda D_0}{\mu-\lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\mu t})$

Για τη $\max Q(t)$ έχουμε ότι $Q'(t)$ έχουμε ότι $Q'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\lambda D_0}{\mu-\lambda} (\mu e^{-\mu t} - \lambda e^{-\lambda t}) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda e^{-\lambda t} = \mu e^{-\mu t}$ ή ακόμη $\Leftrightarrow e^{(\lambda-\mu)t} = \frac{\lambda}{\mu}$, οπότε $t = \frac{1}{\lambda-\mu} \ln \frac{\lambda}{\mu}$. Άρα

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= \frac{\lambda D_0}{\mu-\lambda} \left(e^{-\frac{\lambda}{\lambda-\mu} \ln \frac{\lambda}{\mu}} - e^{-\frac{\mu}{\lambda-\mu} \ln \frac{\lambda}{\mu}} \right) = \frac{\lambda D_0}{\mu-\lambda} \left[\left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{\lambda}{\lambda-\mu}} - \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{\mu}{\lambda-\mu}} \right] \\ &= \frac{D_0}{\alpha-1} \left[\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} - \alpha^{-1+\frac{1}{1-\alpha}} \right] = \frac{D_0}{\alpha-1} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) = D_0 * \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &= D_0 \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{\mu}{\lambda-\mu}} = D_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{\mu}{\mu-\lambda}}. \text{ Το ότι είναι πράγματι } \max, \text{ επαληθεύει από τη δεύτερη} \\ &\text{παράγωγο, για } t = \frac{1}{\lambda-\mu} \ln \frac{\lambda}{\mu}: Q''(t) = \frac{\lambda D_0}{\mu-\lambda} (\lambda^2 e^{-\lambda t} - \mu^2 e^{-\mu t}) = \frac{D_0}{\alpha-1} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\lambda^2 \frac{\mu^2}{\alpha} \right) \\ &= \frac{D_0}{\alpha-1} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha \lambda^2 - \lambda^2 \alpha^2}{\alpha} = \frac{D_0}{\alpha-1} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} * \lambda^2 (1-\alpha) = -\lambda^2 D_0 \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} < 0. \end{aligned}$$

23. Φορέας AIDS

Σε πληθυσμό τοξικομανών n ατόμων, εισέρχεται άτομο που είναι φορέας του AIDS. Αν κατά τη χρονική στιγμή t , $x=x(t)$ είναι το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού που δεν είναι φορείς και $y=y(t)$ είναι το πλήθος των φορέων, να βρεθεί η $y=y(t)$. Ο αριθμός των ατόμων του πληθυσμού είναι $(n+1)$ και είναι ίσος με $x(t)+y(t)$.

Επειδή, όσο περισσότερα άτομα (μολυσμένα και μη) υπάρχουν τόσο συχνότερες επαφές έχουμε (που προκαλούν μόλυνση), μπορούμε να υποθέσουμε ότι

ο αριθμός μεταβολής $\frac{dy}{dt}$ είναι ανάλογος προς τα μολυσμένα και προς τα μη μολυσμένα άτομα, δηλαδή $\frac{dy(t)}{dt} = \lambda x(t)y(t)$. Αφού όμως $x(t)+y(t)=n+1$, η Δ.Ε. γράφεται $\frac{dy}{dt} = \lambda(n+1-y)y$, που δεν είναι γραμμική μπορεί όμως να ολοκληρωθεί με χωρισμό των μεταβλητών $\frac{dy}{y(n+1-y)} = \lambda dt$, οπότε $\int \frac{dy}{y(n+1-y)} = \lambda t + c$.

Το κλάσμα $\frac{1}{y(n+1-y)}$ διασπάται κατάλληλα σε δύο κλάσματα $\frac{1}{y(n+1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{n+1-y}$, οπότε $1=A(n+1-y) + By$ ή ακόμη $1 = (B-A)y + (n+1)A$, απ' όπου $A=\frac{1}{n+1}$ και $B-A=0$, οπότε $B=\frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι } \int \frac{dy}{y(n+1-y)} &= \frac{1}{n+1} \int \frac{dy}{y} + \frac{1}{n+1} \int \frac{dy}{n+1-y} \\ &= \frac{1}{n+1} \ln y - \frac{1}{n+1} \ln(n+1-y) = \frac{1}{n+1} [\ln y - \ln(n+1-y)] \\ &= \frac{1}{n+1} \ln \frac{y}{n+1-y} = \lambda t + c. \end{aligned}$$

$$\text{Τότε } \frac{y}{n+1-y} = ce^{\lambda(n+1)t} \text{ ή ακόμη } y = \frac{(n+1)c'e^{\lambda(n+1)t}}{1+c'e^{\lambda(n+1)t}} = \frac{n+1}{1+ke^{-\lambda(n+1)t}}.$$

$$\text{Επειδή για } t=0, \text{ έχουμε } y(0) = \frac{1+n+k}{1+k}, \text{ έπειτα } k=n, \text{ οπότε } y(t) = \frac{n+1}{1+ne^{-\lambda(n+1)t}}$$

$$(1) \text{ για την οποία έχουμε } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{n+1}{1+\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\lambda(n+1)t}}} = n+1.$$

Δηλαδή όλα τα τείνουν να μολυνθούν. Η καμπύλη της μορφής (1) λέγεται λογιστική καμπή και είναι σιγμοειδής.

24. Μέσος ρυθμός μεταβολής πληθυσμού II (αύξηση των καρκινικών κυττάρων)

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής ενός πληθυσμού $y=x(t)$ βακτηρίου, είναι ίσος με τη διαφορά του μέσου ρυθμού των γεννήσεων και του μέσου αριθμού των θανάτων. Έστω ότι ο μέσος αριθμός γεννήσεων είναι σταθερός και ίσος με β και ότι οι θάνατοι αυξάνουν με μέσο ρυθμό μεταβολής ανάλογο προς τον πληθυσμό $x(t)$ (πράγμα που μπορεί να εξηγηθεί από τον αναγνωρίσιμο για τη διαθέσιμη τροφή), να βρεθεί ο $x(t)$, αν $x(0)=10$, η τιμή ισορροπίας του και να μελετηθεί η συνάρτηση y' .

Το υπόδειγμα για τα παραπάνω προβλήματα είναι η Δ.Ε. $\frac{dx(t)}{dt} = \beta - \lambda x(t)$, ή ακόμη $\frac{dy}{dt} = y(\beta - \lambda y)$, στην οποία οι μεταβλητές χωρίζονται $\int \frac{dy}{y(\beta - \lambda y)} = \int dt = t + c$.

Για το κλάσμα $\frac{1}{y(\beta - \lambda y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{\beta - \lambda y}$ έχουμε $1=(B - \lambda A)y + A\beta = 1$ και $B-\lambda A=0$,

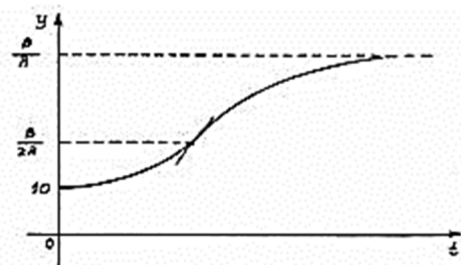
οπότε $A = \frac{1}{\beta}$ και $B = \frac{\lambda}{\beta}$. Άρα,

$$\int \frac{dy}{y(\beta - \lambda y)} = \frac{1}{\beta} \int \frac{dy}{y} + \frac{\lambda}{\beta} \int \frac{dy}{\beta - \lambda y} = \frac{1}{\beta} \ln y - \frac{1}{\beta} \ln(\beta - \lambda y) = \frac{1}{\beta} \ln \frac{y}{\beta - \lambda y} = t + c$$

$$\text{Τελικά } y = \frac{c\beta e^{\beta t}}{1+c\lambda e^{\beta t}} = \frac{\beta}{\lambda + ke^{-\beta t}}.$$

$$\text{Επειδή } x(0) = 10, \text{ έπεται } x(0) = 10 = \frac{\beta}{\lambda + k}, \text{ οπότε } k = \frac{\beta - 10\lambda}{10} \text{ και } x(t) = \frac{10\beta}{10\lambda + (\beta - 10\lambda)e^{-\beta t}}.$$

Είναι δε $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{10\beta}{10\lambda} = \frac{\beta}{\lambda}$, δηλαδή η τιμή ισορροπίας είναι ανάλογη προς το μέσο αριθμό γεννήσεων και αντιστρόφως ανάλογη προς το μέσο αριθμό θανάτων, ανά μονάδα πληθυσμού. Ο ρυθμός μεταβολής της $x(t)$, δηλαδή η συνάρτηση y' , παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο καμπής της λογιστικής καμπύλης,



το οποίο βρίσκουμε μηδενίζοντας την 2η παραγωγό της $y=x(t)$ και ελέγχοντας αν η y στο σημείο αυτό είναι $\neq 0$.

Παραγωγίζοντας την $y'=y(\beta-\lambda y)$, παίρνουμε $y'' y'(\beta-\lambda y)+y(\beta-\lambda y)'=(\beta-2\lambda y)y'$ και θέτοντας έχουμε $y''=0$, έχουμε $\beta-2\lambda y=0$ δηλαδή $y=\frac{\beta}{2\lambda}$. Η χρονική στιγμή για την οποία συμβαίνει αυτό που βρίσκεται από την εξίσωση της λογιστικής καμπύλης $\frac{\beta}{2\lambda} = \frac{10\beta}{10\lambda+(\beta-10\lambda)e^{-\beta t}} \Rightarrow e^{-\beta t} = \frac{10\lambda}{\beta-10\lambda}$ και $t = \frac{1}{\beta} \ln \frac{10\lambda}{\beta-10\lambda}$.

Η μέγιστη τιμή της Y είναι τότε $y' \max = \frac{\beta^2}{4\lambda}$. Το ότι πράγματι είναι $\max$ για την y' και σημείο καμπής για την $x(t)$ προκύπτει από το ότι $y''=y''(\beta-2\lambda)+y'(\beta-2\lambda y)' = y''(\beta-2\lambda y)-2\lambda y'^2$ η οποία για $y = \frac{\beta}{2\lambda}$ γίνεται $y''-2\lambda y'^2 < 0$

Παρατήρηση. Δ.Ε. όπως και οι προηγούμενη, της μορφής $\frac{dy}{dt}=y(\alpha y + \beta)$, μπορούν να λυθούν ως Δ.Ε. Bernoulli αναγόμενες σε γραμμικές οι παραπάνω γράφεται $\frac{dy}{dt}-\beta y=\alpha y^2$ και δεν είναι Δ.Ε. Bernoulli με $n=2$. Θέτουμε $z=y^{1-2} = \frac{1}{y}$ οπότε $\frac{dy}{dt}$ και η Δ.Ε. γίνεται $-\frac{1}{2} \frac{dz}{dt}$ και η Δ.Ε. γίνεται $-\frac{1}{2} \frac{dz}{dt} - \beta \frac{1}{z} = \alpha \frac{1}{z^2}$ ή ακόμη $\frac{dz}{dt} + \beta z = -\alpha$, που είναι γραμμική μη ομογενής 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Έτσι έχουμε $\frac{dz}{\beta z + \alpha} = -dt$, ή ακόμη $\frac{1}{\beta} \frac{d(\beta z + \alpha)}{\beta z + \alpha} = -dt$ ή ακόμη $\frac{d(\beta z + \alpha)}{\beta z + \alpha} = \beta dt$.

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε $\ln(\beta z + \alpha) = \beta t + c \Rightarrow \beta z + \alpha = c'e^{\beta t}$.

Άρα $z = c'e^{\beta t} - \alpha\beta^{-1}$, ή ακόμη $z = \beta^{-1}(ke^{\beta t} - \alpha)^{-1}$.

Έτσι λύνεται η Δ.Ε.: $\frac{dN}{dt} = N [v - (N-1)\varepsilon]$, που περιγράφει την αύξηση των κυττάρων στον καρκίνο.

25. Μάθηση με τη μικρότερη προσπάθεια

Η γνώση που αποκτάται είναι προφανώς συνάρτηση $\Gamma(t)$ του χρόνου. Είναι σαφές ότι η γνώση αποκτάται με τη μελέτη, η οποία είναι και αυτή συνάρτηση $M(t)$ του χρόνου. Στην παρακολούθηση ενός μαθήματος, ο μαθητής έρχεται σε ένα αρχικό επίπεδο γνώσης, έστω Γ_0 . Ο ρυθμός μεταβολής (αύξησης) της γνώσης εξαρτάται από την τρέχουσα γνώση $\Gamma(t)$ και από την τρέχουσα μελέτη $M(t)$ συγχρόνως. Ο μαθητής ξεχνάει ένα ποσοστό m τις γνώσεις που αποκτά, ενώ στο τέλος των παραδόσεων, πρέπει να έχει ελάχιστο επίπεδο γνώσης Γ_i για να περάσει τις εξετάσεις. Οι παραπάνω υποθέσεις οδηγούν στην παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \lambda \Gamma^a(t) M^b(t) - m\Gamma(t). \quad (1)$$

Η ολική μελέτη μέχρι το τέλος T των μαθημάτων, είναι ίση με $M((t)_{ολ} = \int_0^T M(t)_{ολ}$ και ζητάμε η $M(t)_{ολ}$ να γίνει ελάχιστη. Για να λυθεί οι Δ.Ε. (1) πρέπει να υιοθετήσουμε μία τακτική μελέτης. Π.χ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μελέτη είναι σταθερή $M(t)=M_0$, ή ότι μελετάμε όσο μπορούμε περισσότερο, ή ότι ακολουθούμε κάποια άλλη τακτική. Να μελετηθεί η (1)

Για απλότητα ας θεωρήσουμε $M(t)=M_0$. Τότε η (1) γίνεται: $\frac{d\Gamma}{dt} = \lambda M_0^b \Gamma^a - m\Gamma$, ή $\frac{d\Gamma}{dt} + m\Gamma = \lambda M_0^b \Gamma^a$, η οποία είναι μία Δ.Ε. Bernoulli (την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε και ως χωριζομένων μεταβλητών). Ο μετασχηματισμός $z=\Gamma^{1-a}$ μετατρέπει την Bernoulli σε γραμμική $dz = d(\Gamma^{1-a}) = (1-a)\Gamma^{-a} d\Gamma \Rightarrow d\Gamma = \frac{\Gamma^a}{1-a} dz$. Επειδή $\Gamma = z^{\frac{1}{1-a}}$ και $\Gamma^a = z^{\frac{a}{1-a}}$, η Δ.Ε. γίνεται: $\frac{\Gamma^a}{1-a} = \frac{dz}{dt} + mz^{\frac{1}{1-a}} = \lambda M_0^b z^{\frac{1}{1-a}}$, ή $\frac{z^{\frac{a}{1-a}} dz}{1-a} + mz^{\frac{1}{1-a}} = \lambda M_0^b z^{\frac{1}{1-a}}$

$= \lambda M_0^b z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ ή τέλος : $\frac{dz}{dt} + (1-\alpha) m z = \lambda M_0^b (1-\alpha)$ Δηλαδή η γραμμική 1^{ης} τάξης μη ομογενείς με σταθερούς συντελεστές. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που δίνει τη γενική λύση μη ομογενούς γραμμικής Δ. Ε. 1^{ης} τάξης (ή και να την μεταχειριστούμε ως χωριζομένων μεταβλητών) $y' + a(t)y = b(t) \Rightarrow y = ce^{-\int a(t)dt} + e^{-\int a(t)dt} \int e^{\int a(t)dt} b(t)dt$.

Έτσι καταλήγουμε στην $z(t) = z(0)e^{-(1-\alpha)mt} + \frac{\lambda M_0^b}{m} [1 - e^{-(1-\alpha)mt}]$. Αλλά $Z(0) = \Gamma_0^{1-\alpha}$.

Αρα έχουμε $z(t) = \Gamma_0^{1-\alpha} e^{-(1-\alpha)mt} + \frac{\lambda M_0^b}{m} [1 - e^{-(1-\alpha)mt}]$, ή

$$z(t) e^{-(1-\alpha)mt} + \frac{\lambda M_0^b}{m} [e^{-(1-\alpha)mt} - 1] + \Gamma_0^{1-\alpha}.$$

Επειδή $z(t) = \Gamma(t)^{1-\alpha}$, έπεται $\Gamma(t)^{1-\alpha} = \left\{ \frac{\lambda M_0^b}{m} [e^{-(1-\alpha)mt} - 1] + \Gamma_0^{1-\alpha} \right\} e^{(1-\alpha)mt}$. (2)

Τώρα για $t=T \Rightarrow \Gamma(T) = \Gamma_\varepsilon$, το ελάχιστο γνώσεις για να περάσεις στις εξετάσεις.

Τότε $M_0 = \left\{ \frac{m[\Gamma_\varepsilon^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)mT} - \Gamma_0^{1-\alpha}]}{\lambda[e^{(1-\alpha)mT} - 1]} \right\}^{1/b}$ που παριστάνει τη μελέτη που χρειάζεται για να αποκτήσει την ελάχιστη απαιτούμενη γνώση για επιτυχία στις εξετάσεις, στο τέλος των μαθημάτων. Επειδή θέλουμε η γνώση να αυξάνει με την πάροδο του χρόνου, θα πρέπει η (2) να είναι αύξουσα. Η (2) γράφεται και $\Gamma(t)^{1-\alpha} = \frac{\lambda M_0^b}{m} + \left[\Gamma_0^{1-\alpha} - \frac{\lambda M_0^b}{m} \right] e^{(1-\alpha)mT}$, οπότε για $\alpha < 1$ θα πρέπει $\Gamma_0^{1-\alpha} - \frac{\lambda M_0^b}{m} \leq 0$, για να προκύψει θετική παράγωγος.

Δηλαδή πρέπει $M_0 \geq \left[\frac{m\Gamma_0^{1-\alpha}}{\lambda} \right]$, πράγμα που ήταν αναμενόμενο και που αποτελεί μια ένδειξη για την ορθότητα του μοντέλου

Σημείωση. Αν τα παραπάνω δεν μπορούν ίσως να διδαχθούν στο σχολείο, εν τούτοις με τη βοήθεια τους, ο διδάσκων μπορεί να μελετήσει συγκεκριμένες περιπτώσεις και να συμβουλευτεί τους μαθητές του.

26. Απόσταση διαλύματος από το σημείο κόρου

Μία αρχική ποσότητα y_0 της ουσίας A, διαλύεται σε ένα διαλυτικό μέσο B, όγκου V. Έστω $y=x(t)$ η ποσότητα της A η οποία βρίσκεται αδιάλυτη τη χρονική στιγμή t και c η συγκέντρωση της A στο διάλυμα όταν αυτό είναι κορεσμένο. Να βρεθεί η $y=x(t)$, αν ο αριθμός μεταβολής της (δηλαδή η ταχύτητα διάλυσης) είναι αναλόγως της $x(t)$ και της απόστασης του διαλείμματος από το σημείο κόρου.

Η απόσταση του διαλύματος από το σημείο κόρου, είναι η διαφορά της συγκέντρωσης της διαλυμένης ουσίας A και τη χρονική στιγμή t από τη συγκέντρωση της, όταν το διάλυμα είναι κορεσμένο, δηλαδή από την απόσταση C. Η ποσότητα της A που έχει διαλυθεί τη χρονική στιγμή t, είναι $y_0 - y$ και άρα η συγκέντρωση της τη χρονική στιγμή είναι t, είναι $\frac{y_0 - y}{V}$. Έτσι η απόσταση του B από το σημείο του χώρου

είναι και άρα η ταχύτητα διάλυσης είναι $C - \frac{y_0 - y}{V}$ και άρα η ταχύτητα διάλυσης είναι

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y \left(C - \frac{y_0 - y}{V} \right) \text{ στην οποία οι μεταβλητές χωρίζονται.}$$

Το κλάσμα $\frac{1}{y(\alpha+y)}$, όπου έχουμε θέσει $CV - y_0 = \alpha$, αναλύεται ως εξής $\frac{1}{y(\alpha+y)} = \frac{M}{y} + \frac{N}{\alpha+y}$,

οπότε $1 = (M+N)y + M\alpha \Rightarrow M = \frac{1}{\alpha}$ και $N = -M = -\frac{1}{\alpha}$. Τότε

$$\int \frac{dy}{y(\alpha+y)} = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dy}{y} + \frac{\lambda}{\alpha} \int \frac{dy}{\alpha+y} = \frac{1}{\alpha} [\ln y - \ln(\alpha+y)] = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{y}{\alpha+y}$$

$$\frac{\lambda}{v}t + k'. \text{ Δηλαδή } \ln \frac{y}{\alpha+y} + \frac{\alpha*\lambda}{v}t + k'' \text{ και } \ln \frac{y}{\alpha+y} = k \cdot e^{\beta t},$$

$$\text{Όπου έχουμε θέσει } \beta = \ln \frac{\alpha\lambda}{v}. \text{ Τελικά παίρνουμε } Y = x(t) = \frac{\alpha k e^{\beta t}}{1 - k e^{\beta t}} = \frac{\alpha}{v e^{\beta t} - 1}.$$

Επειδή $x(0)=y_0 \Rightarrow v = \ln \frac{\alpha+y_0}{y_0}$ και αντικαθιστούμε Τα α, β, v μετά ίσα τους. Έτσι π.χ. γνωρίζοντας ότι $y_0=6, V=100$ και ότι ο Β μπορεί να διαλύσει 10 μονάδες της Α μέχρι να κορεσθεί, μπορούμε να βρούμε την $x(250)$, αν επιπλέον ξέρουμε ότι για $t=50$ έχουν παραμείνει 3 μονάδες της Α.

$$\text{Είναι } C = \frac{10}{100}, \text{ όποτε βρίσκουμε } \alpha=4, \beta = \frac{\lambda}{25} \text{ και } v = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Επειδή } 3 = \frac{4}{\frac{5}{3}e^{-\frac{50\lambda}{25}} - 1} = \frac{4}{\frac{5}{3}e^{-2\lambda} - 1}, \text{ ή } 5e^{-2\lambda} - 3 = 4, \text{ έχουμε λογαριθμίζοντας } \lambda = -\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$$

$$\ln \sqrt{\frac{5}{7}}. \text{ Τότε } x(250) = \frac{4}{\frac{5}{3}e^{-\frac{250}{50} \ln \sqrt{\frac{5}{7}}} - 1} = \frac{4}{\frac{5}{3}e^{\ln(\frac{7}{5})^5} - 1} = \frac{4}{\frac{5*7^5}{3*5^5} - 1} \cong 0,5$$

27. Αυτοκατάλυση στη χημική κινητική

Μία χημική ουσία Α μετατρέπεται σε μία χημική ουσία Β. Η αντίδραση αρχίζει μόνο με την παρουσία κάποιας ποσότητας της Β (αυτοκατάλυση). Έστω $y=c(t)$ η συγκέντρωση της Β και β σταθερά, η αρχή οι συγκέντρωσης της. Έστω α =σταθερά η αρχική συγκέντρωση της Α. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $c(t)$ είναι αναλόγως των ολικών συγκεντρώσεων κατά τη χρονική στιγμή t , να βρεθεί η $c(t)$.

Η συγκέντρωση της Β κατά τη χρονική στιγμή t είναι $\beta+c(t)$, ενώ η συγκέντρωση της Α κατά τη χρονική στιγμή t είναι $\alpha - c(t)$. Έτσι έχουμε τη Δ. Ε.

$$\frac{dc(t)}{dt} = \lambda(\alpha - c(t))(\beta + c(t)). \text{ Στην οποία οι μεταβλητές χωρίζονται } \frac{dc(t)}{(\alpha - c(t))(\beta + c(t))} = \lambda dt.$$

Το κλάσμα $\frac{1}{(\alpha - y)(\beta + y)}$ αναλύεται ως εξής:

$$\frac{1}{(\alpha - y)(\beta + y)} = \frac{M}{\alpha - y} + \frac{N}{\beta + y} \Rightarrow (M-N)y + \alpha N + \beta M = 1 \Rightarrow M-N=0, \text{ άρα } \beta M + \alpha N = 1$$

Το γραμμικό σύστημα αυτό δίνει $M=N = \frac{1}{\alpha + \beta}$. Τότε

$$\int \frac{dy}{(\alpha - y)(\beta + y)} = \frac{1}{\alpha + \beta} \int \frac{dy}{\alpha - y} + \frac{1}{\alpha + \beta} \int \frac{dy}{\beta + y} = \frac{1}{\alpha + \beta} [\ln(\beta + y) - \ln(\alpha - y)] = \frac{1}{\alpha + \beta} \ln \frac{\beta + y}{\alpha - y} =$$

$$\lambda t + c. \text{ Οπότε } \frac{\beta + y}{\alpha - y} = k' e^{\lambda(\alpha + \beta)t} \text{ και } Y = \frac{-\beta + \alpha k' e^{\lambda(\alpha + \beta)t}}{1 + k' e^{\lambda(\alpha + \beta)t}} = -\beta + \frac{\alpha + \beta}{1 + k e^{-\lambda(\alpha + \beta)t}}$$

28. Αντίδραση 3ης τάξης στη χημική κινητική

Οι χημικές ουσίες O_i , με αρχικές συγκεντρώσεις $a_i, i=1,2,3$ αντιδρούν προς σχηματισμού προϊόντων. Αν μετά χρόνου t , υποθέσουμε ότι έχουν αντιδράσει $y=x(t)$ mol/l από κάθε ουσία και ο ρυθμός μεταβολής της $x(t)$ είναι ανάλογος προς τις συγκεντρώσεις των O_i , να βρεθεί η $y=x(t)$. Να μελετηθεί η ιδιαίτερη περίπτωση $a_i=\alpha \forall i$ και να βρεθεί ο χρόνος υποδιπλασιασμού.

Σύμφωνα με τα δεδομένα, οι συγκεντρώσεις των $O_i, i=1, 2, 3$ τη χρονική στιγμή t είναι $\alpha_1 - y, \alpha_2 - y, \alpha_3 - y$ αντίστοιχα, οπότε έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(\alpha_1 - y)(\alpha_2 - y)(\alpha_3 - y) \text{ (αντίδραση 3ης τάξης). Η Δ.Ε. Αυτή είναι χωριζομένων}$$

$$\text{μεταβλητών } \frac{dy}{(\alpha_1 - y)(\alpha_2 - y)(\alpha_3 - y)} = \lambda dt$$

$$\text{Θέτοντας } \frac{1}{(\alpha_1 - y)(\alpha_2 - y)(\alpha_3 - y)} = \frac{A}{(\alpha_1 - y)} + \frac{B}{(\alpha_2 - y)(\alpha_3 - y)} + \frac{\Gamma}{(\alpha_3 - y)},$$

$$\text{Έχουμε } 1 = A(\alpha_2 - y)(\alpha_3 - y) + B(\alpha_1 - y)(\alpha_3 - y) + \Gamma(\alpha_1 - y)(\alpha_2 - y)$$

Από εδώ παίρνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} A + B + \Gamma = 0 \\ (\alpha_2 + \alpha_3)A + (\alpha_1 + \alpha_3)B + (\alpha_1 + \alpha_2)\Gamma = 0 \\ \alpha_2\alpha_3A + \alpha_1\alpha_3B + \alpha_1\alpha_2\Gamma = 1 \end{array} \right| \text{Οπότε :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 & 0 \\ \alpha_2\alpha_3 & \alpha_1\alpha_3 & \alpha_1\alpha_2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_1 - \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2) & \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3) & 1 \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3) & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Gamma = [(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)]^{-1} \\ \text{Άρα : } B = [(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)]^{-1} \\ A = [(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)]^{-1} \end{array}$$

$$\int \frac{dy}{(\alpha_1 - y)(\alpha_2 - y)(\alpha_3 - y)} = A \int \frac{dy}{\alpha_1 - y} + B \int \frac{dy}{\alpha_2 - y} + \Gamma \int \frac{dy}{\alpha_3 - y} = -A \ln(\alpha_1 - y) - B \ln(\alpha_2 - y) - \Gamma \ln(\alpha_3 - y) = \lambda t + c. \text{ Για } t=0 \text{ είναι } y=0, \text{ οπότε } c = -A \cdot \ln \alpha_1 - B \cdot \ln \alpha_2 - \Gamma \cdot \ln \alpha_3$$

Έχουμε τότε $\kappa - \lambda$

$$\begin{aligned} \lambda t &= A \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - y} + B \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - y} + \Gamma \ln \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - y}, \text{ ή ακόμμη} \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1) \lambda t \\ &= (\alpha_3 - \alpha_2) \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - y} + (\alpha_1 - \alpha_3) \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - y} + (\alpha_2 - \alpha_1) \ln \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - y} \\ &= \ln \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - y} \right)^{\alpha_3 - \alpha_2} + \ln \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - y} \right)^{\alpha_1 - \alpha_3} + \ln \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_3 - y} \right)^{\alpha_2 - \alpha_1} \\ &= \ln \left[\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - y} \right)^{\alpha_3 - \alpha_2} + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - y} \right)^{\alpha_1 - \alpha_3} + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_3 - y} \right)^{\alpha_2 - \alpha_1} \right]. \end{aligned}$$

Άρα :

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - y} \right)^{\alpha_3 - \alpha_2} + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - y} \right)^{\alpha_1 - \alpha_3} + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_3 - y} \right)^{\alpha_2 - \alpha_1} = e^{\lambda(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)t}.$$

Στην περίπτωση που $\alpha_i = \alpha$, $\forall i = 1, 2, 3$, η Δ.Ε. γίνεται $\frac{dy}{dt} = \lambda(\alpha - y)^3$, η οποία είναι της γενικής μορφής $\frac{dy}{dt} = \lambda(\alpha - y)^n$, $n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ (αντίδραση n - τάξης) και στην οποία επίσης οι μεταβλητές χωρίζονται

$$\frac{dy}{(\alpha - y)^n} = \lambda dt. \text{ Τότε } \int \frac{dy}{(\alpha - y)^n} = - \int \frac{d(\alpha - y)}{(\alpha - y)^n} = - \int (\alpha - y)^{-n} d(\alpha - y) \\ = \frac{1}{n-1} \frac{1}{(\alpha - y)^{n-1}} = \lambda t + c.$$

Για $t = 0$ είναι $y = 0$, οπότε $c = \frac{1}{(n-1)\alpha^{n-1}}$ και συνεπώς :

$$\lambda t = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{(\alpha - y)^{n-1}} - \frac{1}{\alpha^{n-1}} \right].$$

Έτσι, για $n = 3$, έχουμε $\lambda t = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\alpha - y)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right].$

Για το χρόνο υποδιπλασιασμού t_1 έχουμε :

$$\lambda t_1 = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}} - \frac{1}{\alpha^{n-1}} \right] = \frac{1}{n-1} \left[\frac{2^{n-1}}{\alpha^{n-1}} - \frac{1}{\alpha^{n-1}} \right] = \frac{1}{n-1} \frac{2^{n-1} - 1}{\alpha^{n-1}}.$$

Για $n = 3$ είναι τότε : $t_1 = \frac{2^2 - 1}{2\lambda\alpha^2} = \frac{3}{2\lambda\alpha^2}.$

Παρατήρηση. Δ.Ε. της μορφής $y' = \lambda(\alpha - y)^3$ εμφανίζονται και στη γενετική.

29. Αμφίδρομες και συντρέχουσες αντιδράσεις 1ης και 2ης τάξης στη χημική κινητική

Στη χημική κινητική, καταλήγουμε για τη συγκέντρωση σε Δ.Ε. της μορφής $\frac{dy}{dt} = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$, όπου το 2^ο μέλος δεν είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων όπως τα προηγούμενα. (αμφίδρομες και συντρέχουσες αντιδράσεις 1^{ης} και 2^{ης} τάξης).

Να βρεθεί η συγκέντρωση $y=c(t)$, όπου το τριώνυμο του 2^{ου} μέλους έχει πραγματικές ρίζες. Για την ολοκλήρωση της Δ.Ε. που είναι χωριζομένων μεταβλητών: $\frac{dy}{\alpha y^2 + \beta y + \gamma} = \lambda dt$, αναλύουμε το κλάσμα $\frac{1}{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}$ ως άθροισμα απλών κλασμάτων, αναλύοντας τον παρανομαστή σε γινόμενο δυο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Στη γενική περίπτωση, βρίσκουμε τις ρίζες ρ_1, ρ_2 το τριώνυμο, οπότε τούτο γράφετε $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = \alpha(y - \rho_1)(y - \rho_2)$. Τότε $\int \frac{dy}{\alpha y^2 + \beta y + \gamma} = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dy}{(y - \rho_1)(y - \rho_2)}.$

Τότε $\frac{1}{(y - \rho_1)(y - \rho_2)} = \frac{A}{y - \rho_1} + \frac{B}{y - \rho_2} \Rightarrow A + B = 0$ και $A\rho_2 + B\rho_1 = -1$ από όπου βρίσκουμε $A = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}, B = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}$. Έτσι : $\int \frac{dy}{(y - \rho_1)(y - \rho_2)} = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \int \frac{dy}{y - \rho_1} - \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \int \frac{dy}{y - \rho_2} \\ = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} [\ln(y - \rho_1) - \ln(y - \rho_2)] = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \ln \left| \frac{y - \rho_1}{y - \rho_2} \right|.$

Τότε $\int \frac{dy}{\alpha y^2 + \beta y + \gamma} = \frac{1}{\alpha} * \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} * \ln \left| \frac{y - \rho_1}{y - \rho_2} \right| = \lambda t + c$, ή

$\ln \left| \frac{y - \rho_1}{y - \rho_2} \right| = \lambda \alpha (\rho_1 - \rho_2) t + c$, ή ακόμα $\frac{y - \rho_1}{y - \rho_2} = k' e^{\lambda \alpha (\rho_1 - \rho_2) t}$, ή

$y = \frac{\rho_1 - \rho_2 k' e^{\lambda \alpha (\rho_1 - \rho_2) t}}{1 - k' e^{\lambda \alpha (\rho_1 - \rho_2) t}} = \rho_1 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{1 - k' e^{\lambda \alpha (\rho_1 - \rho_2) t}}.$

Αν $\beta = \gamma = 0$, τότε $\int \frac{dy}{\alpha y^2} = \lambda \int dt$ και είναι $\int y^{-2} dy = \lambda \alpha t + c$, ή $-\int dy^{-1} = \lambda \alpha t + c \Rightarrow y^{-1} =$

$\lambda \alpha t + c$ και $y = \frac{1}{\lambda \alpha t + c}$

30. Νομός αλλομετρίας

Έστω ότι τα μεγέθη x, y είναι συναρτήσεις του χρόνου t δηλαδή $x = x(t)$, $y = y(t)$. Αν ο μέσος ρυθμός μεταβολής τους είναι σταθερός να εκφρασθεί το y συναρτήσει του x . Οι μέσοι ρυθμοί μεταβολής των $x = x(t)$ και $y = y(t)$ είναι αντίστοιχα $\frac{dx}{dt} = \lambda$ και $\frac{dy}{dt} = \mu$. Οι Δ.Ε. αυτές είναι ομογενείς γραμμικές 1^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές και η ολοκλήρωση του δίνει τα x και y ως συναρτήσεις του χρόνου t . Θέλοντας όμως να βρούμε το y ως συνάρτηση του x έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ δηλαδή $\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x}$ στην οποία οι μεταβλητές χωρίζονται $\frac{dy}{y} = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{dx}{x}$. $\int \frac{dy}{y} = \frac{\mu}{\lambda} \int \frac{dx}{x}$, ή ακόμα $\ln|y| = \frac{\mu}{\lambda} \ln|x| + c$, ή υποθέτοντας ότι $x, y > 0$

Έχουμε $\ln y = \frac{\mu}{\lambda} \ln x + c$, οπότε $y = ke^{\frac{\mu}{\lambda} \ln x}$, ή $y = kx^{\frac{\mu}{\lambda}}$, που εκφράζει το y συναρτήσει του x . Η Δ.Ε. $\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x}$ λέγεται νομός αλλομετρίας διότι η λύση της επιτρέπει, μετρώντας το μέγεθος x , να υπολογίσουμε απ' ευθείας το άλλο μέγεθος y , χωρίς παρεμβολή του χρόνου. Ο αλλομετρικός νόμος βρίσκει εφαρμογές στη μελέτη της σχετικής ανάπτυξης δυο διαφόρων μελών του σώματος (συγκριτική ανατομική), στο μεταβολισμό στη μελέτη ενός χαρακτηριστικού σε δύο διαφορετικές φυλές, στη σχέση δόσης-ανταπόκρισης φαρμάκων κλπ. Περνώντας δεκαδικός λογάριθμος στην $y = kx^{\frac{\mu}{\lambda}}$, έχουμε $\log y = \frac{\mu}{\lambda} \log x + \log k$, η οποία, σε λογαριθμικό χαρτί, παριστάνει ευθεία με κλίση $\frac{\mu}{\lambda}$ και της οποίας η τεταγμένη επί την αρχή είναι ίση προς το k .

31. Διατροφή πρωτόζωων

Ένας πληθυσμός βακτηρίων $y = x(t)$ χορηγείται ως τροφή σε πρωτόζωα με σταθερό ρυθμό c . Τα βακτήρια καταναλώνονται από τα πρωτόζωα με ρυθμό ανάλογο προς $x^2(t)$. Να βρεθεί ο πληθυσμός $x(t)$ αν $x(0) = y_0$, καθώς και η τιμή ισορροπίας του. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού $x(t)$ είναι διαφορά του ρυθμού κατανάλωσης, από το ρυθμό χορήγησης των βακτηρίων. Δηλαδή έχουμε τη Δ.Ε.

$$\frac{dx(t)}{dt} = c - \lambda x^2(t), \quad \lambda > 0, \quad \text{στην οποία οι μεταβλητές χωρίζονται } \frac{dy}{c - \lambda y^2} = dt, \quad \text{ή ακόμη } \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{dy}{\left(\sqrt{\frac{c}{\lambda}} - y\right)\left(\sqrt{\frac{c}{\lambda}} + y\right)} = \lambda dt.$$

Θέτοντας $\sqrt{\frac{c}{\lambda}} = a$, βρίσκουμε $\frac{1}{(a-y)(a+y)} = \frac{A}{a-y} + \frac{B}{a+y}$, με $A=B$

$$= \frac{1}{2a}. \quad \text{Άρα } \int \frac{dy}{(a-y)(a+y)} = \frac{1}{2a} \int \frac{dy}{a-y} + \frac{1}{2a} \int \frac{dy}{a+y} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+y}{a-y} \right| = \lambda t + k'.$$

Από αυτήν έπεται $\frac{a+y}{a-y} = k'' e^{2a\lambda t}$, ή $y = -a + \frac{2a}{1 + k e^{-2a\lambda t}}$, με $k = \frac{a-y_0}{a+y_0}$. Τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a = \sqrt{\frac{c}{\lambda}}$

32. Ανάπτυξη κυττάρου

Θρεπτικά συστατικά μέσω των επιφανειακών τοιχωμάτων των κυττάρων, προκαλούν την εξέλιξή τους. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι στα πρώτα στάδια της εξέλιξης αυτής ενός κυττάρου, ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του $B = \beta(t)$ είναι ανάλογος προς το εμβαδόν της επιφάνειάς του. Αν ο όγκος του κυττάρου είναι ανάλογος του κύβου μίας γραμμικής του διαστάσεις L και η επιφάνεια του ανάλογη του τετραγώνου της L , να βρεθεί το βάρος του, αν το σχήμα και η πυκνότητα του κυττάρου παραμένουν σταθερά. Πότε το βάρος διπλασιάζεται, αν $\beta(0) = 1$;

Το βάρος $B = \varepsilon \cdot V$, όπου ε το σταθερό ειδικό βάρος του κυττάρου και V ο όγκος του, για τον οποίο θα έχουμε $V = \lambda L^3$, ενώ για την επιφάνεια του S θα έχουμε $S = \mu L^2$. Τότε $B = \varepsilon \lambda L^3$ και άρα $L = (\varepsilon \lambda)^{-1/3} B^{1/3}$. Επειδή $\frac{dB}{dt} = kS = k\mu L^2 = k\mu [(\varepsilon \lambda)^{1/3} B^{1/3}]^2$

$= \alpha B^{2/3}$. Η $B = \beta(t)$ ικανοποιεί τη Δ.Ε. $\frac{dB}{dt} = \alpha B^{2/3}$, που είναι χωριζομένων μεταβλητών $\frac{dB}{B^{2/3}} = \alpha dt$.

Επειδή $B^{2/3} dB = 3dB^{1/3}$, έχουμε $\int B^{2/3} dB = 3 \int dB^{1/3} = 3B^{1/3} = \alpha t + c$. Άρα $B = \beta(t) = \frac{(\alpha t + c)^3}{27}$ και επειδή το βάρος $\beta(0) = 1 = \frac{c^3}{27} \Rightarrow c=3$. Δηλαδή $\beta(t) = \frac{(\alpha t + 3)^3}{27}$. Για $\beta(t)=2$, έχουμε $2 \cdot 27 = (\alpha t + 3)^3$, ή ακόμη $3\sqrt[3]{2} = \alpha t + 3$, ή ακόμη $3(\sqrt[3]{2} - 1) = \alpha t$. Άρα $t = \frac{3(\sqrt[3]{2} - 1)}{\alpha}$.

33. Φαρμακοκινητική II

Σε διάφορες περιπτώσεις στη φαρμακοκινητική, καταλήγουμε στη Δ.Ε. της μορφής $\frac{dx(t)}{dt} = \lambda \frac{x(t)}{M+x(t)}$, $\lambda > 0$ και M σταθερές (M η σταθερά Michaelis–Menten). (Σε ίδιας μορφής Δ.Ε. καταλήγουμε και στη γενετική). Να βρεθεί η $y = x(t)$.

Η Δ.Ε. $\frac{dy}{dt} = -\lambda \frac{y}{M+y}$ είναι χωρισμένων μεταβλητών $\frac{(M+y)dt}{y} = -\lambda dt$. Αυτή γράφεται ακόμη $M \ln|y| + y = \lambda t + c$, ή $y = ke^{-\frac{y+\lambda t}{M}}$, που είναι μία πεπλεγμένη συνάρτηση όπως λέμε στη μαθηματική ορολογία.

34. Αντιστροφή θερμοκρασίας

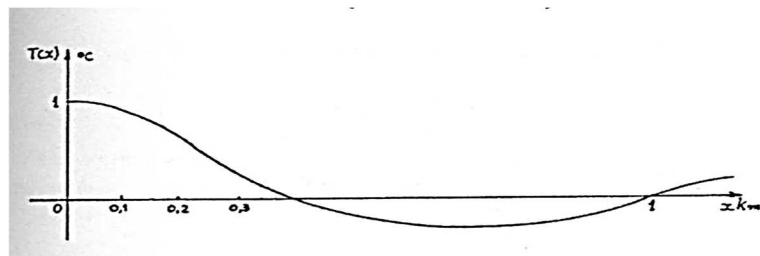
Η θερμοκρασία θ του ατμοσφαιρικού αέρα είναι συνάρτηση του ύψους x από την επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή είναι $\theta = T(x)$. Κάτω από ομαλές συνθήκες η $\theta = T(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση, δηλαδή $\frac{dT(x)}{dx} < 0$. Πολλές φορές παρατηρείται αντιστροφή θερμοκρασίας π.χ. το χειμώνα, στα βουνά πάνω από την ομίχλη και λόγω ηλιοφάνειας η θερμοκρασία του αέρα ανεβαίνει πάνω από το μηδέν, ενώ χαμηλά η θερμοκρασία παραμένει κάτω από το μηδέν. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να περιγραφεί σε μία περιοχή της Δ. Ε. $\frac{dT(x)}{dx} = v(x)$ και $\frac{dv(x)}{dx} = -\alpha T(x) - \beta v(x)$, με $\alpha, \beta > 0$. Αν $\alpha=34$ και βρεθεί η $T(x)$, όταν $T(0)=1$ και $T'(0)=0$. Παραγωγίζοντας την πρώτη Δ.Ε. έχουμε $\frac{d^2T(x)}{dx^2} = \frac{dv(x)}{dx}$, όποτε η δεύτερη δίνει $\frac{d^2T(x)}{dx^2} = -34T(x) - 6 \frac{dT(x)}{dx}$, ή $\frac{d^2T(x)}{dx^2} + 6 \frac{dT(x)}{dx} + 34T(x) = 0$, η οποία είναι γραμμική 2ης τάξης του ομογενούς με σταθερούς συντελεστές: Έχουμε $\lambda^2 + 6\lambda + 34 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3 + 5i$, $\lambda_2 = -3 - 5i$. Άρα, η γενική λύση είναι $T(x) = c_1 e^{-3x} \sin 5x + c_2 e^{-3x} \cos 5x$. Επειδή $T(0)=1$ προκύπτει ότι $c_1=1$.

Παραγωγίζοντας $T'(x) = (5c_2 - 3c_1)e^{-3x} \sin 5x + (-5c_1 - 3c_2)e^{-3x} \cos 5x$. Και αφού $T'(0)=0 \Rightarrow 5c_2 - 3c_1 = 0$, οπότε $c_2 = \frac{3}{5}$ δηλαδή: $T(x) = e^{-3x}(\sin 5x + \frac{3}{5} \cos 5x)$.

Η θερμοκρασία παρουσιάζει ταλάντωση. Αν $B=0$, η ταλάντωση είναι αρμονική.

Αν η δεύτερη Δ.Ε. είναι της μορφής $\frac{dv(x)}{dx} = \alpha T(x) - \beta v(x) + \gamma$,

με $\alpha=25$ και $\beta=0$, τότε παίρνουμε τη Δ.Ε. $T''(x) + 25T(x) = \gamma$, με γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x$ (αφού $\lambda^2 + 25 = 0$) και μερική λύση την



$k_1(x)e^{5ix} + k_2(x)e^{5ix}$, όπου : $k'_1(x) = \frac{\gamma}{10i} e^{-5ix}$ και $k'_2(x) = \frac{-\gamma}{10i} e^{5ix}$. Τότε $k_2(x) = \frac{\gamma}{50} e^{5ix}$. Άρα η γενική λύση της είναι
 $T(x) = c_1 \sin 5x + c_2 \eta \mu 5x + \frac{\gamma}{25}$, με $c_1 = 0$ και $c_2 = 1 - \frac{\gamma}{25}$.

35. Ανάπτυξη παρασίτων

Σε δύο εστίες στο ανθρώπινο σώμα υπάρχουν δύο πληθυσμοί $x_1(t)$, $x_2(t)$ του ίδιου παρασιτικού οργανισμού, με μέσο ρυθμό μεταβολής a_1 και a_2 , αντίστοιχα. Να βρεθεί και να λυθεί η Δ.Ε. την οποία επαληθεύει ο πληθυσμός του παρασιτικού οργανισμού αυτού. Να γίνει η επαλήθευση.

Έστω $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ο ολικός πληθυσμός του παρασιτικού οργανισμού. Είναι τότε

$$x'(t) = x'_1(t) + x'_2(t) \quad (1),$$

$$x''(t) = x''_1(t) + x''_2(t) \quad (2)$$

$$\text{Επίσης } \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{1}{x_i(t)} = a_i, \quad i = 1, 2, \text{ ή } x'_i(t) = a_i x_i(t) \quad (3).$$

Από τις (3) $\Rightarrow x_i(t) = \frac{x_i(t)}{a_i}$, $i=1,2$, οπότε $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{x'_1(t)}{a_1} + \frac{x'_2(t)}{a_2}$, ή $a_1 a_2 x(t) = a_2 x'_1(t) + a_1 x'_2(t)$. Προσθέτοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας το Ψ . Έχουμε $a_1 x'_1(t) + a_2 x'_2(t) + a_1 a_2 x(t) = (a_1 + a_2)(x'_1(t) + x'_2(t))$ και λόγω της (1): $a_1 x'_1(t) + a_2 x'_2(t) + a_1 a_2 x(t) = (a_1 + a_2)x'(t) \quad (4)$.

Η (3) με παραγωγή δίνει $x''_1(t) + a_1 x'_1(t)$, $x''_2(t) = a_2 x'_2(t)$ και προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές, έχουμε ότι $x''_1(t) + x''_2(t) = a_1 x'_1(t) + a_2 x'_2(t) = x''(t)$ λόγω της (2)

Η (4) γίνεται $x''(t) - (a_1 + a_2) x'(t) + a_1 a_2 x(t) = 0$, (5) που είναι γραμμική ομογενής Δ.Ε. 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Έχουμε $\lambda^2 - (a_1 + a_2)\lambda + a_1 a_2 = 0$ και άρα $\lambda_i = a_i$ είναι οι ρίζες του τριωνόμου αυτού. Άρα το γενικό ολοκλήρωμα της (5) είναι: $x(t) = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t}$. (6).

Στην (6) καταλήγουμε και αν ολοκληρώσουμε καθεμία από τις (3) και προσθέσουμε τις λύσεις τους $\int \frac{dx_i(t)}{x_i(t)} = a_i \int dt \Rightarrow \ln x_i(t) = a_i t + k_i$, ή $x_i(t) = c_i e^{a_i t}$, $i = 1, 2$. Δηλαδή $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t}$. Έτσι, το σύστημα των γραμμικών Δ.Ε. (3) (που μπορούν να λυθούν και χωριστά η καθεμία) ανάγεται στη Δ.Ε. (5).