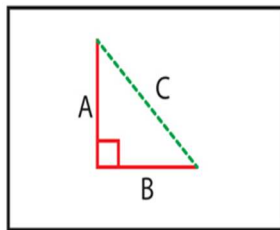


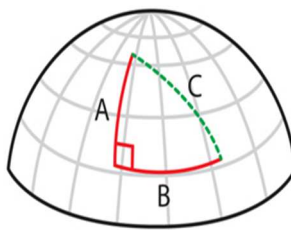


Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

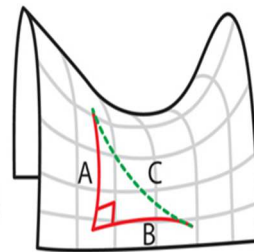
Πτυχιακή εργασία
Μη ευκλείδειες γεωμετρίες



Euclidean
 $a^2 + b^2 = c^2$



Spherical
 $\cos a \times \cos b = \cos c$



Hyperbolic
 $\cosh a \times \cosh b = \cosh c$

Σπουδαστής: **Κατσίφας Αντώνιος** (ΑΜ 7988)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (Μ.Εδ.),
Επίκουρος Καθηγητής**

Ακαδημαϊκό έτος: **2020–2021**

Ημερομηνία ανάθεσης: **11.05.2020**
Ημερομηνία κατάθεσης: **06.2021**
Ημερομηνία εξέτασης: **06.2021**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Αντώνιος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
3	Αθανασία Χρηστίδου Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Η ευκλείδεια γεωμετρία.....	4
2. Ο Ευκλείδης, τα «Στοιχεία» και το 5 ^ο αίτημα	4
3. Ευκλείδεια ορολογία.....	6
4. Τα κανονικά πολύεδρα	7
5. Διατυπώσεις ισοδύναμες με το 5 ^ο αξίωμα	8
6. Η γεωμετρία στην τέχνη	9
7. Θεώρημα του παχέος σημείου.	9
8. Η γεωμετρία στους πίνακες της Αναγέννησης	10
9. Διάσταση.....	11
10. Αψηφώντας τον Ευκλείδη	12
11. Ιμμάνουελ Καντ	14
12. Κάποιες ατυχείς λέξεις.....	14
13. Η εδραίωση της μη ευκλείδειας γεωμετρίας	14
14. Nikolai Lobachevski και υπερβολική γεωμετρία	15
15. Janos Bolyai	16
15.1 Όψιμη αναγνώριση	17
16. Η συμβολή του Gauss.....	17
16.1 Η πρώιμη ιδιοφυΐα του Gauss.....	18
16.2 Η αλληλογραφία ανάμεσα στον Gauss και στον Bolyai	18
17. Οι κοινές εντυπωσιακές επιτυχίες των Lobachevski και Bolyai	19
18. Συνηθισμένα μοντέλα υπερβολικής γεωμετρίας	20
19. Η πραγματικότητα ξεπερνά την αφαίρεση	22
20. Άλλη γεωμετρία, άλλος κόσμος	23
21. Ο Riemann και η ελλειπτική γεωμετρία	23
22. Ο σφαιρικός κόσμος του Riemann	25
23. Γεωμετρικές συγγένειες.....	25
24. Ο Ευκλείδης στην πραγματικότητα	27
25. Ένας αγώνας δρόμου μυρμηγκιών.....	27
26. Αϊνστάιν εναντίον Ευκλείδη	28
27. Η θεωρία της σχετικότητας.....	28
28. Ο πατέρας της σχετικότητας	29
29. Το παράδοξο των διδύμων.....	29
30. Η πραγματική γεωμετρία	30
31. Γεωμετρία της υδρογείου σφαίρας	31
32. Παράλληλοι και μεσημβρινοί.....	32
33. Από το χάρτη των 2 ημισφαιρίων στο Google Earth.....	35
34. Ποια είναι η πιο σύντομη απόσταση ανάμεσα στη Βαρκελώνη και το Τόκιο; ...	35

1. Η ευκλείδεια γεωμετρία

Στις αρχές της, η γεωμετρία ήταν η επιστήμη της μέτρησης. Οι Έλληνες γεωμέτρες, έμαθαν να μετρούν το μήκος μιας γραμμής, ευθείας ή καμπύλης, το εμβαδόν που ορίζεται από τις γραμμές και τον όγκο που ορίζεται από τα εμβαδά. Γρήγορα όμως, η έκφραση μετρώ απέκτησε μια πιο ευρεία έννοια, αυτήν της κατάρτισης σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά αντικείμενα. Οι γεωμετρικές εκφράσεις, πήραν τότε τη μορφή με την οποία τις γνωρίζουμε σήμερα, η ευθεία r είναι παράλληλη στην ευθεία m , ή το τμήμα AC είναι το τριπλάσιο του τμήματος AB , ή ακόμα, ο αριθμός που συνδέει το μήκος της περιφέρειας με τη διάμετρό του δε μπορεί να οριστεί από κανένα κλάσμα.

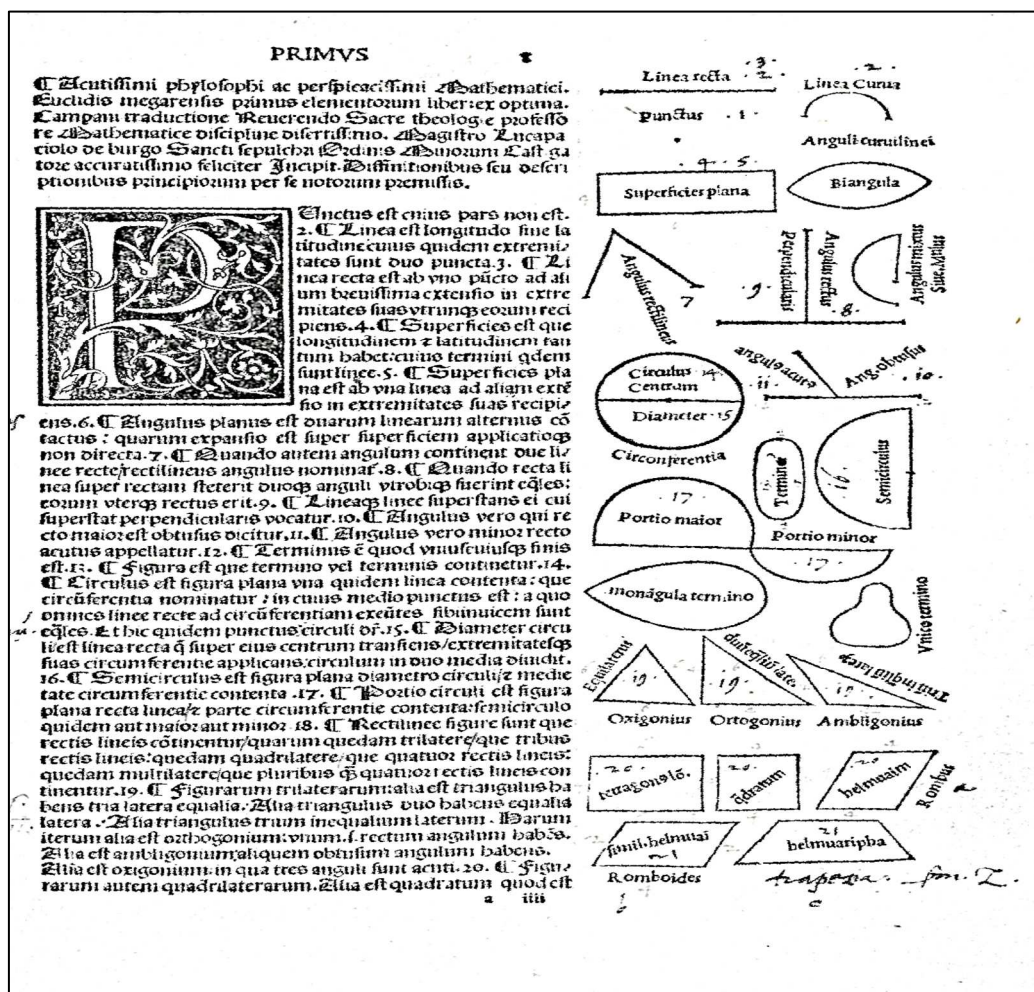
Για να θεσπίσουν τις σχέσεις αυτές και την ακρίβεια τους, οι γεωμέτρες της αρχαιότητας τελειοποίησαν ένα σύστημα το οποίο έμελλε να αναδειχθεί στην κατεξοχήν μαθηματική μέθοδο, την απόδειξη. Η τέχνη των Ελλήνων γεωμετρών συνίστατο στη συγκέντρωση του πιο σημαντικού συνόλου αποτελεσμάτων (θεωρήματα), τα οποία αντλούσαν από στοιχειώδεις αρχές χρησιμοποιώντας μακριές αλυσίδες λόγων, όπως το περιέγραψε ο Καρτέσιος στο «*Λόγο περί της μεθόδου*». Αυτή η σχεδόν καλλιτεχνική ιδιότητα είναι αυτή που χαρακτηρίζει την ευκλείδεια γεωμετρία.

2. Ο Ευκλείδης, τα «Στοιχεία» και το 5^ο αίτημα

Όπως συμβαίνει και με άλλους σοφούς της αρχαιότητας, είναι δύσκολο να είμαστε βέβαιοι για τα δεδομένα που αφορούν τον Ευκλείδη. Δε γνωρίζουμε με βεβαιότητα ούτε την ημερομηνία ούτε τον τόπο γέννησης του. Όλες οι διαθέσιμες πληροφορίες προέρχονται από ερμηνείες ερευνητών, βασισμένες στη μελέτη εγγράφων της αρχαιότητας που κάνουν αναφορά στον γεωμέτρη. Σε αυτά, διαβάζουμε πως έζησε πριν από τον Αρχιμήδη, περίπου την περίοδο 325–265 π. Χ., αφού ήταν σύγχρονος του Πτολεμαίου Α' (367–283 π.Χ.). Από τα χαρακτηριστικά της σκέψης του, προκύπτει ενδεχομένως πως σπούδασε στην Αθήνα μαζί με τους μαθητές του Πλάτωνα. Έζησε στην Αλεξάνδρεια, όπου δίδαξε μαθηματικά για περισσότερα από 20 χρόνια, αφού εκεί ίδρυσε την περίφημη σχολή όπου η πνευματική του δραστηριότητα υπήρξε πιο εντατική.

Γύρω στο 300 π.Χ. έγραψε το κορυφαίο έργο του «*Τα Στοιχεία της γεωμετρίας*», όπου συγκέντρωσε ουσιαστικά ολόκληρη τη μαθηματική γνώση της εποχής. Είναι το πιο διαδεδομένο έργο μετά τη Βίβλο. Έχει χρησιμοποιηθεί για περισσότερα από 2.000 χρόνια ως κείμενο μελέτης και θεωρείτο η αδιαμφισβήτητη βάση της καθημερινής γεωμετρίας, ακόμα και της κοινής λογικής. Η 1^η έκδοση εμφανίστηκε στη Βενετία το 1482 και ήταν μετάφραση από τα αραβικά και τα λατινικά. Το 1505 τυπώθηκε η 1^η έκδοση στα λατινικά σε απευθείας μετάφραση από τα ελληνικά. «*Τα Στοιχεία γεωμετρίας*» ή απλώς «*Τα Στοιχεία*» περιλαμβάνουν **13 βιβλία**, όπου συγκεντρώνονται συνολικά **465 προτάσεις**, **372 θεωρήματα** και **93 προβλήματα**. Το περιεχόμενο δεν συνιστά ένα σύνολο από υπολογισμούς ρουτίνας προοριζόμενους να προσηλυτίσουν τους μαθητές κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης, αλλά μια λογική, δημιουργική και δομημένη παρουσίαση των γνώσεων της εποχής, κατά τον πλατωνικό τρόπο. Ακολουθώντας το επιστημονικό του ιδεώδες, ο Πλάτωνας υπεράσπισε τη γεωμετρία ως μια πνευματική επιστήμη και ως ένα καθαυτό σκοπό. Στο βιβλίο Ζ' της Πολιτείας του, ανακηρύσσει την αντίληψη του για την επιστήμη «*Σαν να επρόκειτο για οποιαδήποτε πρακτικό σκοπό, οι*

γεωμέτρεις μιλούν πάντα για ακριβείς υπολογισμούς, προεκτάσεις, προσθέσεις, ενώ στην πραγματικότητα η επιστήμη καλλιεργείται με μοναδικό σκοπό τη γνώση.»



Τυπωμένη σελίδα από το 1^ο βιβλίο των «Στοιχείων» που άνηκε στους Leonardo de Basilea και Guillelmo de Pavia και χρονολογείται από το 1491

Στα «Στοιχεία», όλες οι προτάσεις αποδεικνύονται βήμα βήμα. Τα 4 πρώτα βιβλία ονομάζονται πυθαγόρεια, επειδή περιλαμβάνουν κυρίως όσα μελέτησε ο Πυθαγόρας και οι συνεχιστές του. Σε αυτά τα βιβλία βρίσκουμε τη **γεωμετρία του επιπέδου**, τις ιδιότητες τριγώνων και παραλληλογράμμων, το θεώρημα του Πυθαγόρα (I.47), τις περιφέρειες και τα πολύγωνα, κλπ. Τα δύο επόμενα βιβλία είναι αφιερωμένα στη μελέτη της **αναλογικότητας** και της ομοιότητας των πολυγώνων, όπου εμφανίζεται για 1^η φορά μια αναφορά στη **χρυσή τομή** (II.5 χρυσός αριθμός, αναλογία σε άκρο και μέσο λόγο). Τα βιβλία Ζ', Η' και Θ' δίνουν ιδιαίτερη προσοχή στην αριθμητική, αναπτύσσοντας προβλήματα που συνδέονται με τη **θεωρία αριθμών**, τη διαιρετότητα, τους πρώτους αριθμούς, τους τέλειους αριθμούς, κλπ.. Μέσα σε αυτά τα βιβλία ορίζεται η ευκλείδεια έννοια του αριθμού. Ο Ευκλείδης θεωρεί αριθμό αυτό που θεωρούμε σήμερα ένα μετρήσιμο μέγεθος, όπως το μήκος ενός τμήματος.

Το βιβλίο Ι ασχολείται με την ταξινόμηση των **άρρητων** αριθμών (αυτών που δε μπορούμε να εκφράσουμε με κλάσματα). Τα τρία τελευταία βιβλία αναλύουν τη **γεωμετρία στο χώρο** (πολύεδρα, σφαίρες). Στο τέλος μελετιούνται αναλυτικά τα

πέντε περίφημα κανονικά πολύεδρα, αυτά των οποίων οι έδρες είναι όμοια κανονικά πολύγωνα. Ο Ευκλείδης ξεκίνησε τα «Στοιχεία» παρουσιάζοντας διατυπώσεις απλές και σαφείς, που αφομοιώνονται εύκολα ενστικτωδώς, δημιουργώντας έτσι μια ασφαλή βάση συναίνεσης. Τις ονόμασε ορισμούς, αξιώματα ή κοινές έννοιες και με αυτά, άρθρωσε τις προτάσεις, μια σειρά ορισμών που αναπτύσσουν μία απόδειξη. Οι βάσεις του ευκλείδειου κόσμου βρίσκονται στο βιβλίο Α' των Στοιχείων, όπου παρουσιάζονται **23** αρχικοί ορισμοί, **5** αξιώματα και **48** προτάσεις (θεωρήματα).

3. Ευκλείδεια ορολογία

Πρόταση: διατύπωση αλήθειας αποδεδειγμένης ή που επιχειρούμε να αποδείξουμε.

Θεώρημα: πρόταση που αποδεικνύεται λογικά βάσει αξιωμάτων ή άλλων θεωρημάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί, μέσω αποδεκτών κανόνων συμπεράσματος.

Κοινή έννοια: πρόταση τόσο σαφής και προφανής που γίνεται αποδεκτή χωρίς απόδειξη. Το προφανές της κοινής έννοιας βρίσκεται σε υψηλότερο επίπεδο σε σύγκριση με ένα αξίωμα.

Αξίωμα: πρόταση της οποίας η ακρίβεια γίνεται αποδεκτή χωρίς απόδειξη και που είναι απαραίτητη ως βάση για μετέπειτα συλλογισμούς, με άλλα λόγια, υπόθεση που τίθεται στην αρχή μιας απόδειξης. Οι αρχικοί ορισμοί του βιβλίου 1 αφορούν το σημείο, την ευθεία, την ορθή γωνία, την παραλληλότητα και αποτελούν το σημείο εισόδου τόσο για την ευκλείδεια γεωμετρία όσο και για τα υπόλοιπα.

Ορισμός 1: Σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρος.

Ορισμός 2: Γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος.

Ορισμός 4: Ευθεία είναι μία γραμμή που κείται εξίσου στα σημεία της.

Ορισμός 10: Όταν ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει τοποθετηθεί πάνω σε ένα άλλο με τέτοιο τρόπο ώστε οι εφεξείς γωνίες να είναι ίσες μεταξύ τους, οι δύο αυτές γωνίες είναι ίσες και ορθές και το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τοποθετηθεί πάνω στο άλλο είναι κάθετο ως προς αυτό.

Ορισμός 23: Παράλληλα είναι τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία, βρισκόμενα στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενα απείρως και προς τις δύο κατευθύνσεις, δεν τέμνονται ποτέ σε καμία κατεύθυνση.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις εξής **κοινές έννοιες**:

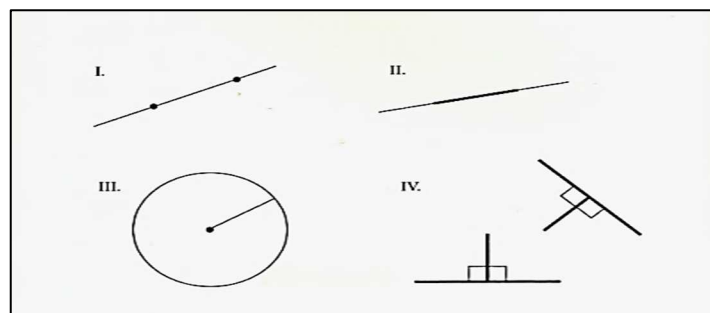
- Αντικείμενα ίσα προς το ίδιο αντικείμενο είναι ίσα.
- Αν ίσες ποσότητες προστεθούν σε ίσες ποσότητες, προκύπτουν ίσες ποσότητες.
- Αν ίσα αφαιρεθούν από ίσα, τα υπόλοιπα είναι ίσα.
- Αντικείμενα που συμπίπτουν μεταξύ τους είναι ίσα.
- Το όλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος.

Όταν ο Ευκλείδης αναφέρεται σε σχήματα, χρησιμοποιεί τον όρο ισότητα. Γενικώς, με τον όρο ίσα γεωμετρικά στοιχεία θα πρέπει να αντιλαμβανόμαστε στοιχεία που μπορούν να τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο ώστε να ταυτιστούν. Ο Ευκλείδης διατύπωσε επίσης τα πέντε περίφημα **αξιώματα**:

- Από οποιοδήποτε σημείο μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία γραμμή προς οποιοδήποτε άλλο σημείο.
- Οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί προς τα δύο του άκρα συνεχώς, ώστε να μας δώσει μια ευθεία γραμμή.
- Είναι δυνατό να χαράξουμε κύκλο, με οποιοδήποτε κέντρο και ακτίνα.
- Όλες οι ορθές γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες.

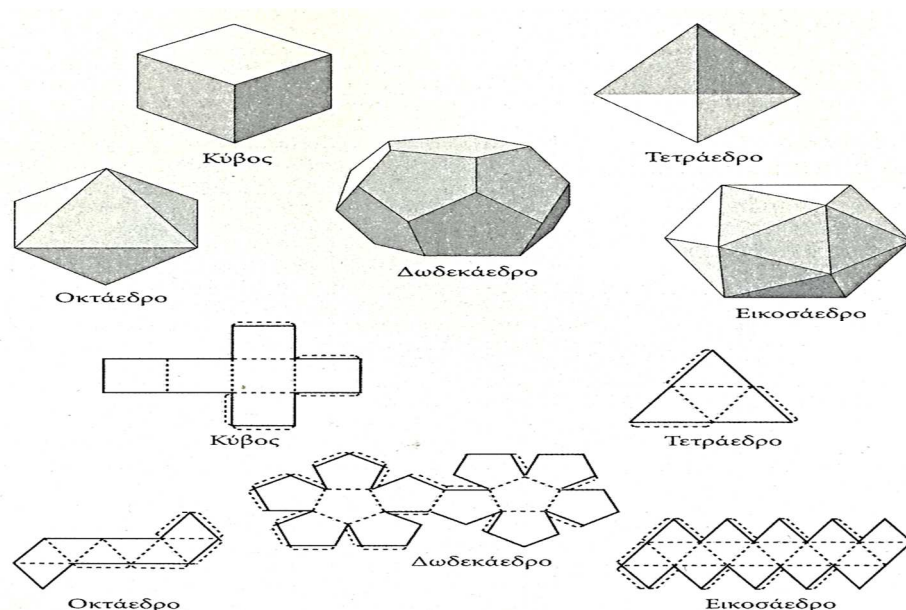
- Αν μια ευθεία γραμμή η οποία τέμνει δύο άλλες, σχηματίζει εσωτερικές γωνίες μ' αυτές προς την ίδια πλευρά της, με άθροισμα λιγότερο από 2 ορθές, τότε αν οι 2 ευθείες επεκταθούν επ' άπειρον τέμνονται προς εκείνη την πλευρά προς την οποία το άθροισμα των παραπάνω γωνιών ήταν λιγότερο από 2 ορθές.

Το 5^ο αξίωμα έλκει αμέσως την προσοχή. Η διατύπωση του δεν είναι τόσο απλή όσο οι προηγούμενες. Ξεχωρίζει ιδιαίτερος επειδή δεν είναι σαφές ούτε εύληπτο. Με τον τρόπο που έχει γραφτεί, είναι περισσότερο πρόταση παρά προφανής διαβεβαίωση. Το ζήτημα γίνεται ακόμα πιο ιδιαίτερο αν αναλύσουμε το βιβλίο στο σύνολό του και ανακαλύψουμε πως ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί με τον τρόπο αυτό το 5^ο αξίωμα μόνο μετά την παρουσίαση της πρότασης 29. «*Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές γωνίες (180°).*» Καθώς η **πρόταση 29** αποδείχτηκε σε μεταγενέστερα χρόνια από την εποχή του Ευκλείδη, ισοδυναμεί με το 5^ο αξίωμα, γεγονός που έρχεται να ενισχύσει την ιδέα πως το αξίωμα αυτό είναι μια πρόταση. Επιπλέον, το 5^ο αξίωμα ισοδυναμεί με το πυθαγόρειο θεώρημα «*Στο ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών.*» Αν συνεχίσουμε να ψάχνουμε, ανακαλύπτουμε πως οι ισοδυναμίες του 5^{ου} αξιώματος πολλαπλασιάζονται σε πολύ περισσότερους τρόπους απ' όσους είχε θεωρήσει ο Ευκλείδης.



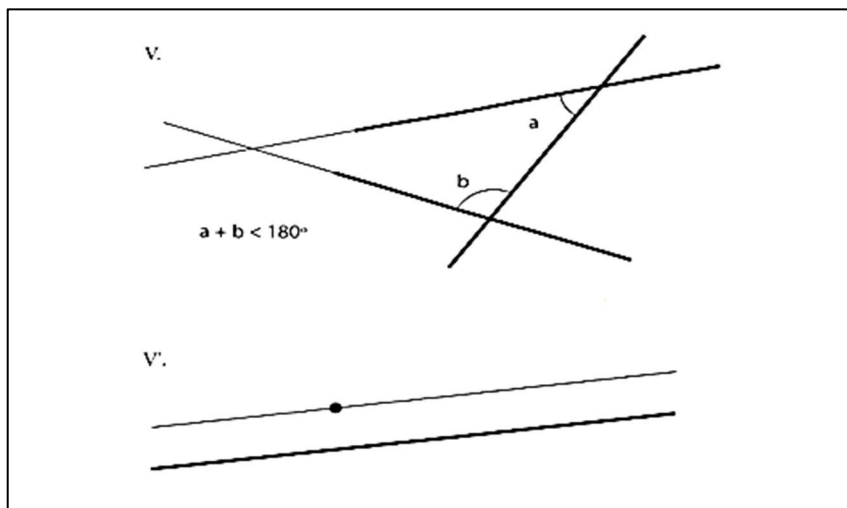
4. Τα κανονικά πολύεδρα

Υπάρχουν μόνο 5 κανονικά κυρτά πολύεδρα. Για αυτό ίσως οι αρχαίοι Έλληνες τους απέδιδαν ιδιαίτερη σημασία, συνδέοντάς τα με τις 4 καταστάσεις της ύλης και το σύνολό τους, το τετράεδρο (φωτιά), ο κύβος (Γη), το οκτάεδρο (αέρας), το εικοσάεδρο (νερό) και το δωδεκάεδρο (μοντέλο του σύμπαντος). Τα πολύεδρα είναι επίσης γνωστά με το όνομα τα 5 στερεά του Πλάτωνα.



5. Διατυπώσεις ισοδύναμες με το 5^ο αξίωμα

Η ιδέα της παραλληλότητας που συνδέεται με τις ευθείες που επεκτείνονται απείρως, εμφανίζει την έννοια του απείρου. Επιπλέον, ο τρόπος με τον οποίο ο Ευκλείδης διατύπωσε το αξίωμα του δίνει την όψη θεωρήματος μάλλον παρά παγκόσμιας αλήθειας. Για αυτό, για ολόκληρους αιώνες, διάφοροι μαθηματικοί ήταν πεπεισμένοι πως επρόκειτο πράγματι για μια πρόταση που μπορούσε να αποδειχτεί και κατέβαλαν κάθε προσπάθεια για την αναζήτηση της απόδειξης. Καρπός των προσπαθειών αυτών υπήρξε ένας μεγάλος αριθμός ισοδύναμων διατυπώσεων.



Ο Έλληνας φιλόσοφος **Πρόκλος** (412–485) υπήρξε ο πιο αντιπροσωπευτικός της σχολής των Αθηνών. Του οφείλουμε το αξίωμα της σταθερής απόστασης που διατυπώνεται ως εξής «*Μία παράλληλη σε μία δεδομένη ευθεία απέχει από την ευθεία αυτή σταθερή απόσταση.*» Ο μεγάλος μαθηματικός **Adrien-Marie Legendre** (1752–1833) πρότεινε τις πρώτες του αποδείξεις του 5^{ου} αξιώματος στο βιβλίο του «*Στοιχεία Γεωμετρίας*», που σημείωσε τεράστια εκδοτική επιτυχία. Έψαξε για περισσότερα από 40 χρόνια για μία απόδειξη του 5^{ου} αξιώματος που θα ήταν μαθηματικά ακριβής, αλλά εξίσου κατανοητή για τους σπουδαστές του.

Μολονότι έφτασε πολύ κοντά, πέθανε χωρίς να έχει δει το αποτέλεσμα των μη ευκλείδειων γεωμετριών, όπως και τόσοι άλλοι. Διατύπωσε το αξίωμα των γωνιών ενός τριγώνου «*Υπάρχει ένα τρίγωνο στο οποίο το άθροισμα των γωνιών ισούται με δύο ορθές γωνίες.*» Ο πατέρας του **Janos Bolyai**, επίσης μαθηματικός, είχε ήδη επιχειρήσει να αποδείξει το 5^ο αξίωμα, ανεπιτυχώς. Για το λόγο αυτό προσπάθησε να πείσει το γιο του να μην χάνει χρόνο ασχολούμενος με αυτό το πρόβλημα. Ωστόσο, ο Janos προοριζόταν να κάνει πολύ περισσότερα πράγματα από την απόδειξη του 5^{ου} αξιώματος. Όλα ξεκίνησαν με το αξίωμα των τριών σημείων: «*Από τρία μη ευθυγραμμισμένα σημεία περνάει πάντα μια περιφέρεια.*»

Ο πρίγκιπας των μαθηματικών **Johann Carl Friedrich Gauss**, ξεκίνησε να δουλεύει πάνω στο 5^ο αξίωμα σε ηλικία μόλις 15 ετών, το 1792. Το 1817 είχε πειστεί πως το αξίωμα αυτό ήταν ανεξάρτητο από τα άλλα 4. Διατύπωσε το αξίωμα του εμβαδού ενός τριγώνου, «*Υπάρχουν τρίγωνα αυθαιρέτως μεγάλου εμβαδού.*» Η περίπτωση του Σκοτσέζου μαθηματικού και γεωλόγου **John Playfair** (1748–1819) είναι διαφορετική. Το δικό του «αξίωμα των παραλλήλων», αντί να αγνηφά τον Ευκλείδη, αναδείχθηκε στη δημοφιλέστερη μορφή με την οποία διδάσκεται το 5^ο

αξίωμα στα σχολεία και παρουσιάζεται στα βιβλία. Πράγματι, συχνά εκλαμβάνεται ως πραγματικός ορισμός του 5^{ου} αξιώματος. Το μυστικό του είναι η απλότητα, αφού είναι πολύ πιο κατανοητό σε σύγκριση με την αρχική διατύπωση του Ευκλείδη: «Από ένα σημείο έξω από μία ευθεία δεν περνά παρά μία και μοναδική παράλληλη.»

Σε κάθε περίπτωση, ούτε η διατύπωση του Playfair, που ήταν τόσο προφανής και σαφής, δεν έπεισε την πλειονότητα των γεωμετρών, οι οποίοι συνέχισαν τις προσπάθειες για την ανατροπή του.

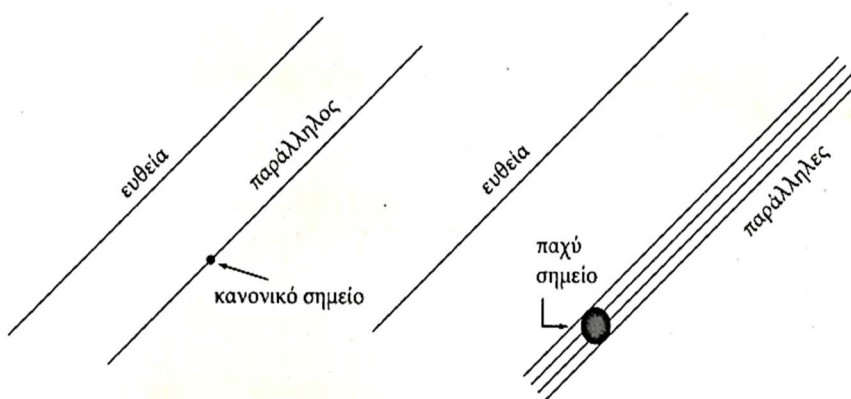
6. Η γεωμετρία στην τέχνη

Συχνά οι καλλιτέχνες χρησιμοποιούν στα έργα τους σχέδια, σημεία, ευθείες και άλλα αντικείμενα. Ο συλλογισμός τους μπορεί να επιτρέψει την απάντηση στα εξής ερωτήματα ή να εμβαθύνει σε αυτά: Τί είναι ένα σημείο; Τί είναι μία ευθεία; Τί εννοούμε με τον όρο παραλληλότητα; Ο **Wassily Kandinsky** (1866–1944) ήταν Ρώσος ζωγράφος, ποιητής, δραματουργός και παιδαγωγός. Οι πανεπιστημιακές σπουδές του συνδύασαν δίκαιο και οικονομικά, γνώσεις που ενέταξε στο σχέδιο και τη ζωγραφική. Από τις εμπειρίες του ως καθηγητής, άντλησε το υλικό της δεύτερης πραγματείας του με τίτλο Σημείο– Γραμμή– Επίπεδο (1925). Ο Kandinsky ορίζει την γραμμή ως ένα μοναδικό σημείο που σύρεται πάνω σε μια σελίδα.

7. Θεώρημα του παχέος σημείου.

Διατυπώνεται ως εξής «Ο αριθμός των παραλλήλων σε μία δεδομένη ευθεία που περνούν από ένα σημείο έξω από την ευθεία αυτή, εξαρτάται από το πάχος του σημείου αυτού.» Από ένα παχύ σημείο, περνάνε περισσότερες από μία ευθείες παράλληλες προς μία δεδομένη ευθεία.

Έτσι μπορούμε να πούμε πως «από ένα παχύ σημείο, μπορούμε να χαράξουμε όσες παράλληλες (και κάθετες) θέλουμε προς μία δεδομένη ευθεία». Φυσικά, πρόκειται για ένα μαθηματικό αστείο, πέρα όμως από το χιούμορ, αυτό το θεώρημα εγείρει σημαντικά ερωτήματα. Πώς γνωρίζουμε πόσες γραμμές υπό την ευκλείδεια έννοια, υπάρχουν στο πάχος μίας γραμμής από μολύβι; Για να επαληθεύσουμε με το μάτι πως οι γραμμές αυτές είναι παράλληλες, θα έπρεπε να τις επεκτείνουμε απείρως και δε θα υπήρχε αρκετό χαρτί για να τις σχεδιάσουμε πλήρως, άρα δε μπορούμε να αποδείξουμε εμπειρικά το 5^ο αξίωμα του Ευκλείδη.



8. Η γεωμετρία στους πίνακες της Αναγέννησης

Ένα ιδιαίτερο πάθος ενώνει το Λεονάρντο ντα Βίντσι (1452–1519) και τον Albrecht Dürer (1471–1528), τους οποίους από διάσημους ζωγράφους της Αναγέννησης μετατρέπει σε μεγάλους θεωρητικούς που υπερβαίνουν την ιστορία της ζωγραφικής. Στο θεωρητικό του έργο *«Institutiones geometricae»* (Γεωμετρικοί θεσμοί), που εκδόθηκε στα γερμανικά το 1525, ο **Dürer** αναφέρει

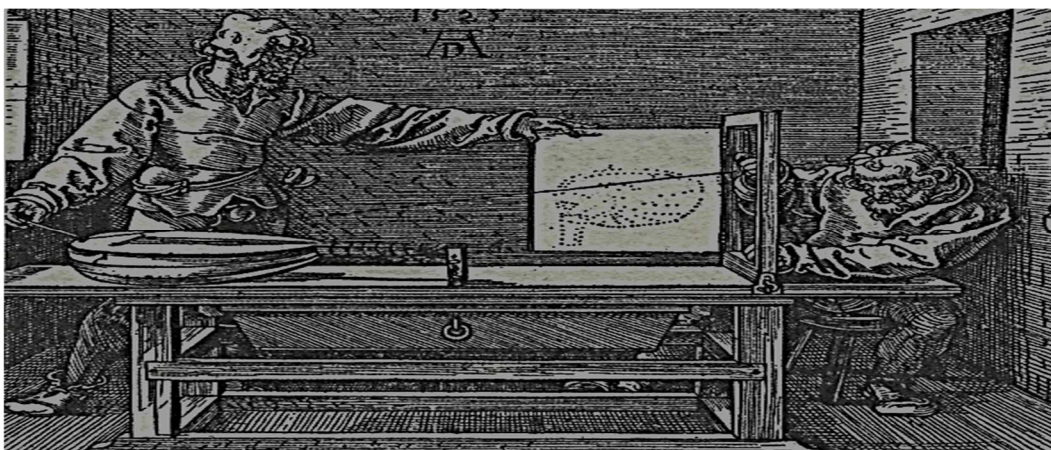
«Οι Γερμανοί ζωγράφοι δεν είναι κατώτεροι από κανένα στη χρήση των χρωμάτων, έχουν όμως κενά στην τεχνική των αναλογιών, στην προοπτική και στα αντικείμενα αυτού του είδους. Χωρίς σωστές αναλογίες, κανένας πίνακας δε μπορεί να είναι τέλειος, ακόμα κι αν έχει γίνει με τη μεγαλύτερη δυνατή φροντίδα. Για αυτό είναι απαραίτητο για οποιονδήποτε θέλει να ασκήσει την τέχνη της ζωγραφικής, να μάθει πρώτα απ' όλα την τεχνική των αναλογιών και να γνωρίζει πώς να ζωγραφίζει σε προβολή και σε προοπτική».

Ο Ντα Βίντσι και ο Dürer είχαν παθιαστεί με την εξεύρεση τρόπου αναπαράστασης μίας τρισδιάστατης οπτικής σε δύο διαστάσεις. Πώς να δημιουργήσει κανείς μια αίσθηση βάθους σε έναν πίνακα; Αυτό το ερώτημα γέννησε τις έννοιες της προοπτικής, των προβολών και των τομών, που αποτελούν θεμέλιο μιας ειδικής γεωμετρίας που ονομάζεται **προβολική γεωμετρία**. Η προβολική γεωμετρία είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που γεννήθηκε από τους πίνακες της Αναγέννησης. Η επιφάνεια ενός πίνακα θεωρήθηκε ως ένα γυάλινο παράθυρο μέσα από το οποίο ο καλλιτέχνης έβλεπε το αντικείμενο που ήθελε να αναπαραστήσει.

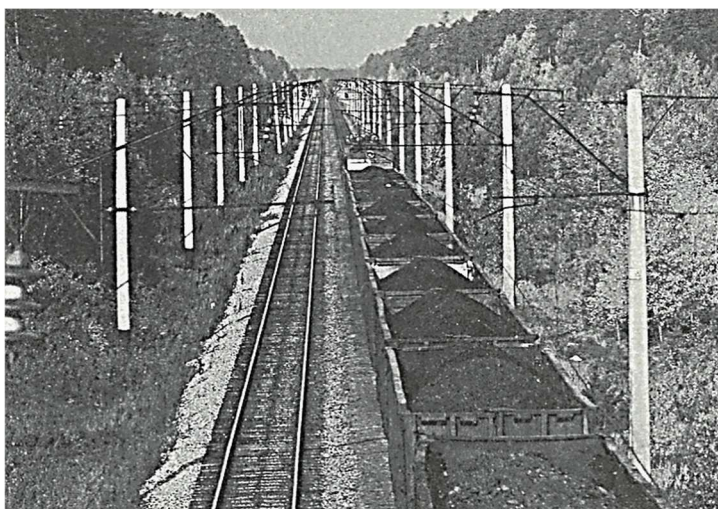
Οι γραμμές της οπτικής, που ξεκινούν από το αντικείμενο και συγκλίνουν προς το μάτι μέσω του γυάλινου παραθύρου και τα σημεία που οι γραμμές αυτές διασταυρώνονται στην επιφάνεια του παραθύρου δημιουργούν την προβολή του αντικειμένου επάνω στην επιφάνεια αυτή. Αυτό εκφράζεται στον πίνακα του Dürer με τίτλο *«Ο άντρας που ζωγραφίζει ένα λαούτο»*, στον οποίο ο Γερμανός καλλιτέχνης αναπαριστά τον τρόπο με τον οποίο ο πίνακας συλλαμβάνει την προβολή σύμφωνα με τη μέθοδο που εκτίθεται στους θεσμούς. Η μομφή στα αριστερά, ο βοηθός του καλλιτέχνη κρατά ένα γυάλινο κομμάτι στο οποίο μπορούμε να δούμε ένα σχέδιο σε προοπτική του αντικειμένου που βρίσκεται πάνω στο τραπέζι. Για να γίνει το σχέδιο αυτό, το γυάλινο κομμάτι τοποθετείται σε ένα πλαίσιο που κρατά ο καλλιτέχνης, τον οποίον βλέπουμε στα δεξιά.

Όταν οι φωτεινές ακτίνες (ευθείες γραμμές) που πηγάζουν από το αντικείμενο στο μάτι του καλλιτέχνη τέμνουν το γυάλινο κομμάτι, ορίζουν μια εικόνα του αντικειμένου στο κομμάτι αυτό είναι η προβολή του. Για τον καλλιτέχνη, οι ορθές δομές είναι η προοπτική και οι επίπεδες προβολές. Στην προβολική γεωμετρία, οι παράλληλες γραμμές που έχουν ζωγραφιστεί στον καμβά συγκλίνουν σε ένα σημείο που ονομάζεται **σημείο φυγής** ή **σημείο στο άπειρο**. Η έννοια των παράλληλων γραμμών γίνεται έννοια των γραμμών που συναντιούνται σε ένα σημείο που βρίσκεται στο άπειρο. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, το σημείο αυτό βρίσκεται στο μάτι του παρατηρητή. Ένα εύληπτο παράδειγμα του σημείου φυγής είναι ο τόπος όπου συναντιούνται οι ράγες ενός ευθύγραμμου σιδηρόδρομου που αναπαρίστανται σε δύο διαστάσεις. Ένα άλλο παράδειγμα είναι τα αρχιτεκτονικά έργα που σχεδιάζονται σε ένα επίπεδο για να δώσουν ρεαλιστική άποψη.

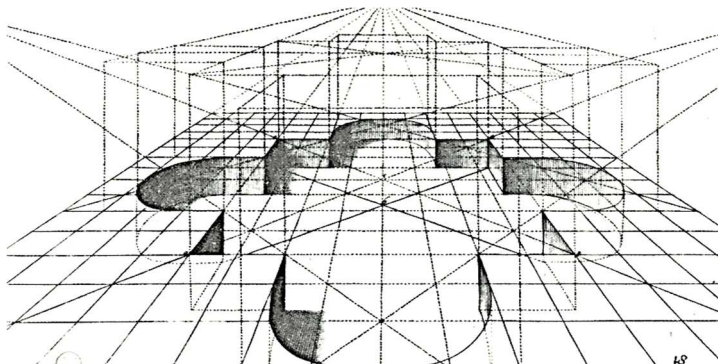
Η προβολική γεωμετρία μπορεί να παραμορφώνει τις εικόνες, χωρίς να διατηρεί απαραίτητα ούτε μήκη, ούτε γωνίες, ούτε τις μετρικές ιδιότητες της κοινής ευκλείδειας γεωμετρίας.



Αυτό το χαρακτηριστικό μέρος του έργου *Institutiones geometricae* (1525), είναι γνωστό με τον τίτλο «Άντρας που σχεδιάζει ένα λαούτο». Ο Dórer σε αυτόν τον πίνακα, δείχνει πώς μπορούμε να ζωγραφίσουμε με προοπτική μέσω μιας προβολής. Το σημείο φυγής όπως το αντιλαμβανόμαστε στην πραγματικότητα (πχ όταν κοιτάζουμε σιδηροδρομικές γραμμές) και την στην καλλιτεχνική προβολή. Κάτω, εικόνα από την πραγματεία περί προοπτικής του Φλαμανδού ζωγράφου Vredeman de Vries, που εμφανίστηκε το 1565.



Μέσω της έννοιας του σημείου φυγής, μπορούμε να απεικονίσουμε την παραλληλότητα ως γραμμές που τέμνονται στο άπειρο. Συνοψίζοντας, η προβολική γεωμετρία είναι η γεωμετρία των καλλιτεχνών. Έτσι, οι γραμμές που θεωρούνταν παράλληλες, έτσι όπως εμφανίζονται στον Ευκλείδη, δεν ήταν το ίδιο παράλληλες και για τους ζωγράφους της Αναγέννησης.



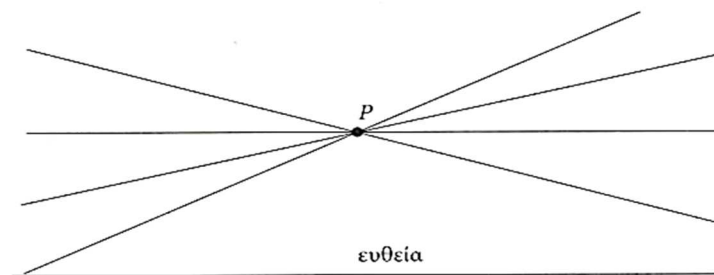
9. Διάσταση

Εν γένει, οι ιδέες του Ευκλείδη είναι αφαιρέσεις, ένα σημείο χωρίς διάσταση, μία γραμμή χωρίς πλάτος ή πάχος. Οι έννοιες του ύψους, του πλάτους και του πάχους ορίζουν τη διάσταση. Καθώς ένα σημείο δεν έχει ύψος, η διάσταση του είναι

0. Καθώς μια γραμμή έχει μήκος, η διάστασή της είναι 1. Μια επιφάνεια δεν έχει πάχος, άρα η διάστασή της είναι 2. Τέλος, ένα στερεό σώμα όπως ο κύβος, έχει διάσταση που ισούται με 3. Πράγματι, στην ευκλείδεια γεωμετρία, οι μόνες δυνατές διαστάσεις είναι αυτές που αντιστοιχούν στους ακέραιους αριθμούς 0, 1, 2 και 3.

10. Αψηφώντας τον Ευκλείδη

Μέχρι τα τέλη του 18^{ου} αιώνα, υποθέταμε πως ο ρόλος των μαθηματικών ήταν να αιτιολογούν τη φυσική πραγματικότητα του κόσμου που μας περιβάλλει. Κατά τη διάρκεια του επόμενου αιώνα, η αντίληψη αυτή άλλαξε με την εμφάνιση της μη ευκλείδειας γεωμετρίας. Έτσι έφτασε στο τέλος της η βασιλεία των «Στοιχείων» που διήρκεσε 23 αιώνες, κατέρρευσε όμως ταυτόχρονα αυτό που ο άνθρωπος θεωρούσε ως τότε πραγματικότητα, έστω και με τη αφηρημένη της έννοια. Ο Ιμμάνουελ Καντ υποστήριζε πως ο χώρος ήταν ένα σύστημα αναφοράς που υπήρχε διαισθητικά και εκ των προτέρων στο ανθρώπινο πνεύμα και συνεπώς, οι κοινές έννοιες και τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας ήταν κρίσεις που επιβάλλονται *a priori* στο πνεύμα. Χωρίς αυτές τις κοινές έννοιες και αυτό το αξίωμα, δεν ήταν δυνατόν να φέρουμε εις πέρας έναν κατανοητό συλλογισμό για το χώρο. Ωστόσο, ήταν ο 1^{ος} που συνέλαβε την πιθανότητα μιας διαφορετικής γεωμετρίας.



Στο 1^ο του έργο που δημοσιεύτηκε το 1746, εξετάζει χώρους με περισσότερες από 3 διαστάσεις και δηλώνει «Αν είναι δυνατό να υπάρχουν εκτάσεις με άλλες διαστάσεις, είναι πολύ πιθανό επίσης να τις δημιούργησε ο Θεός, αφού τα έργα του διαθέτουν όλη τη μεγαλοπρέπεια και την ποικιλία για τις οποίες είναι ικανός». Οι γεωμετρίες που είχε διαβλέψει ο Καντ είναι οι σύγχρονες μη ευκλείδειες γεωμετρίες με περισσότερες από 3 διαστάσεις. Επισήμως, ονομάζουμε ευκλείδεια γεωμετρία αυτή που παρουσιάζεται στα 6 πρώτα βιβλία των «Στοιχείων» και μη ευκλείδεια γεωμετρία αυτή που απορρέει από την άρνηση του 5^{ου} αξιώματος.

Στην έκδοση του Playfair, η άρνηση αυτή παρέχει δύο επιλογές, άρνηση της μοναδικότητας της παραλλήλου ή άρνηση της ύπαρξής της, κάτι που εκφράζεται με τις δύο επόμενες εναλλακτικές διατυπώσεις:

1. Από σημείο P εκτός ευθείας r , περνάνε περισσότερες από μία ευθείες παράλληλες προς τη δεδομένη ευθεία.
2. Από σημείο P εκτός ευθείας r δεν περνά καμία ευθεία παράλληλη προς τη δεδομένη ευθεία.

Για να ερμηνεύσουμε αυτά τα αποτελέσματα, πρέπει να ξεχάσουμε τη νοερή εικόνα που έχουμε σχηματίσει για την έννοια της παραλλήλου. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια νέα γεωμετρία η οποία να τηρεί όλα τα αξιώματα του Ευκλείδη αλλά να αντικαθιστά το 5^ο αξίωμα με μία από τις εναλλακτικές του. Με αυτές,

πετυχαίνουμε αποτελέσματα συναφή, χωρίς εσωτερική αντίφαση με κάθε ένα από αυτά. Οι **Nikolai Lobachevski** (1792–1856) και **Janos Bolyai** (1802–1860) παρουσίασαν μια πρώτη επιλογή που γέννησε τη γεωμετρία που ονομάστηκε **υπερβολική**. Μια 2^η επιλογή παρουσιάστηκε από τον **Bernhard Riemann** (1826–1866) με την οποία γεννήθηκε η **ελλειπτική γεωμετρία**. Υπάρχουν 2 στάδια που πρέπει να διακρίνουμε στη διαμάχη περί μη ευκλείδειων γεωμετριών, τις δοκιμές απόδειξης του 5^{ου} αξιώματος και την κατασκευή νέων γεωμετριών που υποκαθιστούν το 5^ο αξίωμα και που επιπλέον συνυπάρχουν με την ευκλείδεια γεωμετρία. Οι θεωρήσεις αυτές συνεπάγονται μια ουσιαστική αλλαγή του πιο κοινού τρόπου αντίληψης της πραγματικότητας. Μπορούμε να συλλογιστούμε με το αξίωμα του Ευκλείδη στο επίπεδο των γωνιών ενός τριγώνου και να το μεταφράσουμε σε προτεινόμενα εναλλακτικά αξιώματα.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° , όμως μόνο στον ευκλείδειο κόσμο, όπου οι παράλληλες γραμμές είναι παράλληλες μέχρι το άπειρο, αφού ο χώρος δεν έχει καμπυλότητα. Μήπως όμως ο Ευκλείδης έφτασε μέχρι το άπειρο για να δει τι κάνουν εκεί οι παράλληλες; Κι αν συναντιούνταν; Ο χώρος θα μπορούσε να έχει μια καμπυλότητα και το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου να υπερβαίνει τις 180° , όπως όταν σχεδιάζουμε ένα τρίγωνο σε ένα πορτοκάλι. Ομοίως, στην υπερβολική γεωμετρία, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180° . Σε μια μη ευκλείδεια γεωμετρία, διατηρούμε τα πιο πρωτογενή ονόματα και τις πιο πρωτογενείς έννοιες κάθε γεωμετρίας, όπως το σημείο, η ευθεία ή το επίπεδο, οι έννοιες όμως αυτές επαναπροσδιορίζονται.

Στις νέες γεωμετρίες, μπορούμε να αποκαλούμε **ευθεία** τη γραμμή με την οποία μετράμε την πιο σύντομη απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία και **επίπεδο** την επιφάνεια με την εξής ιδιότητα, εάν δύο σημεία της ευθείας ανήκουν σε αυτή την επιφάνεια, τότε όλα τα άλλα σημεία αυτής της ευθείας ανήκουν στην ίδια επιφάνεια.

Οι έννοιες αυτές ισχύουν και στις δύο γεωμετρίες. Έτσι, θεσπίζουμε ένα νέο παράδειγμα νοερής αναπαράστασης των γεωμετρικών αντικειμένων, οι ευθείες με την έννοια της μη ευκλείδειας γεωμετρίας μπορούν να ιδωθούν ως παραμορφωμένες γραμμές. Στη λεγόμενη σφαιρική γεωμετρία, αποκαλούμε επίπεδο τη σφαίρα και ευθείες, τους μέγιστους κύκλους. Και στις δύο γεωμετρίες η ορολογία είναι συναφής, αφού και στις δύο, η ευθεία είναι η πιο απλή γραμμή και επίπεδο η πιο απλή επιφάνεια. Πώς μπορούμε να είμαστε βέβαιοι πως δύο ευθείες είναι παράλληλες; Θα έπρεπε να τις επεκτείνουμε μέχρι το άπειρο και από τις δύο πλευρές και να βεβαιωθούμε πως δεν τέμνονται ποτέ. Ο ανθρώπινος νους αποδέχεται με τρόπο εγγενή την αφηρημένη έννοια μιας ευθείας γραμμής, ενός ορισμένου μήκους, χωρίς όμως πλάτος. Μπορούμε να απεικονίσουμε δύο γραμμές που δεν τέμνονται ποτέ και που ισαπέχουν πάντα. Όλα αυτά υπάρχουν στο νου, δεν μπορούν όμως να αποδειχτούν εμπειρικά. Η ευκλείδεια γεωμετρία είναι μια αφηρημένη εξιδανίκευση.

Μία υπενθύμιση. Μέχρι σήμερα, κανένας δεν απέδειξε πως οι επόμενες διατυπώσεις είναι εσφαλμένες:

- Από σημείο εκτός ευθείας δεν περνά παρά μία και μοναδική παράλληλη.
- Από σημείο εκτός ευθείας, περνάνε περισσότερες από μία ευθείες παράλληλες προς τη δεδομένη ευθεία.
- Από σημείο εκτός ευθείας, δεν περνά καμία ευθεία παράλληλη προς τη δεδομένη ευθεία.

Όλες οι προτάσεις αυτές είναι δυνατές και αποτελούν το θεμέλιο νέων γεωμετριών.

11. Ιμμάνουελ Καντ

Διάσημος Γερμανός φιλόσοφος (1724–1804). Έλαβε αυστηρή παιδεία με μια πειθαρχία που ευνοήθηκε από τη διδασκαλία λατινικών, θρησκευτικών, μαθηματικών και επιστημών. Στο πανεπιστήμιο σπούδασε εκτενέστερα φυσική και μαθηματικά, όταν όμως πέθανε ο πατέρας του, αναγκάστηκε να εγκαταλείψει τις σπουδές του και να εργαστεί ως οικοδιδάσκαλος. Το 1755, ένας φίλος τον βοήθησε να ξεκινήσει και πάλι τις σπουδές του και ολοκλήρωσε το διδακτορικό του. Δίδαξε στο Πανεπιστήμιο για 15 χρόνια και έδωσε πολλές διαλέξεις, με αποτέλεσμα το όνομά του να ανήκει στην ιστορία, αρχικά σε θέματα επιστημονικά και μαθηματικά και σταδιακά, σε θέματα όλων των φιλοσοφικών κλάδων.

Θεωρείται ο πιο λαμπρός φιλόσοφος της σύγχρονης Ευρώπης. Από τη στιγμή της εμφάνισής του, η σκέψη του είχε τεράστια επίδραση στην πνευματική κοινότητα, ενώ καθορίζει ακόμα τη σύγχρονη σκέψη που αναφέρεται με ευκολία σε αυτόν. Είναι ακόμα παρούσα σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους: φιλοσοφία, δίκαιο, ηθική, λογική. Μαζί με τους Πλάτωνα, Αριστοτέλη και Καρτέσιο, ο Καντ ανήκει σε αυτούς που δόμησαν τη δυτική φιλοσοφική σκέψη. Αποτελεί το υπόδειγμα του σύγχρονου φιλοσόφου.

12. Κάποιες ατυχείς λέξεις

Στα τέλη της δεκαετίας του 1950, μαθηματικοί από όλο τον κόσμο συγκεντρώθηκαν σε σεμινάρια και συνέδρια στην Ευρώπη και στην Αμερική, για να συζητήσουν περί της ανάγκης εισαγωγής των λεγόμενων «μοντέρνων μαθηματικών» στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το διασημότερο συνέδριο διεξήχθη στο Royaumont της Γαλλίας το Νοέμβριο του 1959. Εκεί, ο Γάλλος μαθηματικός **Jean Dieudonné** (1906–1992) ολοκλήρωσε την παρέμβασή του σε μια διαμάχη σχετική με τα «Στοιχεία» φωνάζοντας «Κάτω ο Ευκλείδης!» Η έκφραση αυτή σημείωσε μεγάλη επιτυχία και επεκτάθηκε στη μαθηματική κοινότητα όπου παρέμεινε για πάντα συνδεδεμένη με τις αξιώσεις των μοντέρνων μαθηματικών. Οι λέξεις αυτές δε θα μπορούσαν να είναι πιο ατυχείς και αδέξιες, πόσο μάλιστα όταν τις εξέφερε ένας από τους πιο σημαντικότερους μαθηματικούς του 20^{ου} αιώνα. Είναι περιττό να επιμείνουμε στη σπουδαιότητα των «Στοιχείων» και του συγγραφέα τους. Είναι προφανές πως χωρίς τον Ευκλείδη, όχι μόνο δε θα μπορούσαμε να εξηγήσουμε την πραγματικότητα, αλλά δε θα μπορούσαν καν να υπάρξουν οι άλλες γεωμετρίες.

Ευτυχώς, οι επαγγελματίες της εκπαίδευσης σε ολόκληρο τον κόσμο υπενθυμίζουν καθημερινά ποιος ήταν ο Ευκλείδης και μεταβιβάζουν την πλήρους αλήθειας διδασκαλία του.

13. Η εδραίωση της μη ευκλείδειας γεωμετρίας

Η 1^η από τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες είναι η υπερβολική, αποτέλεσμα της υποκατάστασης του 5^{ου} αξιώματος του Ευκλείδη από το εξής «Από σημείο εκτός δεδομένης ευθείας, περνάνε περισσότερες από μία ευθείες παράλληλες προς την ευθεία αυτή.» Με την διατύπωση αυτή, οι Lobachevski και Bolyai έλυσαν το αίνιγμα των παραλλήλων και θεωρούνται οι μαθηματικοί αναφοράς της διατύπωσης της 1^{ης} μη ευκλείδειας γεωμετρίας. Μοιράζονται την αυθεντία για την υπερβολική γεωμετρία, παρόλο που ούτε γνωρίζονταν μεταξύ τους ούτε γνώριζαν τις εργασίες που εκτελούσαν ταυτόχρονα. Υπήρχαν πολλά εμπόδια που δεν τους το επέτρεπαν, ο Lobachevsky έγραφε μόνο στα ρωσικά και το έργο του άσκησε επιρροή χρόνια μετά

το θάνατό του. Ωστόσο, το δικό του όνομα συνδέεται κοινώς με την υπερβολική γεωμετρία, πολύ περισσότερο από αυτό του Bolyai, του Ούγγρου συνάδελφου του.

14. Nikolai Lobachevski και υπερβολική γεωμετρία

Στις **23.02.1826** ενώ ήταν καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Καζάν, εντυπωσίασε την επιστημονική κοινότητα με την έκθεσή του για τη θεωρία των παραλλήλων κατά τη διάρκεια ημερίδας που οργανώθηκε στο τμήμα φυσικής και μαθηματικών. Τα πρώτα αποτελέσματα από την εφαρμογή των προτάσεών του δημοσιεύτηκαν το 1820 στο περιοδικό του πανεπιστημίου του Καζάν. Το 1835 όλο το έργο του δημοσιεύτηκε με τίτλο «Τα Νέα Στοιχεία της γεωμετρίας», όπου δήλωνε

«Είναι γνωστό πως στη γεωμετρία, η θεωρία των παράλληλων ευθειών έχει παραμείνει ημιτελής μέχρι σήμερα. Οι άκαρπες προσπάθειες που έχουν γίνει τα τελευταία 2.000 χρόνια μετά τον Ευκλείδη, με έκαναν να αμφιβάλλω πως οι έννοιες δεν περιλαμβάνουν την αλήθεια που θέλουμε να αποδείξουμε αλλά πως, όπως και οι άλλοι φυσικοί νόμοι, δε μπορούν να αποδειχθούν παρά μόνο εμπειρικά, μέσω αστρονομικών παρατηρήσεων, για παράδειγμα. Τέλος, πεπεισμένος για την ισχύ των υποθέσεων μου και θεωρώντας πως αυτό το δύσκολο πρόβλημα έχει επιλυθεί πλήρως, εξέθεσα το συλλογισμό μου το 1826.»

Η ιστορία της υπερβολικής γεωμετρίας είναι μια ιστορία πρωτοπόρων, γεμάτη αδικίες και παραδοχές που παρουσιάζονταν είτε πολύ αργά είτε ποτέ. Είναι μια ιστορία που επαναλαμβάνεται συχνά στη διάρκεια των αιώνων στον επιστημονικό κόσμο, δύο φωτισμένα πνεύματα εργάζονται με το ρυθμό τους και καταλήγουν ταυτοχρόνως στα ίδια συμπεράσματα. Ο Lobachevski ήταν γόνος μιας ταπεινής οικογένειας δημοσίων υπαλλήλων και έζησε μέχρι το θάνατο του στην πόλη Καζάν, κοντά στη Σιβηρία, διάγοντας υποδειγματικό λιτό βίο αφιερωμένο στα μαθηματικά. Ο νεαρός Nikolai μπόρεσε να σπουδάσει χάρη σε μια σειρά υποτροφιών, οι οποίες αποδείχτηκαν εξαιρετική επένδυση από την πλευρά του τσαρικού κράτους. Το 1811 ξεκίνησε τη σταδιοδρομία του ως καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Καζάν και 3 χρόνια αργότερα απέκτησε έδρα στο τμήμα Φυσικής και Μαθηματικών. Έγινε υπεύθυνος της βιβλιοθήκης και του αστρονομικού παρατηρητηρίου, διορίστηκε πρύτανης του πανεπιστημίου του Καζάν το 1827.

Διατηρήθηκε στη θέση αυτή για 19 χρόνια που αποδείχτηκαν ιδιαίτερα καρποφόρα για το Πανεπιστήμιο, στη διάρκεια των οποίων υλοποίησε ριζικές μεταρρυθμίσεις και ανέπτυξε κυρίως την επιστημονική έρευνα.



Το παράδοξο είναι πως ο απόηχος του έργου του πάνω στο 5^ο αξίωμα των «Στοιχείων», τον οδήγησε στη δυσμένεια. Αν πιστέψουμε το μύθο, ο μαθηματικός και συνάδελφος του **Mikhail Ostrogradsky** πέτυχε την απόλυσή του. Ο Ostrogradsky δε δεχόταν την αμφισβήτηση του Ευκλείδη που πρότεινε ο Lobachevski. Η υγεία του επιδεινώθηκε τρομερά και στο τέλος τυφλώθηκε οπότε αναγκάστηκε να υπαγορεύσει πολλά από τα έργα του, όπως την περίφημη «Παγγεωμετρία» (1855). Όταν πέθανε στη γενέτειρά του, στις **24.02.1856**, δεν είχε την παραμικρή ιδέα για τη σπουδαιότητα του έργου του και τη συνεισφορά του στη μελλοντική εξέλιξη των μαθηματικών. Μεταξύ των ακαδημαϊκών έργων που μας κληροδότησε, τα σημαντικότερα είναι η «Μελέτη των Στοιχείων της γεωμετρίας» στον Αγγελιαφόρο του Καζάν (1829), η «Φανταστική γεωμετρία» (1855), οι «Εφαρμογές της φανταστικής γεωμετρίας στην επίλυση ορισμένων ολοκληρωμάτων» (1836) και τα «Νέα στοιχεία γεωμετρίας με μία πλήρη θεωρία των παραλλήλων» (1834–1838). Το 1840 ο Lobachevsky εξέδωσε ένα έργο 61 σελίδων, με τίτλο «Γεωμετρικές έρευνες στη θεωρία των παραλλήλων». Αυτό το σύντομο έργο διαδόθηκε ευρέως στην επιστημονική κοινότητα της εποχής, μολαταύτα όμως, ο μαθηματικό κόσμος δεν ήταν αρκετά ώριμος για να δεχτεί τις ιδέες που παρουσίαζε.

Στις γεωμετρικές έρευνες, ο Lobachevsky εξηγεί σαφώς τη λειτουργία της μη ευκλείδειας γεωμετρίας του.

«Μέσα σε ένα επίπεδο, όλες οι ευθείες που ξεκινούν από ένα σημείο μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες, σε σχέση με μία δεδομένη ευθεία μέσα στο ίδιο αυτό επίπεδο, αυτές που την τέμνουν και αυτές που δεν την τέμνουν. Οι οριακές γραμμές κάθε κατηγορίας ευθειών θα ονομάζονται παράλληλες προς τη δεδομένη ευθεία.» Η εναλλακτική του για το 5^ο αξίωμα του Ευκλείδη ορίζεται από την περίφημη φράση που έχουμε ήδη αναφέρει «Από ένα σημείο εκτός δεδομένης ευθείας, περνάνε 2 ευθείες παράλληλες προς την ευθεία αυτή.»

Ξεκινώντας από αυτά τα θεμέλια, ο Lobachevsky συνέχισε να αναπτύσσει πολυάριθμες τριγωνομετρικές ταυτότητες, που ονομάζουμε τύπους υπερβολικής τριγωνομετρίας.

15. Janos Bolyai

Για τον Ούγγρο Janos Bolyai (1802–1860), τα μαθηματικά ήταν ένα χόμπι αφού ήταν αξιωματικός ιππικού. Δεν χωρά αμφιβολία πως, δεδομένων των διανοητικών του ικανοτήτων, πρέπει να έπληττε με το επάγγελμα του, εκτός από το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά, ήταν εξαιρετικός βιολονίστας που έπαιζε στη Βιέννη και διακρίθηκε επίσης ως γλωσσολόγος δεδομένου ότι μιλούσε εννέα γλώσσες, μεταξύ των οποίων κινέζικα και θιβητιανά. Οι άριστες επιδόσεις του ήταν ίσως κληρονομικές, πατέρας του ήταν ο μαθηματικός Farkas Bolyai, ο οποίος του δίδαξε τον απειροστικό λογισμό και την αναλυτική μηχανική σε ηλικία μόλις δεκατριών ετών. Νεαρός εισήλθε στον στρατιωτικό κόσμο όταν ξεκίνησε τις σπουδές του στο βασιλικό κολλέγιο μηχανικών της Βιέννης, όπου εντάχθηκε στο σώμα μηχανικών του στρατού και στο οποίο παρέμεινε για 11 χρόνια.

Λέγεται πως ήταν ο καλύτερος ξιφομάχος και χορευτής του στρατού της αυστριακής αυτοκρατορίας. Το 1833 ένας πυρετός τον υποχρέωσε να αποσυρθεί από τη στρατιωτική ζωή. Μολονότι εν ζωή δεν είχε εκδώσει παρά ένα μόνο έργο στα μαθηματικά, μετά το θάνατό του βρέθηκαν περισσότερες από 20.000 χειρόγραφες σελίδες που σώζονται σήμερα στη βιβλιοθήκη Bolyai–Teleki, στο Targu–Mures. Μελέτησε το πρόβλημα των παραλλήλων σε σημείο εμμονής. Εξέδωσε τα

αποτελέσματά του ως παράρτημα σε ένα βιβλίο του πατέρα του με τίτλο «*Μία προσπάθεια εισαγωγής της φιλομαθούς νεολαίας στα στοιχεία των καθαρών μαθηματικών*» (Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae introducenti), γνωστό ως «Παράρτημα». Όπως και ο Lobachevski, ο Bolyai δε χρειάστηκε περισσότερες από 26 σελίδες για να παρουσιάσει τις ιδέες του για τη γεωμετρία. Αφού τις διάβασε, ο Gauss απεύθυνε το εξής μήνυμα στον Farkas Bolyai «Θεωρώ το νεαρό γεωμέτρη Bolyai ιδιοφυΐα πρώτης τάξεως».

15.1 Όψιμη αναγνώριση

Μόλις το 1945, σε αναγνώριση του έργου του η μαθηματική κοινότητα άλλαξε το όνομα του Πανεπιστημίου Babes σε Babes-Bolyai. Η ίδρυσή του γιορτάστηκε το 2002. Πολλές δραστηριότητες έλαβαν χώρα στη Βουδαπέστη, μεταξύ των οποίων και μία διεθνής συνδιάσκεψη για την υπερβολική γεωμετρία που ξεχώρισε ιδιαίτερα για την επιστημονική της σημαντικότητα. Μεταξύ άλλων τιμητικών πρωτοβουλιών, περιλαμβάνεται η έκδοση γραμματοσήμων αφιερωμένων στον μαθηματικό και η χάραξη νομίσματος 3.000 φιορινιών με υπερβολικά σχέδια από το έργο «Παράρτημα».

16. Η συμβολή του Gauss

Ο Carl Friedrich Gauss (1777–1855) έπαιξε σημαντικό ρόλο στο έργο του Bolyai. Είναι ένας σπουδαίος άντρας, όχι μόνο για την εποχή του, αλλά και μέχρι τις μέρες μας. Είδαμε πως ο Καντ είχε ορισμένες ασαφείς ιδέες για την πιθανότητα παραδοχής της ύπαρξης άλλων γεωμετριών, ο Gauss όμως υπήρξε πιθανώς ο 1^{ος} που είχε την ενόραση της πραγματικότητας μιας γεωμετρίας διαφορετικής από αυτήν του Ευκλείδη και εξέθεσε γραπτώς τους λογισμούς του πάνω στο θέμα αυτό.

Στις σημειώσεις του γράφει «*Είμαι πεπεισμένος πως η άρνηση του αξιώματος των παραλλήλων δεν οδηγεί σε καμία αντίφαση, ακόμα και εάν οδηγούμαστε σε ιδιότητες που φαντάζουν παράδοξες.*»



Για περισσότερα από 40 χρόνια, ο Gauss μελέτησε το αξίωμα των παραλλήλων χωρίς να δείξει τα αποτελέσματα σε κανέναν και φροντίζοντας να τα κρατήσει μυστικά. Η τεκμηρίωση που επιτρέπει την υποστήριξη των ερευνών του είναι η αλληλογραφία που διατήρησε με την οικογένεια Bolyai και τα σχόλια που συλλέχθηκαν από τις προσωπικές του σημειώσεις. Η σχέση ανάμεσα στον Gauss και τον Bolyai δεν προκαλεί εντύπωση, αφού και ο Γερμανός επιστήμονας υπήρξε διακεκριμένος στον τομέα του και παιδί-θαύμα. Η σταδιοδρομία του ως

μαθηματικού, αστρονόμου και φυσικού, όπου επίσης διέπρεψε, ξεκίνησε από πολύ νωρίς. Αρχισε τις βασικές σπουδές του σε ηλικία 7 ετών και εντυπωσίασε τους δασκάλους του με τις ικανότητες του στο λογισμό και συλλογισμό. Ενώ ακόμα φοιτούσε στο Collegium Carolinum του Brunswick, ο Gauss ανακάλυψε ολομόναχος ένα νόμο αστρονομίας, που ονομάζεται νόμος του Μπόντε, καθώς και πολυάριθμα θεωρήματα άλγεβρας, όπως αυτό του διώνυμου.

Το 1795, ξεκίνησε σπουδές μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Göttingen και ολοκλήρωσε το διδακτορικό του σε ηλικία 22 ετών. Ανέπτυξε το ταλέντο του σε πολλούς διαφορετικούς κλάδους της μαθηματικής γνώσης, στη στατιστική, στη θεωρία των αριθμών, στη γεωμετρία. Υπήρξε ένας από τους επιβλέποντες της διδακτορικής διατριβής του Riemann. Σε ηλικία 30 ετών το 1807, έγινε διευθυντής του παρατηρητηρίου του Göttingen, όπου αφιέρωσε 6 χρόνια στη μελέτη του μαγνητισμού. Γνωστή είναι και η συμβολή του στη φυσική. Όταν αποσύρθηκε από την ακαδημαϊκή ζωή το 1849, ήταν γνωστός ως «ο πρίγκιπας των μαθηματικών».

16.1 Η πρώτη ιδιοφυΐα του Gauss

Ο θρύλος γύρω από το ταλέντο του Gauss περιλαμβάνει όλα τα τυπικά στοιχεία μιας ιδιοφυΐας, όπως για παράδειγμα τις πρώιμες ανακαλύψεις που έκανε και τις οποίες ακόμα και οι ενήλικες δυσκολεύονταν να κατανοήσουν. Σε ηλικία μόλις 10 ετών, ανακάλυψε τον τύπο του άθροισματος των αριθμητικών προόδων, κάνοντας γρήγορα το άθροισμα των εκατό πρώτων φυσικών ακέραιων αριθμών. Πώς; Χάρη σε ένα κόλπο που είναι πραγματικά εκπληκτικό από την πλευρά ενός παιδιού αυτής της ηλικίας. Συνειδητοποίησε πως το άθροισμα του πρώτου και του τελευταίου όρου, στη συνέχεια του δεύτερου και του προτελευταίου, και ούτω καθ' εξής, ήταν σταθερό:

1, 2, 3, 4, ..., 97, 98, 99, 100

$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = 4 + 97 = \dots = 101$

Μπορούμε να σχηματίσουμε 50 ζευγάρια με τους πρώτους εκατό αριθμούς, έστω το τελικό άθροισμα $101 \times 50 = 5.050$. Ο Gauss είχε συμπεράνει τον τύπο που δίνει το άθροισμα, S_n , των n όρων μιας αριθμητικής προόδου της οποίας γνωρίζουμε τον πρώτο (a_1) και τον τελευταίο όρο (a_n):

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

16.2 Η αλληλογραφία ανάμεσα στον Gauss και στον Bolyai

Ο Gauss ήταν στενός φίλος του Farkas Bolyai πατέρα του Janos και οι δύο τους αλληλογραφούσαν τακτικά σχετικά με το 5^ο αξίωμα. Ο ίδιος ο Gauss εργαζόταν πολύ προσεκτικά πάνω στο θέμα αυτό, όπως αποδεικνύεται από το γεγονός πως δε δημοσίευσε ποτέ τα αποτελέσματά του. Ο Farkas είχε επίσης εργαστεί πάνω στην απόδειξη του 5^{ου} αξιώματος χωρίς όμως επιτυχία. Βάσει της εμπειρίας του και των συζητήσεών του με τον Gauss πάνω στη θεωρία των παραλλήλων, ο Farkas συμβούλεψε το γιο του να μην χάνει «ούτε λεπτό στο πρόβλημα αυτό». Ο Janos έλαβε σχετικά υπόψη του τη συμβουλή αυτή αφού δεν αφιέρωσε ένα λεπτό, αλλά δύο ολόκληρα χρόνια γι' αυτό το ζήτημα.

Το 1832 ο Farkas Bolyai έγραψε στο φίλο του, Gauss, για να του μεταβιβάσει την ανησυχία του σχετικά με την εμμονή του γιου του. Του ζητούσε τη γνώμη και τις συμβουλές του για να καταφέρει να πείσει τον Janos να εγκαταλείψει τις προσπάθειές του. Ο Gauss του απάντησε πως είχε φτάσει και ο ίδιος σε παρόμοια

αποτελέσματα αλλά πως, για την ώρα, τα κρατούσε κρυφά. Δε μπορούσε ούτε να συγχαρεί το έργο του Janos, αλλά ούτε και να τον πείσει να παραιτηθεί, όπως έγραφε στις παρακάτω γραμμές «Αν πω πως δεν είμαι σε θέση να θαυμάσω αυτό το έργο, σίγουρα θα σε εντυπωσίαζα στιγμιαία. Όμως δε μπορώ να πω τίποτα περισσότερο.

Αν το θαύμαζα, θα ήταν σαν να θαυμάζω τον εαυτό μου. Πράγματι, όσα εμπεριέχονται σε αυτό το έργο, ο δρόμος που ακολούθησε ο γιος σου, τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξε συμπίπτουν ουσιαστικά πλήρως με τους συλλογισμούς μου, που απασχόλησαν το νου μου σε ένα μεγάλο τμήμα των τελευταίων 30 με 35 ετών. Όλα αυτά με εντυπωσιάζουν πολύ...»

Ο Farkas έγραψε στο γιο του, μια εποχή όπου εκείνος ήταν εντελώς απορροφημένος από το 5^ο αξίωμα του Ευκλείδη

«Σε παρακαλώ να μην προσπαθήσεις και εσύ να παλέψεις με τις θεωρίες των παράλληλων γραμμών. Θα χάσεις το χρόνο σου και τα θεωρήματα θα παραμείνουν αναπόδεικτα. Αυτά τα άδυστα ερέβη μπορούν να γκρεμίσουν χιλιάδες κάστρα, όπως ο Νεύτωνας. Ποτέ αυτό δε θα γίνει κατανοητό επάνω στη Γη και ποτέ το καταραμένο ανθρώπινο είδος δε θα διαθέτει στον κόσμο κάτι πλήρως, πόσο μάλλον στον τομέα της γεωμετρίας.

Είναι για την ψυχή μου μια μεγάλη αιώνια πληγή. Για το όνομα του Θεού γιε μου, σε ικετεύω, ξέχασέ τα όλα αυτά. Να το φοβάσαι, όπως φοβόμαστε τα αισθησιακά πάθη γιατί όπως κι αυτά, μπορεί να απορροφήσει όλο το χρόνο σου και να σου στερήσει την υγεία, την ψυχική γαλήνη και τη χαρά της ζωής».

Παρά τον τραγικό τόνο του θέματος, ο Janos δεν εισάκουσε ποτέ τις ικεσίες του πατέρα του και γρήγορα πείστηκε πως το 5^ο αξίωμα δεν ήταν μόνο αναπόδεικτο αλλά και ανεξάρτητο από όλα τα άλλα. Αρνούμενοι το αξίωμα αυτό, θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε ένα διαφορετικό και γεωμετρικά λογικό σύστημα.

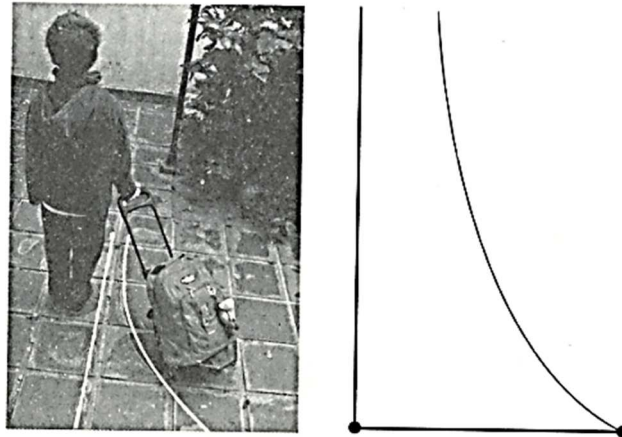
17. Οι κοινές εντυπωσιακές επιτυχίες των Lobachevski και Bolyai

Οι Lobachevski και Bolyai ανέγειραν τους πυλώνες της μη ευκλείδειας γεωμετρίας και τριγωνομετρίας. Απέδειξαν πως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180° και πως όλα τα τρίγωνα δεν έχουν το ίδιο γωνιακό άθροισμα. Όσο μεγαλύτερο το εμβαδόν ενός τριγώνου, τόσο μικρότερο το άθροισμα των γωνιών του. Δεδομένου πως τα μεγαλύτερα τρίγωνα έχουν διαφορετικά γωνιακά αθροίσματα, δεν υπάρχουν παρόμοια τρίγωνα (τρίγωνα με ίδιο σχήμα και διαφορετικές διαστάσεις).

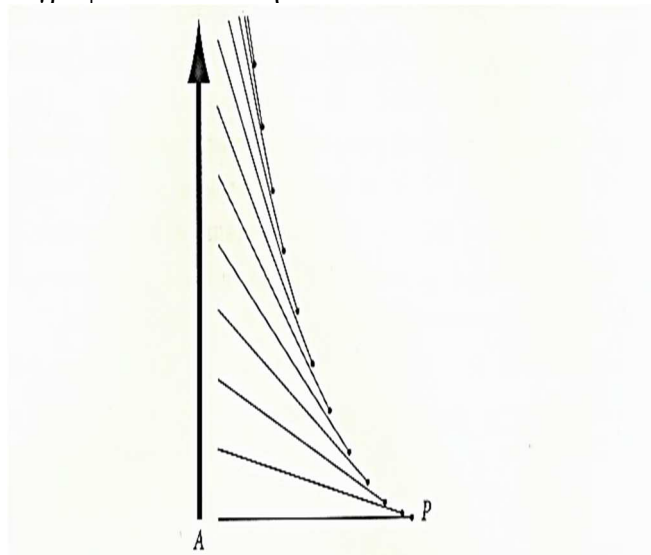
Στη γεωμετρία αυτή, αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες (γωνίες με ίδιο άνοιγμα), τότε είναι ίσα (δηλαδή ταυτίζονται εάν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο). Δεν υπάρχουν ορθογώνια με την ευκλείδεια έννοια του όρου, αφού αν οι τρεις γωνίες ενός τετράπλευρου είναι ορθές γωνίες (90°), τότε η τέταρτη θα πρέπει να είναι μικρότερη. Αυτό εξηγείται από το γεγονός πως διαιρώντας το ορθογώνιο σε δύο τρίγωνα, το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου πρέπει να είναι μικρότερο από 180°. Παρά την ομοιότητα των αποτελεσμάτων των δύο πατέρων της υπερβολικής γεωμετρίας, υπάρχουν και διαφορές στις απόψεις τους. Ο Janos Bolyai προσπάθησε κυρίως να κάνει τη διάκριση ανάμεσα στις γεωμετρικές προτάσεις που απαιτούν το θεώρημα του Ευκλείδη και σε αυτές που δεν εξαρτώνται από αυτό. Την ίδια στιγμή, ο Lobachevski έμπαινε στη διαμάχη με πιο αποφασιστικό τρόπο, απέκλεισε το 5^ο αξίωμα και του πρότεινε ένα υποκατάστατο «Από ένα σημείο εκτός ευθείας περνάνε περισσότερες από μία παράλληλες».

18. Συνηθισμένα μοντέλα υπερβολικής γεωμετρίας

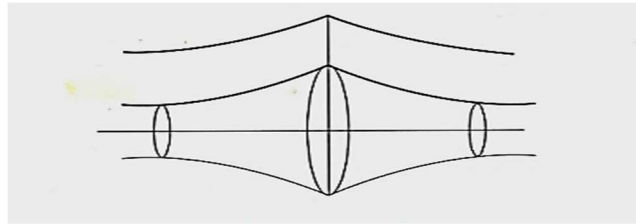
Ένα μοντέλο ευκλείδειας γεωμετρίας είναι το συνηθισμένο επίπεδο με τις συνηθισμένες έννοιες των σημείων και ευθειών. Τα μοντέλα που θα δούμε θα μας επιτρέψουν να αναπαραστήσουμε και να κατανοήσουμε καλύτερα την υπερβολική και την ελλειπτική γεωμετρία. Το 1^ο μοντέλο αντιστοιχεί στην επιφάνεια που επιτρέπει να ερμηνεύσουμε την υπερβολική γεωμετρία. Για να φτιάξουμε μια νοερή εικόνα της επιφάνειας αυτής, μπορούμε να φανταστούμε ένα άτομο που σέρνει μια βαλίτσα με ροδάκια ή ένα παιδί που τραβά ένα παιχνίδι δεμένο με σχοινί, στο ένα άκρο υπάρχει το χέρι και στην άλλη το αντικείμενο. Όταν το παιδί αρχίζει να περπατά σε ευθεία γραμμή τραβώντας το σάκο, αυτός διαγράφει μια καμπύλη που το πλησιάζει όλο και περισσότερο και ονομάζεται **έλκουσα**. Ας φανταστούμε πως το άτομο τραβά το φορτίο του με τρόπο ώστε και οι δύο (άνθρωπος-φορτίο) να μετακινούνται με την ίδια ταχύτητα. Ενώ το άτομο προχωρά σε ευθεία γραμμή, το ρυμουλκόμενο αντικείμενο τείνει να πλησιάζει όλο και περισσότερο. Η πορεία αυτή ονομάζεται **καμπύλη του σκύλου**. Η μαθηματική της έκφραση είναι λίγο πιο τεχνική, στη μαθηματική γλώσσα λέμε πως η καμπύλη πλησιάζει την ευθεία ασύμπτωτα.



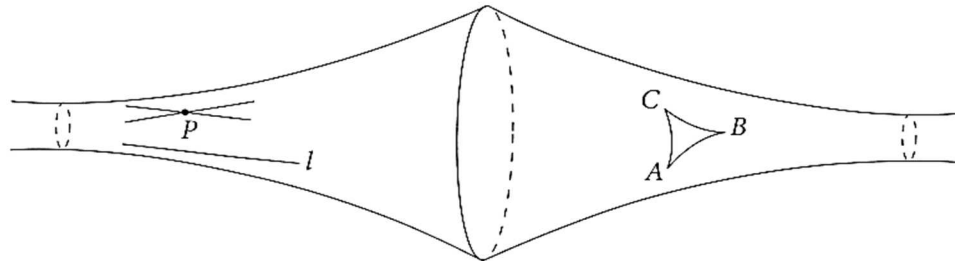
Αυτή η καμπύλη ονομάζεται **έλκουσα**. Έτσι ορίζουμε γενικά την καμπύλη που διαγράφει το αντικείμενο, το οποίο έλκεται από ένα άλλο που του διατηρεί σε σταθερή απόσταση και κινείται ευθύγραμμα. Αναπαρίσταται από το επόμενο γράφημα, όπου το Α μετακινείται σε ευθεία γραμμή (στην κατεύθυνση του βέλους) και έλκει το Ρ. Η καμπύλη που διαγράφει το Ρ είναι η έλκουσα.



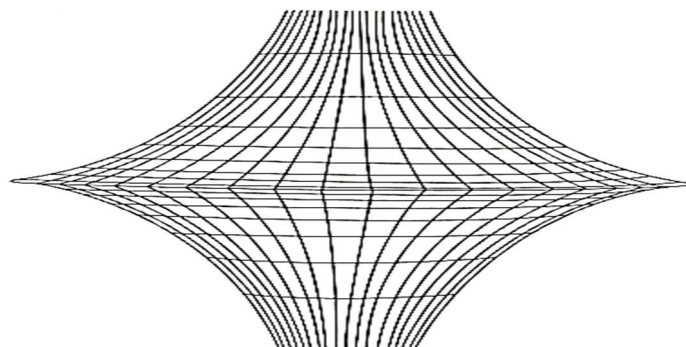
Αν φανταστούμε την καμπύλη αυτή να στρέφεται γύρω από την ευθεία PA, σα να στρεφόταν γύρω από τον εαυτό της, λαμβάνουμε μια επιφάνεια που ονομάζεται **ψευδόσφαιρα**. Η επιφάνεια αυτή είναι το μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας, δηλαδή τα σχήματα που σχεδιάζονται επάνω σε μια ψευδόσφαιρα (όπως οι παράλληλες και τα τρίγωνα) θα συμπεριφέρονται γεωμετρικά με μη ευκλείδειο τρόπο χωρίς ωστόσο να έρχονται σε αντίθεση μεταξύ τους. Τα αξιώματα της γεωμετρίας του Lobachevski απορρέουν από τη μελέτη της συμπεριφοράς των σημείων και των ευθειών επάνω στην επιφάνεια αυτή.



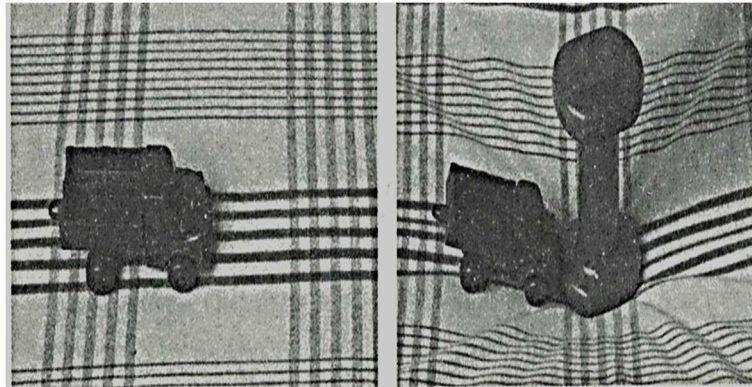
Ο Lobachevski πρότεινε, στη θέση του 5^{ου} αξιώματος, ότι με δεδομένη μία ευθεία l και ένα σημείο P που δεν ανήκει σε αυτή την ευθεία l , μπορούν να σχεδιαστούν άπειρες ευθείες που περνούν από το P και είναι παράλληλες στην l . Στην επιφάνεια αυτή, οι παράλληλες ευθείες δεν είναι ισαπέχουσες σε όλα τα σημεία τους (γεγονός που συνιστά τη θεμελιώδη διαφορά σε σχέση με την ευκλείδεια γεωμετρία) και το άθροισμα των γωνιών A, B, C είναι μικρότερο από 180° .



Οι ευθείες στην επιφάνεια αυτή είναι οι πιο κοντές γραμμές ανάμεσα στα σημεία της επιφάνειας. Οι γραμμές αυτές ονομάζονται **γεωδαιτικές**. Παρατηρούμε πως από μία ευκλείδεια οπτική που τόσο δύσκολα μπορεί κανείς να αποποιηθεί, οι ευθείες μοιάζουν κυρτές. Η επόμενη εικόνα δείχνει τι είναι οι παράλληλες γραμμές στην υπερβολική γεωμετρία. Αυτές χαράσσονται στην επιφάνεια της ψευδόσφαιρας.



Με τη συμπεριφορά των επιφανειών αυτού του είδους σε διάφορες θέσεις, όπως μέσα στο σπίτι, μπορούμε να κάνουμε το πείραμα σε μια κανονική κρεβατοκάμαρα που αναπαριστά για μία στιγμή πως θα ήταν η κίνηση μέσα σε έναν υπερβολικό κόσμο. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να εργαστούμε επάνω σε κρεβάτι με επίπεδη επιφάνεια, όπως το ευκλείδειο επίπεδο. Στη συνέχεια, τοποθετούμε στο σεντόνι του κρεβατιού ένα αντικείμενο που μπορεί να κυλήσει (δείτε κάτω την εικόνα). Δίπλα τοποθετούμε ένα αντικείμενο αρκετά βαρύ ώστε να δημιουργηθεί λακκούβα στο σεντόνι. Εκεί βλέπουμε πως η επιφάνεια δεν είναι πια επίπεδη αλλά γίνεται κυρτή.



Το κυλιόμενο αντικείμενο γλιστρά σιγά σιγά προς το βαρύ αντικείμενο κάτω από την επίδραση της καμπύλης. Γύρω από το βαρύ αντικείμενο, το σεντόνι μοιάζει με μία υπερβολική επιφάνεια. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε από τον Αϊνστάιν για να ορίσει το χωρόχρονο. Το σύμπαν του Αϊνστάιν είναι διάστασης 4, αφού ο χωρόχρονός του περιλαμβάνει τις 3 διαστημικές συντεταγμένες συν μία τέταρτη, καθαρά χρονική. Καθώς ένα σύμπαν 4 διαστάσεων αψηφά τον ανθρώπινο νου, ο άνθρωπος δε μπορεί να έχει μία ακριβή ιδέα του πώς θα ήταν σε 4 διαστάσεις η μεταφορά, πλήρως τρισδιάστατη, του αντικειμένου και των πτυχώσεων στο κρεβάτι.

Είναι όμως δυνατό να έχει τη διαίσθηση ή να υποθέτει νοερά τί συμβαίνει. Όπως συμβαίνει και σε πολλές άλλες περιπτώσεις, ο άνθρωπος νους θα πρέπει και εδώ να αρκестεί στη διαίσθηση. Το 1870, ο Γερμανός μαθηματικός **Felix Klein** (1849–1925) εισήγαγε ένα άλλο μοντέλο, της υπερβολικής γεωμετρίας στο επίπεδο και το επέκτεινε στο χώρο. Στο μοντέλο του, ο Klein εξέτασε τον ευκλείδειο κύκλο (το συνηθισμένο κύκλο) και πρότεινε ένα νέο ορισμό του σημείου, της ευθείας, της παραλληλότητας, κλπ. Ονόμασε **επίπεδο** το εσωτερικό του κύκλου και όρισε ως σημεία τα εσωτερικά του σημεία, αποκλείοντας αυτά της περιφέρειας. Ονόμασε **ευθείες**, τις εσωτερικές χορδές του κύκλου, χωρίς να αποκλείσει τα άκρα (υπενθυμίζουμε πως οι χορδές είναι τα τμήματα των οποίων τα άκρα βρίσκονται επάνω στην περιφέρεια). Στην πρόταση του, ορίζει ομοίως τις παράλληλες ευθείες ως τις χορδές του κύκλου που έχουν κοινό άκρο. Όσο για τις ευθείες, ορίζει τις τέμνουσες ως αυτές που τέμνονται στο εσωτερικό του κύκλου και τις μη τέμνουσες, ως εκείνες που τέμνονται στο εξωτερικό του κύκλου.

19. Η πραγματικότητα ξεπερνά την αφαίρεση

Είναι εύκολο να βρούμε παραδείγματα υπερβολικών επιφανειών στον πραγματικό κόσμο γύρω μας. Χωρίς να πάμε πολύ μακριά, η επιφάνεια μιας σέλας αλόγου παρουσιάζει ιδιότητες υπερβολικής επιφάνειας. Οι γωνίες ενός

οποιοδήποτε τριγώνου που θα σχεδιάζαμε σε αυτήν θα είχαν άθροισμα μικρότερο από 180° και οι παράλληλες γραμμές δεν θα ήταν ισαπέχουσες αλλά θα απέκλιναν σταδιακά η μία από την άλλη.

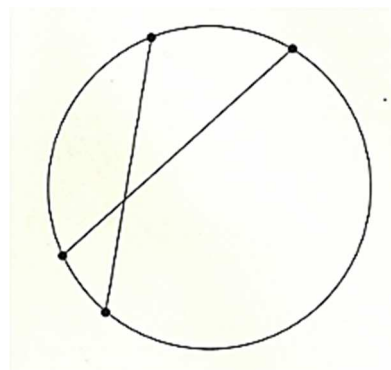
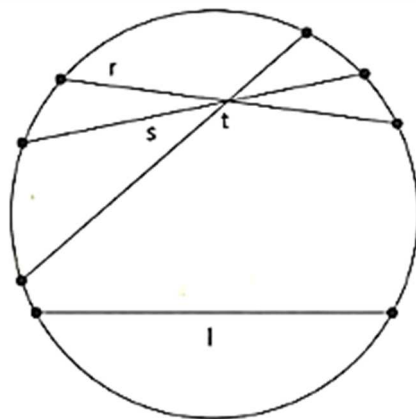
20. Άλλη γεωμετρία, άλλος κόσμος

Ένα μοντέλο της πραγματικότητας του τύπου που προτείνει η επιφάνεια της υπερβολικής γεωμετρίας μοιάζει με το στόμιο μιας σάλπιγγας. Θα μπορούσε κανείς να περπατήσει σε ευθεία γραμμή πάνω σε αυτή την επιφάνεια; Ας φανταστούμε δύο μη ευκλείδειους κατοίκους που κατεβαίνουν προς το στόμιο της σάλπιγγας αυτής.

Ένας εξωτερικός παρατηρητής θα έβλεπε τις τροχιές των 2 κατοίκων να απομακρύνονται σιγά σιγά η μία από την άλλη. Ωστόσο, οι κάτοικοι του υπερβολικού κόσμου θα συνέχιζαν σε τροχιές αυστηρά παράλληλες. Ακόμα κι αν η εικόνα υπερβολικών κατοίκων που περπατάνε φαίνεται εκκεντρική στους ακαδημαϊκούς, είναι μια συναρπαστική ιδέα για την επιστημονική φαντασία. Πολλά μυθιστορήματα φέρνουν στο προσκήνιο υπερβολικούς κόσμους όπως το Inverted World (αντεστραμμένος κόσμος) του Christopher Priest.

Στο μοντέλο αυτό, αν υποθέσουμε πως το επίπεδο εκπροσωπείται μόνο από τα εσωτερικά σημεία του κύκλου και πως οι χορδές είναι ευθείες, οι ευθείες r , s και t είναι παράλληλες στην l , αφού δεν την τέμνουν σε κανέναν σημείο. Συνεπώς, από ένα σημείο έξω από μία ευθεία, θα μπορούμε να σχεδιάσουμε άπειρες παράλληλες.

Ο Klein απέδειξε πως η γεωμετρία που κατασκευάζεται με τον τρόπο αυτό από τον κύκλο, ισοδυναμεί με την υπερβολική γεωμετρία, πως πληροί όλα τα αξιώματα του Ευκλείδη, εκτός από το 5^ο αξίωμα και τηρεί τα αποτελέσματα της υπερβολικής γεωμετρίας.



21. Ο Riemann και η ελλειπτική γεωμετρία

Λίγο καιρό μετά τη γεωμετρία των Lobachevski και Bolyai, μια άλλη γεωμετρία έκανε την εμφάνισή της. Προήλθε από τον διάσημο μαθηματικό **Bernhard Riemann**, ο οποίος αντικατέστησε το 5^ο αξίωμα του Ευκλείδη με μια άλλη κοινή έννοια: «Εστω μια ευθεία d και ένα σημείο P που δεν της ανήκει, δεν υπάρχει ευθεία που περνάει από το P και είναι παράλληλη στην ευθεία d .»

Ο Bernhard Riemann (1826–1866) γεννήθηκε στο Αννόβερο και υπήρξε, όπως και οι άλλοι προαναφερθέντες, πρώιμο ταλέντο. Σε ηλικία 16 ετών, μαθητής του Gymnasium Johanneum του Luneburg, έδειξε μεγάλη κλίση στα μαθηματικά και ο διευθυντής του επέτρεψε να μελετά τα κείμενα της ιδιωτικής του βιβλιοθήκης. Το

1846 μπήκε στο πανεπιστήμιο του Gottingen όπου ξεκίνησε τη σταδιοδρομία του στη θεολογία. Ωστόσο, πέρασε στο τμήμα της φιλοσοφίας όπου περιλαμβάνονταν οι σπουδές των μαθηματικών. Στους καθηγητές του συγκαταλέγονται οι **Mortiz, Stern** και **Gauss**. Στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου, όπου εισήλθε το 1847, σπούδασε υπό την προστασία των **Steiner, Jacobi, Dirichlet** και Αϊζενστάιν. Επέστρεψε στο Gottingen για να ολοκληρώσει το διδακτορικό του στη φιλοσοφία με επιβλέποντα τον Gauss. Το 1857, το πρώτο του μάθημα ως καθηγητής πανεπιστημίου αφορούσε την αναδιατύπωση της έννοιας της γεωμετρίας, μολονότι η έκθεση αυτή δε δημοσιεύτηκε παρά μόνο δύο χρόνια μετά το θάνατό του. Ο Riemann, εξέχον μέλος της Ακαδημίας Επιστημών του Βερολίνου, εγκατέλειψε τη Γερμανία αναζητώντας ηπιότερα κλίματα για τη θεραπεία της φυματίωσής του. Πέθανε στην Ιταλία.

Λέγεται πως όταν ο Riemann ήταν μαθητής του Gauss στο πανεπιστήμιο του Gottingen, ο καθηγητής χρειάστηκε να επιλέξει έναν υπεύθυνο τάξης σε ορισμένες περιπτώσεις και εφηύρε για το σκοπό αυτόν έναν τρόπο εκλογής:

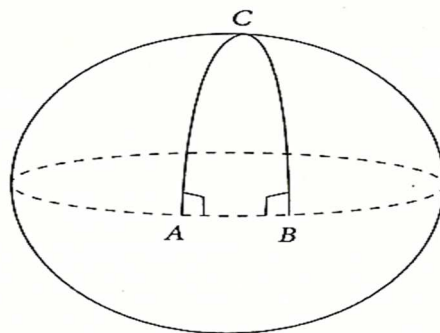
«Καθένας θα προτείνει τρία θέματα της επιλογής του. Το τμήμα θα επιλέξει ένα από τα τρία και ο επιλεγμένος μαθητής θα αναπτύξει το θέμα σε μία τρίωρη παρουσίαση».

Ο Riemann επέλεξε να σχολιάσει το έργο του Lobachevski «Νέα στοιχεία γεωμετρίας» και στη διάρκεια της παρουσίασης έκανε την περίφημη δήλωση του

«Ο Ευκλείδης λέει πως από ένα σημείο έξω από μία ευθεία περνάει μόνο μία παράλληλη ευθεία. Ο Lobachevski λέει πως περνάνε άπειρες. Εγώ λέω πως δεν περνά καμία».

Πιο κάτω, στην ίδια παρουσίαση, ο Riemann πρόσθεσε «Έτσι, καθώς η απείρως ευθεία γραμμή δεν υπάρχει, αφού τελικά μετατρέπεται σε καμπύλη, δεν υπάρχει ούτε και ευθύ επίπεδο, αφού αν το προεκτείνουμε, πρέπει να ακολουθήσει την καμπυλότητα του σύμπαντος. Καθώς όμως θα την ακολουθήσει σε όλες τις διευθύνσεις, το μοναδικό καμπύλο επίπεδο είναι σφαιρικό. Δεν υπάρχει άλλη γεωμετρία πλην αυτής που περιγράφεται πάνω σε μια σφαίρα.»

Αυτή η ακριβής ακαδημαϊκή έκθεση περιλάμβανε ήδη την ουσία της γεωμετρίας του Riemann, η οποία διέφερε από αυτήν του Ευκλείδη και του Lobachevski. Στη γεωμετρία του Riemann, δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες και το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180° . Η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι το καλύτερο μοντέλο για την αναπαράσταση της γεωμετρίας του Riemann. Το επίπεδο μέσα στο οποίο την κατασκεύασε ήταν η επιφάνεια της σφαίρας, ειδική περίπτωση αυτού που ονομάζουμε ελλειψοειδές, μιας σφαίρας δηλαδή διευρυμένης στα δύο άκρα. Στο μοντέλο αυτό, όπως και στην περίπτωση της υπερβολικής γεωμετρίας, οι ευθείες ονομάζονται γεωδαιτικές και είναι οι μέγιστοι κύκλοι, δηλαδή οι περιφέρειες που διαιρούν τη σφαίρα σε δύο ίσα ημισφαίρια (δύο ίσα «μισά πορτοκαλιού»).



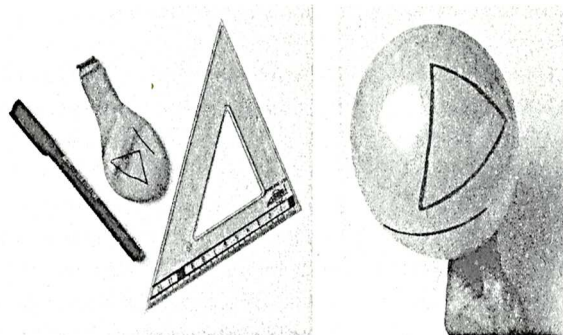
Όλες οι παράλληλες ευθείες τέμνονται μεταξύ του και το τρίγωνο ABC περιλαμβάνει δύο ορθές γωνίες, ούτως ώστε το άθροισμα των γωνιών του να είναι μεγαλύτερο από 180° . Στη γεωμετρία αυτή, όσο μεγαλύτερο το εμβαδόν ενός τριγώνου, τόσο μεγαλύτερο το άθροισμα των γωνιών του. Τα μόνα παρόμοια τρίγωνα είναι αυτά που είναι ίσα (που ταυτίζονται δηλαδή εάν τοποθετηθούν το ένα επάνω στο άλλο). Συνεπώς, η επιφάνεια της σφαίρας είναι ένα παράδειγμα ελλειπτικής γεωμετρίας. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο σχήμα αυτό, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου που σχεδιάζεται επάνω στην εν λόγω επιφάνεια είναι μεγαλύτερο από 180° . Ο Riemann δεν κατασκεύασε μόνο την ελλειπτική γεωμετρία, αλλά αφοσιώθηκε και στο χειρισμό των αλγεβρικών εξισώσεων (διαφορικές εξισώσεις) προκειμένου να ελαχιστοποιήσει τις αποστάσεις.

Αφετέρου, ανέλυσε εξίσου επιτυχώς την καμπυλότητα οποιουδήποτε χώρου 3 διαστάσεων και υπέδειξε πως οι θεωρίες του θα μπορούσαν να εφαρμοστούν και σε χώρους περισσότερων διαστάσεων. Τα αποτελέσματα του χρησιμοποιήθηκαν αργότερα από τον Άλμπερτ Αϊνστάιν στη θεωρία της σχετικότητας για την περιγραφή του σύμπαντος.

22. Ο σφαιρικός κόσμος του Riemann

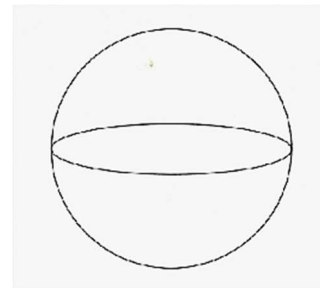
Μπορούμε να κάνουμε μια ενδιαφέρουσα άσκηση με μια μπάλα για να κατανοήσουμε καλύτερα τη γεωμετρία του Riemann. Πάνω στην ξεφούσκωτη και εντελώς επίπεδη μπάλα, σχεδιάζουμε ένα κομμάτι ευθείας γραμμής, της οποίας μετράμε το μήκος. Δίπλα, σχεδιάζουμε ένα τρίγωνο. Όταν φουσκώνουμε την μπάλα, τα σχέδια που έχουν γίνει μέσα στο επίπεδο παραμορφώνονται. Τι μπορούμε να παρατηρήσουμε για την ευθεία και το τρίγωνο; Η ευθεία έχει κυρτωθεί;

Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου παραμένει 180° ; Πάνω στην μπάλα, η γραμμή είναι μία καμπύλη που ονομάζεται γεωδαιτική, δηλαδή ένας από τους μέγιστους κύκλους της σφαίρας. Ο Riemann δε μπόρεσε ποτέ να κάνει την άσκηση αυτή αφού στην εποχή του δεν υπήρχαν φουσκωτές μπάλες.

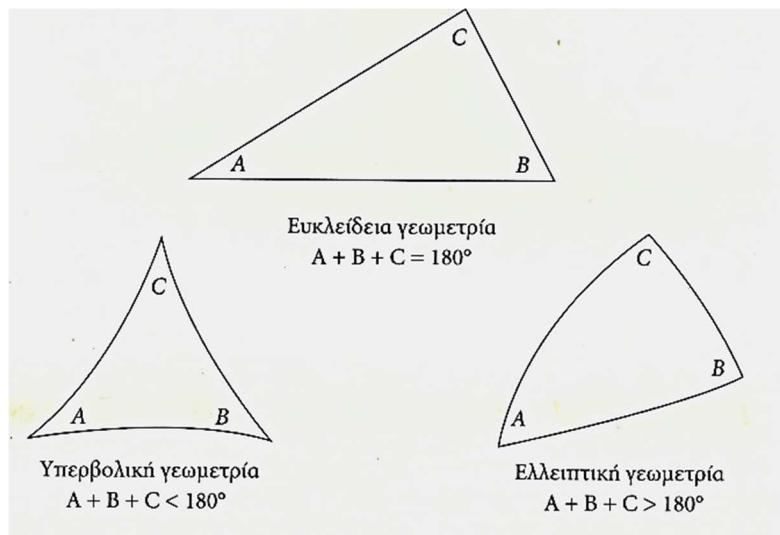


23. Γεωμετρικές συγγένειες

Οφείλουμε την ταξινόμηση των γεωμετριών σε τρεις κατηγορίες στον Felix Klein και στον ιδρυτή της σύγχρονης αγγλικής σχολής καθαρών μαθηματικών **Arthur Cayley** (1821–1895). Είναι αυτοί που ονοματοδότησαν την υπερβολική και την ελλειπτική γεωμετρία και επιπλέον χαρακτήρισαν την ευκλείδεια γεωμετρία παραβολική. Στην πραγματικότητα, οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες δεν ανταγωνίζονται την ευκλείδεια γεωμετρία. Ο κατάλογος των διαφορών τους είναι μακρύς, το ίδιο όμως ισχύει και για τις συγγενείς τους. Στην ευκλείδεια γεωμετρία, δύο ξεχωριστές ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο και το ίδιο ισχύει και στη γεωμετρία του Lobachevski. Κατά τον Riemann, μπορούν να τέμνονται σε ένα ή σε δύο σημεία. Στο μοντέλο σφαίρας του Riemann, δύο ευθείες (δηλαδή δύο μέγιστοι κύκλοι) τέμνονται πάντα σε ένα σημείο και στον αντίποδά του.



Κατά τον Ευκλείδη, έστω ευθεία d και σημείο P έξω από την ευθεία αυτή, υπάρχει και μία και μοναδική παράλληλη προς την d η οποία περνά από το P . Κατά τον Lobachevski, υπάρχουν τουλάχιστον δύο. Κατά τον Riemann δεν υπάρχει καμία. Από την άλλη, ο Ευκλείδης λέει πως οι παράλληλες ευθείες είναι ισαπέχουσες, ενώ ο Lobachevski πως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Όσο για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, είναι 180° για τον Ευκλείδη, μικρότερο από 180° για τον Lobachevski και μεγαλύτερο από 180° για τον Riemann. Αν θεωρήσουμε ένα σημείο σε μία ευθεία, αυτό χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη για τον Ευκλείδη και τον Lobachevski, ενώ για τον Riemann, τα πράγματα είναι διαφορετικά. Κατά τον Ευκλείδη, δύο τρίγωνα με ίσες ομόλογες γωνίες είναι όμοια, ενώ για τον Lobachevsky και τον Riemann είναι ίσα (ταυτίζονται εάν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο).

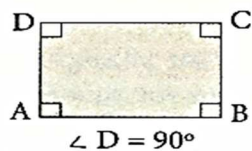
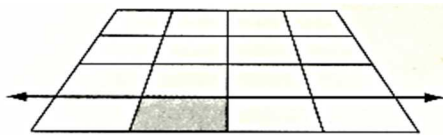


Οι διαφορές συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

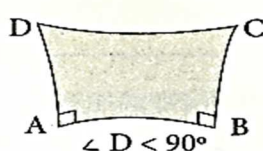
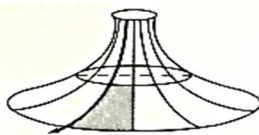
Γεωμετρία	Ιδρυτής	Παράλληλες σε ένα εξωτερικό σημείο	Άθροισμα γωνιών τριγώνου	Οι ευθείες είναι
Επίπεδη	Ευκλείδης	Μία	180°	Άπειρες
Υπερβολική	Bolyai – Lobachevski	Περισσότερες από μία	Μικρότερο από 180°	Άπειρες
Ελλειπτική	Riemann	Καμία	Μεγαλύτερο από 180°	Πεπερασμένες

Η γεωμετρία του Ευκλείδη μπορεί να κατασκευαστεί στην επιφάνεια ενός επιπέδου, η υπερβολική στην επιφάνεια μιας ψευδόςφαιρας και η ελλειπτική στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Στα μοντέλα αυτά, μπορούμε να ερμηνεύσουμε το αξίωμα των παραλλήλων που υιοθετεί κάθε γεωμετρία. Τα επόμενα σχήματα αναπαριστούν το βασικό αξίωμα κάθε γεωμετρίας και το μοντέλο των επιφανειών επάνω στις οποίες προβάλλονται. Επιτρέπουν να εικονοποιήσουμε την όψη ενός ορθογωνίου σε κάθε μία από τις γεωμετρίες.

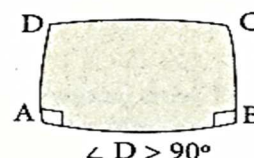
Ευκλείδεια γεωμετρία



Υπερβολική γεωμετρία

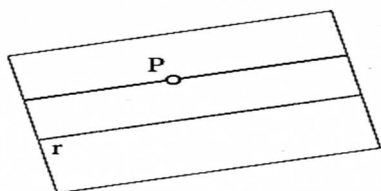
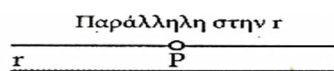


Σφαιρική γεωμετρία

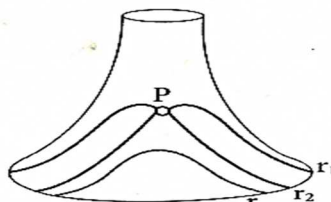
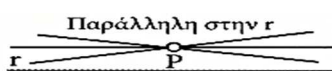


Σε ένα ευκλείδειο «ορθογώνιο», οι γωνίες ενός τριγώνου είναι 90° , στην υπερβολική γεωμετρία μικρότερες από 90° και στην ελλειπτική μεγαλύτερες από 90°

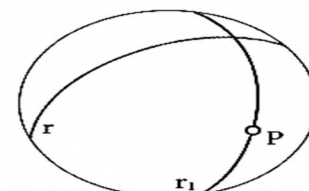
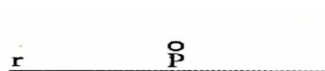
Ευκλείδεια γεωμετρία



Υπερβολική γεωμετρία



Σφαιρική γεωμετρία



Στο ευκλείδειο επίπεδο, μία μόνο παράλληλη προς την r περνά από το P . Στην ψευδόσφαιρα του κέντρου, άπειρες ευθείες παράλληλες προς τις r_1, r_2 περνάνε από το P και περιλαμβάνονται όλες ανάμεσα στο r_1, r_2 . Έστω μία σφαιρική επιφάνεια, δεν περνάει καμία παράλληλη από το P . Κάθε ευθεία r τέμνει κάθε άλλη ευθεία που περνά από το P

24. Ο Ευκλείδης στην πραγματικότητα

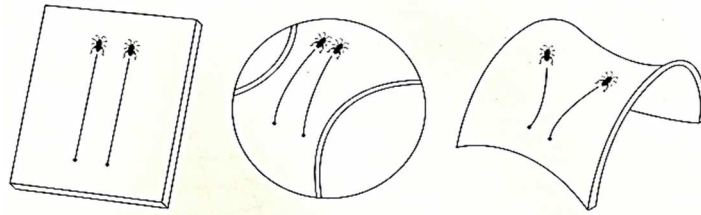
Σε κάθε υδρόγειο σφαίρα μπορούμε να παρατηρήσουμε πως οι μεσημβρινοί είναι παράλληλες ευθείες, κάθετες στον ισημερινό και τέμνονται όλοι σε δύο όμοια σημεία στους δύο πόλους της σφαίρας. Επιπλέον, πρόκειται για πεπερασμένες ευθείες. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να παρατηρήσουμε στις δύο παράλληλες γραμμές ενός ευθύ και μακριού δρόμου, τέμνονται στον ορίζοντα.

Τα ίδια τα επιχειρήματα του Ευκλείδη υποδεικνύουν τις νέες γεωμετρίες. Από την άλλη πλευρά, εάν τοποθετηθούμε στην εξωτερική επιφάνεια μιας μπάλας και σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο, πως θα είναι οι εσωτερικές γωνίες του; Και εάν τοποθετηθούμε στην εσωτερική όψη, πώς θα είναι τότε οι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου; Ας φανταστούμε μια τεράστια μπάλα, απείρως μεγάλη, στην επιφάνεια της οποίας βρίσκονται άπειρα μικρά ανθρωπάκια. Στον κόσμο τους, αυτές οι επιφάνειες που ήταν καμπύλες είναι τώρα επίπεδες δηλαδή ευκλείδειες.

25. Ένας αγώνας δρόμου μυρμηγκιών

Το παράδειγμα του αγώνα δρόμου των μυρμηγκιών χρησιμοποιείται συχνά για την αναπαράσταση των 3 τυπολογιών γεωμετριών και για τη σαφή και παραστατική απεικόνιση των διαφορών και των ομοιοτήτων τους. Ας φανταστούμε δύο μυρμήγκια που συμμετέχουν στον αγώνα δρόμου. Αρχίζουν τον αγώνα μαζί και

τουλάχιστον στην αρχή, μετακινούνται ταυτόχρονα ακολουθώντας τελείως παράλληλες πορείες.



Τα μυρμήγκια τρέχουν μπροστά χωρίς να αποκλίνουν, σε συνάρτηση όμως το είδος επιφάνειας κάθε γεωμετρίας, οι ευθύγραμμες τροχιές του θα έχουν διαφορετικές όψεις. Αν τα μυρμήγκια μετακινούνται πάνω σε μια εντελώς επίπεδη επιφάνεια, σε μια ευκλείδεια επιφάνεια δηλαδή, οι τροχιές τους δε θα χωριστούν ούτε θα απομακρυνθούν και θα διατηρήσουν την ίδια μεταξύ τους απόσταση. Αν η επιφάνεια είναι καμπύλη, είτε θα διαχωριστούν είτε θα πλησιάσουν. Όπως φαίνεται στο σχέδιο, αν η επιφάνεια είναι σφαιρική, θα τμηθούν αναπόφευκτα, αφού ο χώρος πάνω στον οποίο κινούνται δεν είναι απλώς καμπύλος, αλλά κοίλος.

Στην περίπτωση υπερβολικής επιφάνειας, θα απομακρύνονταν όλο και περισσότερο εφόσον η καμπυλότητα είναι κυρτή. Για να διατηρήσουν την ίδια μεταξύ τους απόσταση στον σφαιρικό ή υπερβολικό κόσμο, έπρεπε να αποκλίνουν από την πορεία τους, υποχρεωμένες να απαρνηθούν την έννοια της παραλληλότητάς τους και να εγκαταλείψουν, συνεπώς, το αξίωμα των παραλλήλων. Εκ των πραγμάτων σε τέτοιους κόσμους, η παραλληλότητα θα ήταν απολύτως διαφορετική από αυτό που πρεσβεύει στον ευκλείδειο κόσμο. Υπό αυτή την έννοια, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε πως οι άνθρωποι του σφαιρικού ή υπερβολικού κόσμου δεν θα συνειδητοποιούσαν το γεγονός πως απομακρύνονται ή πλησιάζουν, αφού τα όργανα μέτρησης της απόστασης που τους χωρίζει θα παραμορφώνονταν ταυτόχρονα με τις πορείες τους. Όμως θα το συνειδητοποιούσαν εάν διέθεταν «ευκλείδεια όργανα μέτρησης».

26. Αϊνστάιν εναντίον Ευκλείδη

Οι εισφορές στην μη ευκλείδεια γεωμετρία, και ειδικότερα αυτές του Riemann, τροφοδότησαν τις θεωρίες του Γερμανού φυσικού Άλμπερτ Αϊνστάιν (1879–1955). Η φυσική θεωρία της σχετικότητας είναι γεμάτη από μαθηματικές έννοιες καμπυλοτήτων του χώρου και του χρόνου. Ενώνοντας τους δύο κλάδους και συνδυάζοντας την πρωτοποριακή γνώση της εποχής του, ο Αϊνστάιν κατόρθωσε να ερμηνεύσει τις κινήσεις του Ήλιου, των πλανητών και των άστρων. Πάνω στη βάση της μη ευκλείδειας γεωμετρίας, μπόρεσε να συνδέσει μέσω εξισώσεων την καμπυλότητα του χωροχρόνου με το περιεχόμενο του σε μάζα και ενέργεια.

27. Η θεωρία της σχετικότητας

Η θεωρία σχετικότητας παρέχει μια περιγραφή του σύμπαντος με όρους χωροχρόνου. Η ισοδυναμία μεταξύ μάζας (m) και ενέργειας (E) δίνεται από τη σχέση $E=mc^2$, όπου c η ταχύτητα του φωτός (299.792,458 km/s). Η θεωρία αιτιολογεί τις ιστορικές αποκλίσεις με τις κλασσικές αναλύσεις ορισμένων φυσικών φαινομένων που χρησιμοποιούσαν ως μαθηματικό μοντέλο μη ευκλείδειες γεωμετρίες, ειδικότερα αυτήν του Riemann, την οποία αξιοποιεί για να

αναπαραστήσει το σύμπαν με μεγαλύτερη ακρίβεια. Στη θεωρία σχετικότητας, ο χώρος και ο χρόνος είναι φυσικές μετρήσεις που χρησιμεύουν για να ορίσουν την απόσταση και τη σχετική κίνηση των αντικειμένων. Το σύμπαν είναι καμπύλο εξ αιτίας της απόκλισης των φωτεινών ακτινών που οφείλεται στα αντικείμενα (εμπόδια) μέσα στο χώρο, σχηματίζοντας αυτό που αποκαλούμε γεωδαιτικές καμπύλες. Η καμπυλότητα του χωροχρόνου του Αϊνστάιν καθορίζεται από τη βαρύτητα. Είδαμε προηγουμένως μια άσκηση σε ένα γυαλιστερό σεντόνι, με το οποίο ήμασταν σε θέση να παρατηρήσουμε πώς ένα βαρύ αντικείμενο μπορεί να δημιουργήσει μια πτύχωση και πώς τα αντικείμενα έλκονται από την τρύπα που δημιουργεί η πτύχωση αυτή. Η βαρύτητα πτυχώνει τον ευκλείδειο κόσμο με τρόπο πολύ παρεμφερή με αυτόν του αντικειμένου που βυθίζει το σεντόνι προς το εσωτερικό του κρεβατιού. Όταν υπάρχει βαρύτητα, το σύμπαν πτυχώνεται και παρουσιάζει μια ορισμένη καμπυλότητα.

Η άφιξη της ευκλείδειας γεωμετρίας στην επιστημονική σκηνή προτείνει στην επιστημονική κοινότητα ένα συναρπαστικό σενάριο και της θέτει μία σημαντική πρόκληση, να διαλευκάνει αν ο πραγματικός φυσικός χώρος είναι ευκλείδειος, και αν δεν είναι, να αποφασίσει σε ποια γεωμετρική δομή ή σε ποιο γεωμετρικό μοντέλο ανήκει. Πρέπει να αναμένουμε πως είναι δυνατόν ο χώρος να είναι ετερογενής, δηλαδή η γεωμετρική δομή του (ευκλείδεια, υπερβολική ή ελλειπτική) να μην είναι ίδια στα διαφορετικά μέρη του χώρου. Φαίνεται προφανές πως για να βρεθεί η λύση στο πρόβλημα αυτό, χρειάζεται μια πειραματική επαλήθευση των αξιωμάτων, τόσο του Ευκλείδη όσο και των ομολόγων του.

28. Ο πατέρας της σχετικότητας

Ο Άλμπερτ Αϊνστάιν γεννήθηκε στο Ulm της Γερμανίας. Από πολύ μικρή ηλικία ήταν παθιασμένος με τα μαθηματικά, επέδειξε όμως πάνω απ' όλα μια δημιουργικότητα που τον έσπρωχνε σταθερά μακριά από τις τυπικές ρουτίνες των οργανικών μαθηματικών και της αποστήθισης. Έφυγε για την Ελβετία όπου απέκτησε το πτυχίο του στις φυσικές επιστήμες. Κατά τη νεανική του ηλικία όμως, αναγκάστηκε να εργαστεί στη διοίκηση μιας επιχείρησης διπλωμάτων ευρεσιτεχνίας στη Βέρνη, αφού η εβραϊκή του καταγωγή δεν του επέτρεπε να εργαστεί ως καθηγητής. Αφιέρωνε τον ελάχιστο ελεύθερο χρόνο του στη μελέτη και στην έρευνα. Το 1905 ανώνυμα δημοσίευσε, την ειδική θεωρία της σχετικότητας (η οποία το 1916 επεκτάθηκε στη Γενική θεωρία της σχετικότητας), με την οποία αναδιατύπωνε τις έννοιες του χώρου, του χρόνου και της ταχύτητας. Το έργο του φέρνει την επανάσταση στις θεωρίες του Νεύτωνα και διατυπώνει μια νέα ερμηνεία του σύμπαντος, βασισμένη σε γεωμετρίες όχι απαραίτητα ευκλείδειες.

29. Το παράδοξο των διδύμων

Η θεωρία της σχετικότητας θεωρεί πως ο πραγματικός χώρος δεν είναι ευκλείδειος. Το κύριο επιχείρημα υπήρξε η ανακάλυψη του φυσικού νόμου που διατείνεται πως δεν υπάρχει καμία ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτήν του φωτός. Η διαμάχη σχετικά με τη συστολή του χωροχρόνου αναπαρίσταται με το παράδοξο των διδύμων. Ας φανταστούμε δύο διδύμους, ο ένας από τους δύο εγκαταλείπει τη Γη μέσα σε διαστημόπλοιο που προσεγγίζει ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός, ενώ ο δίδυμός του παραμένει στη Γη. Μετά από μερικές δεκαετίες, ο ταξιδιώτης επιστρέφει στη Γη. Ο αδερφός του έχει γεράσει, ενώ ο ταξιδιώτης επιδεικνύει ακόμα αξιοζήλευτη ζωντάνια. Αν μια αποστολή πετάξει με κατεύθυνση ένα άστρο με

ταχύτητα 240.000 km/sec –ταχύτητα μετρημένη από τη Γη– θα φτάσει στο άστρο σε 50 χρόνια. Αντιθέτως, για το πλήρωμα του διαστημόπλοιου, ο χρόνος θα συστέλλοταν και θα είχαν ζήσει μόνο 30 χρόνια. Συνεπώς, κατά το πηγαινε έλα, τα μέλη του πληρώματος θα είχαν γεράσει κατά 60 χρόνια και οι γήινοι κατά 100. Ο ρυθμός κατά τον οποίο κυλάει ο χρόνος εξαρτάται από την ταχύτητα του παρατηρητή. Ο χώρος και ο χρόνος συστέλλονται και διαστέλλονται. Η φυσική και τα μαθηματικά είναι στην πραγματικότητα οι φορείς της μέτρησης του χρόνου και της συνέργειάς του με το χώρο. Η γεωμετρία είναι θεμελιώδης σε αυτή την ανάλυση.

30. Η πραγματική γεωμετρία

Η γενική θεωρία της σχετικότητας προτείνει ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα, οι τρεις γεωμετρίες μπορούν να ισχύουν χωρίς να αναιρεί η μία την άλλη. Η σχετικότητα δεν αποκλείει καμία από αυτές. Όταν αναφερόμαστε σε μικρές αποστάσεις, όλες οι γεωμετρίες είναι ισοδύναμες. Ωστόσο, στον αστρονομικό χώρο ή όταν ασχολούμαστε με προβλήματα σύγχρονης φυσικής, όπως οι θεωρίες της σχετικότητας ή της διάδοσης κυμάτων, οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες παρέχουν μια ακριβέστερη περιγραφή των φαινομένων που μελετάμε. Θα ήταν δυνατό να επιβεβαιώσουμε πως όλες οι γεωμετρίες προσαρμόζονται στην πραγματικότητα αλλά κάθε μία από αυτές έχει τον τομέα εφαρμογής της. Έτσι, κάθε γεωμετρία έχει τη θέση της στην έρευνα, αφού είναι η πιο κατάλληλη σε ορισμένους τομείς της γνώσης και άρα δεν μπορούμε να αποδώσουμε καθολικό χαρακτήρα σε καμία από αυτές. Όταν εκτελούμε μετρήσεις ή μετακινούμαστε στην επιφάνεια της σφαίρας, βρίσκουμε στον κόσμο της ελλειπτικής γεωμετρίας. Όταν ταξιδεύουμε με ταχύτητες που πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός, η γεωμετρία που πρέπει να εφαρμόσουμε στο χωροχρόνο είναι αυτή του **Minkowski**.

Αντίθετα, στην προσπάθεια μας να κατανοήσουμε την ανθρώπινη όραση θα χρειαστούμε τη βοήθεια της υπερβολικής γεωμετρίας. Η υπόθεση του Brentano, που πήρε αυτό το όνομα προς τιμήν του Γερμανού ψυχολόγου **Franz Brentano** (1838–1917), είναι πως οι άνθρωποι τείνουν να υπερτιμούν τις μικρές γωνίες και να υποτιμούν τις μεγάλες.

Η υπόθεση αυτή αποδείχτηκε εμπειρικά. Σε αυτό προστίθεται το γεγονός πως η πλειονότητα των οπτικών ψευδαισθήσεων και τα κλασσικά πειράματα αντίληψης οδηγούν στο συμπέρασμα πως ο χώρος που αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος, είναι υπερβολικός. Το ζήτημα της γνώσης του ποια είναι τελικά η πραγματική γεωμετρία θα ήταν επομένως όχι μόνο γελοίο αλλά και αδύνατο πριν από τον 19^ο αιώνα, γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρό πνευματικό αντίκτυπο που είχε η ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών και της θεωρίας της σχετικότητας.

Δε χωρά αμφιβολία πως οι νέες γεωμετρίες αποτελούν τη βάση των σημαντικότερων επιστημονικών θεωριών των τελευταίων ετών, καθώς αυτές αναδιαμόρφωσαν την ανθρώπινη αντίληψη για τον κόσμο. Όχι μόνο η σχετικότητα, αλλά και η ίδια η μελέτη του ατομικού πυρήνα χρησιμοποιούν τους καινοτόμους τύπους και τις πρωτοποριακές έννοιές τους. Σε κάθε περίπτωση, όλα αυτά δε σημαίνουν πως πρέπει να εγκαταλείψουμε την ευκλείδεια γεωμετρία σαν μια άχρηστη ανάμνηση του παρελθόντος. Η ευκλείδεια γεωμετρία παραμένει παρούσα καθημερινά και εξακολουθεί να επιλύει θεμελιώδη προβλήματα. Για να αλλάξουμε θέση στα έπιπλα της τραπεζαρίας, δε χρειάζεται να κάνουμε υπολογισμούς υπερβολικής γεωμετρίας, εκτός αν έχουμε τοποθετήσει την τραπεζαρία πάνω σε μια ψευδόσφαιρα.

Ευκλείδεια γεωμετρία	Σφαιρική γεωμετρία
Μία ευθεία γραμμή είναι ο πιο σύντομος δρόμος ανάμεσα σε δύο σημεία.	Μια γεωδαιτική είναι ο πιο σύντομος δρόμος ανάμεσα σε δύο σημεία.
Οι ευθείες είναι άπειρες. Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων δεν έχει όριο.	Μια γεωδαιτική έχει μέγιστο πεπερασμένο μήκος $2R$. Η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι πR .
Υπάρχει μόνο μία και μοναδική ευθεία που συνδέει δύο σημεία.	Η γεωδαιτική είναι μοναδική μόνο όταν τα δύο σημεία δεν είναι αντιδιαμετρικά, σε αντίθετη περίπτωση υπάρχουν άπειρες.
Υπάρχουν ευθείες που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και λέγονται παράλληλες.	Οι ευθείες είναι οι μέγιστοι κύκλοι και τέμνονται πάντα. Δεν υπάρχει παραλληλότητα με την ευκλείδεια έννοια.
Δύο κάθετες ευθείες ορίζουν 4 ορθές γωνίες.	Δύο κάθετες γεωδαιτικές δημιουργούν 8 ορθές γωνίες.
Ένα τρίγωνο περιλαμβάνει το πολύ μία ορθή γωνία.	Ένα σφαιρικό τρίγωνο μπορεί να περιλαμβάνει 0, 1, 2 και μέχρι 3 ορθές γωνίες.

31. Γεωμετρία της υδρογείου σφαίρας

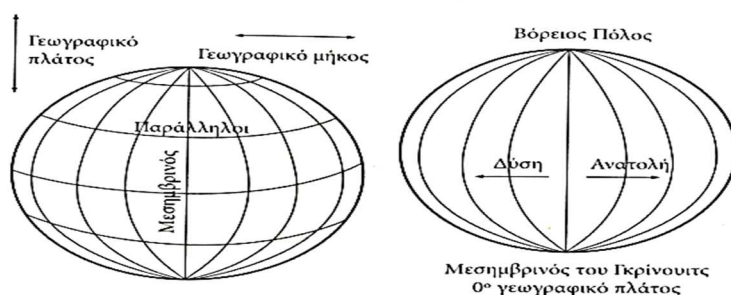
Αναφορικά με τη γεωμετρία του πλανήτη Γη, δύο προβλήματα που θεωρούνται κλασσικά προτάθηκαν από τον μαθηματικό και εκπαιδευτικό **George Polya** (1887–1985). Το 1^ο από αυτά συχνά εκλαμβάνεται ως αστείο, πρόκειται όμως για κρυφό χρυσωρυχείο μαθηματικής γνώσης. Αφορά το πρόβλημα της πολικής αρκούδας. «Ένας ατρόμητος κυνηγός βγαίνει από τον καταυλισμό του και περπατά 1km προς νότια. Στη συνέχεια γυρίζει και περπατά 1km προς ανατολικά. Εκεί, βλέπει μια αρκούδα, βγάζει το όπλο του και τη σκοτώνει. Ικανοποιημένος, στρέφεται προς βορρά και αφού διανύει ακριβώς 1km, ξαναβρίσκεται στο σημείο εκκίνησης στον καταυλισμό. Τι χρώμα είχε η αρκούδα;» Η πορεία του κυνηγού διαγράφει ένα τόξο μεσημβρινού όταν μετακινείται προς νότο ή προς βορρά και ένα τόξο παραλλήλου (παράλληλου προς τον ισημερινό) όταν μετακινείται ανατολικά. Αν ο κυνηγός επιστρέψει στο σημείο εκκίνησής του ακολουθώντας ένα μεσημβρινό διαφορετικό από αυτόν που ακολούθησε ξεκινώντας, το σημείο εκκίνησής του είναι υποχρεωτικά ο Βορράς. Διαφορετικά, αν διένυε έναν ολόκληρο παράλληλο, ή δύο ή τρεις, θα μετακινούνταν προς ένα σημείο κοντά στο Νότιο Πόλο. Σε κάθε περίπτωση, η απάντηση είναι πως η αρκούδα ήταν λευκή, σε απόσταση 1km από το Βόρειο Πόλο, δε θα μπορούσε να είναι κάτι άλλο.

Το 2^ο πρόβλημα του Polya είναι λιγότερο γνωστό, αλλά εξίσου ενδιαφέρον. Πρόκειται για το πρόβλημα του Ρομπέρτο. «Ο Ρομπέρτο ψάχνει ένα οικόπεδο τελείως οριζόντιο, οριοθετούμενο από 4 πολύ συγκεκριμένες ευθείες γραμμές: οι 2 από αυτές θα πρέπει να έχουν κατεύθυνση βορρά-νότο και οι άλλες 2, ανατολή-δύση. Κάθε μία θα πρέπει να έχει μήκος 1.000 m ακριβώς. Μπορεί ο Ρομπέρτο να βρει ένα τέτοιο οικόπεδο στο Μεξικό;» Ο συλλογισμός που πρέπει να κάνουμε είναι ίδιος με αυτόν του προηγούμενου παραδείγματος. Το οικόπεδο που ψάχνει ο Ρομπέρτο οριοθετείται από δύο μεσημβρινούς και δύο παραλλήλους. Ας φανταστούμε δύο σταθερούς μεσημβρινούς και έναν παράλληλο που απομακρύνεται από τον ισημερινό, το τόξο αυτού του κινητού παραλλήλου, που τέμνεται από τους δύο σταθερούς μεσημβρινούς μειώνεται σημαντικά. Το κέντρο ενός οικοπέδου με αυτά τα χαρακτηριστικά μπορεί να βρίσκεται μόνο στον ισημερινό. Ρίχνοντας όμως μια ματιά σε έναν άτλαντα, θα δούμε πως οι απαιτήσεις του Ρομπέρτο δε μπορούν να ικανοποιηθούν στο Μεξικό.



32. Παράλληλοι και μεσημβρινοί

Από την εποχή του Πυθαγόρα μέχρι του GPS (Global Positioning System), υπάρχει ένα σύστημα που στηρίζεται στις έννοιες του γεωγραφικού μήκους και γεωγραφικού πλάτους, το οποίο επιτρέπει τον κατά προσέγγιση εντοπισμό στην επιφάνεια της Γης (ή οποιασδήποτε άλλης σφαίρας). Οι μέγιστοι κύκλοι που περνάν από τους Πόλους ονομάζονται μεσημβρινοί και οι κάθετες σε αυτούς γραμμές παράλληλοι.



Η Γη μοιάζει με ένα πορτοκάλι, όπου οι μεσημβρινοί είναι τα όρια ανάμεσα στα κομμάτια του και τα σημεία όπου διασταυρώνονται ο Βόρειος και ο Νότιος Πόλος. Από όλους τους παραλλήλους, αυτός που αντιστοιχεί στο μέγιστο κύκλο είναι ο ισημερινός και διαιρεί την υδρόγειο σφαίρα σε δύο ίσα μέρη. Ονομάζουμε 1° μεσημβρινό ή γεωγραφικό μήκος μηδέν τον μεσημβρινό που περνά από την αγγλική κοινότητα του Γκρίνουιτς.

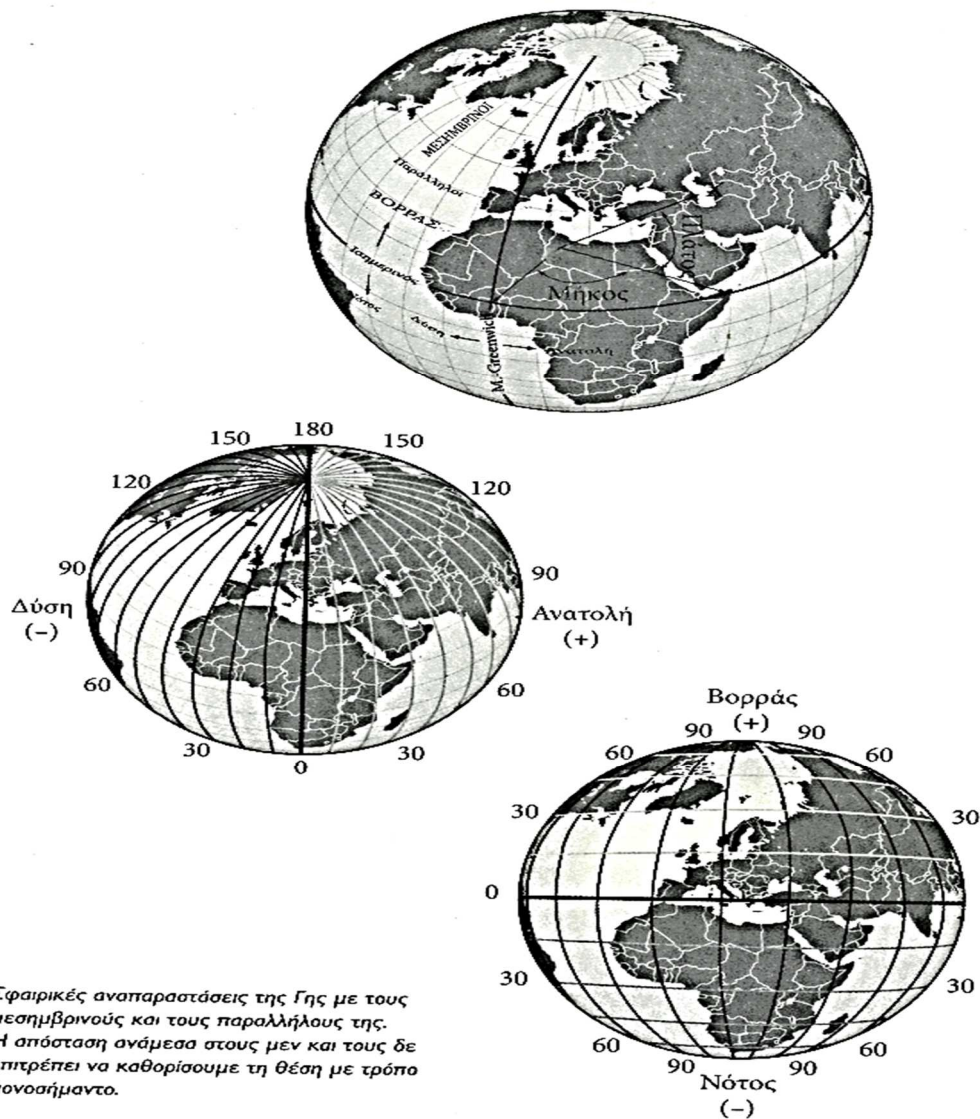


Το πλάτος είναι η απόσταση προς Βορρά, δηλαδή προς το επάνω μέρος της σφαίρας, ή προς Νότο, προς το κάτω μέρος της σφαίρας και μετριέται σε γωνιακές

μοίρες. Το μήκος είναι η απόσταση προς την Ανατολή, δηλαδή προς τα δεξιά της σφαίρας, ή προ της Δύσης, δηλαδή προς τα αριστερά της σφαίρας και μετριέται σε γωνιακές μοίρες με αφετηρία τον 1° μεσημβρινό ή μεσημβρινό του Γκρίνουιτς.

Όλα τα σημεία ενός δεδομένου παραλλήλου έχουν το ίδιο πλάτος και όλα τα σημεία ενός δεδομένου μεσημβρινού το ίδιο μήκος. Το 1° ζήτημα που τίθεται βάσει αυτών των πληροφοριών είναι προφανές. Αν σκοπός του συστήματος αυτού είναι ο εντοπισμός των σημείων και ο προσανατολισμός πάνω στην επιφάνεια της Γης, γιατί μετράμε το μήκος και το πλάτος σε μοίρες και όχι σε χιλιόμετρα; Αρχικά, ας επισημάνουμε πως η επιφάνεια πάνω στην οποία τα υπολογίζουμε είναι μια σφαίρα. Για να καθορίσουμε τη θέση ενός σημείου πάνω στη σφαίρα, χρειαζόμαστε μόνο 2 συντεταγμένες, εφόσον η σφαίρα ως δισδιάστατη επιφάνεια δεν έχει τρίτη διάσταση.

Αυτό το σημείο χρειάζεται μία λεπτομερέστερη εξήγηση. Ας πάρουμε έναν κύκλο που χωρίζεται σε 360° . Αν χαράξουμε δύο κάθετες που περνάνε από το κέντρο του, έχουμε τέσσερα χωρία (τεταρτημόρια) των 90° τους κυκλικούς τομείς.



Μπορούμε να κατασκευάσουμε νέους πιο μικρούς τομείς χαράσσοντας περισσότερες ευθείες που περνούν από το κέντρο. Οι τομείς αυτοί χαρακτηρίζονται από το γωνιακό τους μέτρο, το οποίο μπορούμε να αναθέσουμε σε κάθε σημείου του κύκλου. Ας αναπαραστήσουμε τώρα μια σφαίρα, στη θέση αυτού του κύκλου.

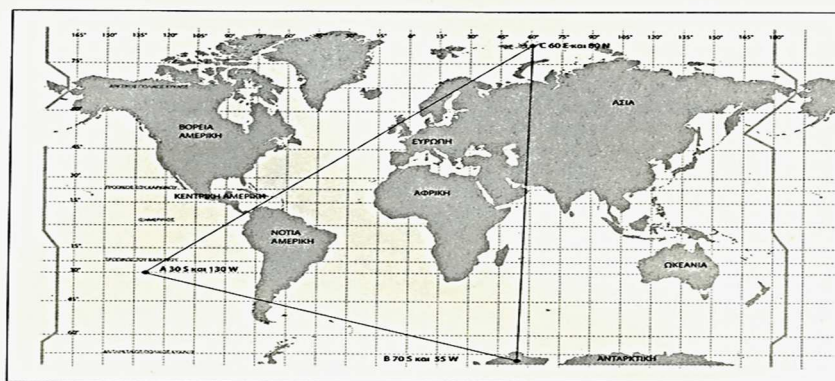
Αν διαιρέσουμε τη σφαίρα σε δύο μέρη, από τον έναν πόλο στον άλλον, μπορούμε να δουλέψουμε με γωνίες ακολουθώντας την προηγούμενη ιδέα και συνεπώς, να καθορίσουμε τη θέση ενός σημείου υποδεικνύοντας δύο γωνιακές τιμές, το γεωγραφικό του μήκος και πλάτος. Μετράμε τις γωνίες προς ανατολικά (δεξιά) ξεκινώντας από τον μεσημβρινό 0° και προς δυτικά (αριστερά) μέχρι να συναντήσουμε τον αντιμεσημβρινό, δηλαδή αυτόν που είναι διαμετρικά αντίθετος με τον πρώτο. Το μήκος μετριέται επομένως μέχρι τις 180° , το μισό δηλαδή των 360° , ή αλλιώς $90^\circ + 90^\circ$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τον ισημερινό και τον μεσημβρινό του Γκρίνουιτς ως άξονες συντεταγμένων. Όσο για το πλάτος, περιλαμβάνεται πάντα μεταξύ 0° και 90° , και πάντα προς Βορρά ή προς Νότο.

Γεωμετρικές ζώνες της Γης. Θα μπορούσαμε να τεμαχίσουμε τη Γη σε αμέτρητες φέτες, ορισμένου αριθμού μοιρών η κάθε μία. Δίνουμε ένα όνομα σε ορισμένες από αυτές επειδή χρησιμοποιούνται για σκοπούς εντοπισμού. Είναι οι περίφημοι Πολικοί Κύκλοι, οι θερμοί τροπικοί και ο ισημερινός.

Δύο άκρα στον κόσμο. Οι πόλεις της Νέας Υόρκης και του Σύδνεϋ δε βρίσκονται ακριβώς στον αντίποδα η μία της άλλης, δηλαδή δεν είναι αντιδιαμετρικές ως προς την επιφάνεια του πλανήτη, είναι όμως βέβαιο πως η μεταξύ τους απόσταση είναι πολύ μεγάλη. Οι συντεταγμένες τους σε πλάτος και μήκος, όσο ακριβείς κι αν είναι, δεν μπορούν να αποδώσουν αυτή τη λεπτομέρεια.

Χώρα	Πόλη	Πλάτος	Μήκος
Ηνωμένες Πολιτείες	Νέα Υόρκη	40,47 N	73,58 W
Αυστραλία	Σύδνεϋ	33,13 S	151,42 E

3 σημεία διαφορετικού πλάτους και μήκους σε διαφορετικές προβολές πάνω στην υδρόγειο σφαίρα. Αν τα συνδέσουμε σε επίπεδη προβολή, έχουμε ένα συμβατικό τρίγωνο, το οποίο σε σφαιρική προβολή, θα είναι ένα σφαιρικό τρίγωνο.



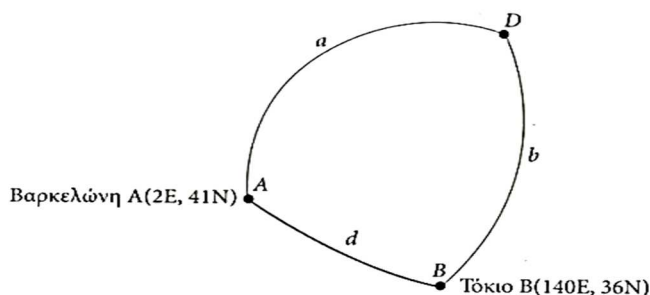
33. Από το χάρτη των 2 ημισφαιρίων στο Google Earth

Η κλασσική υδρόγειος σφαίρα που βλέπουμε στις αίθουσες διδασκαλίας είναι μια σφαίρα που συνίσταται σε ένα πλέγμα του οποίου τα κομμάτια αντιστοιχούν στους μεσημβρινούς και στους παράλληλους του πλανήτη μας. Σε ορισμένα σχολεία, συναντάμε κάποιες φορές τον επίπεδο χάρτη των δύο ημισφαιρίων, με τις υποδιαιρέσεις που θυμίζουν καρτεσιανό επίπεδο. Αυτές του επάνω αριστερού τμήματος του χάρτη ορίζουν το δυτικό μήκος και αυτές του δεξιού, το ανατολικό.

Ομοίως, οι πλευρικές διαιρέσεις υποδεικνύουν το βόρειο πλάτος στην άνω ζώνη ή το νότιο πλάτος στο κάτω τμήμα. Οι εικόνες δείχνουν δύο εκδοχές παγκόσμιων χαρτών. Στην πρώτη, οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι είναι ευθείες, ενώ στη δεύτερη έχουν σχεδιαστεί με καμπυλότητα.

34. Ποια είναι η πιο σύντομη απόσταση ανάμεσα στη Βαρκελώνη και το Τόκιο;

Χρησιμοποιώντας έναν έντυπο παγκόσμιο χάρτη, βλέπουμε πως η Βαρκελώνη βρίσκεται περίπου στις 2°E, 41°N, ενώ το Τόκιο στις 140°E, 36°N. Αν θεωρήσουμε το σφαιρικό τρίγωνο που ορίζεται από τις γωνίες A, B, D (που βρίσκεται στο Βόρειο Πόλο) και αν A η θέση της Βαρκελώνης και B του Τόκιο, μπορούμε να σχεδιάσουμε το εξής σχήμα:



Έστω d η πλευρά που αντιστοιχεί στη γεωδαιτική που συνδέει Βαρκελώνη με Τόκιο. Η τιμή του d είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων. Για να την υπολογίσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του συνημίτονου για τα σφαιρικά τρίγωνα $\cos d = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos D$.

Βλέπουμε πως για να υπολογίσουμε την d, μας λείπουν οι τιμές a, b και αυτή της γωνίας D. Για να υπολογίσουμε το μήκος μιας πλευράς ενός σφαιρικού τριγώνου, θεωρούμε τον ισημερινό ως άξονα των τετμημένων ενός καρτεσιανού επιπέδου και αφαιρούμε 90° από το πλάτος σε μοίρες από το θεωρούμε σημείο. Στην περίπτωση της γωνίας D, θα κάνουμε το ίδιο λαμβάνοντας αυτή τη φορά το μεσημβρινό του Γκρίνουιτς ως άξονα των συντεταγμένων

$$a = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

$$b = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

$$D = 140^\circ - 2^\circ = 138^\circ$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον τύπο των συνημίτονων και χρησιμοποιώντας απλή αριθμομηχανή, έχουμε

$$\begin{aligned} \cos(d) &= \cos(49^\circ) \cdot \cos(54^\circ) + \sin(49^\circ) \cdot \sin(54^\circ) \cdot \cos(138^\circ) = \\ &= 0,656059029 \cdot 0,5877852523 + 0,7547095802 \cdot 0,809016944 \cdot (-0,7431448255) = \\ &= -0,06812225162 \end{aligned}$$

Εδώ, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πλήκτρο $\cos^{-1}$ της αριθμομηχανής για να βρούμε πως η απόσταση d θα ήταν 93,90614266°. Θα ήταν ακόμα πιο χρήσιμο να

γνωρίζουμε την απόσταση αυτή σε χιλιόμετρα. Μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος ενός μέγιστου κύκλου της υδρόγειου σφαίρας λαμβάνοντας ως τιμή της ακτίνας της Γης τα 6.350 km και εφαρμόζοντας τον τύπο

$$2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot 6.350 = 39.898,23 \text{ km}$$

Έχουμε έτσι 39 898,23 km που αντιστοιχούν σε μία πλήρη περιφέρεια (360°). Το ερώτημα που τίθεται τότε είναι το εξής: σε πόσα χιλιόμετρα αντιστοιχεί μία γωνία 93,90614266°; Έστω x η ζητούμενη τιμή, μια απλή μέθοδος των τριών θα μας δώσει το αποτέλεσμα

$$\frac{360}{39.898,23} = \frac{93,90614266}{x}$$

Που για x, δίνει το αποτέλεσμα: $x = 10.407,11878 \text{ km}$

Αρχική σελίδα του προγράμματος GoogleEarth, ένας απλός τρόπος για να τα «ταξιδένουμε» σε ολόκληρο τον πλανήτη και εξαιρετικό εργαλείο υπολογισμού της απόστασης ανάμεσα σε δύο σημεία της υδρόγειου σφαίρας.



Συνεπώς, η απόσταση ανάμεσα στη Βαρκελώνη και το Τόκιο είναι περίπου 10.344 km. Το πιο εντυπωσιακό είναι πως μπορούμε να έχουμε αυτό το αποτέλεσμα ρίχνοντας απλώς μια ματιά στο χάρτη. Η σύγχρονη τεχνολογία επιτρέπει να υπολογίσουμε τις αποστάσεις αυτές με μεγάλη ακρίβεια. Εξειδικευμένα προγράμματα, όπως το Google Earth, κάνουν τους υπολογισμούς αυτούς με ταχύτητα και ακρίβεια. Το προαναφερθέν πρόγραμμα για παράδειγμα δίνει 10.422,62 km. για την ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε Βαρκελώνη και Τόκιο. Προξενεί εντύπωση το γεγονός πως οι υπολογισμοί που γίνονται με έναν πίνακα δε διαφέρουν πολύ από αυτούς που εκτελούνται από ένα εξειδικευμένο λογισμικό.

Ο υπολογισμός του Google Earth εμφανίζει διαφορά μόνο 98 km. Τα προγράμματα όμως αυτά επιτρέπουν τον υπολογισμό αποστάσεων από πολύ πιο συγκεκριμένα σημεία, όπως για παράδειγμα τον ακριβή αριθμό μιας οδού. Ένα τέτοιο επίπεδο ακρίβειας είναι αδύνατο χρησιμοποιώντας έναν παραδοσιακό έντυπο παγκόσμιο χάρτη. Πράγματι, η χρήση του υπολογιστή σε ειδικούς τομείς της γεωμετρίας δημιούργησε ένα νέο επιστημονικό κλάδο που ονομάζεται **αλγοριθμική γεωμετρία**. Τέλος, δε μπορούμε να ολοκληρώσουμε αυτό το ταξίδι μας στη γεωμετρία της υδρόγειου σφαίρας χωρίς να αναφερθούμε στην πιο κλασσική αλληγορία της, την οποία παρουσίασε ο Πλάτωνας στο διάλογό του με τίτλο **Τίμαιος ή Περί φύσεως**.

«Για αυτόν λοιπόν το λόγο ο δημιουργός οικοδόμησε τον κόσμο με τέτοιο τρόπο ώστε να αποτελεί ενιαίο σύνολο με όλα τα στοιχεία που υπάρχουν και να είναι τέλειος και αγέραστος και άτρωτος από ασθένειες. Όσο για το σχήμα του καταλληλότερο ήταν το σχήμα που μπορούσε να περιλάβει όλα τα σχήματα που υπάρχουν. Έτσι τον έκανε κυκλικό και σφαιρικό με το κέντρο του σε ίση απόσταση απ' όλα τα σημεία της περιφέρειάς του, ένα σχήμα δηλαδή που είναι τελειότερο από όλα τα άλλα και

*περισσότερο όμοιο με τον εαυτό του, πιστεύοντας ότι το όμοιο είναι απείρως
ωραιότερο από το ανόμοιο.»*