



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Το μαθηματικό άπειρο



Σπουδάστρια: Κανάλη Μαρία (AM 7661)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2020 – 2021

Ημερομηνία ανάθεσης: 11/ 06/ 2019.
Ημερομηνία κατάθεσης: ... / 06/ 2021
Ημερομηνία εξέτασης: /06/ 2021

A/A	Όνοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός, Καθηγήτρια		
3	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Πρόλογος	4
1. Τι είναι το άπειρο;.....	4
1.1 Το άπειρο στην καθημερινότητα.....	5
1.2 Ο ορισμός ενός λεξικού	6
1.3 Το σύμβολο του απείρου.....	7
1.4 Πολύ μεγάλο και πολύ μικρό	8
1.5 Άπειρον	9
1.6 Δυνάμει άπειρο και ενεργεία άπειρο.....	10
1.7 Το άπειρο και οι πατέρες της εκκλησίας.....	12
1.8 Οι φλόγες του απείρου	12
1.9 Το άπειρο στην εκπαίδευση	12
1.10 Παγιδεύοντας το χρόνο	13
1.11 Ο «Ψαμμίτης» του Αρχιμήδη.....	16
1.12 Ένα παράξενο παιχνίδι.....	16
1.13 Τα παράδοξα του Ζήνωνα.....	16
1.13.1 Η παράδοξη σκέψη.....	17
1.13.2 Η διχοτόμηση	18
1.13.3 Ο Αχιλλέας και η χελώνα	18
1.13.4 Το ιπτάμενο βέλος.....	18
1.13.5 Το στάδιο.....	18
1.13.6 Ζήνων, μία ξεχασμένη ιδιοφυΐα	21
1.14 Ο τετραγωνισμός του κύκλου	22
1.14.1 Ο διαβήτης του Mascheroni	23
2. Συναντήσεις στο άπειρο.....	23
2.1 Η τρισδιάστατη ζωγραφική.....	23
2.1.1 Το πνεύμα της Αναγέννησης.....	24
2.1.2 Από την προοπτική στην προβολική γεωμετρία	25
2.2 Συνεχείς μετασχηματισμοί.....	25
2.3 Τετραγωνισμοί	28
2.4 Εύδοξος.....	29
2.4.1 Ολοκλήρωση με το «χέρι»	32
2.4.2 Ο Εύδοξος και η αστρολογία.....	32
2.5 Kepler.....	33
2.5.1 Τα βαρέλια του Kepler	33
2.6 Γαλιλαίος.....	34
2.7 Bonaventura Cavalieri (1598-1647).....	35
2.7.1 Το θεώρημα του Cavalieri	35
2.8 Καρτέσιος.....	36

Πρόλογος

Ο Γάλλος συγγραφέας Alphonse Allais (1854–1905) έλεγε, με μία ορισμένη αίσθηση του χιούμορ *«Το άπειρο είναι μακρύ, ειδικότερα προς το τέλος»*, κάτι που σημαίνει πως στην οπτική μας για το άπειρο υπάρχει μία κάποια εγγύτητα. Με άλλα λόγια, μπορούμε να το δούμε μόνο από «εδώ», από το σημείο όπου βρισκόμαστε, εμείς, όντα περιορισμένα, με την πεπερασμένη μας ιδιότητα. Όταν κοιτάζουμε μακριά, αρχίζουμε να χανόμαστε μέσα σε φιλοσοφικές θεωρήσεις, σε ασυναρτησίες, σε εικασίες που μας οδηγούν τελικά, στη καλύτερη των περιπτώσεων, στο να υιοθετήσουμε μια πνευματική θέση, δηλαδή μια απλή στάση απέναντι στο ζήτημα αυτό. Δεν προξενεί επομένως εντύπωση το γεγονός πως το άπειρο ήταν, είναι και θα είναι ένα θέμα φιλοσοφικού, θρησκευτικού και επιστημονικού στοχασμού, τριών τομέων της ανθρώπινης σκέψης που δεν υπήρξαν πάντα σαφώς καθορισμένοι.

Για πολλούς, το πρώτο πράγμα που δημιουργεί η ιδέα του άπειρου είναι ένα αίσθημα ιλίγγου, μία αίσθηση πως βρισκόμαστε απέναντι από κάτι που, ό,τι και να κάνουμε, τελικά θα μας ξεφύγει. Και αυτό είναι αλήθεια. Ίσως αυτό είναι το μεγαλύτερο ενδιαφέρον του, ως πηγή δημιουργίας, αόριστη φυσικά. Η ιστορία του άπειρου στα μαθηματικά είναι τόσο ενδιαφέρουσα και πλούσια ώστε να μιλάμε για τα «μαθηματικά του άπειρου», που σημαίνει μια έννοια τόσο ασαφής μπόρεσε να αναδειχθεί σε μαθηματικό αντικείμενο, όπως οι αριθμοί και τα γεωμετρικά σχήματα.

Ένα μαθηματικό αντικείμενο είναι ουσιαστικά ένα αντικείμενο σαφώς ορισμένο. Ο μαθηματικός μπορεί να παρομοιαστεί με ένα κυνηγό: εξερευνεί άγνωστα εδάφη, παραφυλάει, παρατηρεί τη λεία, περιμένει, την τοποθετεί ακριβώς μέσα στο στόχαστρο, και μετά πυροβολεί. Αυτή είναι η ιστορία του άπειρου στα μαθηματικά.

Χρειάστηκαν περισσότερα από 3.000 χρόνια για να νικηθεί αυτή η λεία. Έκανε το δρόμο της ανάμεσα σε δόγματα και παράδοξα, περιπλανώμενη στους τομείς της ελληνικής φιλοσοφίας, των θρησκευτικών υποθέσεων και ανάμεσα στα πιο σκοτεινά μυστικά των σχέτων μύησης. Βρέθηκε επίσης ανάμεσα στα αντικείμενα της γεωμετρίας και στο λαβύρινθο των αριθμών, χώρους που ταιριάζουν περισσότερο στο κυνήγι. Μπορούμε να ακολουθήσουμε τα ίχνη του άπειρου μέσα στο πνεύμα των μεγαλύτερων στοχαστών όλων των πολιτισμών, είτε αυτοί ήταν φιλόσοφοι, θεολόγοι, φυσικοί ή μαθηματικοί, στην καρδιά μιας περιπέτειας γεμάτης κινδύνους.

Ορισμένοι πλήρωσαν την περιπέτεια αυτή με την τρέλα, άλλοι έπαιξαν κυριολεκτικά τη ζωή τους και κατέληξαν να καταδικαστούν από φανατικές σχέτες ή ρίχτηκαν στη πυρά από αδιάλλακτες θρησκείες. Και όλα αυτά για κάτι που τελικά, είναι μία απλή ιδέα. Ξέρουμε, όμως, πως μια ιδέα μπορεί να επηρεάσει αποφασιστικά τον τρόπο αντίληψης του μέλλοντος μας, πέρα από την ίδια την ύπαρξή μας, και συνεπώς να ταραξεί τα θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζονται οι πεποιθήσεις όλων των πολιτισμών. Σε κάθε περίπτωση, είναι ένα θέμα που επηρεάζει κατά κάποιο τρόπο την οπτική μας για τον κόσμο και ενδιαφέρει επομένως όχι μόνο τους μαθηματικούς αλλά και τους φιλοσόφους. Αυτές οι δυο οπτικές πρέπει να έρθουν σε διάλογο μεταξύ του γιατί, όπως είπε κάποτε ο Γάλλος μαθηματικός Jean–Charles de Borda (1733–1799) *«Χωρίς τα μαθηματικά δεν φτάνουμε στο βάθος της φιλοσοφίας. Και χωρίς αυτά τα δύο, δε φτάνουμε σε κανένα βάθος.»*

1. Τι είναι το άπειρο;

Το άπειρο είναι μια έννοια εγγενής της ανθρώπινης σκέψης. Πολύ πιθανό να γεννιόμαστε με μια ασαφή νοητική αντίληψη του άπειρου που γρήγορα συνδέουμε με το αντίθετο της, τη σαφή αντίληψη του πεπερασμένου της ίδιας μας της φύσης. Στη φιλοσοφία ή στη θεολογία, ο στοχασμός πάνω στο άπειρο μπορεί να είναι

συγκυριακός, στα μαθηματικά όμως, η εξερεύνηση του απείρου ήταν και παραμένει μια αναγκαιότητα.

1.1 Το άπειρο στην καθημερινότητα

Γνωρίζετε ίσως το ανέκδοτο με τον καθηγητή των μαθηματικών που εξήγησε για πρώτη φορά το άπειρο μέσα στην τάξη. Πήρε ένα κουτί κιμωλίες και άρχισε να σχεδιάζει μια γραμμή στον πίνακα. Όταν έφτασε στην άκρη του, συνέχισε τη γραμμή στον τοίχο, μετά στο πάτωμα και έτσι, χωρίς να σταματήσει, βγήκε από την αίθουσα και χάθηκε στο βάθος του διαδρόμου χωρίς να αφήσει ποτέ την κιμωλία του. Έκπληκτοι οι μαθητές περίμεναν να συμβεί κάτι. Ο καθηγητής είχε εξαφανιστεί. Ένας φύλακας ήταν ο τελευταίος που τον είδε να κατεβαίνει το δρόμο αφήνοντας πίσω του μια γραμμή λευκής κιμωλίας στους τοίχους των σπιτιών. Τρεις μέρες πέρασαν και η διεύθυνση του κολλεγίου αποφάσισε να τον αντικαταστήσει.

Μετά από μερικούς μήνες, ο καθηγητής εμφανίστηκε ξαφνικά την ώρα του μαθήματος των μαθηματικών. Είχε ένα σακίδιο στην πλάτη, μακριά γενειάδα και φυσικά, ένα μικρό κομμάτι κιμωλίας στο χέρι. Μπήκε στην αίθουσα με μεγάλες δρασκελιές διαγράφοντας μια γραμμή στο πάτωμα, μετά στον τοίχο, ώσπου έφτασε και στο πίνακα και τότε σταμάτησε. Εμφανώς καταβεβλημένος, απευθύνθηκε στους μαθητές του λέγοντας *«Ορίστε μια απίστευτα μακριά γραμμή, αλλά αυτό δεν είναι τίποτα μπροστά στο άπειρο»*.

Αγνοούμε τι αποφάσισε η διεύθυνση για τον καθηγητή ή αν τον έστειλαν απευθείας στο άσυλο. Αγνοούμε επίσης εάν οι μαθητές του κατάλαβαν καθαρά το είναι το άπειρο. Αυτό για το οποίο θα μπορούσαν όμως να είναι βέβαιοι, είναι πως το άπειρο εμπεριέχει κάτι εξαιρετικό, για να μην πούμε τραυματικό. Υπάρχουν πολλές ιστορίες, όλες μοναδικές, που επιχειρούν να μας κάνουν να συλλάβουμε τι είναι το άπειρο. Στο θρησκευτικό τομέα, συνήθως γίνεται αναφορά στο χρονικό άπειρο, που αποκαλείται κοινός αιωνιότητα, όταν μιλάμε για αιώνιες τιμωρίες. Το καθαρτήριο μπορεί να έχει μεγάλη διάρκεια, αλλά δε μπορούσε να είναι αιώνιο. Η κόλαση, αντιθέτως, διαρκούσε άπειρο χρόνο. Για να δοθεί μία ιδέα για το τι σήμαινε αυτό, γινόταν υπαινιγμός σε τιτάνιες εργασίες, για παράδειγμα στη συλλογή των κόκκων άμμου μιας τεράστιας παραλίας, συλλέγοντας ένα κόκκο κάθε εκατό αιώνες.

Ένα από τα πιο περίεργα σενάρια για την απεικόνιση αυτού που θα μπορούσε να είναι η αιωνιότητα, είναι το εξής: ας φανταστούμε πως η Γη είναι μια συμπαγής σφαίρα από χάλυβα και πως μία φορά κάθε δέκα εκατομμύρια χρόνια, ένα περιστέρι χαϊδεύει απαλά την επιφάνειά της. Όταν η σφαίρα θα έχει μετατραπεί σε ένα μικροσκοπικό σημείο από τη φθορά, θα έχει περάσει η αιωνιότητα, ή για την ακρίβεια μια αιωνιότητα. Αυτά τα παραδείγματα δίνονταν στα παιδιά για να αποκτήσουν μια ιδέα, δυστυχώς πάντα απειλητική, για το τεράστιο μέγεθος του απείρου. Το πρώτο μου «όραμα» για το άπειρο χρονολογείται από την παιδική μου ηλικία, όταν βρέθηκα για πρώτη φορά ανάμεσα στους δύο παράλληλους καθρέφτες ενός ασανσέρ. «Τι είναι αυτό;», ρώτησα. Ο πατέρας μου με πήρε από το χέρι και μου απάντησε απλά «Είναι το άπειρο». Από τη μέρα εκείνη, το άπειρο είναι για μένα ένα τοπίο, τρομακτικό ή συναρπαστικό ανάλογα με την οπτική γωνία, όπου είναι καλύτερα να περιπλανάται κανείς δίνοντας το χέρι σε κάποιον άλλο.

Για όλους εμάς, το άπειρο πρέπει να βρίσκεται κάπου εκεί πέρα, σε ένα μέρος εντελώς μη προσπελάσιμο, που στην καλύτερη περίπτωση δημιουργεί ένα ορισμένο δέος και που στη χειρότερη, μπορεί να προξενήσει έναν κοσμικό τρόμο. Από την άλλη όμως πλευρά, η εναλλακτική του απείρου δεν είναι και πολύ ενθαρρυντική. Αν το σύμπαν είναι πεπερασμένο, τι υπάρχει μετά τα όρια του; Απάντηση: το Τίποτα. Με Τ κεφαλαίο. Αυτή είναι μία έννοια ακόμα λιγότερο από αυτήν του απείρου.



Πίνακας του Gustave Doré που αναπαριστά την Κόλαση, το 1^ο μέρος της Θείας Κωμωδίας του Dante Alighieri. Η κόλαση αντιπροσωπεύει την αιώνια οδύνη, την τιμωρία χωρίς τέλος.

1.2 Ο ορισμός ενός λεξικού

Μέχρι ενός σημείου, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε πως ο όρος «άπειρο» είναι μια λέξη λόγια, αφού περιέχει φιλοσοφικές έννοιες μεγάλου εύρους. Ωστόσο, την χρησιμοποιούμε συχνά στην καθομιλουμένη γλώσσα και αναφερόμαστε σε αυτήν αμέτρητες φορές «ο άπειρος χώρος», «άπειρες φορές», «άπειρος χρόνος», «άπειρη υπομονή», είναι όλες εκφράσεις που χρησιμοποιούμε με μεγάλη ευκολία. Καταλαβαίνουμε όλοι τι θέλουν να πουν, όσο δε σκαλίζουμε πολύ τη σημασία τους.

Εάν όμως θέλουμε να το κάνουμε, δεν θα αργούσαμε να αντιληφθούμε πως η ικανότητα στοχασμού μας σχετικά με την έννοια του απείρου αποδυναμώνεται πολύ γρήγορα και αρχίζουμε να χρησιμοποιούμε «στερεότυπα» που στην πραγματικότητα δεν εξηγούν πολλά, αλλά μάλλον τίποτα απολύτως. Η έννοια αυτή είναι αναπόφευκτα φιλοσοφικής φύσης: στοχάζομαι πάνω στο άπειρο σημαίνει φιλοσοφώ, όμως θα πρέπει να έχει κανείς κάποια προδιάθεση για να το κάνει και κυρίως, να βρει ένα οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης. Σε αυτήν την περίπτωση, το πιο απλό πράγμα που μπορεί να κάνει κανείς είναι να συμβουλευτεί τα λεξικά. Εκεί θα βρει διαφορετικούς ορισμούς του όρου (αρχ. Άπειρον).

1. Επίθετο. Αυτό που δεν έχει και δε μπορεί να έχει τέλος ή όριο.
2. Επίθετο. Πολύ μεγάλο σε αριθμό ή διαστάσεις, που μοιάζει να μην τελειώνει ποτέ.
3. Ουσιαστικό ουδέτερο. Τόπος αόριστος, μακρινός και ακαθόριστος. Πχ. Ο δρόμος χανόταν στο άπειρο.
4. Ουσιαστικό ουδέτερο. Μέγιστη ρύθμιση της εστίασης ενός φακού φωτογραφικής μηχανής σε αυτό που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση.
5. Ουσιαστικό ουδέτερο. Μαθ. Τιμή ανώτερη από ό,τι είναι ποσοτικοποιήσιμο.
6. Ουσιαστικό ουδέτερο. Μαθηματικό σύμβολο (∞) που ορίζει την τιμή αυτή.

Ας αναλύσουμε αυτές τις έννοιες χωρίς να αμφισβητήσουμε τη γλωσσολογική τους ερμηνεία, προσεγγίζοντας όμως όσο το δυνατό περισσότερο τη μαθηματική τους σημασία. Ο 1^{ος} ορισμός αναφέρεται σε κάτι που δε μπορεί να έχει τέλος ή όριο. Θα κάνουμε στο σημείο αυτό ορισμένες παρατηρήσεις. Κατ' αρχάς, ο ορισμός δεν επιβεβαιώνει απλά πως το άπειρο δεν έχει όριο, αλλά και πως δεν μπορεί να έχει και αυτή είναι μία πολύ λεπτή διαφορά. Αν πούμε πως το άπειρο δεν έχει τέλος, δηλώνουμε δυο πράγματα εμμέσως, πως το άπειρο υπάρχει και σαφώς πως δεν έχει

τέλος. Δεύτερον, όταν λέμε πως δεν μπορεί να έχει τέλος, παραδεχόμαστε πως στην περίπτωση που υπήρχε, δεν θα μπορούσε να τελειώνει. Αυτή η διαφορά μοιάζει τραβηγμένη από τα μαλλιά, περικλείει όμως πράγματι τις έννοιες του δυνάμει και του ενεργεία απείρου.

Ο 2^{ος} και ο 3^{ος} ορισμός αναφέρονται σε αντιλήψεις ή αισθήσεις.

Ο 4^{ος} αναφέρεται σε ένα τεχνικό ζήτημα γεωμετρικής τάξης που αντιπροσωπεύει ένα ξεχωριστό γεγονός στην ιστορία των μαθηματικών, όταν το άπειρο ερμηνευόταν ως ένα σημείο που συναντιούνται παράλληλες ευθείες.

Ο 6^{ος} αφορά το σύμβολο που χρησιμοποιούμε για το άπειρο και για το οποίο θα μιλήσουμε αργότερα.

Ο 5^{ος}, «Τιμή ανώτερη από ότι είναι ποσοτικοποιήσιμο», είναι αυτός που πλησιάζει περισσότερο στην έννοια του απείρου στα μαθηματικά. Αυτές οι θεμελιώδεις έννοιες παραμένουν συνδεδεμένες με την ιδέα μιας ατέλειωτης αύξησης, τόσο στο χώρο όσο και στο χρόνο, το αντικείμενο όμως στο οποίο εφαρμόζεται η ιδέα αυτή είναι υπερβολικά σαφές. Ο όρος χρησιμοποιείται συχνότερα ως επίθετο παρά ως ουσιαστικό. Όταν λέμε «αιώνια αγάπη», αναφερόμαστε στη χρονική πτυχή της έννοιας του απείρου και αυτό σημαίνει ακραία πίστη. Όταν λέμε όμως πως το σύμπαν είναι άπειρο, μιλάμε για «χωρική απεραντοσύνη». Αυτό παραμένει κάτι αδιευκρίνιστο και μας φέρνει στο νου τη παρατήρηση ενός νυχτερινού ουρανού μια νύχτα χωρίς φεγγάρι, με εκατομμύρια αστέρια σε ένα φόντο φαινομενικά σκοτεινό στο οποίο αποδίδουμε αυτήν την ανησυχητική διάσταση του απείρου.

Αν θέλουμε να προσεγγίσουμε το θέμα του απείρου, θα πρέπει να βρούμε ένα αντικείμενο όσο το δυνατό πιο συγκεκριμένο, ακόμα και αν αυτό φαντάζει παράδοξο δεδομένου του βαθμού αφαίρεσης που φαίνεται να έχουν τα μαθηματικά. Το καλύτερο σημείο εκκίνησης είναι η σειρά των φυσικών ακέραιων. Πράγματι δεν υπάρχει τίποτα πιο φυσικό από έναν ακέραιο και σε κάθε εξελιγμένο πολιτισμό, όλος ο κόσμος κατανοεί σε τι αναφερόμαστε όταν μιλάμε για τη σειρά 1,2,3 ... των ακέραιων φυσικών αριθμών. Πότε τελειώνει αυτή η σειρά; Η άμεση απάντηση είναι: ποτέ. Και γιατί δεν τελειώνει ποτέ; Επειδή μπορούμε πάντα να της προσθέτουμε έναν αριθμό. Είναι μια ορθή απάντηση, στο βαθμό που συνιστά έναν αρκετά ακριβή ορισμό του όρου «άπειρο», όπως θα δούμε στη συνέχεια. Σε κάθε περίπτωση, η απάντηση «ποτέ» εμπεριέχει εμμέσως μία χρονική πτυχή, επιπλέον της αριθμητικής.

Αυτό ισοδυναμεί με το να πούμε πως μπορούμε «πάντα» να προσθέτουμε αριθμούς. Ας το κάνουμε χρονομετρώντας και θα πρέπει τότε να παραδεχτούμε πως όχι μόνο η αριθμητική σειρά είναι άπειρη, αλλά το ίδιο συμβαίνει και με το χρόνο. Αυτή η σύγχυση συχνά αποδείχτηκε σοβαρό μειονέκτημα κατά την αντιμετώπιση του ζητήματος του απείρου.

1.3 Το σύμβολο του απείρου

Στην κάρτα ταρό του Μάγου, αυτός φέρει πάνω από το κεφάλι του το σύμβολο του απείρου. Το φωτοστέφανο, το στεφάνι που αιωρείται πάνω από το κεφάλι των αγίων, αντιπροσωπεύει την αιωνιότητα. Στα λατινικά, η λέξη caelum σημαίνει τόσο «ουρανός» όσο και «κύκλος» και ως καμπύλη χωρίς τέλος είναι ένα δρόμος που μπορεί κανείς να διασχίσει άπειρες φορές και που επομένως μπορεί να αντιπροσωπεύει την αιωνιότητα. Ομοίως, σε ορισμένα μη θρησκευτικά πλαίσια, το σύμβολο του απείρου χρησιμοποιήθηκε ως σύμβολο της αγιότητας, στη θέση του κύκλου. Στις περισσότερες εκδόσεις ταρό, το σύμβολο του απείρου εμφανίζεται στην 1^η κάρτα, πάνω από το κεφάλι του Μάγου. Αυτό το σύμβολο, που πολλοί περιγράφουν σαν ένα «πλάγιο οκτώ», είναι στην πραγματικότητα η καμπύλη που ονομάζεται «λημνίσκος του Bernoulli» και εισήχθη από τον Βρετανό μαθηματικό

John Wallis (1616–1703). Μία άλλη εκδοχή λέει πως προέρχεται από το γράμμα M, σύμβολο του αριθμού χίλια, πρόχειρα γραμμένο και που ο Wallis, που ήταν φιλόλογος, υιοθέτησε για να συμβολίσει έναν πολύ μεγάλο αριθμό.



1.4 Πολύ μεγάλο και πολύ μικρό

Ας κάνουμε ένα μικρό οπτικό πείραμα. Ας υποθέσουμε πως διαθέτουμε μία μπάλα που έχει την εξής ιδιότητα: κάθε φορά που αναπηδά στο έδαφος, ανεβαίνει καθ' ύψος ίσο με το μισό του ύψους από το οποίο την αφήσαμε να πέσει. Για παράδειγμα, αν την αφήσουμε να πέσει από 2 m ύψος, θα αναπηδήσει 1 m, μετά 50 cm, και ούτω καθ' εξής. Ας θέσουμε τώρα το εξής πρόβλημα: ας αφήσουμε τη μπάλα να πέσει από ύψος 10 m. Όταν πάψει να αναπηδά, ποια θα είμαι η απόσταση που θα έχει διανύσει; Δεν μπορούμε να πούμε πως αυτή η διατύπωση δεν είναι πραγματική.

Γνωρίζουμε σαφώς πως η μπάλα θα σταματήσει τελικά να αναπηδά, πως δε μπορεί να το κάνει για πάντα, ωστόσο, μπορούμε να πούμε πως η απόσταση που θα έχει διανύσει είναι άπειρη, αφού μπορούμε να διαιρούμε επ' άπειρο το ύψος δια δύο, λαμβάνοντας κάθε φορά ένα μικρότερο ύψος, όσο μικρό μπορούμε να φανταστούμε.

Αυτό είναι ένα τυπικό παράδοξο, που συνδέεται με το άπειρο και στο οποίο θα εμβαθύνουμε αναλυτικότερα στη συνέχεια, το οποίο μας εισάγει σε ένα νέο τομέα, αυτόν του απείρως μικρού.

Μία μπάλα σταματά να αναπηδά κάποια δεδομένη στιγμή ή οι αναπηδήσεις της είναι, επ' άπειρον, όλο και πιο μικρές και αδιόρατες;



Η ιδέα της απεραντοσύνης επομένως δεν είναι η μόνη που μπορούμε να συνδέσουμε με το άπειρο, υπάρχει και το απείρως μικρό. Ας πάρουμε ένα τμήμα ευθείας και ας το διαιρέσουμε δια δύο, στη συνέχεια ας διαιρέσουμε ξανά το ένα από τα δύο μέρη δια δύο, και ούτω καθ' εξής, χωρίς να σταματήσουμε. Μπορούμε τουλάχιστον θεωρητικά, να το διαιρέσουμε επ' άπειρο λαμβάνοντας κάθε φορά μικρότερα τμήματα. Η διαδικασία αυτή έχει τέλος; Όχι. Όπως για τη σειρά των φυσικών αριθμών, στην οποία μπορούμε πάντα να προσθέτουμε έναν αριθμό, στο παράδειγμα αυτό, μπορούμε πάντα να διαιρούμε το νέο τμήμα για δύο. Έτσι, το άπειρο παραπέμπει τόσο σε αυτό που είναι μεγάλο, όσο και σε αυτό που είναι πολύ μικρό. Αποκαλούμε αντίστοιχα τις δύο αυτές ενέργειες «άπειρη έκταση» και «διεργασία άπειρης διαιρετότητας».

1.5 Άπειρον

Βρίσκουμε τις πρώτες αναφορές σε υποθέσεις ή στοχασμούς πάνω στο θέμα του απείρου, στον ελληνικό πολιτισμό, όπως κάθε φορά που αναζητούμε πρωτότυπα φιλοσοφικά θεμέλια. Είναι ευρέως γνωστό πως μια από τις πολλές ποιότητες των Ελλήνων φιλοσόφων είναι το γεγονός πως δημιούργησαν τη φιλοσοφική γλώσσα.

Κατασκεύαζαν μια συγκεκριμένη λέξη για να αναπαραστήσουν μια ιδέα, καταρτίζοντας έτσι αυτό που μπορούμε να αποκαλέσουμε μία φιλοσοφική ορολογία με ακρίβεια που μπορεί να συγκριθεί με την επιστημονική ορολογία, που είναι σε τελική ανάλυση η κληρονόμος της πρώτης. Σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση, η λέξη κλειδί ήταν το «άπειρον», όρος που προέρχεται από τα πέρατα, δηλαδή «το όριο κάποιου πράγματος». Έτσι ότι δεν έχει πέρατα είναι άπειρο, χωρίς όριο.

Στην ελληνική φιλοσοφία, η έκφραση «χωρίς όριο» λαμβάνει ιδιαίτερη σημασία που δεν παραπέμπει τόσο στην ιδέα της άπειρης έκτασης όπως την αντιλαμβανόμαστε με τη σημερινή γλώσσα, αλλά περισσότερο σε αυτήν της προέλευσης όλων όσων υπάρχουν. Η υποκείμενη ιδέα είναι πως κάθε πράγμα υπάρχει σε συνάρτηση με τα όρια του. Όταν σκεφτόμαστε ένα οποιοδήποτε αντικείμενο, ένα τραπέζι για παράδειγμα, αυτό που παρατηρούμε πρώτα, ακόμα και πριν τη λειτουργικότητά του, είναι τα όρια που το ορίζουν και το διαχωρίζουν από το υπόλοιπο περιβάλλον. Αυτή η ιδέα ισχύει τόσο για τα άψυχα, όσο και τα έμβια όντα. Ένα ζωντανό κύτταρο υπάρχει μέσω της μεμβράνης που του επιβάλλει όρια με το περιβάλλον του. Εφόσον έτσι έχουν τα πράγματα, μπορούμε να πούμε πως όλα όσα είναι, υπάρχουν στο εσωτερικό των ορίων τους και χάρη σε αυτά.

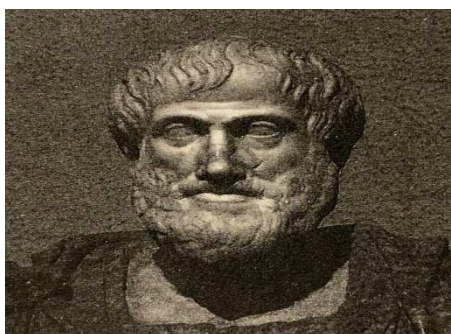
Ως εκ τούτου, το άπειρο μπορεί να ταυτιστεί με ένα αόριστο μάγμα μέσα στο οποίο γεννήθηκε ό,τι υπάρχει χάρη στην εμφάνιση συγκεκριμένων ορίων στο ίδιο το εσωτερικό του μάγματος αυτού. Συνεπώς, ο λόγος ύπαρξης του απείρου έγκειται περισσότερο στο αόριστο παρά στο απεριόριστο. Δεν προκαλεί κατάπληξη το γεγονός πως, κατ' επέκταση και επιπλέον της δύναμης δημιουργίας της απλής ύπαρξης των πραγμάτων, αποδίδεται στο άπειρο και η δύναμη του καθορισμού των λειτουργιών και των ιδιοτήτων των δημιουργημένων πραγμάτων.

Εξ' ου και η ιδέα της σύνδεσης του απείρου και επομένως της ιδέας του χωρίς τέλος, με εκείνη του Θεού μέσα στις διάφορες θρησκευτικές αντιλήψεις. Εξ' ου και ένα ορισμένο διφορούμενο ή αντιφατικό αίσθημα σχετικά με τον όρο αυτό. Το άπειρον, ως προέλευση των όλων, συνδέεται με το αρχικό χάος και επομένως με το κακό, με κάτι αθέλητο, αφού δεν είναι μέρος της ύπαρξης μας. Εξ' ου και το διφορούμενο του χωρίς τέλος που μπορεί να συνδεθεί τόσο με την απρόσιτη θεότητα όσο και με τις ανοργάνωτες και χαοτικές δυνάμεις του κακού με την πιο καθαρή σημασία του όρου. Αυτή η αρνητική πτυχή του απείρου διαιωνίζεται σε όλη τη διάρκεια της ιστορίας του πολιτισμού μας και ο J.L.Borges μιλά γι' αυτήν «ως μια έννοια που διαφθείρει και τρελαίνει τους άλλους». Συνεχίζει «Δε μιλώ για το κακό του οποίου η σαφώς οριοθετημένη επιρροή είναι η ηθική, μιλώ για το άπειρο».

Μία άλλη σημασία του όρου άπειρον, πιο κοντά σε αυτό που εμείς κατανοούμε, είναι αυτή που μας παραπέμπει σε έναν ευκλείδειο χώρο, υπό την έννοια ενός γεωμετρικού χώρου χωρίς όριο. Έτσι, ακολουθώντας τη σκέψη του Πλάτωνα, ο Αριστοτέλης δεν πιστεύει σε ένα χώρο χωρίς όριο. Σύμφωνα με το συλλογισμό του, ένας χώρος είναι ένας τύπος που μπορεί να καταλαμβάνεται από ένα σώμα, ανεξάρτητα από το γεγονός πως τη συγκεκριμένη στιγμή, καταλαμβάνεται ή όχι από ένα σώμα. Ένας χώρος χωρίς όριο θα μπορούσε να καταλαμβάνεται από ένα σώμα χωρίς όριο, κάτι που είναι αδύνατο. Αυτό το σχήμα εξανάγκαζε τη σύλληψη της κίνησης των πλανητών και των άστρων ως κίνηση απολύτως κυκλική, αφού επρόκειτο για συνεχής κινήσεις που, αν ήταν ευθύγραμμες, θα χρειαζόνταν ένα χώρο

χωρίς όριο για να υλοποιηθούν. Ο Κοπέρνικος, ακόμα και ο Kepler, κληρονόμησαν αυτή τη κοσμική διαμόρφωση και συμμερίστηκαν αυτή την οπτική για το χώρο και το άπειρο. Για την ελεατική σχολή στην οποία ανήκαν ο Παρμενίδης (530 π.Χ.–460 π.Χ.) και ο Ζήνωνας (490 π.Χ.–430 π.Χ.), η πραγματικότητα, το σύμπαν, δεν μπορούσε να έχει προέλευση και επομένως ούτε αρχή και τέλος. Για το θέμα αυτό, ο Παρμενίδης έλεγε «... το Όλον είναι ένα, ακίνητο και χωρίς όριο, αφού το όριό του θα ήταν το κενό», κάτι που αποτελεί αδιέξοδο αφού συνεπάγεται την απαλλαγή από το τρόπο του απείρου για να βρεθούμε σε αυτόν του κενού. Υπάρχει μία σειρά εννοιών που δεν κατανοούμε αλλά ωστόσο βρίσκονται εκεί. Δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στον τρόπο του κενού και στο φόβο του απείρου. Στην πραγματικότητα, τα δύο αντισταθμίζονται ακόμα και εάν το άπειρο συνήθως υπερισχύει επειδή, κατά κάποιο τρόπο, μας είναι πιο προσιτό.

Στην αριστοτελική φιλοσοφία, ο άπειρος χώρος δεν έχει περιεχόμενο. Σύμφωνα με τον Έλληνα φιλόσοφο, ο άπειρος χώρος μπορεί να καταλαμβάνεται αποκλειστικά από ένα άπειρο σώμα, κάτι που δεν υπάρχει. Μαρμάρινη προτομή, ρωμαϊκό αντίγραφο της ελληνικής μπρούτζινης προτομής του Λυσίππου, το 330 π.Χ.



Μας είναι αδύνατο να συλλάβουμε το χώρο στον οποίο ζούμε ως πεπερασμένο. Όταν επιχειρούμε να τον φανταστούμε έτσι, η πρώτη ερώτηση που μας έρχεται στο μυαλό είναι «Μα τι υπάρχει μετά;». Η απάντηση δεν μπορεί να είναι «τίποτα». Θα πρέπει τουλάχιστον να υπάρχει χώρος, ακόμα κι αν είναι κενός. Είναι πολύ απλό. Δε γνωρίζουμε το κενό αλλά αντιθέτως, έχουμε την σταθερή παρουσία πραγμάτων που αποτελούν το άπειρο, ακόμα κι αν αυτό το άπειρο είναι φανταστικό.

Αυτό συμβαίνει επειδή το άπειρο δεν είναι μόνο μια ιδέα ή μια έννοια. Το γεγονός πως υπάρχει πάντα, σε όλους τους πολιτισμούς, με όλα τα ερωτήματα που θέτει, υποδεικνύει χωρίς την παραμικρή αμφιβολία πως είναι δικό μας, είτε μας αρέσει είτε όχι, όπως και η ζωή, ο θάνατος, ακόμα και ο χρόνος.

1.6 Δυνάμει άπειρο και ενεργεία άπειρο

Ας υιοθετήσουμε πως σχεδιάζουμε με την κιμωλία στο έδαφος μία γραμμή, ούτως ώστε κάνοντας ένα βήμα μπροστά, να βρισκόμαστε στην άλλη πλευρά της. Είναι μια ενέργεια που μπορούμε «δυνάμει» να κάνουμε. Όταν την κάνουμε και βρισκόμαστε από την άλλη πλευρά της γραμμής, «έχουμε πραγματοποιήσει» τη δυνατότητα αυτή, τη μετατρέψαμε σε ενέργεια. Υπάρχει μία καθαρή διαφορά ανάμεσα σε αυτό που είναι δυνάμει υλοποιήσιμο και στην υλοποιημένη ενέργεια. Θα μπορούσε όμως να συμβεί, για παράδειγμα, τη στιγμή που ξεκινάμε την ενέργεια αυτή, να αισθανθούμε μια ξαφνική ζαλάδα που θα μας εμποδίσει να την υλοποιήσουμε. Είπαμε πως η σειρά των φυσικών ακέραιων 1,2,3,4,... είναι άπειρη.

Αυτό είναι κάτι που κάνεις δεν αμφισβητεί στην αρχή, αφού από κάθε αριθμό n μπορούμε πάντα να σχηματίσουμε τον επόμενο αριθμό $n+1$, ανεξάρτητα από το μέγεθος του αριθμού n . Είναι όμως άλλο να έχουμε τη δυνατότητα να το κάνουμε και άλλο να το κάνουμε. Υπάρχει εδώ μια μικρή διαφορά. Η δυνατότητα να το κάνουμε το «δυνάμει άπειρο». Το να το έχουμε ορίσει το «ενεργεία άπειρο». Θα ήταν ίσως προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις «θεωρητικό άπειρο» για το «δυνάμει άπειρο» και «πραγματικό άπειρο» για το «ενεργεία άπειρο», μολονότι και

αυτές είναι διφορούμενες. Ξέρουμε καλά πως κανείς δε μπορεί να κατασκευάσει τη σειρά όλων των αριθμών. Αληθεύει επίσης πως κανείς δεν είδε ποτέ δυο παράλληλες ευθείες εφόσον είναι άπειρες και στην καλύτερη περίπτωση μπορούμε να δούμε μόνο τμήματά τους. Αυτό σημαίνει πως δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες; Υπάρχουν στο μέτρο όπου υπάρχουν οι ευθείες, όμως μία άπειρη ευθεία υπάρχει πραγματικά;

Ο ίδιος ο Ευκλείδης, στα περίφημα «Στοιχεία» του ασχολούταν με το ζήτημα με μεγάλη σύνεση. Όταν μιλούσε για ευθείες, έλεγε «*τμήματα των οποίων το μήκος μπορεί να είναι όσο μεγάλο θέλουμε*», παραπέμποντας σαφώς στο δυνάμει άπειρο. Η σημασία των όρων «χρονικό άπειρο» ή «ενεργεία άπειρο» δεν είναι ένα απλό ζήτημα επιλογής, γούστου ή συμπάθειας, αλλά πρόκειται για μία φιλοσοφική θέση που δεν έχει τίποτα κοινότοπο. Πρέπει σαφώς να λάβουμε υπόψη πως το δυνάμει άπειρο ήταν το μοναδικό άπειρο που ήταν αποδεκτό στα μαθηματικά και στις επιστήμες εν γένει μέχρι το τέλος του 19^{ου} αιώνα. Ο Αριστοτέλης απαγόρευε ρητά την υιοθέτηση του ενεργεία απείρου από τη σχολή του «*είναι αδύνατο να υπάρχει το άπειρο ως ον εν ενεργεία, ούτε ως ουσία, ούτε ως αρχή*», έγραφε, προσθέτοντας «*είναι σαφές πως η απόλυτη άρνηση του απείρου είναι μία υπόθεση με αδύνατες συνέπειες*», επομένως, το άπειρο «υπάρχει δυνάμει [...] μέσω πρόσθεσης ή διαίρεσης».

Η αριστοτελική διευθέτηση του απείρου δεν επιτρέπει επομένως να θεωρήσουμε ένα τμήμα ως ένα σύνολο ευθυγραμμισμένων σημείων, επιτρέπει όμως να διαιρέσουμε το τμήμα αυτό δια δύο, όσες φορές θέλουμε. Το παρακάτω ερωτηματολόγιο πάνω στην ιδέα του απείρου προτάθηκε σε ένα άτομο μέσης εκπαίδευσης, χωρίς φιλοσοφική ή μαθηματική εξειδίκευση. Οι απαντήσεις του ήταν γρήγορες, χωρίς βαθύτερο στοχασμό, αυθόρμητες και υπαγορευμένες από την «κοινή λογική» που υποθετικά αντικατοπτρίζει το πολιτισμικό μας περιβάλλον.

Ε: Τι είναι το άπειρο;

Απ: Κάτι που δε σταματάει ποτέ.

Ε: Τι σημαίνει αυτό;

Απ: Ότι μπορούμε να μετράμε και να μην σταματάμε ποτέ.

Ε: Γιατί να μην σταματήσουμε ποτέ;

Απ: Γιατί δεν υπάρχει τελικός αριθμός.

Ε: Πως το γνωρίζετε;

Απ: Δεν έχω δοκιμάσει ποτέ. Έτσι νομίζω.

Ε: Επομένως είναι μία πεποίθηση.

Απ: Όχι ακριβώς. Ξέρω πως όσο μεγάλος κι αν είναι ένας αριθμός, θα μπορώ πάντα να του προσθέτω έναν άλλο αριθμό.

Ε: Δε συμφωνώ. Ακόμα κι αν αφοσιωθείτε σε αυτό το έργο, η ζωή σας είναι περιορισμένη και επομένως δε θα μπορείτε να προσθέτετε «πάντα» αριθμούς.

Απ: Τι σημασία έχει; Θα μπορούσαν να αφοσιωθούν σε αυτό γενιές επί γενεών.

Ε: Μα η ζωή επάνω στη Γη είναι επίσης περιορισμένη. Εκ των πραγμάτων, το ηλιακό σύστημα έχει ημερομηνία λήξης.

Απ: Δεν πειράζει. Είναι περιττό να το κάνει κάποιος αυτό, αρκεί που γνωρίζουμε πως μπορεί να γίνει. Ακόμα και αν στη Γη υπήρχαν μόνο δελφίνια, θα μπορούσε να γίνει. Το ότι κάποιος δε μπορεί να κάνει κάτι δε σημαίνει πως δε μπορεί αυτό να υπάρχει.

Ε: Αυτό ισοδυναμεί με την παραδοχή πως το άπειρο είναι κάτι που υπάρχει ανεξάρτητα από εμάς.

Απ: Ακριβώς.

Οι απαντήσεις αυτές αποκαλύπτουν την καρδιά της διαμάχης ανάμεσα στο ενεργεία άπειρο και στο δυνάμει άπειρο. Το άτομο που ερωτήθηκε, υιοθέτησε τελικά σαφώς την αριστοτελική άποψη.

1.7 Το άπειρο και οι πατέρες της εκκλησίας

Κατά το Μεσαίωνα, η διαμάχη σχετικά με το ενεργεία άπειρο δε μπορούσε να λάβει μαθηματικές αποχρώσεις, αφού αποτελούσε αποκλειστική ιδιότητα του Θεού, και επομένως δε μπορούσε να συζητηθεί στο πλαίσιο των θεολογικών φόρα. Όπως έλεγε ο άγιος Αυγουστίνος «*Μόνο ο Θεός και οι σκέψεις του είναι άπειρα*».

Προξενεί ωστόσο εντύπωση το γεγονός πως οι πατέρες οι Εκκλησίας αρνήθηκαν στο Θεό τη δυνατότητα να δημιουργήσει το ενεργεία άπειρο. Στην *Summa Theologiae*, ο άγιος Θωμάς ο Ακινάτης παραδέχεται πως μολοντί ο Θεός είναι παντοδύναμος και απεριόριστος, δε μπορεί να δημιουργήσει απεριόριστα πράγματα. Συμπέρασμα που δε μπορεί να αιτιολογηθεί εντός του θρησκευτικού πλαισίου όπου το τοποθετεί ο άγιος Θωμάς, παρά μόνο αν παραδεχτούμε πως το ενεργεία άπειρο είναι όμοιο με το απόλυτο κακό.

1.8 Οι φλόγες του απείρου

Το 1600, ο Giordano Bruno (1548–1600) διέπραξε ένα «αμάρτημα σκέψης» όταν φαντάστηκε πως ζούμε μέσα σε ένα άπειρο διάστημα που κατοικείται από άπειρους κόσμους. Στη συνέχεια έκανε το λάθος να μιλήσει για αυτό δημόσια, γεγονός που τον οδήγησε στην πυρά. Προηγουμένως, παρέμεινε φυλακισμένος για 7 χρόνια, στη διάρκεια των οποίων υπέστη κάθε είδους προσβολές και βασανιστήρια, γεγονός που αποδεικνύει δύο πράγματα, από τη μία πλευρά, την απόλυτη σιγουριά του Giordano για την ιδέα του περί απείρου και την πίστη του στην ελευθερία σκέψης και από την άλλη πλευρά τον κίνδυνο που σήμαινε η αντίθεση στο πολιτισμικό περιβάλλον σε κάποιες ιστορικές περιόδους. Το θλιβερό παράδοξο της περίπτωσης αυτής είναι πως σήμερα, η επιστημονική κοινότητα κατέληξε να συμφωνεί στο γεγονός πως το Σύμπαν μέσα στο οποίο ζούμε θα μπορούσε να είναι πεπερασμένο.

Συμπέρασμα, μία ιδέα δεν είναι τίποτα περισσότερο από μία ιδέα και μπορούμε να διακινδυνεύουμε το κύρος μας για αυτήν, όχι όμως και τη ζωή μας. Δεν αξίζει τον κόπο.

1.9 Το άπειρο στην εκπαίδευση

Το δυνάμει άπειρο, αποτελεί μέρος των νοητικών μας οικοδομημάτων από τα πρώτα ήδη χρόνια της σχολικής μας εκπαίδευσης. Συνδέεται κυρίως με την ιδέα της καταμέτρησης αντικειμένων και επομένως, με τη σειρά των φυσικών ακεραίων, ή ακόμα με τις κυκλικές διεργασίες που συνδέονται με την πάροδο του χρόνου, η νύχτα διαδέχεται την ημέρα, η ημέρα τη νύχτα και ούτω καθ' εξής. Είναι εν γένει μία νοητική αναπαράσταση που δεν εξελίσσεται και η οποία, εφόσον έρχεται σε σύγκρουση με το ένστικτο, το κάνει χωρίς να προκαλεί σημαντικές πνευματικές κρίσεις. Το **δυνάμει άπειρο**, παραμένει επίσης περίπου σταθερό στις νοητικές μας αναπαραστάσεις αφού δεν απαιτούμε πολλά από αυτό.

Τα πράγματα είναι διαφορετικά με το **ενεργεία άπειρο**. Εισέρχεται πάντα στο προσκήνιο στα μαθηματικά απροειδοποίητα και χωρίς επαρκή προετοιμασία, κάτι που μας αναστατώνει βαθιά και μας βυθίζει συχνά σε συγκρούσεις που δύσκολα μπορούμε να υπερβούμε. Πότε λοιπόν εμφανίζεται σε όλο το εύρος του; Όταν αρχίζει το μάθημα του λογισμού. Έχουν γίνει και εξακολουθούν να γίνονται μελέτες για την αναγνώριση και την αξιολόγηση αυτών των κριτικών στοιχείων στη διδασκαλία των μαθηματικών και ειδικότερα αυτών των μαθημάτων λογισμού. Όταν μιλάμε για λογισμό σε αυτό το πλαίσιο, δεν πρόκειται για τον αριθμητικό λογισμό, ή της αριθμητικής κυριολεκτικά, αλλά για τον απειροστικό λογισμό, έναν τομέα που ξεκινάμε να μελετάμε μόλις σε ηλικία περίπου δεκαεπτά ετών, στο τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και στη συνέχεια κατά τη διάρκεια 3 ή 4 επιπλέον ετών

σπουδών που οδηγούν σε επαγγέλματα τεχνικά ή επιστημονικά. Η εισαγωγή της θεωρίας των συνόλων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, που λανθασμένα αποκαλείται «μοντέρνα μαθηματικά», θεωρήθηκε από πολλούς εκπαιδευτικούς ως πλήρης αποτυχία. Αυτό οφείλεται ίσως στο γεγονός πως η θεωρία αυτή ήταν ενδιαφέρουσα για τη θεμελίωση του θεωρητικού σώματος των μαθηματικών, έχοντας όμως ελάχιστη χρησιμότητα στον τομέα της εφαρμογής της.

Το αποτέλεσμα ήταν πως στα περισσότερα σχολεία, οι καθηγητές περιορίστηκαν στη διδασκαλία πολύ θεμελιωδών εννοιών, όπως το ανήκει σε ένα σύνολο ή η έγκλειστη μεταξύ συνόλων, εννοιών πολύ ενστικτωδών που δεν απαιτούσαν παρά μόνο τη μαθηματική γλώσσα του ίδιου τους του συμβολισμού.

Αποφεύχθηκε όμως ένα ενδιαφέρον μέρος, αυτό που παρέπεμπε στην έννοια του πληθάριμου, δηλαδή του αριθμού των στοιχείων που περιέχει ένα σύνολο και ειδικότερα στην περίπτωση που αυτή εφαρμόζεται σε άπειρα σύνολα.

Μέσα στο πλαίσιο αυτό, μιλάμε πάντα για ενεργεία άπειρο και σε αυτό το σημείο ο μαθητής εισέρχεται σε σύγκρουση με ό,τι θεωρεί «κοινή λογική», αφού καλείται να αποδεχτεί την ύπαρξη συνόλων όπου τα μέρη τους, δηλαδή υποσύνολά τους, ισούνται με το όλο – ενώ ο ίδιος ο Ευκλείδης ανέλαβε να κάνει στα «Στοιχεία» τη σαφή διατύπωση πως «το όλο είναι πιο μεγάλο από το μέρος», όπως φαίνεται να λέει η λογική – ή ακόμα πως ένα οριοθετημένο σύνολο μπορεί να είναι άπειρο, ενώ σύμφωνα με τα όσα κατανοούμε, το άπειρο δεν έχει όριο. Η στοιχειώδης λογική, ή αυτό που αποκαλούμε «ένστικτο», μπορεί να οδηγήσει σε σφάλμα όταν πρόκειται για το ενεργεία άπειρο. Εν όψει ορισμένων εννοιών, συγχέουμε συνήθως την κατανόηση με την πεποίθηση. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές των μαθηματικών έναντι του ενεργεία απείρου είναι παρόμοιο με εκείνο που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές φυσικής έναντι της κβαντικής μηχανικής. Ένα τυπικό παράδειγμα της κβαντικής μηχανικής είναι το εξής. Ας φανταστούμε ένα κουτί με μία μπίλια και δύο τρύπες. Εάν κουνήσουμε το κουτί τυχαία, μπορούμε να ελπίζουμε πως η μπίλια θα πέσει από μία από τις δύο τρύπες. Με ορισμένες κινήσεις, θα μπορούσαμε μάλιστα να πιστέψουμε πως είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την πιθανότητα να πέσει σε μία από τις τρύπες. Αυτό που είναι δύσκολο να δεχτούμε, είναι να πέσει η μπίλια ταυτόχρονα και από τις δύο τρύπες.

Στην κβαντική φυσική, αυτή η πιθανότητα υπάρχει και έρχεται σε σφοδρή σύγκρουση με το ένστικτό μας. Δεν είναι ένα πρόβλημα κατανόησης καθαυτού του φαινομένου, αφού όλοι ξέρουν τι σημαίνει «να πέσει ταυτόχρονα και από τις δύο τρύπες». Μπροστά σε μία τέτοια πιθανότητα, θα ήταν πιο σωστό να πούμε «δεν το πιστεύω» παρά «δεν το κατανοώ». Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και με το ενεργεία άπειρο. Όταν λέμε πως ένα μικροσκοπικό τμήμα μιας ευθείας περιέχει άπειρα σημεία, ξέρομε τι λέμε. Το αν το πιστεύουμε όμως, είναι άλλο.

1.10 Παγιδεύοντας το χρόνο

Λέγεται πως η μεγαλύτερη διαφορά ανάμεσα στην επιστήμη και στην τεχνολογία είναι πως η 1^η αλλάζει τον τρόπο με τον οποίο βλέπουμε τον κόσμο, και η 2^η τον τρόπο ζωής μας. Στο πλαίσιο αυτό, μπορούμε να πούμε πως το μηχανικό ρολόι υπήρξε μία από τις πιο επαναστατικές εφευρέσεις στην ιστορία της ανθρωπότητας και μεταξύ αυτών που άλλαξαν περισσότερο την καθημερινή ζωή.

Χάρη σε μία διάταξη στην οποία τα μαθηματικά παίζουν καθοριστικό ρόλο, ο χρόνος έπαψε να θεωρείται συνεχής διαδικασία και μεταμορφώθηκε σε μία «διακριτή» σειρά διαστημάτων. Τα πρώτα μηχανικά ρολόγια έκαναν την εμφάνισή τους τον 14^ο αιώνα (στην Κίνα, χρονολογούνται από τον 10^ο αιώνα). Σήμερα, ο μηχανισμός τους θα μας φαινόταν υποτυπώδης. Η κινητήρια δύναμη δημιουργούταν

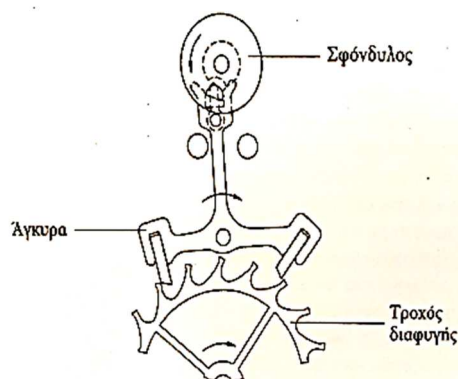
από ένα βάρος που κατέβαινε με τη βαρύτητα και κρεμόταν στο άκρο ενός κορδονιού τυλιγμένου γύρω από έναν κύλινδρο, ούτως ώστε όταν το κορδόνι ξετυλίγεται, το βάρος να περιστρέφει τον κύλινδρο που με τη σειρά του κινεί το μηχανισμό του ρολογιού. Το καντράν και οι δείκτες δεν υπήρχαν ακόμα και οι ώρες σηματοδοτούνταν από ήχους καμπάνας.

Φυσικά μιλάμε για μεγάλα ρολόγια που εξυπηρετούσαν μία συγκεκριμένη κοινότητα. Σε ορισμένες γλώσσες, η λέξη «ρολόι» κατάγεται από τη λέξη καμπάνα (clock στα αγγλικά για παράδειγμα). Οι καμπάνες ενεργοποιούνταν χειροκίνητα από κάποιον που επιτηρούσε το ρολόι. Εννοείται πως η ακρίβεια των ρολογιών αυτών απείχε πολύ από την τελειότητα, όχι μόνο εξαιτίας της ατέλειας του μηχανισμού, αλλά και εξ αιτίας ενός στοιχειώδους φυσικού προβλήματος. Το βάρος που ενεργοποιούσε το μηχανισμό δεν κατέβαινε με σταθερή ταχύτητα, αφού η ταχύτητα του βάρους υπό τη βαρύτητα αύξανε κατά την κάθοδό του. Μία μεγαλοφυής μηχανική εφεύρεση, αποκαλούμενη **διαφυγή**, επέλυσε το πρόβλημα αυτό σε μεγάλο βαθμό. Επρόκειτο για ένα μηχανισμό που αποτελούνταν από έναν οδοντωτό τροχό, μία άγκυρα και ένα εκκρεμές. Η άγκυρα μπλόκαρε τον τροχό διαφυγής με το ένα άκρο της. Όταν ταλαντωνόταν, τον απελευθέρωνε για να τον μπλοκάρει στη συνέχεια με το άλλο άκρο. Η ταλάντωση της άγκυρας επιτυγχανόταν με ένα εκκρεμές. Έτσι προέκυψε το «τικ-τακ» που έκτοτε διέπει την καθημερινότητα των περισσότερων ανθρώπων. Αν επιθυμούσαμε τα ρολόγια αυτά να δίνουν ένα ρυθμό του χρόνου, και μάλιστα ανεξάρτητα από αυτόν, θα έπρεπε να λύσουμε ένα ακόμα σοβαρό πρόβλημα. Το πρόβλημα αυτό προέκυπε από το γεγονός πως οι πρώτες ώρες ήταν πιο μεγάλες από τις τελευταίες, δηλαδή πως το ρολόι προχωρούσε καθώς το κορδόνι ξετυλιγόταν.

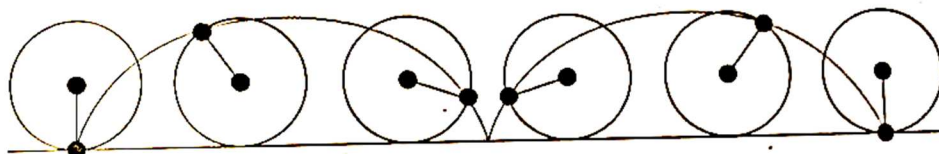
Αυτό οφειλόταν στην κυκλική τροχιά που ακολουθούσε το εκκρεμές. Μπορούμε εύκολα να κατανοήσουμε το φαινόμενο αυτό παρατηρώντας την κίνηση αιώρησης μίας μπίλιας που αφήνεται στο εσωτερικό ενός ημισφαιρίου, όπως μπορούμε να κάνουμε με ένα στρογγυλό μπολ για παράδειγμα. Η μπίλια θα διαγράφει όλο και πιο σύντομες τροχιές και τελικά θα ακινητοποιηθεί, κάτι που ισοδυναμεί με τη διαπίστωση πως φτάσαμε στο τέλος του κορδονιού του ρολογιού. Είναι προφανές πως καθώς το ύψος είναι μεγαλύτερο, θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο για να φτάσει στο κέντρο απ' ό,τι όταν είναι πιο κοντά, αφού η απόσταση που πρέπει να διανύσει στη δεύτερη περίπτωση είναι μικρότερη. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο προχωρά το ρολόι. Το ερώτημα ήταν το εξής: υπάρχει μία καμπύλη για την οποία αυτό δε συμβαίνει, δηλαδή μία καμπύλη της οποίας η κλίση και η απόσταση ως τη βάση είναι τέτοιες ώστε η ταχύτητα πτώσης και η διανυθείσα απόσταση να αντισταθμίζονται;

Θα έπρεπε να είναι μία καμπύλη για την οποία ο χρόνος που χρειάζεται η μπίλια για να φτάσει στη βάση είναι η ίδια, ανεξάρτητα από το ύψος από το οποίο την αφήνουμε να πέσει.

Αυτή η μηχανική διάταξη που ονομάζεται τροχός διαφυγής, βελτίωσε τη μέτρηση του χρόνου. Ο σφόνδυλος παράγει μία κίνηση ταλάντωσης που μετατοπίζει την άγκυρα από τις δύο πλευρές. Με κάθε ταλάντωση η άγκυρα αφήνει τον τροχό να προχωρήσει κατά ένα δόντι, ρυθμίζοντας έτσι την κίνηση του μηχανικού συνόλου του ρολογιού.

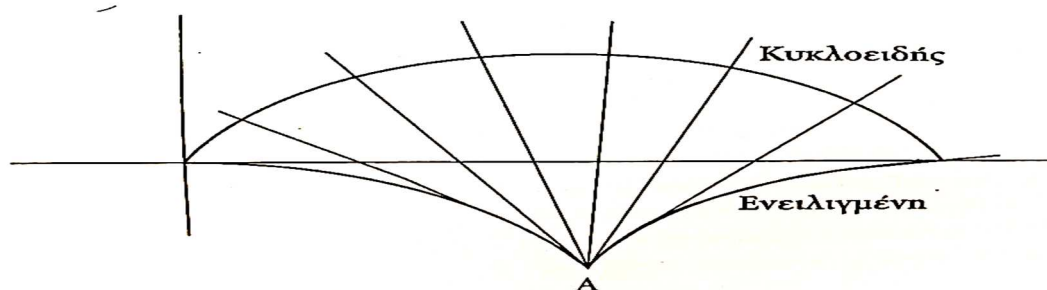


Αυτή η καμπύλη, πριν καν ανακαλυφθεί, έλαβε το όνομα της ταυτόχρονης καμπύλης, δηλαδή της καμπύλης «ίσου χρόνου». Το 1673, ο Christiaan Huygens απέδειξε πως η κυκλοειδής παρουσίαζε τις ιδιότητες μιας ταυτόχρονης καμπύλης. Η **κυκλοειδής** ορίζεται ως η τροχιά που διαγράφεται από ένα σημείο που βρίσκεται στην περιφέρεια ενός κύκλου, όταν ο κύκλος στρέφεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε μία ευθεία.



Το σχήμα πώς ενώ στρέφεται ένας κύκλος περιγράφει μία καμπύλη που ονομάζεται κυκλοειδής

Ο Huygens είχε την ιδέα πως αν το εκκρεμές διέγραφε μία κυκλοειδή, το ύψος από το οποίο ξεκινούσε σε κάθε ταλάντωση είχε ελάχιστη σημασία, αφού ο χρόνος που θα χρειαζόταν για να φτάσει στο πιο χαμηλό μέρος θα ήταν ο ίδιος, όπως στην περίπτωση της μπίλιας μέσα στο μπολ. Πώς θα μπορούσε όμως η καμπύλη που διαγράφει ένα εκκρεμές να είναι ένα τόξο κυκλοειδούς; Την απάντηση δίνει μία από τις πιο συναρπαστικές ιδιότητες της κυκλοειδούς «*Η ενειλιγμένη μιας κυκλοειδούς είναι επίσης μία κυκλοειδής*». Η έννοια της ενειλιγμένης είναι αρκετά πολύπλοκη για να την αναπτύξουμε εδώ, μπορούμε όμως να δούμε τη γεωμετρική μετάφραση αυτού του αποτελέσματος. Ας φανταστούμε πως διαιρούμε μία κυκλοειδή στα δύο και πως ενώνουμε τα δύο μισά σε ένα σημείο *A*, όπως στο επόμενο σχήμα.



Κατασκευή μιας ενειλιγμένης από μία κυκλοειδή

Αν πάρουμε μία κλωστή σταθερού μήκους, δεμένη στο *A* και την τεντώσουμε ούτως ώστε να βρίσκεται πάντα σε έναν από τους κλάδους της κυκλοειδούς, το άκρο της κλωστής αυτής περιγράφει μία καμπύλη που είναι επίσης κυκλοειδής. Ο Huygens είχε βρει τον τρόπο να κατασκευάσει ένα αυτορρυθμιζόμενο εκκρεμές αντιστρέφοντας απλά το προηγούμενο σχήμα, προκειμένου η κίνηση του εκκρεμούς να βρίσκεται πάντα στους δύο κλάδους της κυκλοειδούς. Μολονότι ο χρόνος δεν είναι φυσικό μέγεθος όπως η μάζα ή η θερμοκρασία, είναι ωστόσο μετρήσιμος και βάσει της εφεύρεσης του Huygens, μπορούμε να πούμε πως μπορεί να αντιμετωπιστεί, εφόσον χρειάζεται, ως διακριτό μέγεθος. Η καθημερινότητά μας εξακολουθεί να διέπεται από το «τικ-τακ», μία διακριτή μέτρηση του χρόνου.

Στον επιστημονικό τομέα, αντιθέτως, το διάστημα μεταξύ του «τικ» και του «τακ» μειώθηκε σταδιακά με εντυπωσιακό τρόπο. Είναι απείρως πιο μικρό από ένα

δευτερόλεπτο, όπως θα λέγαμε κοινώς. Τα σύγχρονα ατομικά ρολόγια δείχνουν κύκλους για τους οποίους ένα δευτερόλεπτο διαιρείται σε 9.192.631.770 μέρη.

1.11 Ο «Ψαμμίτης» του Αρχιμήδη

Η ορολογία των «εκατομμυρίων (million)», που μας επιτρέπει να ποσοτικοποιούμε μεγάλους αριθμούς, εισήχθηκε από το Γάλλο μαθηματικό Nicolas Chuquet (περίπου 1445–1488), το 1484, με το επίθεμα «-illion», $M = 10^6$. Κατά την ονοματολογία αυτήν, το $M1$ είναι ένα εκατομμύριο (m-illion), το $M2$ = δισεκατομμύριο (bi-illion), το $M3$ = τρισεκατομμύριο (tri-illion), κ.ο.κ.

Τα αρχαία συστήματα αρίθμησης δυσκολεύοντα γενικά να αντιμετωπίσουν τους πολύ μεγάλους αριθμούς. Στην αρχαία Ελλάδα, τα συστήματα αρίθμησης έφταναν μέχρι τα 100 εκατομμύρια. Ο Αρχιμήδης είναι συγγραφέας ενός διάσημου έργου αριθμητικής, γνωστό ως «Ψαμμίτης», στο οποίο επιχειρεί να μετρήσει, θεωρητικά, τον αριθμό των κόκκων άμμου στη Γη. Στην πραγματικότητα, ήθελε να αποδείξει πως υπήρχε μία μέθοδος αρίθμησης που επέτρεπε να μετρηθούν σύνολα αντικειμένων τα οποία μολονότι έμοιαζαν άπειρα σε αριθμό, εντούτοις δεν ήταν.

Ο Αρχιμήδης κατάρτισε ένα σύστημα που συνίστατο σε τρεις περιόδους, στη βάση των διαδοχικών δυνάμεων των μυριάδων (Ω), μέτρησης που ισοδυναμούσε σε 10.000 μονάδες. Ο μεγαλύτερος αριθμός που έλαβε με το σύστημα αυτό ήταν το $10^{8 \cdot 10^{16}}$, μέγεθος ήδη αξιосέβαστο. Αυτό που κανείς δε μπόρεσε να εξηγήσει, είναι ο λόγος για τον οποίον σταμάτησε εκεί, ενώ τίποτα δεν τον εμπόδιζε να συνεχίσει.

1.12 Ένα παράξενο παιχνίδι

Ας φανταστούμε πως αντιστρέφουμε μία κυκλοειδή, πως την τοποθετούμε στη συνέχεια σε ένα τραπέζι και πως την κάνουμε μετά να γυρίσει. Θα λάβουμε μία επιφάνεια της οποίας η γεννήτρια είναι η ίδια η κυκλοειδής. Είναι σα να ζητούσαμε από έναν κεραμοποιό να μας φτιάξει ένα βάζο έτσι ώστε η καμπύλη που το ορίζει να είναι μια κυκλοειδής. Ένα τέτοιο αντικείμενο κατασκευάστηκε από πλαστικό τη δεκαετία του 1960 και πουλήθηκε στα καταστήματα μικροαντικειμένων των ΗΠΑ.

Τι περίεργο είχε αυτό το αντικείμενο; Αν αφήναμε μία μπίλια να κυλίσει στο εσωτερικό του, χρειαζόταν πάντα τον ίδιο χρόνο για να φτάσει στον πάτο, ανεξάρτητα από το ύψος από το οποίο την αφήναμε να πέσει. Είναι πραγματικά παράξενο να βλέπει κανείς δύο μπίλιες να φτάνουν μαζί στον πάτο του δοχείου, ενώ έχει τοποθετήσει τη μία στο επάνω χείλος και την άλλη στη μέση του απέναντι τοιχώματος.

1.13 Τα παράδοξα του Ζήνωνα

Το διακριτό αποτελείται από στοιχεία, από μονάδες, τι συμβαίνει όμως με το συνεχές; Μοιάζει λογικό να σκεφτούμε πως το συνεχές δε μπορεί να παρουσιάζει αυτή τη δομή αφού οι μονάδες είναι διαχωρίσιμες και μεταξύ δύο διαδοχικών μονάδων δεν υπάρχει τίποτα, διότι διαφορετικά, θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε ξανά αυτό το διάστημα σε μονάδες. Αν σκεφτούμε θα δούμε πως η έννοια του απείρως μικρού οδηγεί απευθείας στην έννοια της συνέχειας. Ο στοχασμός για το ζήτημα της φύσης του συνεχούς, απασχόλησε μία μεγάλη μερίδα των Ελλήνων φιλοσόφων από το ξεκίνημα της φιλοσοφίας. Ένας από τους σημαντικότερους εκπροσώπους της ήταν ο Ζήνωνας, ο οποίος, μέσω των παραδόξων του, ανέδειξε την ευθραυστότητα κάθε θεωρίας που στηριζόταν στο απείρως μεγάλο ή στο απείρως μικρό.

Σε ένα μεγάλο μέρος τους, οι διατυπώσεις του Ζήνωνα σκοπό είχαν να επικυρώσουν τις θεωρίες του Παρμενίδη, του οποίου ήταν μαθητής και ο οποίος δήλωνε πως ό,τι υπήρχε αποτελούσε ένα όλο, μια αδιαίρετη ενότητα, τόσο χωρικά

όσο και χρονικά. Ο Ζήνωνας ήθελε επίσης να αντιπαλέψει τους Πυθαγόρειους που υποστήριζαν από την πλευρά τους τη «συνεχή ροή» ως μηχανισμό γέννησης των πάντων. Η αδυναμία διαίρεσης του χρόνου είχε ως συνέπεια την άρνηση της κίνησης, που θεωρούταν ως μία διαδοχή τόπων που καταλαμβάνονται από ένα αντικείμενο στη διάρκεια μιας χρονικής διαδοχής. Η ιδέα του Ζήωνα ήταν να δείξει πως, παραδεχόμενοι υποθέσεις αντίθετες από αυτές του Παρμενίδη, καταλήγαμε σε αντιφάσεις, σε ανοησίες μη αποδεκτές από τη λογική. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποίησε μία λογική μέθοδο της οποίας μπορούμε να πούμε σαφώς πως υπήρξε ο πρόδρομος, αν όχι ο δημιουργός, την εις άτοπον απαγωγή για τη δημιουργία παραδόξων. Αυτή η μέθοδος συνίσταται ουσιαστικά στη θεώρηση πως μία υπόθεση είναι πραγματική και από αυτή, να προβούμε σε μία σειρά λογικών συμπερασμάτων που τελικά οδηγούν σε ένα έκδηλα λανθασμένο αποτέλεσμα, απ' όπου συμπεραίνουμε πως η υπόθεση ήταν εξίσου εσφαλμένη. Με λογικούς όρους, το σχήμα στηρίζεται στο:

$$\begin{aligned} V &\Rightarrow V \\ F &\Rightarrow F \\ F &\Rightarrow V \end{aligned}$$

όπου $V = \Sigma\Omega\varsigma\tau\omicron$, $F = \Lambda\alpha\theta\omicron\varsigma$ και $\Rightarrow$ ένα σημείο που σημαίνει «συνεπάγεται». Για παράδειγμα, $V \Rightarrow V$ σημαίνει πως ένα σωστό συνεπάγεται ένα άλλο σωστό. Αυτό σημαίνει πως κάτι σωστό δε μπορεί σε καμία περίπτωση να συνεπάγεται κάτι λανθασμένο και εφόσον αυτό ισχύει, αυτό σημαίνει πως το σημείο εκκίνησης δεν ήταν σωστό. Είναι η βάση του μηχανισμού της εις άτοπον απαγωγής, δηλαδή ενός συλλογισμού του οποίου στόχος είναι να αποδείξει πως μία δήλωση είναι λανθασμένη. Πάνω σε αυτό το λογικό σχήμα στηρίχτηκαν τα παράδοξα.

Οι Πυθαγόρειοι είχαν ένα μαθηματικό και γεωμετρικό όραμα της πραγματικότητας που σχηματίζεται από σημεία, τα σημεία γεννούσαν ευθείες, οι ευθείες επιφάνειες, και οι επιφάνειες τρισδιάστατα σώματα. Ο Ζήνωνας αντιτάχθηκε στην αντίληψη αυτή υποστηρίζοντας πως αν τα σημεία δεν είχαν μέγεθος, δε θα μπορούσαν να είναι μετρήσιμα και επομένως, ό,τι κατασκευαζόταν βάσει σημείων δε θα μπορούσε να έχει μέγεθος και επομένως να υπάρχει. Επιπλέον, ό,τι αποτελούταν από σημεία θα μπορούσε να διαιρεθεί άπειρες φορές, γεγονός που οδηγούσε σε πολλές παράλογες καταστάσεις. Τα παράδοξα έχουν μία άσογη λογική αρχιτεκτονική. Έχουν αποτελέσει πηγή στοχασμού μέχρι σήμερα και έχουν πολλές πιθανές ερμηνείες. Αποτελούν θεμελιώδη βάση για την κατανόηση του απείρου σε όλες τις διαστάσεις του. Λέγεται πως ο Ζήνωνας, πρότεινε περισσότερα από 40 παράδοξα και από όσα μας έγιναν γνωστά, τα πιο διαδεδομένα είναι τα εξής 4: η διχοτόμηση, ο Αχιλλέας και η χελώνα, το ιπτάμενο βέλος και το στάδιο.

1.13.1 Η παράδοξη σκέψη

Το παράδοξο είναι μία μορφή συλλογισμού που έρχεται σε αντίθεση με την τρέχουσα αντίληψη. Συλλογίζομαστε ξεκινώντας από μία αρχή με σκοπό να φτάσουμε σε αντιφατικά συμπεράσματα και να αμφισβητήσουμε την αρχή πάνω στην οποία στηρίζονται. Για την ακρίβεια, τα λογικά παράδοξα, των οποίων πρωτοπόρος υπήρξε η ελεατική σχολή, αναπτύσσουν λογικές προτάσεις βάσει άλλων που μπορεί να είναι σωστές ή λανθασμένες. Ένα από τα πιο δημοφιλή παράδοξα της Αρχαιότητας ονομάζεται «παράδοξο του ψεύτη». Προτάθηκε από τον Επιμενίδη της Κρήτης και διατυπώνεται ως εξής «Όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες». Ο Επιμενίδης δε μπορεί να λέει αλήθεια αφού είναι Κρητικός, αλλά δε μπορεί να λέει και ψέματα επειδή λέει κάτι που είναι αλήθεια, εξ ου και η αντίφαση.

1.13.2 Η διχοτόμηση

Το παράδοξο αυτό επιτίθεται ευθέως στην έννοια της κίνησης και αποδεικνύει πως είναι αδύνατη, παίρνοντας ένα κινούμενο αντικείμενο που πρέπει να μετακινηθεί ανάμεσα σε δύο σημεία A, B, αυτό θα πρέπει να διανύσει το μισό της απόστασης που χωρίζει τα δύο σημεία A, B, στη συνέχεια το μισό της απόστασης που απομένει και ούτω καθ' εξής. Δεδομένων των άπειρων αποστάσεων που πρέπει να διανύσει, δε μπορεί να το πετύχει μέσα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Επομένως η κίνηση είναι αδύνατη.

1.13.3 Ο Αχιλλέας και η χελώνα

Ο Αχιλλέας ο «φτεροπόδαρος», θεωρείται ο ταχύτερος άνθρωπος και επομένως το αντίθετο της χελώνας στον τομέα της ταχύτητας. Αυτό το παράδοξο προτείνει έναν αγώνα δρόμου μεταξύ των δύο. Αν οι δύο αντίπαλοι φύγουν μαζί μόλις δοθεί η εκκίνηση, είναι προφανές πως ο Αχιλλέας θα κερδίσει, κανείς δεν το αμφισβητεί. Το κόλπο είναι στην πραγματικότητα, να δοθεί ένα πλεονέκτημα, έστω και μικρό, στη χελώνα. Ο Αχιλλέας θα πρέπει πρώτα να φτάσει στο σημείο απ' όπου ξεκίνησε η χελώνα. Τη στιγμή που ο Αχιλλέας θα φτάσει, η χελώνα που δε σταματά στο μεταξύ, θα έχει προχωρήσει περισσότερο, χωρίς να έχει σημασία πόσο.

Επομένως ο Αχιλλέας θα πρέπει να διανύσει επιπλέον την απόσταση που τον χωρίζει από αυτό το σημείο. Όταν όμως θα φτάσει, η χελώνα θα έχει προχωρήσει και πάλι και ο Αχιλλέας δε θα τη φτάσει. Αφού αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί *ad infinitum*, ο Αχιλλέας δε θα φτάσει ποτέ τη χελώνα. Μολονότι αυτά τα δύο παράδοξα είναι όμοια ή έστω παρόμοια, υπάρχει μία λεπτή διαφορά μεταξύ των δύο, στο 1^ο είναι ο χώρος που διαιρείται σε ίσα τμήματα και στο 2^ο, ο χώρος διαιρείται σε φθίνοντα τμήματα, ανάλογα προς τις ταχύτητες των δύο δρομέων.

1.13.4 Το ιπτάμενο βέλος

Είναι το πιο συγκεχυμένο παράδοξο εκ των τεσσάρων. Οι ιστορικοί διατείνουν πως το κείμενο είχε καταστραφεί και ανασυντάχτηκε. Σύμφωνα με αυτό, όταν ρίχνουμε ένα βέλος στο χώρο, έχουμε την εντύπωση πως απομακρύνεται, αλλά στην πραγματικότητα δεν κινείται, αφού το βέλος πρέπει να καταλαμβάνει χώρο ίσο με αυτό, όπως κάθε αντικείμενο και για αυτό, πρέπει να είναι στάσιμο. Αν ο χρόνος αποτελείται από αδιαίρετες στιγμές, τότε το βέλος δε μπορεί να καταλαμβάνει ταυτόχρονα δύο ή περισσότερους τόπους.

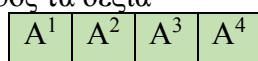
Όπως τα δύο προηγούμενα παράδοξα παρέπεμπαν στην αδυναμία διαίρεσης του χώρου επ' άπειρον, έτσι και αυτό αναφέρεται στην αδιαιρετότητα του χρόνου και πιο συγκεκριμένα, στην ύπαρξη της λεγόμενης «στιγμής», δηλαδή μίας στιγμής που δεν έχει διάρκεια αφού είναι αδιαίρετη. Έτσι, δεν υπάρχει επομένως κίνηση. Αυτή η ορισμένη στιγμή ξεκινά από την ίδια νοητική δομή με το σημείο της γεωμετρίας.

1.13.5 Το στάδιο

Ας υποθέσουμε πως ο χρόνος είναι ένα διακριτό μέγεθος που μπορούμε να συλλάβουμε όσο μικρό θέλουμε και του οποίου η θεμελιώδης μονάδα είναι τ . Αυτό σημαίνει πως δεν υπάρχει καμία μονάδα χρόνου μικρότερη από το τ , που συνεπώς είναι αδιαίρετο. Μπορούμε να φανταστούμε ένα ρολόι για το οποίο κάθε «τικ» ή «τακ» αντιστοιχεί σε μία από αυτές τις αδιαίρετες μονάδες. Ας θεωρήσουμε τώρα τέσσερα ίσα σώματα A^1 , A^2 , A^3 και A^4 , που παραμένουν ακίνητα (αρχικά, το παράδοξο αναφερόταν σε μία σειρά τεσσάρων στρατιωτών)

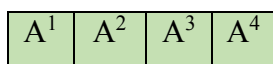
A^1	A^2	A^3	A^4
-------	-------	-------	-------

Και άλλα τέσσερα σώματα B^1 , B^2 , B^3 και B^4 , ακριβώς ίσα με τα προηγούμενα, τα οποία μετακινούνται προς τα δεξιά

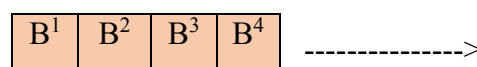
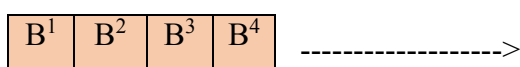
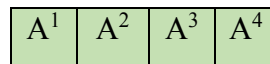


με τρόπο όμως ώστε ανά πάσα στιγμή, το ένα από τα σώματα B να προσπερνάει το ένα από τα σώματα A

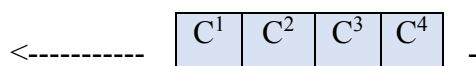
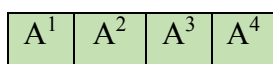
«τικ»



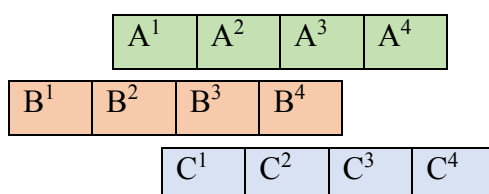
«τακ»



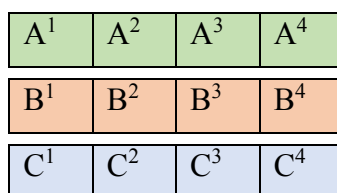
Ας θεωρήσουμε τώρα μία τρίτη σειρά σωμάτων C^1 , C^2 , C^3 , C^4 επίσης όμοια με τα προηγούμενα, τα οποία όμως μετακινούνται προς τα αριστερά ούτως ώστε, ανά πάσα στιγμή, ένα από τα σώματα C να προσπερνάει ένα από τα σώματα A :



Το παράδοξο εμφανίζεται όταν θεωρούμε ταυτόχρονα τις δύο κινήσεις, αυτή των σωμάτων B και αυτή των σωμάτων C . Εάν ξεκινήσουμε από την εξής σχετική θέση:



κατά το επόμενο χρονικό διάστημα (ένα «τικ» του ρολογιού), τα σώματα βρίσκονται ξανά σε αυτή τη θέση:



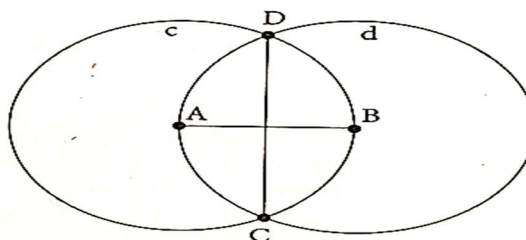
Αυτό υποθέτει πως το C^1 θα έχει προσπεράσει δύο σώματα B , συνεπώς, μπορούμε να διαιρέσουμε το χρόνο δια δύο, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση πως ο χρόνος είναι αδιαίρετος. Αυτό είναι το πιο αμφιλεγόμενο από τα παράδοξα που παρουσιάζουμε εδώ. Ο Αριστοτέλης του άσκησε σκληρή κριτική λέγοντας πως ο Ζήνωνας έπαιρνε τον ίδιο τύπο αναφοράς για σώματα σε ανάπαυση και για σώματα σε κίνηση. Αν η ταχύτητα ενός σώματος σε κίνηση είναι σταθερή, δε μπορούμε να θεωρήσουμε πως η ταχύτητα με την οποία περνά ένα σώμα σε κίνηση είναι ίδια με αυτή του σώματος σε ανάπαυση. Αυτό το παράδοξο θεωρείται επίσης ασταθές στο βαθμό όπου η κριτική που άσκησε ο Αριστοτέλης είναι κοινότοπη και

όπου δυσκολευόμαστε να πιστέψουμε πως ο Ζήνωνας δεν είχε λάβει υπόψη την παράμετρο αυτή. Άλλες ερμηνείες σημειώνουν πως το παράδοξο μπορεί να επικεντρωθεί περισσότερο στο γεγονός πως η κίνηση και ο χρόνος μπορούν να διαιρεθούν άπειρες φορές, όπως και στα προηγούμενα παράδοξα. Έτσι, για να μπορεί ένα σώμα να προσπεράσει ένα άλλο σώμα σε κίνηση, θα πρέπει πρώτα να προσπεράσει το μισό αυτού που βρίσκεται σε ανάπαυση και ούτω καθ' εξής. Σε κάθε περίπτωση, ο Ζήνωνας φαίνεται πως θέλει και εδώ να αμφισβητήσει την πυθαγόρεια σχολή με μία αντίφαση στο ζήτημα της αδιαιρετότητας των γεωμετρικών στοιχείων.

Αντιθέτως, η κριτική του Αριστοτέλη για το 1^ο παράδοξο, θέτει τα θεμέλια μίας έννοιας που θα αποδειχτεί θεμελιώδης στην ιστορία του απείρου. Πολλοί συγγραφείς θεωρούν πως πρόκειται για μία από τις μεγαλύτερες εισφορές που έγιναν ποτέ για το ζήτημα αυτό. Κατ' αρχάς, αναφέρει πως η λέξη «άπειρο» έχει δύο ορισμούς: την άπειρη εκτασιμότητα και την άπειρη διαιρετότητα και σε αυτό το παράδοξο, οι δύο έννοιες συγχέονται. Πράγματι, αν εφαρμοστούν στο χρόνο και στο χώρο, σημαίνουν πως ένας οριοθετημένος χώρος, ακόμα και αν είναι επ' άπειρον διαιρετός, μπορεί να διανυθεί μέσα σε πεπερασμένο χρόνο. Στη συνέχεια, κάνει την εξής διάκριση, μέσα στο συνεχή χώρο στον οποίο κινείται το αντικείμενο, υπάρχουν άπειρα μισά, δυνάμει όμως μόνον και όχι ενεργεία. Εδώ έγκειται η σημασία της εισφοράς του Αριστοτέλη.

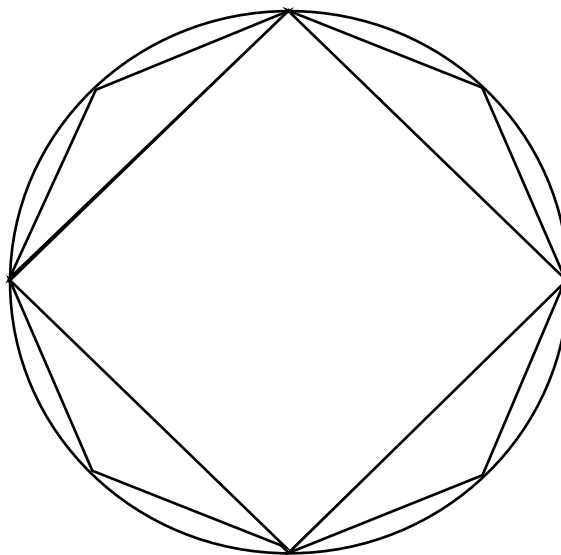
Από το σημείο αυτό, όταν μιλάμε για το άπειρο, υπάρχουν δύο ορισμοί πολύ διαφορετικοί και ως ένα βαθμό ασύμβατοι: πρόκειται για το δυνάμει και για το ενεργεία άπειρο που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πολύ συχνά αποφασίζουμε τι είναι αλήθεια βάσει της κοινής λογικής. Είτε είναι κοινή είτε όχι, βασίζεται σε αυτό που αποκαλούμε λογική, η οποία θα μπορούσε να οριστεί με όρους σύγχρονης τεχνολογίας, ως κάποιες διατάξεις που μας επιτρέπουν να αντιληφθούμε και να επεξεργαστούμε νοητικά την πραγματικότητα που μας περιβάλλει. Κάτι είναι λογικό στο βαθμό που η αντίληψή μας, μας υποδεικνύει πως αυτό παράγεται. Αφού ορίσαμε αυτούς τους κανόνες, μπορούμε να καταλάβουμε πώς να λύσουμε προβλήματα αυτού του τύπου. Ας δούμε για παράδειγμα πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε μία κάθετη σε ένα τμήμα, περνώντας από τη μέση της. Ας ονομάσουμε A, B τα άκρα της.

Σχεδιάζουμε αρχικά έναν κύκλο με κέντρο A και ακτίνα AB . Σχεδιάζουμε στη συνέχεια έναν άλλο κύκλο ίδιας ακτίνας αλλά κέντρου B . Η ευθεία που ενώνει τα σημεία τομής των δύο κύκλων είναι η ζητούμενη κάθετη.



Προτού συνεχίσουμε υπενθυμίζουμε πως είναι περιττό να αναζητάμε να τετραγωνίσουμε τον κύκλο με έναν κανόνα και ένα διαβήτη, το 1882, ο μαθηματικός Ferdinand von Lindemann (1852–1939) απέδειξε πως το π ήταν ένας υπερβατικός αριθμός και πως ως εκ τούτου, ο τετραγωνισμός του κύκλου ήταν ένα πρόβλημα χωρίς λύση. Αυτό που αντιθέτως αποδεικνύεται είναι πως είναι δυνατό να κατασκευάσουμε κάθε κανονικό πολύγωνο του οποίου το εμβαδό ισούται με ένα δεδομένο τετράγωνο. Μολονότι αποδεικνύεται θεωρητικά, η υλοποίηση του τετραγωνισμού ενός κανονικού πολυγώνου δεν είναι πάντα εύκολη υπόθεση.

Βάσει αυτού του αποτελέσματος, ο Αντιφών ο Αθηναίος (περ. 480 π.Χ.– 411 π.Χ.) ανακάλυψε ένα σύστημα για τον τετραγωνισμό του κύκλου, του οποίου η λογική δύσκολα αντικρούεται. Η ιδέα του είναι η εξής: ξεκινάμε από το γεγονός πως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο του οποίου το εμβαδόν ισούται με αυτό μιας σειράς κανονικών πολυγώνων που θα κατασκευάσουμε στη συνέχεια. Μέσα σε ένα δεδομένο κύκλο, εγγράφομε ένα εξάγωνο.



Γνωρίζουμε ήδη πως μπορούμε να κάνουμε τον τετραγωνισμό του εξάγωνου, δηλαδή να κατασκευάσουμε με ένα χάρακα και ένα διαβήτη ένα τετράγωνο που θα έχει το ίδιο εμβαδόν με το εξάγωνο. Η διαδικασία τώρα έγκειται στο να αυξήσουμε σταδιακά τον αριθμό των πλευρών του εγγεγραμμένου πολυγώνου μέσα στον κύκλο, γνωρίζοντας πως μπορούμε να βρούμε τον τετραγωνισμό καθενός από αυτά.

Η διαφορά ανάμεσα στο εμβαδόν ενός από τα εγγεγραμμένα πολύγωνα και στο εμβαδόν του κύκλου γίνεται όλο και πιο μικρή. Πράγματι, μπορεί να είναι τόσο μικρή όσο επιθυμούμε. Ας πάρουμε για παράδειγμα ένα πολύγωνο πολλών τετράκις εκατομμυρίων πλευρών. Κάθε μία από τις πλευρές αυτές θα είναι πραγματικά κολλημένη στην περιφέρεια, στο βαθμό που θα είναι δύσκολο να διαχωρίσουμε το τμήμα της ευθείας από την καμπύλη. Ο Αντιφών θεωρούσε πως θα μπορούσαμε έτσι να πετύχουμε τον τετραγωνισμό του κύκλου.

1.13.6 Ζήνων, μία ξεχασμένη ιδιοφυΐα

Ο Ζήνωνας ο Ελεάτης (περ. 490 π.Χ.–περ 425 π.Χ.) ήταν Έλληνας φιλόσοφος της ελεατικής σχολής που ιδρύθηκε από τον Παρμενίδη. Η κύρια πηγή του συλλογισμού του Ζήωνα μας έγινε γνωστή μέσω του Παρμενίδη, ενός από τους πλατωνικούς διαλόγους. Η φιλοσοφία του μπορεί να συνοψιστεί στον μονισμό που με λίγα λόγια υποστηρίζει πως όλα είναι ένα και πως η αλλαγή δεν υπάρχει. Ο Ζήνωνας δεν έλαβε την αναγνώριση που πολλοί φιλόσοφοι υποστηρίζουν πως άξιζε σε πολλές περιπτώσεις. Ο Bertrand Russell τον αποκατέστησε εν μέρει δηλώνοντας

«Σε αυτόν τον παράξενο κόσμο, δεν υπάρχει τίποτα πιο παράξενο από την μεταθανάτιο φήμη. Ένα από τα μεγαλύτερα θύματα ενός σφάλματος κρίσης από την αιωνιότητα είναι ο Ζήνωνας ο Ελεάτης. Ενώ είχε διατυπώσει τέσσερα παράδοξα, όλα απίστευτα λεπτά και βαθιά, οι φιλόσοφοι που τον διαδέχτηκαν δήλωναν με απαξίωση πως δεν ήταν τίποτα περισσότερο από έναν ιδιοφυή ταχυδακτυλουργό και πως τα παράδοξά του ήταν απλοί σοφισμοί. Αφού αμφισβητήθηκαν ακατάπαυστα για δύο

χιλιάδες χρόνια, οι σοφισμοί αυτοί αποκαταστάθηκαν και αναδείχθηκαν σε θεμέλιο της μαθηματικής αναγέννησης...». (Οι αρχές των μαθηματικών I, 1903).

Όσο παράδοξη και αν είναι η πτήση του βέλους, η αισθητήρια αντίληψή μας, μας υποδεικνύει σαφώς πως το βέλος απομακρύνεται. Ο Ζήνωνας φυσικά το συνειδητοποιούσε, γνώριζε όμως επίσης πως οι αισθήσεις ορισμένες φορές μπορούν να προδίδουν τη λογική και πρότεινε τον εξής συλλογισμό: με τον ίδιο τρόπο που ένα πράγμα έχει ή όχι διάσταση, ένα αντικείμενο παράγει ή όχι έναν ήχο. Ένα καλάθι γεμάτο κόκκους κεχριού παράγει έναν ήχο όταν το αναποδογυρίζουμε σε μία επιφάνεια. Ο Ζήνωνας αναρωτήθηκε λοιπόν αν ένας κόκκος κεχριού παράγει οποιονδήποτε ήχο. Αν ναι, το επόμενο ερώτημα είναι αν το μισό ενός κόκκου κεχριού παράγει επίσης έναν ήχο. Όπως μπορούμε να φανταστούμε, αυτή η διαδικασία διαδοχικών διαιρέσεων του κόκκου θα οδηγήσει στο να καταστεί ο ήχος μη αντιληπτός. Ξεκινώντας από αυτό το σημείο, μπορούμε να δηλώσουμε πως ένα άθροισμα μηδενικών στοιχείων θα είναι πάντα μηδενικό, δηλαδή πως αν ενώσουμε πολλά πράγματα που δεν παράγουν κανέναν ήχο, το αποτέλεσμα επίσης δε θα παράγει ήχο. Σκοπός του Ζήωνα είναι να αποδείξει πως δε μπορούμε να βασιζόμαστε στις αισθήσεις όταν εξελισσόμαστε μέσα σε ένα ορισμένο πλαίσιο συλλογισμού. Πρόκειται για ένα φιλοσοφικό ρεύμα στο οποίο οι αισθήσεις δίνουν τη θέση τους στο ένστικτο, ειδικότερα στα μαθηματικά, το ίδιο το ένστικτο μπορεί να αποδειχτεί απατηλό και δε θα μπορούμε να βασιστούμε σε αυτό αν θέλουμε να εξερευνήσουμε τα σενάρια όπου το άπειρο είναι πραγματικότητα, ένα αντικείμενο δηλαδή που θα μπορούμε να χειριστούμε με την ίδια άνεση σα να επρόκειτο για ένα φυσικό αέρας.

Ο συλλογισμός του Ζήωνα είναι πως η μονάδα δε μπορεί να αποτελείται από άπειρα μέρη παρά μόνο αν κάθε ένα από τα μέρη αυτά έχει μέγεθος, γιατί διαφορετικά, θα μπορούσε να διαιρεθεί και θα έπαιε επομένως να αποτελεί θεμελιώδη μονάδα. Στις περιπτώσεις όμως που περιγράφομε, το αντικείμενο που σχηματίζουν οι ενότητες δε θα είχε επίσης μέγεθος, αφού το άθροισμα πραγμάτων χωρίς μέγεθος δε μπορεί φυσικά να έχει μέγεθος το ίδιο.

Γι' αυτό οι Έλληνες χρησιμοποίησαν τη λέξη *άπειρον* αντί για «ατελείωτο». *Άπειρο* σε μέγεθος σημαίνει πως δεν έχει συγκεκριμένο όριο, έννοια περισσότερο συμβατή με την ιδέα πως ένα αντικείμενο είναι ατελείωτο επειδή μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε. Δεν είναι τόσο η ιδέα, για παράδειγμα στην αριθμητική σειρά, πως οι αριθμοί δε σταματούν ποτέ, αλλά περισσότερο πως σε έναν οποιονδήποτε δεδομένο αριθμό μπορούμε πάντα να προσθέσουμε έναν άλλο. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει με το απείρως μικρό με την έννοια πως μπορεί να είναι τόσο μικρό όσο θέλουμε. Αυτή η έννοια θα καταστεί ένας αυστηρός ορισμός μέσω της ανάλυσης που υπέστη κατά τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα.

1.14 Ο τετραγωνισμός του κύκλου

Οι κατασκευές με κανόνα και διαβήτη θεωρούνται γενικώς τα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας, καθώς αποτέλεσαν αντικείμενο μιας πολύ αναλυτικής έρευνας από την πλευρά των Ελλήνων. Τα προβλήματα που τέθηκαν είναι ποικίλα. Κυμαίνονται έτσι από το πιο απλό ως το πιο σύνθετο, ακόμα και το αδύνατο. Ένα από τα διασημότερα είναι ο τετραγωνισμός του κύκλου, η τριχοτόμηση της γωνίας και ο διπλασιασμός του κύβου. Το πρώτο είναι το πιο γνωστό όλων, σε σημείο που λέγεται για κάτι που είναι ιδιαίτερα δύσκολο «Είναι πιο δύσκολο κι από τον τετραγωνισμό του κύκλου». Όταν μιλάμε για κατασκευή με κανόνα και διαβήτη, αναφερόμαστε σε συγκεκριμένες πολύ σαφείς συμβάσεις, άλλως τα προβλήματα που

θα θέτονταν θα ήταν ιδιαιτέρως κοινότοπα. Το να βρούμε το μεσαίο σημείο ενός τμήματος με έναν κανόνα με διαβάθμιση χιλιοστών θα ήταν για παράδειγμα μία απάτη, αφού δε θα χρειαζόμασταν καν τον διαβήτη. Το πρώτο βήμα επομένως είναι να εξηγήσουμε τι εννοούμε όταν λέμε «κανόνας». Ο κανόνας είναι ένα ιδανικό αντικείμενο που διαθέτει ένα εντελώς ευθύ τμήμα που επιτρέπει να χαράζουμε ευθείες, χωρίς ωστόσο να διαθέτει κανένα σημάδι που θα επέτρεπε να μετράμε αποστάσεις.

Ο «διαβήτη» είναι ένας φυσιολογικός κοινός διαβήτη, κινητός υπό την έννοια πως μπορεί να ανοίγει υπό οποιαδήποτε γωνία και να κλείνει. Φυσικά, δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία σημαδιών που θα μπορούσαν στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν ως αποστάσεις, διαφορετικά θα ήταν το ίδιο πράγμα με το να διαθέτουμε έναν κανόνα με διαβάθμιση χιλιοστών.

1.14.1 Ο διαβήτη του Mascheroni

Οι κατασκευές με κανόνα και διαβήτη είχαν πάντα μια ιδιαίτερη θέση στα μαθηματικά ψυχαγωγίας. Μία από τις πιο εντυπωσιακές εκδόσεις με το θέμα αυτό είναι αυτή του William Leybourn, ενός χωρομέτρη που το 1694 δημοσίευσε ένα έργο με τίτλο *Pleasure with Profit* (κυριολεκτικά Ευχαρίστηση με Κέρδος) στο οποίο παρουσίαζε κάθε είδους μαθηματικά παιχνίδια με «κανόνα και πιρούνι». Τα πιρούνια της εποχής είχαν σχήμα διχάλας και μπορούσαν να χρησιμεύσουν ως σταθεροί διαβήτες. Η επανάσταση όμως στην ιστορία των κατασκευών με κανόνα και διαβήτη έγινε το 1794, όταν ο Ιταλός γεωμέτρης Lorenzo Mascheroni απέδειξε στο έργο του με τίτλο *Γεωμετρία του διαβήτη* πως όλες οι κατασκευές μπορούσαν να γίνουν μόνο με ένα διαβήτη (κινητό φυσικά). Αφού είναι αδύνατο να σχεδιάσουμε μία ευθεία με ένα διαβήτη, συμφωνούμε, στην περίπτωση αυτή, πως δύο σημεία που ορίζονται από την τομή δύο τόξων, ορίζουν μία ευθεία.

2. Συναντήσεις στο άπειρο

Οι πρώτοι που μας έκαναν να «δούμε» το άπειρο σε αναπαράσταση μέσα στο χώρο δεν ήταν οι φιλόσοφοι ή οι γεωμέτρες, αλλά οι καλλιτέχνες της Αναγέννησης. Απελευθερωμένοι από τους ισχυρούς περιορισμούς που είχε επιβάλει η Εκκλησία στα καλλιτεχνικά έργα και αναβιώνοντας τις μαθηματικές γνώσεις των Ελλήνων, άνοιξαν ένα νέο δρόμο στα μαθηματικά, όπου το άπειρο δεν ήταν πια στιγματισμένο ως αντιπρόσωπος του απόλυτου κακού.

2.1 Η τρισδιάστατη ζωγραφική

Όταν μιλάμε για Αναγέννηση, μας έρχονται στο νου διάφορα έργα τέχνης στον τομέα της γλυπτικής, της ζωγραφικής, της αρχιτεκτονικής, ακόμα και στον τομέα διαφόρων τεχνολογικών προόδων, τίποτα ή ελάχιστα όμως σε σχέση με τα μαθηματικά. Κύριο έργο της περιόδου αυτής ήταν η ανάκτηση αυτών που ήδη είχαν ανακαλυφθεί ή συζητηθεί στην αρχαιότητα. Ο Μεσαίωνας, είχε αφήσει στη λήθη ή στα ράφια των βιβλιοθηκών κάποιων μοναστηριών τα ελληνικά ή αραβικά έργα που αποτελούν τους πραγματικούς πυλώνες θεμελίωσης της γεωμετρίας ή της άλγεβρας.

Στο επίπεδο της γεωμετρίας, συγκεκριμένα, οι καλλιτέχνες της Αναγέννησης επιτέλεσαν τεράστιο έργο και ειδικότερα οι ζωγράφοι και στο πλαίσιο αυτό η γεωμετρική έννοια του απείρου βρήκε τη θέση της. Γενικά, οι καλλιτέχνες της Αναγέννησης υποχρεώθηκαν να αναπτύξουν διάφορους τύπους γνώσεων και δεξιοτήτων, όχι μόνο στον τομέα της τέχνης, αλλά και στον τομέα των επιστημών.

Συχνά, τα έργα τους χρηματοδοτήθηκαν από μαικήνες ή πρίγκιπες που τους ζητούσαν γλυπτά ή πίνακες ζωγραφικής, μουσικά έργα, κτίρια ή οχυρά για την προστασία των ιδιοκτησιών τους, ή ακόμα και αναλυτικές μελέτες για την τροχιά των

βλημάτων. Στη χαραυγή της Αναγέννησης, οι καλλιτέχνες είχαν κληρονομήσει μία ζωγραφική κυρίως θρησκευτική, σηματοδοτημένη από πολύ συγκεκριμένους κανόνες σχετικά με τα χρώματα και τις μορφές. Τα πρόσωπα που αποκτούσαν ένα χαρακτήρα αγιοσύνης, στην πλειονότητά τους, έπρεπε να εμφανίζονται σε χρυσά φόντα, που αντιπροσώπευαν τον ουράνιο τομέα, ενώ τα υπόλοιπα χρώματα παρέπεμπαν στην πλειονότητά τους στην υπάρχουσα ιεραρχία μεταξύ των προσώπων.

Η διάταξη και το ύψος τους ακολουθούσαν επίσης το σκεπτικό αυτό. Το σημαντικότερο όμως στοιχείο είναι πως όλες αυτές οι αναπαραστάσεις λάμβαναν χώρα σε έναν αλάνθαστα δισδιάστατο χώρο: ήταν αναπαραστάσεις επίπεδες, στο πιο καθαρό ύψος της ζωγραφικής της Αρχαίας Αιγύπτου. Αυτό ήταν αναμφίβολα σκόπιμο και υποταγμένο στον ισχύοντα συμβολισμό: οι άγιες μορφές δε μπορούσαν να αναπαρασταθούν με ρεαλιστικό τρόπο, υπό την έννοια της απόκτησης σαφώς γήινων χαρακτηριστικών.

Ο καλλιτέχνης της Αναγέννησης, καθώς έπαψε να υπόκειται στους περιορισμούς που επέβαλαν οι θρησκευτικοί θεσμοί, ήταν πια ελεύθερος και η πρώτη χρήση αυτής της ελευθερίας ήταν η απόπειρα αναπαράστασης της πραγματικότητας με τον, όσο γίνεται, πιστότερο τρόπο. Με άλλους όρους, τοποθετήθηκε μέσα σε ένα τρισδιάστατο πλαίσιο. Για να το πετύχει αυτό, άρχισε να αναπτύσσει νέες τεχνικές σχεδίου και ζωγραφικής που θα επέτρεπαν στον παρατηρητή να αποκτήσει μία αίσθηση χωρικού βάθους μέσα από τη χρήση των σκιών και των χρωμάτων. Οι σκιές, για παράδειγμα, υποδείκνυαν τη θέση των αντικειμένων, ενώ η ένταση των χρωμάτων μειωνόταν καθώς απομακρυνόταν από τα πρώτα πλάνα. Όλες αυτές οι τεχνικές επέτρεπαν τη δημιουργία μιας αίσθησης χώρου, το κυριότερο όμως και το απαράβατο, ήταν πως το αρχικό σχέδιο, το σκίτσο, έπρεπε να ακολουθεί ακριβείς γεωμετρικούς κανόνες. Δεν προξενεί επομένως εντύπωση το γεγονός πως οι μαθηματικές πρόοδοι ήταν περισσότερο εμφανείς στη ζωγραφική.

Το σημαντικότερο είναι πως οι καλλιτέχνες τοποθέτησαν το άπειρο στο πλάνο των αναπαραστάσεών τους, μετατρέποντας σε «ενεργεία» αυτό που μέχρι τότε, στη γεωμετρία, ήταν απλά «δυνάμει». Για τον Αριστοτέλη, μία ευθεία ήταν μόνο δύναμει προσπελάσιμη. Ο Ευκλείδης, είχε καλύψει τα νότια του ορίζοντας μία ευθεία ως ένα τμήμα που μπορεί να επεκταθεί όσο το επιθυμούμε για να κάνουμε οποιαδήποτε γεωμετρική κατασκευή ή απόδειξη. Αυτό έκαναν οι γεωμέτρες μέχρι τον 17^ο αιώνα.

Ωστόσο, στους πίνακες και στα σχέδια των αρχιτεκτόνων του 15^{ου} αιώνα, εμφανίστηκε ένα σημείο που ονομάστηκε κεντρικό σημείο φυγής που οδήγησε τελικά σε αυτό που αποκαλούμε *κεντρική προοπτική ή προβολή*. Αυτό το σημείο, όπου συγκλίνουν οι παράλληλες ευθείες, μπορεί να χαρακτηριστεί ως σημείο του ενεργεία απείρου. Χάρη σε αυτό το είδος προοπτικής, καλλιτέχνες όπως οι Leon Battista Alberti (1404–1472), Filippo Brunelleschi (1377–1446) και Piero della Francesca (1416–1492) επανοικειοποιήθηκαν τα έργα Ελλήνων γεωμετρών και πέτυχαν ο παρατηρητής να αποκτήσει σαφώς την εντύπωση πως μία τρισδιάστατη σκηνή αναπαριστούνταν σε ένα επίπεδο.

2.1.1 Το πνεύμα της Αναγέννησης

Ο Λεονάρδος Ντα Βίντσι (1452–1519), σύμβολο της μεγαλοφυΐας της Αναγέννησης, έγραφε στο έργο του *Πραγματεία ζωγραφικής*, ένα συλλογισμό για την έννοια της συνέχειας, με μεγάλο φιλοσοφικό εύρος, όχι μόνο λόγω της ιδέας που εξέφραζε αλλά και λόγω του αριθμού των γνωστικών κλάδων που συμμετείχαν σε αυτήν: «Εάν εσύ, ο μουσικός, μου πεις πως μόνο οι επιστήμες του πνεύματος δεν είναι μηχανικές, θα σου απαντήσω πως η ζωγραφική προέρχεται από το πνεύμα και πως όπως η γεωμετρία και η μουσική θεωρούν τις αναλογίες των συνεχών

διαστάσεων και η αριθμητική, αυτές των ασυνεχών, η ζωγραφική θεωρεί όλες τις συνεχείς διαστάσεις και τα χαρακτηριστικά των αναλογιών, τις σκιές, το φως και τις αποστάσεις, ανάλογα με την προοπτική».

2.1.2 Από την προοπτική στην προβολική γεωμετρία

«Έχει δει ποτέ κανείς δύο παράλληλες ευθείες;». Αυτή είναι μία ερώτηση στην οποία μπορούμε να απαντήσουμε αρνητικά με κάθε βεβαιότητα. Ουσιαστικά, είναι εύκολο να απαντήσουμε επειδή υπάρχει μία άλλη ερώτηση που προηγείται και της οποίας η απάντηση είναι επίσης αρνητική: «Έχει δει ποτέ κανείς μία ευθεία;».

Κανείς δε μπορεί να έχει δει, αφού μία ευθεία είναι άπειρη. Μπορούμε στην καλύτερη περίπτωση να ελπίζουμε να δούμε τμήματα ευθειών, πολύ μακριά, όσο μακριά θέλουμε, όχι όμως άπειρα. Όσον αφορά στις παράλληλες ευθείες, ό,τι τις προσεγγίζει περισσότερο είναι η προοπτική που έχουμε όταν κοιτάζουμε ένα πολύ μακρύ κομμάτι σιδηροδρομικής γραμμής. Βλέπουμε τότε, ή μάλλον νομίζουμε πως βλέπουμε, δύο ευθείες που συγκλίνουν σε ένα μακρινό σημείο του ορίζοντα.

Το γεγονός πως βλέπουμε αυτό το σημείο σύγκλισης μπορεί να θεωρηθεί ως μία οπτική ψευδαίσθηση αφού όσο μακριά κι αν φτάσουμε σε αυτή τη σιδηροδρομική γραμμή, δε θα το συναντήσουμε ποτέ. Αυτή είναι η καθημερινή εμπειρία ενός οδηγού τρένου ταχείας κυκλοφορίας όταν κατευθύνεται προς το άπειρο με ταχύτητα 300 km/h. Το να κυνηγάμε αυτό το σημείο στο άπειρο έχει νόημα όσο και το να κυνηγάμε τη σκιά μας. Τι θα συνέβαινε αν αντί για δύο παράλληλες ευθείες είχαμε 3, 13 ή 23;

Θα είχαμε τότε αυτό που αποκαλούμε στη γεωμετρία μία δέσμη ευθειών και ίσως, ακόμα σημαντικότερο, θα είχαμε μία κατεύθυνση. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο που βρίσκεται στο άπειρο, ένα από τα σημεία εκείνα όπου συγκλίνουν δύο παράλληλες ευθείες. Θα μπορούσαμε να συνδέσουμε σε καθένα από αυτά τα σημεία μία κατεύθυνση του επιπέδου. Στην περίπτωση αυτή, όλα τα σημεία στο άπειρο θα αντιπροσώπευαν διαφορετικές κατευθύνσεις του επιπέδου. Αφού τα σημεία αυτά είναι τόσο μακριά, θα μπορούσαμε να ονομάσουμε αυτή την ευθεία ως την ευθεία του απείρου. Θα ήταν ένας λίγο πλάγιος τρόπος για να εισέλθουμε σε έναν από τους πιο ενδιαφέροντες και όμορφους τομείς των μαθηματικών, αυτόν της προβολικής γεωμετρίας.

Η βασική ιδέα είναι πως δύο παράλληλες ευθείες ή δύο παράλληλα επίπεδα, που φέρουν το γενικό όνομα των *ποικιλιών* στη μη μετρική γεωμετρία, δεν έχουν κανένα κοινό σημείο αλλά έχουν μία κοινή κατεύθυνση. Αυτό συνειδητοποίησαν οι γεωμέτρες της Αναγέννησης, αφού είχαν ήδη αρχίσει να δουλεύουν καιρό με αναπαραστάσεις στον τρισδιάστατο χώρο. Ο Johannes Kepler (1571–1630) ήταν ο 1^{ος} που είχε την ιδέα του σημείου στο άπειρο, αναζητώντας μια ενοποιημένη θεωρία των κωνικών τομών (τοποθέτησε τη 2^η εστία της παραβολής στο άπειρο), όμως ο Gerard Desargues (1591–1661), ο οποίος θεωρείται πατέρας της προβολικής γεωμετρίας, το ανέπτυξε με πιο συστηματικό τρόπο. Χρειάστηκε να περιμένουμε μέχρι τον 19^ο αιώνα για την πλήρη ανάπτυξη αυτού του γεωμετρικού κλάδου από τον Γάλλο μαθηματικό Gaspard Monge (1746–1818).

2.2 Συνεχείς μετασχηματισμοί

Το απείρως διαιρετό είναι μία έννοια που δε μπορεί να διαχωριστεί από αυτή της συνέχειας. Πρόκειται για ένα σύνθετο και σχετικά σημαντικό ζήτημα. Εδώ, προχωράμε μέσα στο συνεχές με συνεχή τρόπο, κυριολεκτικά. Ο πιο ενστικτώδης τρόπος για τον ορισμό της συνέχειας είναι ο εξής: μία γραμμή είναι συνεχής αν μπορούμε να την σχεδιάσουμε χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι. Γενικότερα, ο όρος

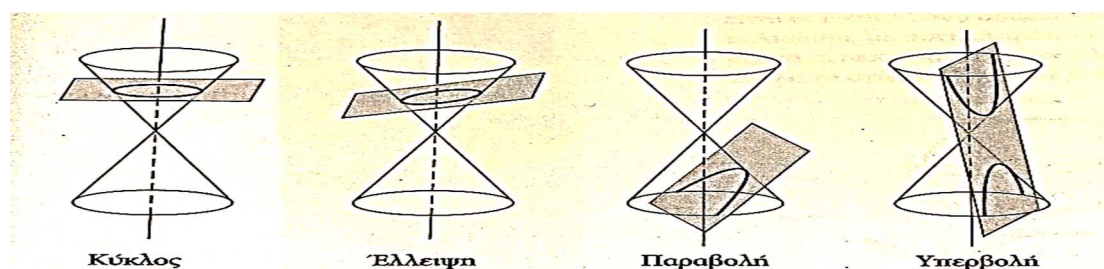
αυτός εφαρμόζεται στην έννοια του μετασχηματισμού. Έστω, για παράδειγμα, ένα παραλληλόγραμμο όπως αυτό της εικόνας:



Θέλουμε να το μεταμορφώσουμε σε τετράγωνο μέσω συνεχούς μετασχηματισμού



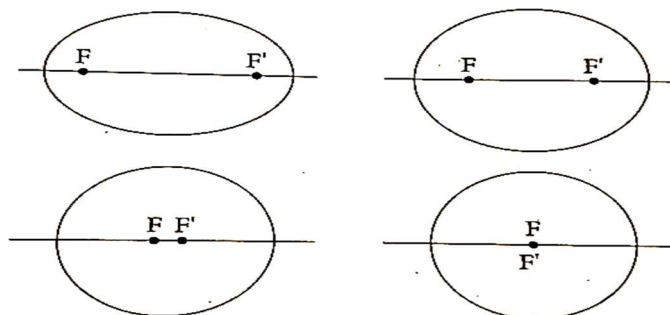
Πρέπει να φανταστούμε πως οι πλευρές έχουν φτιαχτεί από ύλη που μπορεί να παραμορφωθεί, σαν να ήταν από καουτσούκ, ώστε να περνάμε από το ένα σχήμα στο άλλο χωρίς άλμα ή ρήξη, δηλαδή με τρόπο συνεχή. Το 1604, ο Kepler δημοσίευσε ένα μικρό φυλλάδιο με τίτλο *Astronomiæ pars óptica* (μετ. *Το οπτικό μέρος της αστρονομίας*), ως συμπλήρωμα σε μία πραγματεία αστρονομίας αφιερωμένη στην απαραίτητη θεωρητική ανάπτυξη για την κατασκευή οπτικών οργάνων. Ο Kepler μελετούσε τις κωνικές τομές και τους πιθανούς συνεχείς μετασχηματισμούς μιας κωνικής τομής σε μία άλλη. Θα υπενθυμίσουμε πως οι κωνικές τομές είναι επίπεδα γεωμετρικά σχήματα που λαμβάνονται ως τομές ενός κώνου, όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα.



Ο Απολλώνιος, στο έργο του με τίτλο *Οι κωνικές τομές*, τις ορίζει ως γεωμετρικούς τόπους ενός επιπέδου. Αυτή η μέθοδος είναι ακριβής, προϋποθέτει όμως ορισμένους γεωμετρικούς λεπτούς χειρισμούς. Η μέθοδος του Kepler, αντιθέτως, είναι πιο ενστικτώδης και καθιστά δυνατή μία πιο σαφή γεωμετρική αναπαράσταση. Ο ορισμός παρουσιάζεται ως εξής: αν κόψουμε έναν κώνο σε δύο στρώματα (δύο απείρως μακριούς κώνους σε αντίθετη φορά με ίδιο άξονα και κορυφές που συμπίπτουν) με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα, παίρνουμε μία περιφέρεια. Αν δώσουμε μία ελαφριά κλίση στο επίπεδο, η περιφέρεια θα μετασχηματιστεί σε έλλειψη, η οποία θα μεγαλώνει καθώς θα αυξάνει η κλίση του επιπέδου. Συνεχίζοντας να δίνουμε κλίση στο επίπεδο, θα επέλθει μία στιγμή όπου θα γίνει παράλληλο στη γεννήτρια του κώνου και η τομή των δύο θα είναι μία παραβολή. Όταν τέλος, το επίπεδο γίνει παράλληλο στον άξονα του κώνου, η τομή θα δώσει τους δύο κλάδους μιας υπερβολής. Είναι το σύνολο αυτών των καμπυλών, των ελλείψεων, των παραβολών και των υπερβολών που ονομάζουμε κωνικές τομές, όπου ο κύκλος θεωρείται συνήθως μία ιδιαίτερη περίπτωση έλλειψης. Μπορούμε επίσης να κόψουμε τον κώνο με διαφορετικό τρόπο και τότε λαμβάνουμε τις κωνικές τομές που

ονομάζονται εκφυλισμένες (δύο ευθείες). Μπορούμε να φανταστούμε πως η κίνηση αυτού του επιπέδου που τέμνει τον κώνο γίνεται με τρόπο συνεχή, χωρίς να υπάρχει άλμα. Αν μπορούσαμε να οπτικοποιήσουμε το μετασχηματισμό της επίπεδης τομής, θα βλέπαμε πώς μία έλλειψη μετασχηματίζεται σε κύκλο για παράδειγμα, ή σε μία υπερβολή. Ο Kepler παρουσιάζει αυτούς τους μετασχηματισμούς στο επίπεδο, ξεκινώντας από μία έλλειψη. Ας υπενθυμίσουμε πως μία έλλειψη είναι μία κωνική τομή που μπορεί να οριστεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου του οποίου το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία που ονομάζονται εστίες είναι σταθερό. Ας υποθέσουμε πως οι εστίες της έλλειψης που θέλουμε να μετασχηματίσουμε είναι οι F και F' , δύο σημεία που βρίσκονται στο μεγάλο άξονα της έλλειψης. Αν κυλίσουμε με συνεχή τρόπο το σημείο F προς το σημείο F' πάνω στο μεγάλο άξονα, η εκκεντρότητα της έλλειψης θα μειωθεί ώσπου να μετασχηματιστεί σε κύκλο τη στιγμή όπου τα F και F' θα συμπίπτουν.

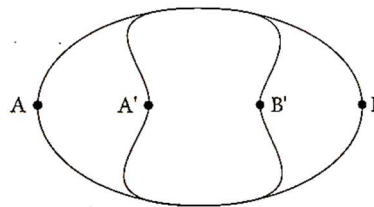
Αν τώρα απομακρύνουμε την εστία F από την εστία F' , η εκκεντρότητα της έλλειψης θα αυξηθεί, δηλαδή το σχήμα θα διαπλατυνθεί (η εκκεντρότητα e είναι μία παράμετρος που κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1, η οποία εκφράζει ακριβώς το κατά πόσο η έλλειψη απομακρύνεται από τον κύκλο). Έρχεται μία στιγμή όπου το σχήμα δεν είναι πια έλλειψη αλλά παραβολή, μία κωνική τομή σε μία μόνο εστία, την οποία ο Απολλώνιος ορίζει ως το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που απέχουν ίση απόσταση από ένα σταθερό σημείο που ονομάζεται εστία και από μία σταθερή ευθεία που ονομάζεται διευθετούσα. Αν το σημείο F στην τροχιά του δε σταματήσει στο άπειρο και συνεχίσει, θα εμφανιστεί στα αριστερά του F' και θα έχουμε μία υπερβολή. Πιο οπτικά, για να περάσουμε από μία έλλειψη σε μία υπερβολή, πρέπει να πάρουμε την έλλειψη από τα άκρα της, σαν να ήταν δύο λαβές, και να τα διπλώσουμε προς τα πίσω, όπως στην παρακάτω εικόνα.



Μπορούμε να λάβουμε μια υπερβολή ξεκινώντας από μία έλλειψη. Για το σκοπό αυτό, ας φανταστούμε πως την πιάνουμε από τα σημεία A , B με τα δύο χέρια, σαν να ήταν το τιμόνι ενός αυτοκινήτου και πως στη συνέχεια τη διπλώνουμε για να τη φέρουμε στο κέντρο. Έτσι, το σημείο A θα γίνει A' και το B , B' . Ένα άτομο που στέκεται απέναντί μας θα δει τα δύο μας χέρια να κρατάνε τους δύο κλάδους της υπερβολής. Το μόνο πρόβλημα είναι πως για να γίνει αυτό, θα πρέπει να φύγουμε στο χώρο, να περάσουμε από το άπειρο για να επιστρέψουμε εκεί που βρισκόμασταν και να κοιτάξουμε την έλλειψη, απαθείς, σα να μη συνέβαινε τίποτα.

Πώς είναι δυνατόν ο Kepler, ένθερμος υποστηρικτής ενός πεπερασμένου σύμπαντος και αντίθετος προς κάθε φιλοσοφικό ή μαθηματικό ρεύμα, να υποστήριζε το ενεργειακό άπειρο, να μπόρεσε να παρουσιάσει ατάραχος έναν τέτοιο μετασχηματισμό; Θα λέγαμε κοινώς πως ο Kepler «έκανε τα στραβά μάτια» σε κάποιες θεωρίες του απείρου που ίσχυαν τότε, για να αποκομίσει ένα ορισμένο πρακτικό όφελος. Φυσικά δε μιλάμε για κοσμικό όφελος, αλλά μιλάμε για όφελος

στο πλαίσιο των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Αυτή η έννοια της συνεχούς εφαρμογής που συνοψίσαμε έμελε να αποτελέσει τον ακρογωνιαίο λίθο της προβολικής γεωμετρίας. Η ιδέα είναι η εξής: υποθέτουμε πως βρίσκουμε μία γεωμετρική ιδιότητα της έλλειψης. Εάν μετακινήσουμε μία από τις εστίες της όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, αυτή η ιδιότητα θα πρέπει να διατηρηθεί.



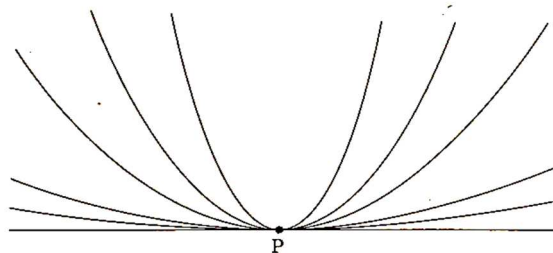
Τι σημαίνει πως η έλλειψη είναι πιο πεπλατυσμένη ή πιο επιμήκης; Αν ο μετασχηματισμός είναι συνεχής, θα έλθει μία στιγμή όπου η ιδιότητα αυτή θα μπορεί να εφαρμοστεί στον κύκλο, στην παραβολή ή στην υπερβολή. Η τεχνική του συνεχούς μετασχηματισμού χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια από τον Blaise Pascal (1623–1662), την εφάρμοσε όμως σε κανονικά πολύγωνα, μετασχηματίζοντας για παράδειγμα ένα εξάγωνο σε πεντάγωνο, μετατοπίζοντας δύο προσκείμενες πλευρές ούτως ώστε να τις κάνει να συμπίσουν. Πώς επέλυσε ο Kepler το πρόβλημα του περάσματος από το άπειρο που έθετε η μέθοδος αυτή;

Ο συλλογισμός του ήταν απλά ο εξής, μία ευθεία επεκτείνεται αόριστα από τα δύο άκρα της μέχρι να συναντήσει ένα κοινό σημείο. Είναι που για τον Kepler, το σύμπαν ήταν πεπερασμένο μεν πολύ μεγάλο δε. Αρκετά μεγάλο ώστε να έχουν νόημα όσα έπρεπε να έχουν νόημα, σίγουρα όμως πεπερασμένο. Σε κάθε περίπτωση, το σημαντικό είναι όχι μόνο πως το σύμπαν ήταν αρκετά μεγάλο ώστε να μπορεί να θεωρεί πως μία καμπύλη που συναντά τον εαυτό της αφού κάνει τον γύρο όλων όσων υπάρχουν (ιδέα παρόμοια με αυτήν του Albert Einstein στη θεωρία του χωροχρόνου του), αλλά ακόμα περισσότερο, το γεγονός πως ο Kepler χειριζόταν με σύνεση αυτή την έννοια του συνεχούς μετασχηματισμού.

2.3 Τετραγωνισμοί

Ο τετραγωνισμός ενός σχήματος σημαίνει το μετασχηματισμό του σε ένα τετράγωνο ίδιου εμβαδού. Ένας από τους κυριότερους στόχους των εφαρμοσμένων μαθηματικών υπήρξε πάντα ο υπολογισμός εμβαδών, ο υπολογισμός όμως του εμβαδού ενός τετραγώνου ήταν πάντα εξαιρετικά εύκολος. Ξέραμε να υπολογίζουμε σχετικά εύκολα τα εμβαδά των επιπέδων σχημάτων που ορίζονταν από ευθύγραμμα τμήματα. Το πυθαγόρειο θεώρημα και η ευκλείδεια γεωμετρία, επέτρεψαν τον υπολογισμό του εμβαδού των τριγώνων και όλων των ορθογωνίων. Τα πιο σύνθετα σχήματα μπορούσαν να αποδομηθούν σε τρίγωνα και ορθογώνια. Ήταν μερικές φορές ζήτημα δεξιότητας ή εφευρετικότητας, η λύση όμως βρισκόταν σχεδόν πάντα. Το πρόβλημα γινόταν πολύ σοβαρό όταν ορισμένες πλευρές του εν λόγω σχήματος ήταν καμπύλες, επειδή δεν υπήρχαν οι κατάλληλες τεχνικές.

Οι Έλληνες, είχαν αποδείξει τη δεινότητά τους σε τέτοιους υπολογισμούς, έφεψαν όμως διαρκώς πάνω σε έναν απρόσμενο και ενοχλητικό επισκέπτη, το ενεργειακό άπειρο. Γιατί όταν τα πράγματα παύουν να είναι ευθείες, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι πως το άπειρο είναι παρόν, με όλα τα συμπαρομαρτούντα του; Επειδή προσπαθώντας να λύσουμε το πρόβλημα, αποκαλύπτεται πως μία ευθεία είναι το αποτέλεσμα μίας προσέγγισής της από άπειρα ευθύγραμμα τμήματα ή, κάτι που ισοδυναμεί με αυτό, μία ευθεία προκύπτει από μία διαδικασία προσέγγισης από καμπύλες όλο και πιο ανοιχτές, όπως δείχνει το επόμενο σχήμα:



Όσο οι καμπύλες ανοίγουν, η απόσταση μεταξύ αυτών και της ευθείας γίνεται όλο και πιο μικρή, ειδικότερα στο σημείο P . Στο άπειρο, ευθεία και καμπύλη είναι ένα και το αυτό. Έστω μια ευθεία, ένα οποιοδήποτε σημείο P αυτής της ευθείας και μία σειρά καμπυλών εφαπτόμενων στο P , όλο και πιο ανοιχτές, δηλαδή καμπυλότητας όλο και μικρότερης, όσο πλησιάζουν την ευθεία. Όσες πολλές και αν είναι οι εφαπτόμενες καμπύλες στην ευθεία στο σημείο P , είναι σαφές πως καμία από αυτές δε θα είναι ίδια με την αρχική ευθεία. Μπορούμε να φανταστούμε πως κάτι παρόμοιο μπορεί να συμβεί και οι άπειρες ευθείες καταλήγουν να γίνουν η ευθεία.

Είναι δυνάμει δυνατό, στην πραγματικότητα όμως, υπό την έννοια του ενεργείας απείρου, δε διαθέτουμε κανέναν ακριβή μηχανισμό που να μας το εγγυάται. Εδώ κάνει ξανά την εμφάνισή του το πέρασμα στο άπειρο, που υλοποιείται σε μία συγκεκριμένη οντότητα, με την αλλαγή φύσης που αυτό προϋποθέτει.

Το σύνολο των καμπυλών που προσεγγίζουν όλο και περισσότερο την ευθεία παρουσιάζει ένα χαρακτηριστικό: για κάθε μία από αυτές, μπορούμε να μιλάμε για ένα μέγεθος που είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο αναφορικά με την καμπυλότητά του. Στο πέρασμα στο όριο, όταν μετασχηματίζονται σε ευθείες, αυτό το χαρακτηριστικό χάνεται (θα μπορούσαμε να μιλάμε για μηδενική καμπυλότητα) και σε αυτό ακριβώς το σημείο παρεμβαίνει η αλλαγή ποιότητας. Είναι ένας από τους λόγους για τους οποίους το άπειρο συνδέεται με το μυστήριο της δημιουργίας. Ο μετασχηματισμός, κατά τον οποίο μία από τις καμπύλες μετασχηματίζεται σε ευθεία, παράγεται σε έναν τόπο του χώρου και του χρόνου στον οποίο δεν έχουμε πρόσβαση. Έχουμε συνείδηση του γεγονότος πως αυτή η έκφραση που αναφέρεται σε μία από τις καμπύλες είναι ασυναφής και ανυπόστατη, δεν υπάρχει τελευταία καμπύλη, διαφορετικά η έννοια του απείρως μικρού θα χανόταν και θα είχαμε ένα διακριτό άλμα ανάμεσα στην τελευταία καμπύλη και στην ευθεία, αντί μιας συνεχούς διεργασίας.

Αυτή η δημιουργική ενέργεια άσκησε μεγάλη επιρροή στην επιστημονική σκέψη λόγω των φιλοσοφικών και θρησκευτικών της αποχρώσεων και λόγω της απαγορευμένης ζώνης που δημιουργεί στους δύο τομείς. Θα ήταν ίσως πιο εύλογο να μιλάμε για «μετάλλαξη» και όχι για δημιουργία. Αυτό θα μας έφερνε πιο κοντά στην ανατολική φιλοσοφία, για την οποία η θρησκευτική σκέψη ενσωματώνεται περισσότερο στη φιλοσοφική σκέψη. Για αυτό θα ήταν πιο ορθό ή πιο κομψό, τουλάχιστον από πνευματική πλευρά, να λέμε πως η καμπύλη υφίσταται μία «μετάλλαξη» που τη μετασχηματίζει σε ευθεία.

2.4 Εύδοξος

Με τον Αρχιμήδη (περ. 287 π.Χ.– περ. 212 π.Χ.), τον Πυθαγόρα (570 π.Χ.– 500 π.Χ.) και τον Ευκλείδη (περ. 325 π.Χ.– 265 π.Χ.), ο Εύδοξος (περ. 408 π.Χ.– περ. 355 π.Χ.) ανήκει στις πιο σημαντικές μορφές των Ελλήνων μαθηματικών. Από εννοιολογικής πλευράς, υπήρξε αναμφίβολα ο πιο οξυδερκής. Την εποχή εκείνη, οι Έλληνες μαθηματικοί βρίσκονταν ακόμα υπό το σοκ της ανακάλυψης των αμέτρητων μεγεθών, με την εμφάνιση των άρρητων αριθμών. Δεν υπήρχε αυστηρά ορισμένο

κριτήριο για τη σύγκριση μεγεθών διαφορετικής φύσης. Ο Εύδοξος είναι αυτός που έδωσε έναν σαφή ορισμό (ορισμός 5 του βιβλίου V των «Στοιχείων» του Ευκλείδη) «*Λέμε πως τα μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο, το πρώτο με το δεύτερο και το τρίτο με το τέταρτο, όταν, θεωρώντας οποιαδήποτε ισοπολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου και οποιαδήποτε ισοπολλαπλάσια του δεύτερου και του τέταρτου, τα πρώτα είναι μεγαλύτερα, ίσα ή μικρότερα από τα δεύτερα, στην αντίστοιχη σειρά*». Αυτό μπορεί να διατυπωθεί στη σημερινή γλώσσα ως εξής: δύο λόγοι a/b και c/d είναι ίσοι όταν, δεδομένων δύο οποιωνδήποτε ακέραιων αριθμών k και k' , επαληθεύεται πως:

$$\begin{aligned} \text{Αν } ka < k'b, & \text{ τότε } kc < k'd \\ \text{αν } ka &= k'b, \text{ τότε } kc = k'd \\ \text{αν } ka > k'b, & \text{ τότε } kc > k'd. \end{aligned}$$

Αυτό ίσως φαίνεται κοινότοπο, αλλά δεν είναι καθόλου. Πρέπει να λάβουμε υπόψη μας πως, όπως διατυπώθηκε από τον Εύδοξο, ο ορισμός αυτός μπορεί να εφαρμοστεί σε λόγους που περιέχουν ρίζες αριθμών και σε γεωμετρικά σχήματα. Για παράδειγμα, οι πρώτοι λόγοι μπορούν να παραπέμπουν σε σφαίρες και οι δεύτεροι σε κύβους που κατασκευάζονται πάνω στις διαμέτρους αυτών. Επιπλέον, μέσα στους κανόνες αυτούς βρίσκεται ο σπόρος αυτού που θα γίνει ορισμός του άρρητου αριθμού, ορισμός που δόθηκε από τον Richard Dedekind τον 19^ο αιώνα σύμφωνα με τη μέθοδο που αποκάλεσε «μέθοδο των τόμεων».

Η άλλη μεγάλη συνεισφορά του Εύδοξου υπήρξε το *αξίωμα της συνέχειας*, γνωστό με το όνομα *λήμμα του Αρχιμήδη*, το οποίο ο ίδιος ο Αρχιμήδης παραδέχτηκε πως έμαθε από τον Εύδοξο και το οποίο διατυπώνεται ως εξής: «*Δεδομένων δύο μεγεθών μεταξύ των οποίων υπάρχει μία σχέση (λόγος), μπορούμε να βρούμε πως το ένα από τα δύο είναι μεγαλύτερο από το άλλο*». Η κύρια σημασία του λήμματος αυτού έγκειται στο γεγονός πως επιτρέπει να αποδειχτεί μέσω της εις άτοπον απαγωγής μία πρόταση που θεωρείται από τις σημαντικότερες της ιστορίας των μαθηματικών και η οποία επέτρεψε στον Εύδοξο και σε πολλούς μαθηματικούς μετά από αυτόν, να υπολογίσει τα εμβαδά και τους όγκους καμπυλόγραμμων σχημάτων. Η πρόταση του Εύδοξου είναι η εξής:

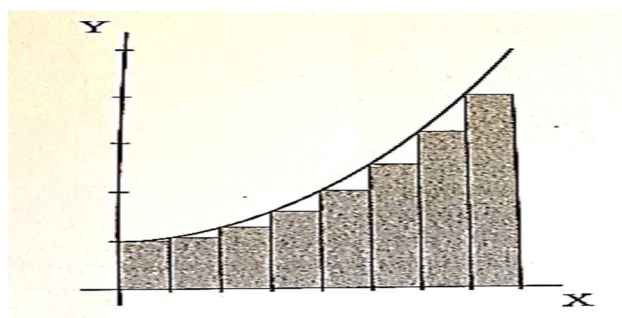
«*Αν αφαιρέσουμε από ένα οποιοδήποτε μέγεθος ένα μέρος μεγαλύτερο ή ίσο με το μισό του και αν αφαιρέσουμε από ότι απομένει μέρος μεγαλύτερο ή ίσο με το μισό του και αν συνεχίσουμε ως εξής, θα απομείνει ένα μέγεθος πιο μικρό από κάθε δεδομένο μέγεθος της ίδιας φύσης*».

Αυτή η πρόταση περιλαμβάνει την πεμπτουσία μιας άλλης μεγάλης μαθηματικής εξέλιξης που υλοποιήθηκε κατά τον 19^ο αιώνα, όταν ο Karl Weierstrass (1815–1897) πρότεινε έναν ακριβή και συνεκτικό ορισμό της έννοιας του ορίου. Η μέθοδος του Εύδοξου, που στηρίχτηκε στην πρόταση αυτή, για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, είναι γνωστή με το όνομα **μέθοδος εξάντλησης**. Δεν προξενεί εντύπωση το γεγονός πως πολλοί ιστορικοί θεωρούν την εποχή κατά την οποία ο Πλάτωνας ίδρυσε τη σχολή του, ως μία αναγέννηση των ελληνικών μαθηματικών.

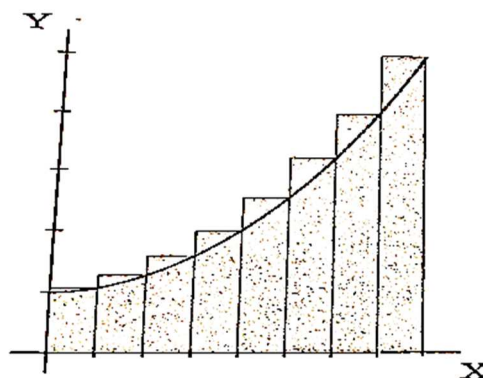
Πράγματι, ο Εύδοξος έδωσε τις βάσεις επάνω στις οποίες στηρίχτηκε μια μακρά διεργασία λογισμού που θα κατέληγε σε αυτό που αργότερα ονομάστηκε *απειροστικός λογισμός*. Η μέθοδος της εξάντλησης έδινε ορθές αποδείξεις, με την προϋπόθεση πως τα θεμέλια εκκίνησης ήταν σωστά, κάτι που συνέβαινε συνήθως, παρουσίαζε όμως το μειονέκτημα πως δε συνιστούσε ένα σύστημα που παρήγαγε νέα αποτελέσματα. Ας υπενθυμίσουμε πως στηριζόταν στην υπόθεση πως ένα αποτέλεσμα ήταν σωστό και ανέλυε τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσαμε να καταλήξουμε σε αυτό. Γνωρίζαμε, για παράδειγμα, πως τα αποτελέσματα που σχετίζονταν με τους όγκους των κώνων και των πυραμίδων στα οποία ο Εύδοξος είχε

καταλήξει με ικανοποιητικό τρόπο, είχαν ανακαλυφθεί από αρχαίους μαθηματικούς όπως ο Δημόκριτος, οι οποίοι είχαν καταλήξει σε αυτά μέσω ενστίκτου ή απόδειξης.

Σήμερα, διαθέτουμε μία μέθοδο ολοκλήρωσης που μας επιτρέπει να κάνουμε υπολογισμούς χάρη σε πολύ συγκεκριμένους αλγόριθμους. Είναι σα να λέμε πως ο λογισμός γίνεται από μία μηχανή και είναι αυτό που συμβαίνει στην πραγματικότητα. Η μέθοδος στηρίζεται σε μία ιδέα που απορρέει σαφώς από το ένστικτο των Ελλήνων μαθηματικών. Μέχρι ενός σημείου, η μέθοδος της εξάντλησης που χρησιμοποιήθηκε τότε αντιστοιχεί σε αυτή που γνωρίζουμε σήμερα με το όνομα της προσέγγισης από αθροίσματα του Riemann. Η μέθοδος αυτή συνιστάται στη σχεδίαση μιας σειράς ορθογωνίων, των οποίων τα ύψη δεν ξεπερνούν το ύψος της καμπύλης, ή με άλλα λόγια, των οποίων η κάτω βάση βρίσκεται στην ευθεία των τεταγμένων και η άνω βάση, κάτω από την καμπύλη:



Το άθροισμα των εμβαδών όλων αυτών των ορθογωνίων θα είναι φυσικά μικρότερο από το ζητούμενο εμβαδόν. Όσο ο αριθμός των ορθογωνίων αυξάνει, το συνολικό τους εμβαδό θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο την επιφάνεια που ορίζει η καμπύλη. Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο πράγμα, αυτή τη φορά όμως με την άνω βάση πάνω από την καμπύλη:



Έτσι, είμαστε σίγουροι πως το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων θα είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν που ψάχνουμε. Μπορούμε τώρα να αυξήσουμε τον αριθμό των ορθογωνίων και το εμβαδόν θα προσεγγίσει το εμβαδόν που ψάχνουμε, αυτή τη φορά όμως καθ' υπέρβαση. Έτσι, έχουμε δύο σειρές, μία που προσεγγίζει την καμπύλη από κάτω και μία που την προσεγγίζει από πάνω. Αυτό είναι, πολύ σχηματικά, το μοντέλο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των εμβαδών.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα παρόμοιο μοντέλο για τον υπολογισμό όγκων. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με την τιμή που θα έπρεπε να έχει το εν λόγω μέγεθος προσεγγίζοντάς το από πάνω και από κάτω, επιβεβαιώνοντας πως αν οι τιμές ξεπερνιούνταν, το αποτέλεσμα θα ήταν αντιφατικό. Είναι αυτό που τον 17^ο αιώνα ονομάστηκε *μέθοδος απαγωγής*. Σε όλες τις δυνατές περιπτώσεις, η μέθοδος μας οδηγεί αλάνθαστα στο να θεωρήσουμε το ενεργειακό άπειρο, που στη μοντέρνα ανάλυση θα ονομασθεί *πέρασμα στο όριο*, ένα πέρασμα που θα έφερνε θεαματικά

αποτελέσματα σε αυτό το πρόβλημα ή σε άλλα προβλήματα της ίδιας φύσης αν το είχαν εφαρμόσει.

2.4.1 Ολοκλήρωση με το «χέρι»

Υπάρχει μία μηχανική διάταξη, ένας «ολοκληρωτής», που επιτρέπει τον αυτόματο υπολογισμό μιας επίπεδης επιφάνειας που ορίζεται από μία συνεχή καμπύλη. Μοιάζει πολύ με αυτήν που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των αποστάσεων σε ένα χάρτη που αποτελείται από ένα μικρό τροχίσκο με ένα ταχύμετρο που υποδεικνύει τη διανυθείσα απόσταση κατά μήκος μίας πορείας σε ένα δρόμο. Ανάλογο σκεπτικό έχει και ο ολοκληρωτής. Όταν διατρέχουμε το περίγραμμα μιας κλειστής επιφάνειας, επιστρέφοντας στο αρχικό σημείο, μας δίνει την τιμή της επιφάνειας που περικλείει αυτό το περίγραμμα. Είναι χρήσιμος για τους σχεδιαστές πατρών, αφού τους δίνει την ποσότητα του απαραίτητου υλικού για την κατασκευή του έργου τους.

2.4.2 Ο Εύδοξος και η αστρολογία

Ο Εύδοξος γεννήθηκε περί τα 408 π.Χ. στην Κνίδα, πόλη της αρχαίας Καρίας, στη σημερινή Τουρκία. Δεν είναι πολύ γνωστός ως αστρονόμος και γεωγράφος, τομείς στους οποίους έκανε σημαντικές ανακαλύψεις. Καθόρισε την τροχιά διαφόρων άστρων και κατόρθωσε να αποδείξει πως το ηλιακό έτος είχε 6 ώρες περισσότερες από τις 365 ημέρες που του αποδίδονταν ως τότε. Υπήρξε επίσης ο πρώτος που διαίρεσε την ουράνια σφαίρα σε βαθμούς μήκους και πλάτους.

Σχεδίασε ένα χάρτη του ουρανού και έκανε μελέτες για τη δημιουργία των ημερολογίων, τη μετεωρολογία και τις αλλαγές της εποχής στο δέλτα του Νείλου. Οι γνώσεις του στον τομέα της αστρονομίας τον έφεραν αντιμέτωπο με την τάξη των ιερέων επειδή εκείνοι χρησιμοποιούσαν την αστρονομία για τους αστρολογικούς υπολογισμούς τους. Ο Εύδοξος, που ήταν σαφώς ένας επιτιμητής της αστρολογίας, δε στήριξε τα επιχειρήματά του σε πεποιθήσεις, που ήταν αμφισβητήσιμες, αλλά σε μία μεθοδολογία, υποστηρίζοντας πως:

«Όταν κάποιος ισχυρίζεται πως μπορεί να κάνει προβλέψεις για τη ζωή ενός πολίτη χάρη σε ωροσκόπια που στηρίζονται στην ημερομηνία γέννησής του, πρέπει να μην τον πιστεύουμε σε καμία περίπτωση, γιατί ο υπολογισμός των επιρροών των άστρων είναι τόσο πολύπλοκος που δεν υπάρχει κανένας άνθρωπος επάνω στη Γη που να μπορεί να τον εκτελέσει».



2.5 Kepler

Ο Kepler υπήρξε ένας από τους πρώτους μαθηματικούς της Αναγέννησης που ασχολήθηκε με τον υπολογισμό όγκων. Επιπλέον, ασχολήθηκε με αυτόν μέσα σε κάπως ιδιαίτερες συνθήκες, την ημέρα του 2^{ου} γάμου του με την Susanna Reuttinger.

Καθώς η γυναίκα του είχε πεθάνει την προηγούμενη χρονιά, ήταν ένας γάμος συμφέροντος αφού ο Kepler χρειαζόταν απεγνωσμένα να τον φροντίσει κάποιος και να αναλάβει τα παιδιά και τις οικιακές δουλειές. Η Susanna θα πρέπει να είχε ενημερωθεί για τον ιδιαίτερο χαρακτήρα του μελλοντικού συζύγου της, αφού δεν έδειξε να εκπλήσσεται από το γεγονός πως αυτός άφησε τη δεξίωση του γάμου για να σπεύσει να μελετήσει τι έκανε ο υπεύθυνος του κρασιού με τα βαρέλια που περιείχαν το κρασί για τους συνδαιτυμόνες. Όχι μόνο τα βαρέλια δεν ήταν εντελώς κυλινδρικά, αλλά επιπλέον, η μέτρηση γινόταν εισάγοντας λοξά μία ράβδο από το καπάκι.

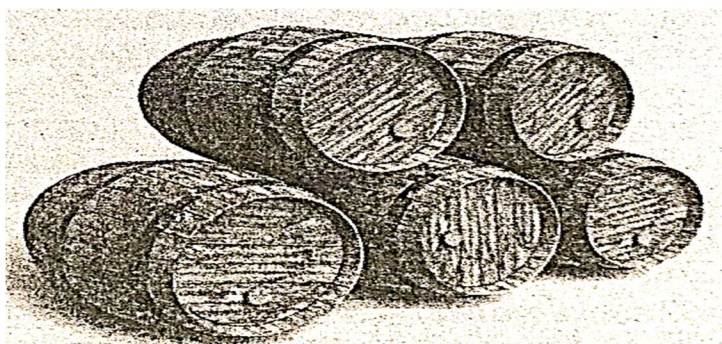
Ο υπεύθυνος συμπέραине την ποσότητα του κρασιού που απέμενε στα βαρέλια από το σημάδι που το κρασί άφηνε στη ράβδο. Από το συλλογισμό αυτόν προέκυψε ένα έργο που δημοσιεύτηκε το 1615 με τίτλο *New stereometry of wine barrels*, «Νέα μέθοδος μέτρησης βαρελιών κρασιού». Για να λύσει το πρόβλημα, ο Kepler βασίστηκε στην τεχνική των αδιαίρετων που είχε αναπτύξει ο Αρχιμήδης. Θα μπορούσαμε να πούμε πως κατά τη διάρκεια του γάμου αυτού σπάρθηκαν οι σπόροι του απειροστικού λογισμού. Θα πρέπει όμως να σημειώσουμε πως οι εργασίες του Kepler στον τομέα αυτόν ήταν περισσότερο πρακτικές παρά θεωρητικές, και παρέμειναν σε υποτυπώδες στάδιο. Για να υπολογίσει το εμβαδόν ενός κύκλου για παράδειγμα, θεωρούσε το άθροισμα των εμβαδών άπειρων τριγώνων που είχαν κατασκευαστεί ούτως ώστε η μία κορυφή τους να βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου και η βάση τους στην περιφέρεια. Για να υπολογίσουμε τον όγκο των σφαιρών, προσφεύγουμε ομοίως στο άθροισμα των όγκων των κώνων των οποίων οι κορυφές βρίσκονται στο κέντρο της σφαίρας και οι βάσεις στην επιφάνειά της.

Με αυτή τη μέθοδο ο Kepler κατέληξε στο συμπέρασμα πως ο όγκος μιας σφαίρας ισούται με το ένα τρίτο της ακτίνας επί την επιφάνειά της. Αιτιολογούσε όλες αυτές τις πράξεις με την αρχή της συνέχειας, την οποία έπρεπε να θεωρεί δεδομένη εφόσον ήθελα να συνεχίσει να εφαρμόζει τη μεθοδό του στον υπολογισμό όγκων.

2.5.1 Τα βαρέλια του Kepler

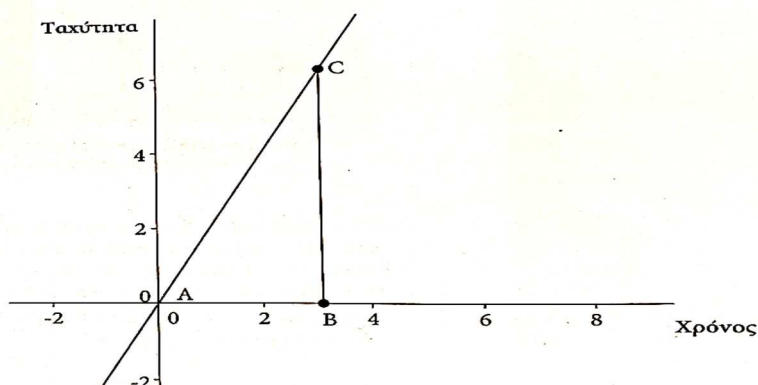
Το πρόβλημα που έθεσε ο Kepler με τα βαρέλια είναι ένα από τα κλασικά προβλήματα που επιλύονται με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού και εκφράζεται γενικά με τον υπολογισμό ενός υγρού που περιλαμβάνεται σε δοχείο δεδομένου γεωμετρικού σχήματος. Είναι σύνηθες, όταν ένα βυτιοφόρο φτάνει σε ένα πρατήριο, να βλέπομε κάποιον να εισάγει μία μεταλλική ράβδο στο ρεζερβουάρ για να μετρήσει το ύψος του καυσίμου. Είναι προφανές πως τα σημάδια επάνω στη ράβδο γίνονται «στα μέτρα μας», ανάλογα με το σχήμα του ρεζερβουάρ.

Φυσιολογικά, αυτά τα ρεζερβουάρ έχουν κυλινδρικό σχήμα και τα άκρα τους κλείνουν με σφαίρες ή παραβολοειδή εκ περιστροφής. Μπορούμε να δούμε δεξαμενές κηροζίνης με αυτά τα χαρακτηριστικά στα αεροδρόμια.

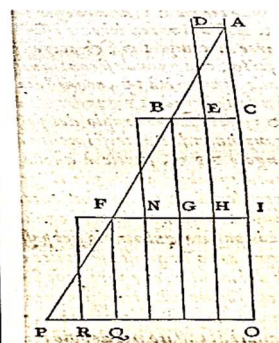


2.6 Γαλιλαίος

Ο Γαλιλαίος, Galileo Galilei στα ιταλικά, (1564–1642), ήταν ένας επιστήμονας επαναστατικός, από πολλές απόψεις. Θα σταθούμε συνοπτικά στις περιπέτειές του με το άπειρο. Κατ' αρχάς, ο Γαλιλαίος θεωρούσε την κίνηση που παράγεται αδιάκοπα, δηλαδή που ήταν συνεχής και όχι διακριτή, γνωρίζοντας ταυτόχρονα καλά πως ήταν μία θέση παρακινδυνευμένη αφού κάποια στιγμή θα έπρεπε να δεχτεί το άλμα από το δυνάμει στο ενεργεία άπειρο. Για αυτό «γεωμετρικοποίησε» τα προβλήματα που σχετίζονταν με την κίνηση. Έτσι, θεώρησε πως η κίνηση για την οποία η ταχύτητα δεν ήταν σταθερή, μπορούσε να αναπαρασταθεί γεωμετρικά ως εξής:



Πορτραίτο του Γαλιλαίου από τον Φλαμανδό ζωγράφο Justus Sustermans (1636) και γράφημα που χρησιμοποιήθηκε για να αποδειχτεί η κίνηση πτώσης των σωμάτων



Στον οριζόντιο άξονα, ο Γαλιλαίος μεταφέρει το χρόνο και στον κάθετο τις ταχύτητες. Μία μη σταθερή κίνηση είναι για παράδειγμα τύπου $v=2t$. Αυτό σημαίνει πως η ταχύτητα αυξάνει με το χρόνο και πως μετά από ένα δευτερόλεπτο ισούται με 2, μετά από δύο δευτερόλεπτα ισούται με 4, κοκ. Έστω ένα τρίγωνο ABC στο οποίο το τμήμα AB αναπαριστά τον χρόνο που πέρασε και η πλευρά BC , την ταχύτητα, συμπεράνε πως το διάστημα που διανύθηκε θα ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ABC . Ο Γαλιλαίος επιθυμούσε να εφαρμόσει τη μέθοδο σε πιο σύνθετες κινήσεις, όπως στις παραβολικές τροχιές και έτσι οδηγήθηκε στις καμπύλες γραμμές και στις επιφάνειες που αυτές όριζαν. Για τους υπολογισμούς του χρησιμοποίησε μεθόδους παρόμοιες με αυτές του Kepler. Ο Cavalieri, ένας από τους μαθητές του, είναι αυτός που ανακάλυψε μία λογική μέθοδο για τον υπολογισμό αυτού του τύπου εμβαδών.

Έτσι, ο Γαλιλαίος ήρθε αναπόφευκτα αντιμέτωπος με τα παράδοξα του απείρου, οπότε στοχάστηκε υποχρεωτικά πάνω στη φύση του. Βρήκε ένα παράδοξο που δεν θα μπορούσε να επιλύσει και που, επισήμως, δεν ήταν πραγματικό παράδοξο, αλλά περιλάμβανε έναν πιθανό ορισμό του απείρου, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Αυτό το πρόβλημα-παράδοξο εμφανίστηκε το 1638 στους διαλόγους του και διατυπώθηκε ως εξής: Έστω το σύνολο των φυσικών ακέραιων:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \dots$$

Ας γράψουμε τη σειρά των τέλειων τετραγώνων αυτών των ακέραιων:

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...

Είναι προφανές πως αυτά τα σύνολα είναι άπειρα, υπό την έννοια πως μπορούμε να συνεχίσουμε να τους εισάγουμε αριθμούς χωρίς να συναντήσουμε όριο. Επιπλέον, ο Γαλιλαίος παρατήρησε πως, για κάθε στοιχείο του 1^{ου} συνόλου, υπήρχε ένας αριθμός μέσα στο 2^ο σύνολο που ήταν το τετράγωνό του αλλά, από την άλλη πλευρά, ήταν προφανές πως υπήρχαν πολλοί περισσότεροι αριθμοί στην 1^η σειρά απ' ό,τι στη 2^η. Το ερώτημα που έθεσε τότε ο Γαλιλαίος ήταν αν το 1^ο άπειρο είναι μεγαλύτερο από το 2^ο, γεγονός που τον οδήγησε προφανώς σε ένα παράδοξο. Ο Γαλιλαίος έκανε τότε τον εξής συλλογισμό: είτε αυτό που έλεγε δεν ήταν αλήθεια, είτε η αριθμητική σύγκρισης με τις έννοιες ανωτερότητας, ισότητας ή κατωτερότητας που είχε αναπτύξει δεν μπορούσε να εφαρμοστεί στον τομέα του απείρου. Είχε δίκιο αφού, 3 αιώνες αργότερα, ο Greg Cantor δήλωνε «*Η αριθμητική των απείρων διαφέρει από αυτή των πεπερασμένων*».

2.7 Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

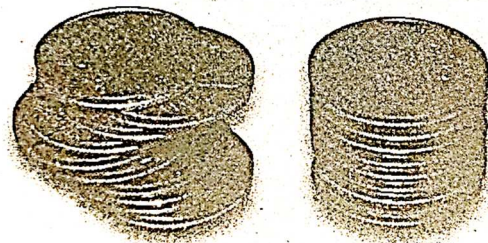
Ιησουίτης και καθηγητής μαθηματικών σε λύκειο της Μπολόνιας, ήταν ένας από τους μαθητές του Γαλιλαίου που ενδιαφέρθηκαν περισσότερο για τους υπολογισμούς εμβαδών και όγκων. Το 1635, δημοσίευσε πάνω στο θέμα αυτό ένα έργο με τίτλο «*Ανώτερη γεωμετρία*» μέσω μίας αρκετά παραγνωρισμένης μεθόδου, της μεθόδου των συνεχών αδιαιρέτων. Ο τίτλος τα λέει ουσιαστικά όλα, από τη μία πλευρά, δέχεται την αρχή της συνέχειας και από την άλλη, προτίθεται να θεωρήσει πως τα συνεχή αντικείμενα μπορούν να διαιρεθούν σε στοιχειώδη μέρη, σε «μονάδες», δηλαδή σε δομικά άτομα που δε μπορούν να διαιρεθούν σε μικρότερα μέρη. Δηλώνει επομένως πως μία ευθεία αποτελείται από επίπεδα, όπως οι σελίδες ενός βιβλίου. Επομένως, οι αδιαίρετοι μίας ευθείας είναι τα σημεία, οι αδιαίρετοι ενός επιπέδου είναι οι ευθείες που απέχουν ίση απόσταση μεταξύ τους και οι αδιαίρετοι των στερεών, ένα σύνολο παράλληλων επιπέδων που απέχουν όλα ίση απόσταση μεταξύ τους. Η αρχή που σήμερα έχει το όνομα του Cavalieri διατυπώνεται ως εξής, «*αν δύο σώματα έχουν το ίδιο ύψος και αν επιπλέον έχουν επίπεδες τομές ίδιας επιφάνειας στο ίδιο ύψος, τότε έχουν τον ίδιο όγκο*».

Με τη μέθοδο αυτή, ο Cavalieri μπόρεσε να αποδείξει πως ο όγκος ενός κώνου ισούται με το 1/3 του όγκου του οριοθετημένου κυλίνδρου. Εννοείται πως η μέθοδός του δέχτηκε πολλές επικρίσεις από τους επιστήμονες της εποχής, στις οποίες δεν μπόρεσε να απαντήσει αφού η μέθοδός του στερούνταν λογικής μαθηματικής αιτιολόγησης. Προς υπεράσπισή του οφείλουμε να πούμε πως δε διατεινόταν μαθηματικοί όπως ο Fermat, ο Pascal και ο Roberval χρησιμοποίησαν τη μέθοδό του χωρίς δισταγμούς. Ο Roberval έφτασε σε καλά αποτελέσματα αφού υπολόγισε έτσι την επιφάνεια που οριοθετούνταν από το τόξο μιας κυκλοειδούς. Ο Cavalieri συνειδητοποιούσε πως οι αδιαίρετοι πρέπει να ήταν άπειροι στον αριθμό, ανήκε όμως σε αυτούς τους μαθηματικούς που τήρησαν σιγή για το ζήτημα αυτό. Και όχι μόνο, ονόμασε τη μέθοδό του «μέθοδο των απείρων», το έργο του όμως είχε τίτλο «*Πραγματεία περί αδιαιρέτων*».

2.7.1 Το θεώρημα του Cavalieri

Η μέθοδος που χρησιμοποιεί ο Cavalieri για τον υπολογισμό όγκων, μπορεί να αναπαρασταθεί οπτικά ως εξής, έστω δύο στήλες από νομίσματα ή μάρκες καζίνο που περιλαμβάνουν ίσο αριθμό στοιχείων. Ας φτιάξουμε 2 πύργους με κάθε σύνολο. Ας παραμορφώσουμε τον 2^ο πύργο γλιστρώντας τα νομίσματα το ένα πάνω στο άλλο, έτσι ώστε να μην έχει πια σχήμα κυλίνδρου. Ο υπολογισμός του όγκου του 2^{ου}

πύργου θα ήταν δύσκολος αφού δεν έχει πια κανονικό σχήμα. Ωστόσο, το θεώρημα του Cavalieri μας βεβαιώνει πως οι δύο πύργοι έχουν τον ίδιο όγκο. Στο παράδειγμα αυτό, κάθε νόμισμα αντιπροσωπεύει ένα «αδιαίρετο». Σύμφωνα με το θεώρημα του Cavalieri, ο όγκος των δύο στηλών είναι ίδιος ακόμα και αν στη μία περίπτωση η στήλη είναι τέλεια και στην άλλη όχι.



2.8 Καρτέσιος

Ο René Descartes ή Καρτέσιος (1596–1650) είναι ο ιδρυτής του ρασιοναλισμού και ο κύριος εκφραστής του. Ο «Λόγος περί της μεθόδου» είναι το πιο εμβληματικό του έργο και η φράση «σκέφτομαι άρα υπάρχω» η πιο αντιπροσωπευτική. Είναι η μοναδική αλήθεια βάσει της οποίας θεωρούσε πως μπορούσε να ξεκινήσει την πορεία του στη συστηματική αμφισβήτηση. Η μέθοδός του, όπως υποδεικνύει το όνομά της, συνιστά ένα σύνολο κανόνων που δίνουν τη δυνατότητα ορθού συλλογισμού σε οποιοδήποτε τομέα της ανθρώπινης σκέψης. Δεν υπάρχει αμφιβολία πως ο Καρτέσιος υπήρξε φιλόσοφος περισσότερο από μαθηματικός και πως τα αποτελέσματά του στον τομέα αυτόν μπορούν να θεωρηθούν καρπός της μεθόδου του. Το γεγονός πως σήμερα οι επιστήμες διαχωρίζονται από τη φιλοσοφία δε σημαίνει πως η φιλοσοφία δεν ασκεί επιρροή στις επιστήμες, αλλά μάλλον πως σήμερα έχουμε λιγότερο συναίσθηση της επιρροής αυτής.

Εκτός από κάποιες σημαντικές αναφορές στους τομείς της ταξινόμησης των καμπυλών και της ταυτοποίησης των κωνικών τομών, οι πιο αξιοσημείωτες ανακαλύψεις του βρίσκονται στο έργο του με τίτλο «Γεωμετρία». Ο Καρτέσιος πίστευε πως η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων απαιτούσε υπερβολικό κόπο από μεριάς της φαντασίας για τη νοητική αναπαράσταση των σχημάτων. Αυτό τον οδήγησε στο να δημιουργήσει ένα σύστημα σύλληψής τους ως σύνολα σημείων, σε κάθε ένα εκ των οποίων αποδίδονταν αριθμοί. Έτσι, το γεωμετρικό πρόβλημα γινόταν πρόβλημα άλγεβρας και αντιστρόφως, πολλά αλγεβρικά ζητήματα μπορούσαν να επιλυθούν με γεωμετρικές μεθόδους. Θα ήταν υπερβολή να μιλήσουμε για γέννηση της αναλυτικής γεωμετρίας από τις εργασίες αυτές, ωστόσο ίδρυσε πράγματι μία «καρτεσιανή γεωμετρία». Ο Καρτέσιος προσέγγισε το πρόβλημα του απείρου στις «Αρχές της φιλοσοφίας», όμως σε όλο το έργο δεν το αποκαλούσε έτσι, αλλά χρησιμοποιούσε τον όρο «αόριστο». Δε δίσταζε να παραδέχεται την ύπαρξη του απείρως μεγάλου, εκθέτοντας πως τα άστρα έχουν αόριστο αριθμό, αλλά και του απείρως μικρού, όταν έλεγε πως η ύλη είναι αόριστα διαιρετή. Αυτή η αλλαγή του όρου δεν είναι τυχαία αλλά σκόπιμη και ο Καρτέσιος την αιτιολογούσε λέγοντας πως η λέξη άπειρο έπρεπε να χρησιμοποιείται μόνο όταν παραπέμπει στο Θεό.

Δεχόταν επίσης για τα αόριστα πράγματα τη δυνατότητα να έχουν ένα όριο το οποίο, ούτως ή άλλως δεν μας ήταν προσπελάσιμο. Έτσι, ο Καρτέσιος είχε χαρακτηρίσει αδύνατη την ύπαρξη του ενεργεία απείρου λόγω των περιορισμών του ανθρώπινου είδους, κάτι που δεν τον εμπόδιζε να δέχεται την ύπαρξη ενός δυνάμει απείρου αφού, σύμφωνα με το συλλογισμό του, δε θα μπορούσαμε να αναφερόμαστε στο πεπερασμένο αν δεν υπήρχε το άπειρο

«Δεν θα ήταν δυνατό η φύση μου να είναι όπως είναι, πεπερασμένη αλλά προικισμένη με την έννοια του απείρου, εάν το άπειρο δεν υπήρχε. Η ιδέα του Θεού

είναι σαν το σημάδι του τεχνίτη πάνω στο έργο του και δε χρειάζεται καν αυτό το σημάδι να ξεχωρίζει από το έργο», συμπέρανε ο Καρτέσιος. Για τον Καρτέσιο, η ιδέα του απείρου ήταν επομένως εγγενής.