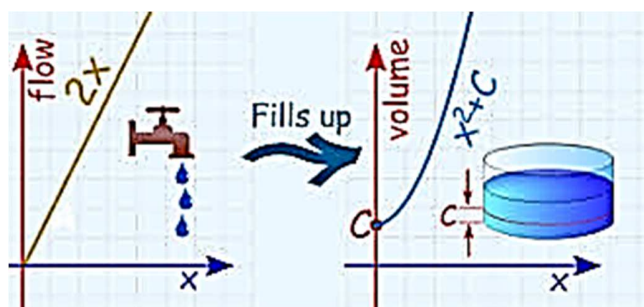




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπρούργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία

Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων



Σπουδαστής: Ζυγρίδης Βασίλειος Παρασκευάς (AM 7799)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2020–2021

Ημερομηνία ανάθεσης: 03.12.2019

Ημερομηνία κατάθεσης:09.2020

Ημερομηνία εξέτασης:09.2020

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Ιδιαίτερα ικανοποιητική	
2	Φραγκιαδάκης Νικόλαος Δρ. Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Αναπληρωτής Καθηγητής		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Ιστορική αναδρομή	4
2. Υπολογισμός εμβαδού παραβολικού χωρίου.....	5
3. Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων.....	6
3.1 Εμβαδόν επιπέδου χωρίου.....	6
3.1.1 Περίπτωση 1	6
3.1.2 Περίπτωση 2	7
3.1.3 Περίπτωση 3	7
3.1.4 Περίπτωση 4	9
3.2 Εμβαδόν σε καρτεσιανές συντεταγμένες	12
3.2.1 Παρατηρήσεις.....	13
3.3 Εμβαδόν σε πόλικες συντεταγμένες.....	14
3.4 Εφαρμογές.....	15
3.5 Όγκοι στερεών.....	19
3.5.1 Όγκος στερεού με γνωστές κάθετες τομές προς ένα άξονα	19
3.5.2 Όγκος στερεού	20
3.5.3 Όγκος κυλίνδρου και πρίσματος	21
3.5.4 Όγκος κώνου και πυραμίδας	22
3.5.5 Όγκος στερεών εκ περιστροφής	23
3.5.6 Όγκος σφαίρας.....	24
3.5.7 Εφαρμογές	25
3.6 Μήκος τόξου επίπεδης καμπύλης	30
3.6.1 Μήκος τόξου σε καρτεσιανές συντεταγμένες	30
3.7 Εμβαδόν επιφάνειας στερεού εκ περιστροφής.....	30
3.7.1 Σε καρτεσιανές συντεταγμένες.....	30
3.7.2 Σε παραμετρικές εξισώσεις	34
3.7.3 Σε πολικές συντεταγμένες	34
3.7.4 Εφαρμογές	34
3.8 Ειδικές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων.....	36
3.8.1 Καρτεσιανά εμβαδά.....	36
3.8.2 Πολικά εμβαδά	42
3.8.3 Παρατηρήσεις.....	43
3.8.4 Παραμετρικά εμβαδά.....	44
3.8.5 Παρατηρήσεις.....	45

1. Ιστορική αναδρομή

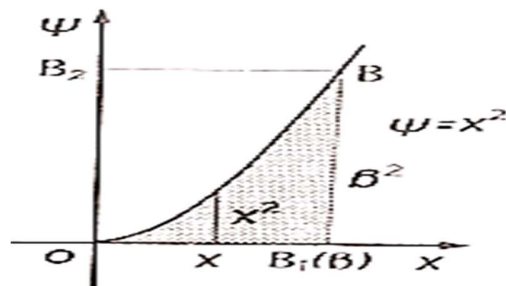
Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, για να φτάσει στη σημερινή της μορφή, πέρασε δια μέσου των αιώνων απο διάφορα εξελικτικά και βελτιωτικά στάδια. Μπορούμε, συνοπτικά, να πούμε ότι η γέννηση της έννοιας του ολοκληρώματος τοποθετείται τον 3^ο πΧ αιώνα και οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και ειδικότερα στον Αρχιμήδη (287–212 πΧ).

Η μέθοδος της «εξάντλησης» που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, για να προσδιορίσουν τον αριθμό που μετρά το εμβαδό μιας επίπεδης περιοχής, είναι ο πρόδρομος της ολοκλήρωσης. Την μέθοδο αυτή εφάρμοσε ο Αρχιμήδης για να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου, το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου και το εμβαδόν άλλων επιπέδων χωρίων, περισσότερο πολύπλοκων. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, για τον υπολογισμό μιας επίπεδης περιοχής, εγγράφουμε μέσα σε αυτήν μια πολυγωνική κλειστή γραμμή, που περικλείει επίπεδο χωρίο του οποίου μπορούμε εύκολα να υπολογίζουμε το εμβαδόν. Έτσι έχουμε μια πρώτη «με έλλειψη» προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Συνεχίζουμε όμοια, με την εγγραφή μιας δεύτερης πολυγωνικής κλειστής γραμμής που έχει πλευρές περισσότερες και μικρότερες, ώστε να έχουμε μια καλύτερη «με έλλειψη» προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού.

Η εργασία αυτή συνεχίζεται, με σκοπό να «εξαντλήσουμε» την επίπεδη περιοχή που ζητάμε το εμβαδόν της. Ο Αρχιμήδης, για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου, θεώρησε αρχικά εγγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο και είχε μια πρώτη προσέγγιση, μετά κανονικό δωδεκάγωνο κ.ο.κ. για να καταλήξει στο θεώρημα «Πας κύκλος ίσος εστί τριγώνω ορθογώνιω ου ή μεν εκ του κέντρου ίση μια των περί την ορθήν, ή δε περίμετρος τη βάσει».

Για το παραβολικό χωρίο OB, BO ο Αρχιμήδης με την μέθοδο της «εξάντλησης», απέδειξε το καταπληκτικό για την εποχή εκείνη ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το ένα τρίτο του εμβαδού που έχει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο OB_1BB_2 που η βάση του είναι β και το ύψος

$$\text{του είναι } \beta^2 \text{ δηλαδή } (OB, BO) = \frac{1}{3} \cdot \beta \cdot \beta^2 = \frac{\beta^3}{3}$$



Η μέθοδος της «εξάντλησης», που έδωσε τόσο σπουδαία αποτελέσματα την εποχή του Αρχιμήδη, παρέμεινε σχεδόν στο ίδιο σημείο ανάπτυξης απο τις αρχές του 16^{ου} αιώνα. Από την περίοδο αυτή και μετά, οι ερευνητές μαθηματικοί της εποχής, έχοντας στη διάθεση τους νέα εκφραστικά μέσα (π.χ. ένα γεωμετρικό πρόβλημα μετατρέπεται σε αλγεβρικό και αντίστροφα με την εισαγωγή απο τον Cartesius των συντεταγμένων), αλλά και νέα συμβολα (π.χ. έχει γίνει αντικατάσταση των ρωμαϊκών αριθμητικών συμβόλων με τα αριθμητικά που χρησιμοποιούμε και σήμερα), προχώρησαν στην αναδιατύπωση της παλιάς μεθόδου και στην προσαρμογή αυτής στα νέα δεδομένα. Έτσι, η μέθοδος της «εξάντλησης» άρχισε να μετασχηματίζεται σε αυτό που ονομάζουμε σήμερα ολοκληρωτικό λογισμό, έναν ξεχωριστό κλάδο της μαθηματικής επιστήμης, με τον οποίο μπορούμε να αντιμετωπίζουμε όχι μόνο γεωμετρικά προβλήματα εύρεσης εμβαδών, όγκων κτλ αλλά και να λύνουμε ποικίλα προβλήματα άλλων επιστημών. Η αυστηρή

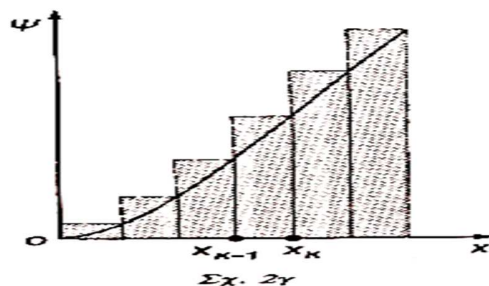
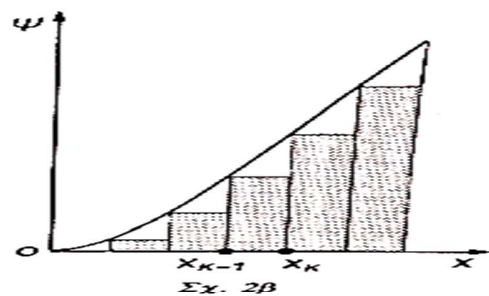
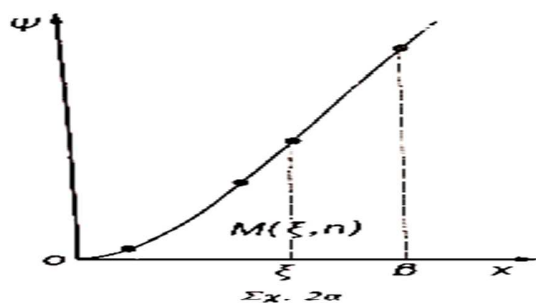
θεμελίωση της έννοιας του ολοκληρώματος έγινε κατά τα μέσα του προπερασμένου αιώνα από τους μεγάλους μαθηματικούς Cauchy(1789–1857) και Riemann(1826–1866). Έκτοτε, οι ερευνητές μαθηματικοί, οι σπουδαιότεροι εκ των οποίων είναι οι Stieltzes, Lebesgue ασχολήθηκαν με επεκτάσεις και γενικεύσεις της θεωρίας της ολοκλήρωσης.

2. Υπολογισμός εμβαδού παραβολικού χωρίου

Είναι χρήσιμο, πριν ορίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα και υπολογίσουμε το εμβαδό του επιπέδου χωρίου με βάση αυτό, να προσέξουμε μια διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού του παραβολικού χωρίου, όπου διατηρούμε πολλά αρχικά χαρακτηριστικά της μεθόδου του Αρχιμήδη, παρά το ότι οι λεπτομέρειες στους συλλογισμούς δεν είναι ακριβώς οι ίδιες.

Ας θεωρήσω το επίπεδο παραβολικό χωρίο που ορίζουν τα σημεία $M(\xi, \eta)$ με $0 \leq \xi \leq \beta$ και $0 \leq \eta \leq \xi^2$ δηλαδή το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$ τον άξονα xx' και την ευθεία $x = \beta$ με $\beta > 0$. Αν χωρίσω το διάστημα $[0, \beta]$ σε ν ίσα υποδιαστήματα με τα διαιρετικά σημεία $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_{\nu-1}, x_\nu = \beta$, το πλάτος κάθε υποδιαστήματος θα είναι $\frac{\beta}{\nu}$, άρα τα διαιρετικά σημεία αντιστοιχούν στις τιμές

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{\beta}{\nu}, x_2 = \frac{2\beta}{\nu}, \dots, x_{k-1} = \frac{(k-1)\beta}{\nu}, x_k = \frac{k\beta}{\nu}, \dots, x_\nu = \frac{\nu\beta}{\nu} = \beta.$$



Θεωρώ τα ορθογώνια που έχουν βάση τα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, \nu$ και ύψος το $y_{k-1} = x_{k-1}^2$, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.β) και έτσι έχουμε μια προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού «με έλλειψη». Όμοια, θεωρούμε τα ορθογώνια που έχουν ως βάση τα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος το $y_k = x_k^2$, $k = 1, 2, \dots, \nu$ όπως φαίνεται στο σχήμα (2.γ), και έτσι έχουμε προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού «με υπεροχή».

Αν αυξήσουμε το πλήθος των διαιρετικών σημείων, το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών ορθογωνίων σχ(2.β) αυξάνει παραμένοντας μικρότερο από το ζητούμενο εμβαδό του παραβολικού χωρίου, ενώ το άθροισμα των εμβαδών των εξωτερικών ορθογωνίων σχ(2.γ)

ελαττώνεται, παραμένοντας μεγαλύτερο από το ζητούμενο εμβαδό. Αν με E_k συμβολίσουμε το μέρος του παραβολικού χωρίου που περιορίζεται από τις $x = x_{k-1}$ και $x = x_k$ τότε το E_k θα είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του εσωτερικού ορθογωνίου με βάση το $x_k - x_{k-1} = \frac{\beta}{\nu}$ και ύψος

$y_{k-1} = x_{k-1}^2 = (k-1)^2 \frac{\beta^2}{\nu^2}$ και μικρότερο από το εμβαδό του εξωτερικού ορθογωνίου με βάση το

$x_k - x_{k-1} = \frac{\beta}{\nu}$ και το ύψος $y_k = x_k^2 = k^2 \frac{\beta^2}{\nu^2}$. Έτσι, αν $E = \sum_{k=1}^{\nu} E_k$ είναι το ζητούμενο εμβαδό, θα

έχουμε $\frac{\beta^3}{\nu^3} (k-1)^2 < E_k < \frac{\beta^3}{\nu^3} \cdot k^3$ για κάθε $k=1,2,\dots,\nu$. Οπότε $\sum_{k=1}^{\nu} \frac{\beta^3}{\nu^3} (k-1)^2 < \sum_{k=1}^{\nu} E_k < \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\beta^3}{\nu^3} k^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{\beta^3}{\nu^3} \sum_{k=1}^{\nu} (k-1)^2 < E < \frac{\beta^3}{\nu^3} \sum_{k=1}^{\nu} k^2 \Leftrightarrow \frac{\beta^3}{\nu^3} \cdot \frac{(\nu-1) \cdot \nu(2\nu-1)}{6} < E < \frac{\beta^3}{\nu^3} \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} \Leftrightarrow A_{\nu} < E < B_{\nu}$$

(1). Αν το πλήθος των διαιρετικών σημείων να αυξάνει απεριόριστα δηλαδή αν $\nu \rightarrow +\infty$, τότε το πλάτος d_{ν} , των υποδιαστημάτων τείνει στο μηδέν δηλαδή $d_{\nu} = \frac{\beta}{\nu} \rightarrow 0$ και

$$\lim A_{\nu} = \frac{\beta^3}{3}, \quad \lim B_{\nu} = \frac{\beta^3}{3} \quad \text{οπότε η (1) δίνει } E = \frac{\beta^3}{3}$$

3. Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

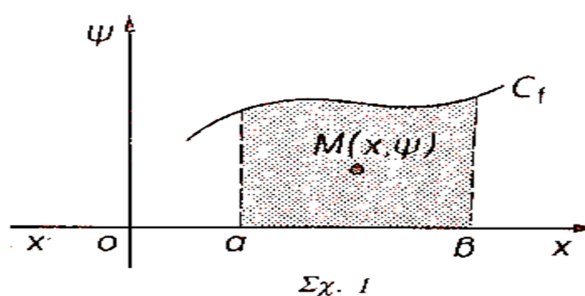
3.1 Εμβαδόν επιπέδου χωρίου

Για τον υπολογισμό εμβαδού επιπέδου χωρίου διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

3.1.1 Περίπτωση 1

Έστω ότι το επίπεδο χωρίο περικλείεται από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ ($a < \beta$), τον άξονα xx' και την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , όπου f συνεχής στο $[a, \beta]$ και

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, \beta].$$



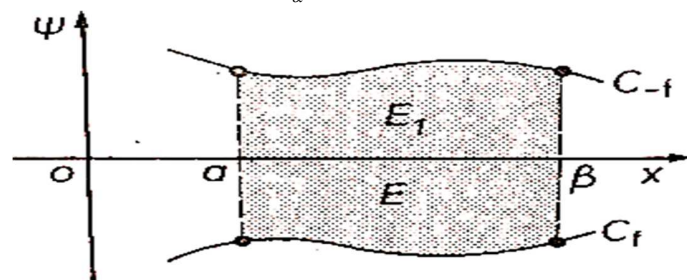
Τότε, το εμβαδόν E του επιπέδου αυτού χωρίου, από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος δίνεται από τον τύπο $E = \int_a^{\beta} f(x) dx$ (1). Το επίπεδο χωρίο του οποίου το

εμβαδό δίνεται απο τον τύπο (1) είναι το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ που οι συντεταγμένες τους (x, y) ικανοποιούν τις σχέσεις $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\} (\Sigma)$

3.1.2 Περίπτωση 2

Έστω ότι το επίπεδο χωρίο περικλείεται απο τις ευθείες $x = a, x = \beta$ ($\alpha < \beta$), τον άξονα xx' και τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , όπου f συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, \beta]$ σχήμα 2. Τότε το εμβαδόν E του επιπέδου αυτού χωρίου, από τον ορισμό

του ορισμένου ολοκληρώματος δίνεται απο τον τυπο $E = -\int_a^{\beta} f(x) dx$ (2).



Σχ. 2

Πράγματι, οι συναρτήσεις $f, -f$ έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα xx' έτσι το εμβαδό E_1 που περικλείεται από τις $x = a, x = \beta$ του άξονα xx' και την C_{-f} είναι ίσο με το εμβαδόν E που περικλείεται από τις $x = a, x = \beta$, τον άξονα xx' και την C_f . Αλλά $-f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \beta]$, άρα, από την 1^η περίπτωση, το εμβαδόν E_1 δίνεται με τον

τύπο $E_1 = \int_a^{\beta} -f(x) dx = -\int_a^{\beta} f(x) dx$ και επειδή $E = E_1$ έπεται ότι το εμβαδό E δίνεται με τον

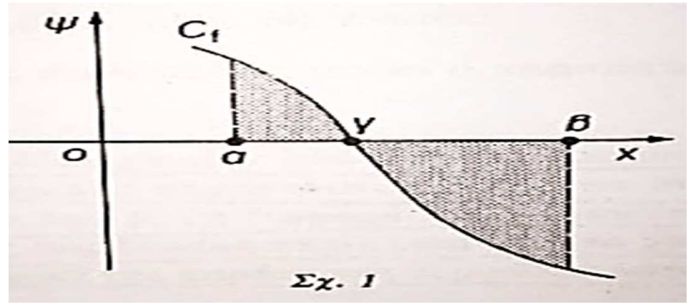
τύπο (2). Το επίπεδο χωρίο του οποίου το εμβαδόν E δίνεται απο τον τύπο (2) είναι το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ που οι συντεταγμένες τους (x, y) ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq x \leq \beta \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{array} \right\} (\Sigma)$$

3.1.3 Περίπτωση 3

Έστω ότι το επίπεδο χωρίο περικλείεται απο τις ευθείες $x = a, x = \beta$ ($\alpha < \beta$) τον άξονα xx' και την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , όπου f συνεχής στο $[a, \beta]$ και η f δε διατηρεί σταθερό πρόσημο $\forall x \in [a, \beta]$. Έστω ότι $\exists \gamma \in [a, \beta]$ όπου $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \gamma]$ και $f(x) \leq 0, \forall x \in [\gamma, \beta]$ σχήμα 1. Από την 1^η και 2^η περίπτωση, το εμβαδόν E του επιπέδου

χωρίου είναι $E = \int_a^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} -f(x) dx$ (3).



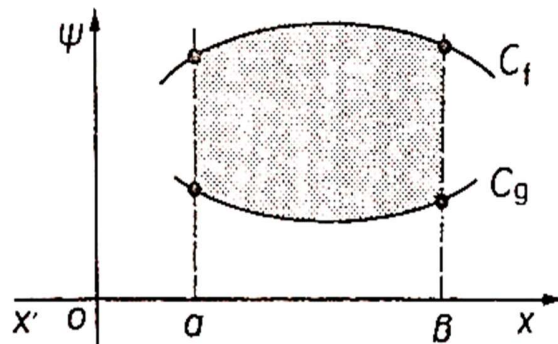
Σχ. 1

Αφού $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \gamma]$, είναι $|f(x)| = f(x)$ στο $[a, \gamma]$ και αφού $f(x) \leq 0, \forall x \in [\gamma, \beta]$ είναι $|f(x)| = -f(x)$ στο $[\gamma, \beta]$. Τότε, η (3) γράφεται $E = \int_a^\gamma |f(x)| dx + \int_\gamma^\beta |f(x)| dx$ ή $E = \int_a^\beta |f(x)| dx$. Το επίπεδο χωρίο του οποίου το εμβαδό E δίνεται από τον τύπο (3) είναι το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία $\left\{ \begin{matrix} a \leq x \leq \gamma \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{matrix} \right\}$ και $\left\{ \begin{matrix} \gamma \leq x \leq \beta \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{matrix} \right\}$

3.1.3.1 Παρατηρήσεις

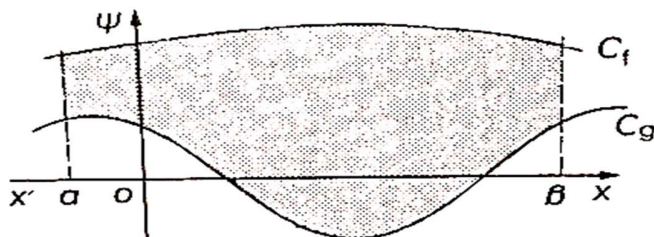
1. Αν στο $[a, \beta]$ η f είναι συνεχής και δε διατηρεί σταθερό πρόσημο, θα χωρίζω το $[a, \beta]$ σε υποδιαστήματα, σε κάθε ένα από τα οποία η f έχει το ίδιο πρόσημο και θα υπολογίζω τα επιμερούς εμβαδά όπως στις παραπάνω περιπτώσεις. Τα υποδιαστήματα στα οποία χωρίζεται το $[a, \beta]$ καθορίζονται από τις ρίζες που έχει η εξίσωση $f(x) = 0$ στο (a, β) .

2. Στην 3^η περίπτωση το εμβαδό δίνεται από τον τύπο $E = \int_a^\beta |f(x)| dx$. Αν $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \beta]$ είναι $E = \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\beta |f(x)| dx$ και αν $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, \beta]$ είναι $E = \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\beta |f(x)| dx$. Έτσι οι τύποι (1), (2), (3) ενοποιούνται σε έναν «Το εμβαδόν επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $x = a, x = \beta$ ($a < \beta$) τον άξονα xx' και τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ δίνεται από τον τύπο $\int_a^\beta |f(x)| dx$ ».



3.1.4 Περίπτωση 4

Έστω ότι το επίπεδο χωρίο περικλείεται από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ ($\alpha < \beta$) και τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g που είναι συνεχείς $[a, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, \beta]$. Το εμβαδόν E του επιπέδου χωρίου δίνεται από τον τύπο $E = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$ (4).



Η απόδειξη του (4) αν $f(x) \geq g(x) > 0$ είναι απλή. Πράγματι, αν E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των χωρίων που ορίζουν οι ευθείες $x = a$, $x = \beta$ ($\alpha < \beta$) ο άξονας xx' και οι καμπύλες C_f, C_g

αντίστοιχα, από την 1^η περίπτωση είναι $E_1 = \int_a^\beta f(x) dx$, $E_2 = \int_a^\beta g(x) dx$

Το ζητούμενο εμβαδόν E είναι $E = E_1 - E_2 = \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$.

Αν $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, \beta]$ με τη g να λαμβάνει αρνητικές τιμές ή και την f να λαμβάνει αρνητικές τιμές θεωρώ τις συναρτήσεις $f_1(x) = f(x) - \mu$ και $g_1(x) = g(x) - \mu$, όπου μ η ελάχιστη τιμή της g στο $[a, \beta]$.

Τότε $\forall x \in [a, \beta]$ είναι $f(x) \geq g(x) \geq \mu \Leftrightarrow f(x) - \mu \geq g(x) - \mu \geq 0 \Leftrightarrow f_1(x) \geq g_1(x) \geq 0$ και το ζητούμενο εμβαδό E είναι αυτό που περικλείεται από τις $x = a$, $x = \beta$ και τις C_{f_1}, C_{g_1} , με

$$f_1(x) \geq g_1(x) \geq 0 \text{ άρα } E = \int_a^\beta (f_1(x) - g_1(x)) dx = \int_a^\beta [f(x) - \mu - (g(x) - \mu)] dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$$

Ομοίως, αν $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, \beta]$ ο τύπος (4) γίνεται $E = \int_a^\beta (g(x) - f(x)) dx$

δηλαδή σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει ο παρακάτω πρακτικός κανόνας «Για να βρεθεί το εμβαδόν ενός επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ ($\alpha < \beta$) και τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g θα ολοκληρώσουμε από a έως β , τη διαφορά που προκύπτει αν από τη συνάρτηση που η γραφική της παράσταση περικλείει άνω το χωρίο, αφαιρέσουμε τη συνάρτηση που η γραφική της παράσταση περικλείει κάτω το χωρίο».

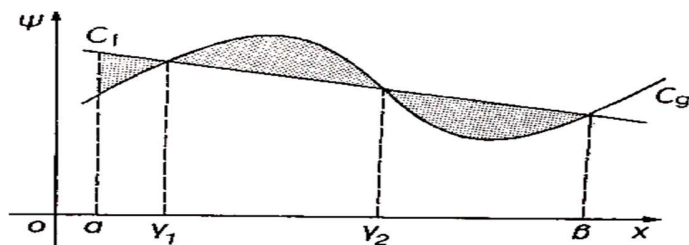
Με βάση αυτόν τον κανόνα, για την πρώτη περίπτωση όπου $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \beta]$ έχουμε ότι περικλείει άνω το χωρίο η C_f και κάτω ο άξονας xx' , άρα η C_g με $g(x) = 0, \forall x \in [a, \beta]$ οπότε $E = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx = \int_a^\beta f(x) dx$.

Στη δεύτερη περίπτωση όπου $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, \beta]$ έχουμε ότι άνω περικλείει το χωρίο ο άξονας xx' , άρα η C_g με $g(x) = 0, \forall x \in [a, \beta]$ και κάτω η C_f οπότε $E = \int_a^\beta (g(x) - f(x)) dx = \int_a^\beta -f(x) dx = -\int_a^\beta f(x) dx$

3.1.4.1 Παρατηρήσεις

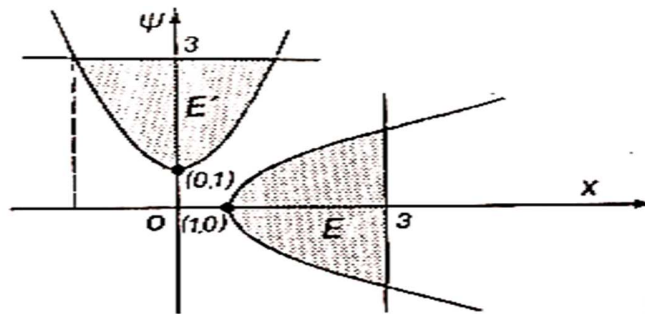
1. Το επίπεδο χωρίο του οποίου το εμβαδό E δίνεται από τον τύπο (4) είναι το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία $\begin{cases} a \leq x \leq \beta \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$

2. Αν στο διάστημα $[a, \beta]$ οι f, g είναι συνεχείς και η F με $F(x) = f(x) - g(x)$ δε διατηρεί πρόσημο στο $[a, \beta]$ τότε θα χωρίζουμε το $[a, \beta]$ σε υποδιαστήματα έτσι ώστε σε καθένα από αυτά να έχουμε $F(x) = f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$ ή $F(x) = f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ οπότε θα υπολογίσουμε τα επιμέρους εμβαδά όπως στην παραπάνω περίπτωση. Έτσι, για το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου στο (σχ.1) είναι $E = \int_a^{\gamma_1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} (g(x) - f(x)) dx + \int_{\gamma_2}^\beta (f(x) - g(x)) dx$



3. Πολλές φορές το εμβαδόν ενός επίπεδου χωρίου υπολογίζεται ευκολότερα αν στρέψουμε αυτό περί την αρχή των αξόνων κατά γωνία 90° . Τότε είναι γνωστό ότι αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο και $M'(x', y')$ η νέα θέση του μετά την στροφή κατά 90° θα είναι $x' = -y$ και $y' = x$. Έτσι, για τον υπολογισμό του εμβαδού E του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = x - 1$ και την ευθεία $x = 3$ παρατηρούμε ότι το χωρίο αυτό είναι το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ με $(1 \leq x \leq 3 \text{ και } -\sqrt{x-1} \leq y \leq \sqrt{x-1})$ οπότε

$$E = \int_1^3 \left(\sqrt{x-1} - (-\sqrt{x-1}) \right) dx = 2 \int_1^3 \sqrt{x-1} dx = 2 \int_1^3 (x-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$



Εξάλλου μπορούμε να στρέψουμε το χωρίο κατά 90° , οπότε στη νέα θέση θα έχει εμβαδό E' , όπου $E' = E$ και για να προσδιορίσουμε τις γραμμές που περικλείουν το E' θα θέσουμε στις $y^2 = x - 1$ και $x = 3$ που περικλείουν το αρχικό χωρίο $y = -x'$ και $x = y'$ οπότε $\{(-x')^2 = y' - 1 \text{ και } y' = 3\}$ ή $\{y' = (x')^2 + 1 \text{ και } y' = 3\}$ ή $\{y = x^2 + 1 \text{ και } y = 3\}$ δηλαδή το E' περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $y = x^2 + 1$ και $y = 3$, που προκύπτουν από τις αρχικές γραμμές που περικλείουν τον τόπο, αν θέσουμε όπου x το y και όπου y το $-x$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα κοινά σημεία των $y = x^2 + 1$ και $y = 3$ είναι τα $A(-\sqrt{2}, 3)$, $B(\sqrt{2}, 3)$ δηλαδή το χωρίο με εμβαδό E' είναι το σύνολο των σημείων $M'(x, y)$ με $(-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \text{ και } x^2 + 1 \leq y \leq 3)$ άρα

$$E = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (3 - (x^2 + 1)) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Αναφερόμαστε σε στροφή 90° διότι αν η στροφή γίνει κατά -90° είναι γνωστό ότι για τις συντεταγμένες (x'', y'') της νέας θέσης του $M(x, y)$ είναι $(x'' = y \text{ και } y'' = -x)$ ή $(y = x'' \text{ και } x = -y'')$ οπότε οι εξισώσεις των νέων γραμμών προκύπτουν από τις αρχικές γραμμές που περικλείουν τον τόπο αν θέσω όπου x το $-y$ και όπου y το x .

4. Για τον υπολογισμό του εμβαδού E του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = x - 1$ και την ευθεία $x = 3$ παρατηρούμε ότι το χωρίο περικλείεται δεξιά από τη $x = 3$ και αριστερά από την $x = y^2 + 1$ και τα κοινά σημεία αυτών είναι τα $A(3, -\sqrt{2})$, $B(3, \sqrt{2})$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι
$$E = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (3 - y^2 - 1) dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - y^2) dy = \left[2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

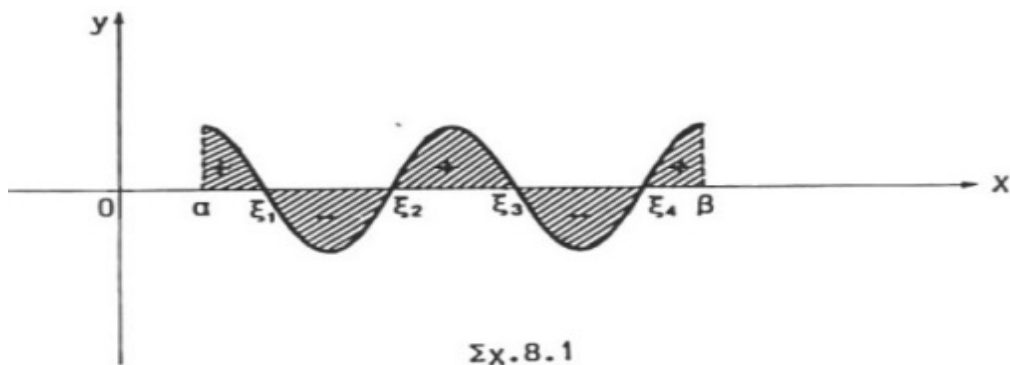
Γενικά, αν ένα χωρίο περικλείεται δεξιά από την $x = \varphi(y)$, αριστερά από την $x = \sigma(y)$ και τις ευθείες $y = \gamma$, $y = \delta$ με $\gamma < \delta$ το εμβαδό του δίνεται από τον τύπο

$$E = \int_{\gamma}^{\delta} (\varphi(y) - \sigma(y)) dy.$$

5. Άρα, το εμβαδόν E ενός επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δύο συναρτήσεων f, g που είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ δίνεται πάντα από τον τύπο $E = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$. Αν περικλείεται από τις ευθείες $y = \gamma$, $y = \delta$ ($\gamma < \delta$) και τις C_φ, C_σ με $x = \varphi(y)$, $x = \sigma(y)$ δίνεται από τον τύπο $E = \int_\gamma^\delta |\varphi(y) - \sigma(y)| dy$.

3.2 Εμβαδόν σε καρτεσιανές συντεταγμένες

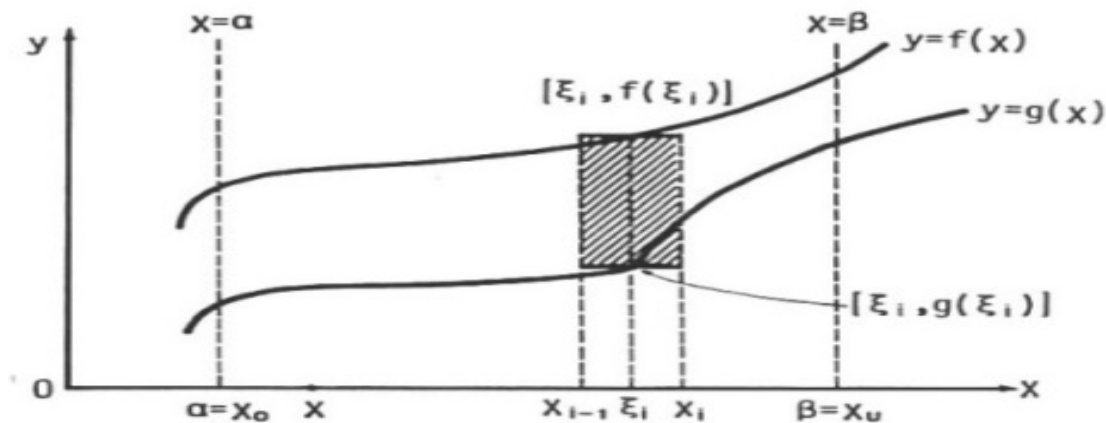
Αν μια συνάρτηση $f(x)/[a, \beta]$ είναι συνεχής με $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \beta]$ τότε το $\int_a^\beta f(x) dx$ ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από τη γραμμή $\Gamma: \{(x, f(x)): x \in [a, \beta]\}$ τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και τον xx' άξονα δηλαδή εξ ορισμού είναι $E = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^\beta f(x) dx$ (1).



Αν η $f(x)/[a, \beta]$ είναι συνεχής με $f(x) < 0, \forall x \in [a, \beta]$ τότε το $\int_a^\beta f(x) dx$ έχει αρνητική τιμή διότι όλα τα $f(\xi_i)$ είναι αρνητικά, άρα το επίπεδο χωρίο θα σχηματίζεται κάτω από τον xx' άξονα. Επειδή τα εμβαδά, όταν δεν τα θεωρούμε προσημασμένα, εκφράζονται με θετικούς αριθμούς, θέτουμε $E = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n -f(\xi_i) \Delta_i x \right) = - \int_a^\beta f(x) dx$ (2), άρα $- \int_a^\beta f(x) dx > 0$.

Αν η $f(x)/[a, \beta]$ είναι συνεχής, αλλά στο $[a, \beta]$ αλλάζει πρόσημο, δηλαδή υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος αριθμών π.χ. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in [a, \beta]$, όπου $f(\xi_k) = 0$ με $k=1,2,3,4$ (δηλαδή ρίζες της $f(x)=0$), άρα έχουμε ένα πεπερασμένο πλήθος προσήμων της $f(x)$. Τότε εκτελούμε έναν διαμερισμό του $[a, \beta]$ ώστε τα σημεία διαμέρισης να συμπίπτουν με τα $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ οπότε

$$-\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^{\xi_1} f(x) dx - \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x) dx + \int_{\xi_2}^{\xi_3} f(x) dx - \int_{\xi_3}^{\xi_4} f(x) dx + \int_{\xi_4}^\beta f(x) dx \quad (3)$$



Σχ.8.2

Για να βρω το εμβαδό που περιέχεται μεταξύ των δύο καμπυλών $y = f(x)$, $y = g(x)$ και των ευθειών $x = a$, $x = \beta$ ορισμένων και συνεχών στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, \beta]$ εργάζομαι ως εξής. Κάνω έναν διαμερισμό του $[a, \beta]$ τον $\Delta_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta\}$ με $\lambda \rightarrow 0$ και έστω $[x_{i-1}, x_i]$ το τυχόν υποδιάστημα. Σχηματίζω το στοιχειώδες ορθογώνιο με βάση $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ και ύψος $f(\xi_i) - g(\xi_i)$ όπου $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Το εμβαδόν αυτού του στοιχειωδούς ορθογωνίου θα είναι τότε

$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x$. Αν πάρω το όριο του ανώτερου αθροίσματος όταν $\lambda \rightarrow 0$ αυτό λαμβάνεται ως εμβαδό του επίπεδου χωρίου, δηλαδή

$E = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n E_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x = \int_a^\beta [f(x) - g(x)] dx \quad (4)$. Το όριο (4) υπάρχει διότι αφού οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ τότε και η $(f - g)(x)$ συνεχής στο $[a, \beta]$.

3.2.1 Παρατηρήσεις

1. Ο τύπος (4) εφαρμόζεται αν $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, \beta]$. Αν $f(x) < g(x)$, $\forall x \in [a, \beta]$, τότε αυτός γράφεται ως $E = \int_a^\beta [g(x) - f(x)] dx \quad (5)$

2. Αν δεν ισχύει η παραπάνω παρατήρηση $\forall x \in [a, \beta]$ αλλά π.χ. $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, \gamma]$ και $f(x) < g(x)$, $\forall x \in [\gamma, \beta]$ τότε εφαρμόζουμε τους τύπους (4) και (5) ανάλογα, δηλαδή έχουμε για την συγκεκριμένη περίπτωση ότι $E = \int_a^\gamma [f(x) - g(x)] dx + \int_\gamma^\beta [g(x) - f(x)] dx \quad (6)$

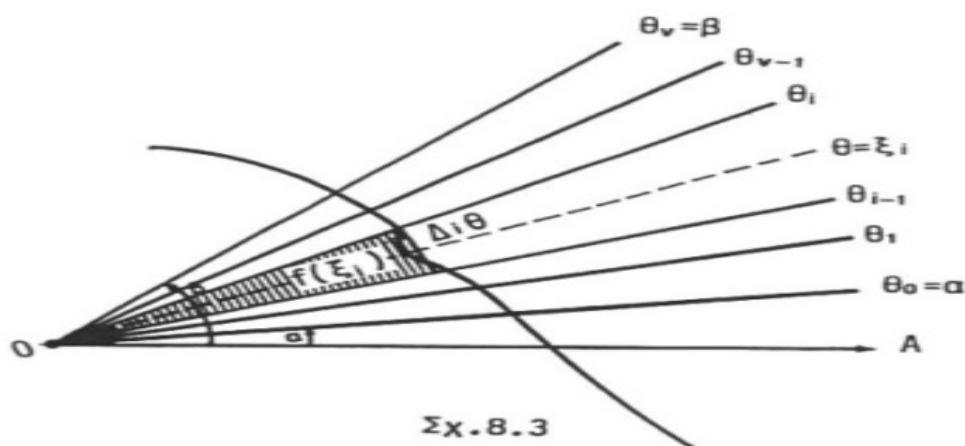
3. Αν ζητείται το εμβαδόν μεταξύ δύο καμπυλών $y = f(x)$, $y = g(x)$ αλλά δεν δίνονται τα όρια ολοκλήρωσης, τότε για να βρεθούν, τις εξισώνω, δηλαδή θέτω $f(x) = g(x)$ και λύνω την εξίσωση που προκύπτει. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι τετμημένες και αν θέσω αυτές στην $y = f(x)$ ή $y = g(x)$ έχω τις τέταγμένες δηλαδή τα σημεία τομής των καμπυλών και συνεπώς τα όρια ολοκλήρωσης είτε ως προς τον xx' άξονα ή ως προς τον yy' άξονα. Και σε αυτή την περίπτωση πρέπει να εφαρμόζονται οι παρατηρήσεις 1 και 2.

Αν η καμπύλη $y = f(x)$ του τύπου (1) δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = \varphi(t)$, $y = \sigma(t)$, είναι $dx = \varphi'(t) dt$. Αν t_1, t_2 είναι οι τιμές του t για τις οποίες $x = a$, $x = \beta$, από την πρώτη των ανωτέρω ο (1) γράφεται ως εξής $E = \int_a^\beta f(x) dx = \int_{t_2}^{t_1} [\sigma(t) \varphi'(t)] dt$ (7).

3.3 Εμβαδόν σε πόλικες συντεταγμένες

Για τον υπολογισμό του εμβαδού E που ορίζεται από τη συνεχή καμπύλη $\rho = f(\theta) / [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες $\theta = a$, $\theta = \beta$ κάνω διαμερισμό του $[\alpha, \beta]$, δηλαδή $\Delta_\nu = \{\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{\nu-1} < \theta_\nu = \beta\}$. Με $\lambda \rightarrow 0$. Έστω $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ ένα τυχαίο υποδιάστημα και $\xi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$, σε αυτό αντιστοιχίζω ένα στοιχειώδη κυκλικό τομέα που ακτίνας $f(\xi_i)$ και γωνία αυτού την $\theta_i - \theta_{i-1} = \Delta_i \theta$ μετρούμενη ακτίνια, τότε το εμβαδό του είναι, $E_i = \frac{1}{2} [f(\xi_i)^2] \Delta_i \theta$. Το άθροισμα όλων των στοιχειωδών κυκλικών τομέων δίνεται από το άθροισμα του Riemann $\sum_{i=1}^{\nu} E_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} [f(\xi_i)^2] \Delta_i \theta$. Το όριο της ανωτέρω με $\lambda \rightarrow 0$ λαμβάνεται εξ ορισμού ως εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την $\rho = f(\theta) / [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες $\theta = a$, $\theta = \beta$ δηλαδή

$$E = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\nu} E_i = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\nu} [f(\xi_i)^2] \Delta_i \theta = \frac{1}{2} \int_a^\beta [f(\theta)]^2 d\theta \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2} \int_a^\beta \rho^2 d\theta$$

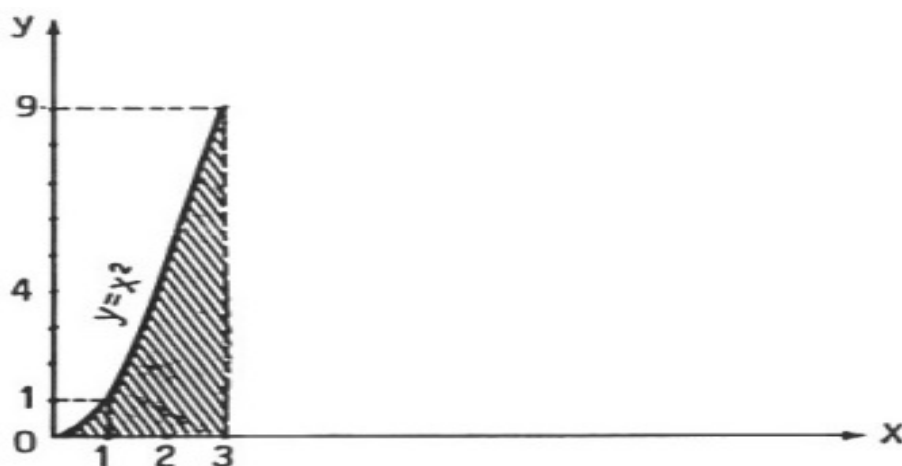


3.4 Εφαρμογές

1. Εύρεση του εμβαδού της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y = x^2$, τον xx' άξονα και τις ευθείες $x = 1$, $x = 3$

Λύση

$$\forall x \in [1, 3] \text{ είναι } x^2 > 0 \text{ άρα } \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right] = \left[9 - \frac{1}{3} \right] = \frac{26}{3}$$



Σχ.8.4

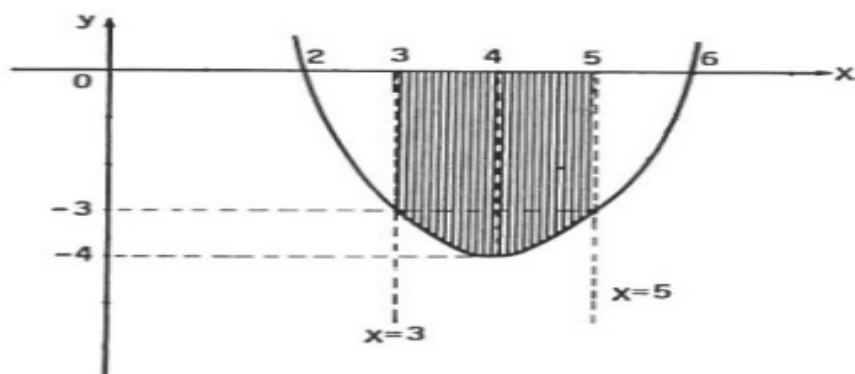
2. Εύρεση του εμβαδού της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y = x^2 - 8x + 12$, τον xx' άξονα και τις ευθείες $x = 3$, $x = 5$.

Λύση

Η καμπύλη τέμνει τον άξονα xx' στα σημεία 2 και 6 (ρίζες του τριωνόμου). Είναι $x^2 - 8x + 12 < 0$, $\forall x \in [3, 5]$ άρα

$$E = \int_1^2 (x^3 - 7x^2 + 10x) dx - \int_2^4 (x^3 - 7x^2 + 10x) dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2 \right]_1^2 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2 \right]_2^4 = \frac{397}{12}$$

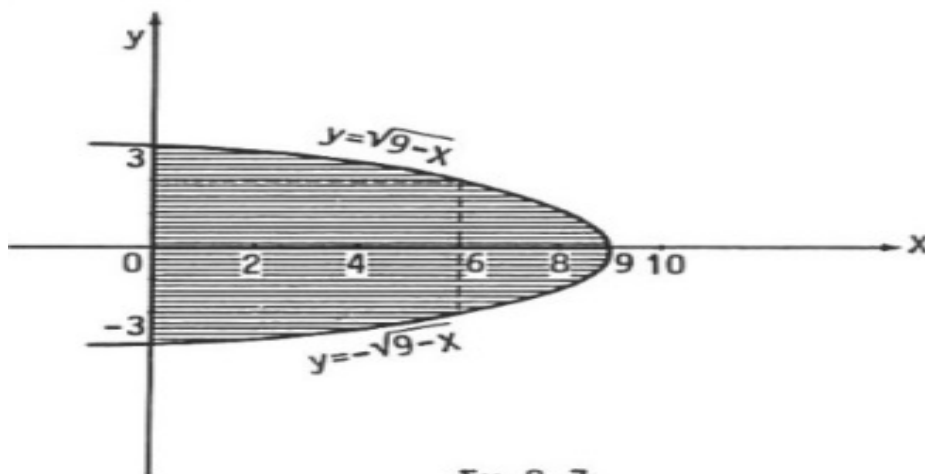


Σχ.8.5

3. Εύρεση του εμβαδού της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y^2 = 9 - x$ και τον yy' άξονα.

Λύση

Α' τρόπος Η καμπύλη γράφεται $x = 9 - y^2$, τέμνει τον yy' άξονα στα σημεία με τεταγμένες $-3, 3$ και τον xx' άξονα στο $(9, 0)$ άρα $E = \int_{-3}^3 (9 - y^2) dy = \left[9y - \frac{y^3}{3} \right]_{-3}^3 = 36$.



Σχ. 8.7

Β' τρόπος Αν η ολοκλήρωση γίνει κατά μήκος του xx' άξονα, η καμπύλη γράφεται $y = \pm\sqrt{9-x}$ με $9-x \geq 0 \Leftrightarrow 9 \geq x$, δηλαδή χωρίζεται σε δύο κλάδους $y = \sqrt{9-x}$, $y = -\sqrt{9-x}$ με όρια του x από 0 έως 9 που είναι συμμετρικοί ως προς xx' άξονα. Άρα, το εμβαδό θα βρεθεί αν διπλασιάσουμε το εμβαδό που περιέχεται από τον κλάδο $y = \sqrt{9-x}$, τον xx' άξονα και τον yy' άξονα. $E = 2 \int_0^9 \sqrt{9-x} dx = -2 \int_0^9 (9-x)^{\frac{1}{2}} d(9-x) = -\frac{4}{3} [(9-x)^{\frac{3}{2}}]_0^9 = -\frac{4}{3} [(9-9)^{\frac{3}{2}} - (9-0)^{\frac{3}{2}}] = 36$

4. Εύρεση του εμβαδού της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y^2 = 9x$ και την ευθεία $y = 3x - 18$

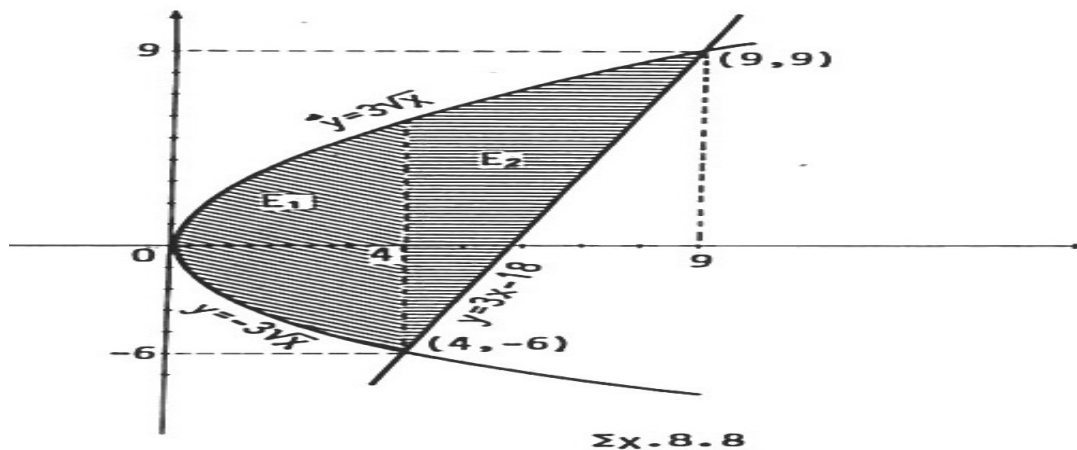
Λύση

Από επίλυση του συστήματος των εξισώσεων, τα σημεία τομής των καμπύλων είναι $(4, -6)$ και $(9, 9)$ άρα είναι και τα όρια ολοκλήρωσης.

Α' τρόπος Θα υπολογισθεί το εμβαδόν κατά μήκος του yy' άξονα. Οι εξισώσεις των καμπύλων

γράφονται $x = \frac{y^2}{9}$, $x = \frac{18+y}{3}$. Αφού $x = \frac{18+y}{3} \geq \frac{y^2}{9} \quad \forall x \in [-6, 9]$ είναι

$$E = \int_{-6}^9 \left(\frac{18+y}{3} - \frac{y^2}{9} \right) dy = \frac{1}{9} \int_{-6}^9 (54 + 3y - y^2) dy = \frac{1}{9} \left[54y + \frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-6}^9 = \frac{125}{2}$$



Β' τρόπος Θα υπολογισθεί το εμβαδόν κατά μήκος του άξονα xx' . Η $y^2 = 9x$ γράφεται $y = \pm 3\sqrt{x}$, δηλαδή χωρίζεται σε δύο κλάδους (συμμετρικοί κλάδοι της παραβολής) τον $y = 3\sqrt{x}$ άνω του xx' άξονα και τον $y = -3\sqrt{x}$ κάτω του xx' άξονα με $x \geq 0$. Επειδή $3\sqrt{x} > -3\sqrt{x}$, $\forall x \in [0, 4]$ και $3\sqrt{x} > 3x - 18$, $\forall x \in [4, 9]$, είναι

$$E = E_1 + E_2 = \int_0^4 [3\sqrt{x} - (-3\sqrt{x})] dx + \int_4^9 (3\sqrt{x} - 3x + 18) dx =$$

$$6 \int_0^4 [\sqrt{x}] dx + \int_4^9 (3\sqrt{x} - 3x + 18) dx = 4 \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 + \left[2x^{\frac{3}{2}} - \frac{3x^2}{2} + 18x \right]_4^9 = \frac{125}{2}$$

5. Εύρεση του εμβαδού του κύκλου $x^2 + y^2 = 49$

Λύση

Α' τρόπος Η καμπύλη γράφεται ως $y = \pm \sqrt{49 - x^2}$, δηλαδή δύο κλάδοι συμμετρικοί ως προς τον xx' άξονα και είναι $\sqrt{49 - x^2} \geq -\sqrt{49 - x^2} \forall x \in [-7, 7]$ αν $R = 7$ Συνεπώς,

$$E = \int_{-7}^7 [\sqrt{49 - x^2} - (-\sqrt{49 - x^2})] dx = 2 \int_{-7}^7 \sqrt{49 - x^2} dx \quad \text{Θέτω } x = 7 \sin \theta \text{ άρα } dx = 7 \cos \theta d\theta.$$

Αφού το x μεταβάλλεται από -7 έως 7 , το θ μεταβάλλεται από $-\frac{\pi}{2}$ έως $\frac{\pi}{2}$ το

$$\text{ολοκλήρωμα γίνεται } E = 2 \int_{-7}^7 \sqrt{49 - x^2} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{49 - 49 \sin^2 \theta} \cdot 7 \cos \theta d\theta =$$

$$98 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 98 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 49\pi$$

Β' τρόπος Θέτω τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου, δηλαδή $x = 7\cos\theta$, $y = 7\sin\theta$ και επειδή το x μεταβάλλεται από -7 έως 7 το θ μεταβάλλεται από π έως 0 , οπότε από (7) είναι

$$E = 2 \int_{\pi}^0 7 \sin\theta (-7 \cos\theta) d\theta = -98 \int_{\pi}^0 \sin\theta \cos\theta d\theta = -98 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{\pi}^0 = 49\pi$$

6. Εύρεση εμβαδού της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη $x = \theta - \sin\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ με $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Λύση

Είναι $dx = (1 - \cos\theta) d\theta$ και από (7) είναι

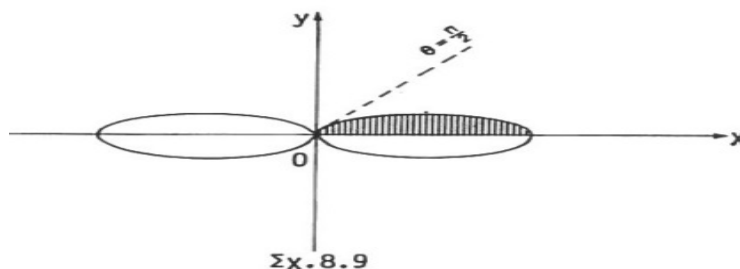
$$E = \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi$$

7. Εύρεση του εμβαδού της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη $\rho^2 = \alpha^2 \cos(2\theta)$.

Λύση

Η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον x' άξονα και την αρχή των αξόνων. Ο υπολογισμός του εμβαδού θα γίνει από 0 έως $\frac{\pi}{4}$ και θα το ληφθεί τέσσερις φορές. Άρα, ο τύπος (8) γίνεται

$$E = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \alpha^2 \cos 2\theta d\theta = 2\alpha^2 \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \alpha^2$$

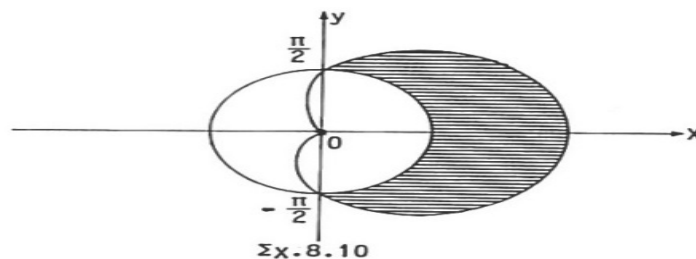


8. Εύρεση του εμβαδού της περιοχής που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $\rho = 1 + \cos\theta$ και του κύκλου $\rho = 1$.

Λύση

Ζητείται το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Η πρώτη καμπύλη είναι άνω του κύκλου και η ολοκλήρωση θα γίνει από $-\frac{\pi}{2}$ έως $\frac{\pi}{2}$. Τα όρια βρίσκονται αν εξισώσω τις δύο καμπύλες και λύσω την εξίσωση που θα προκύψει. Συνεπώς, είναι

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1 + \cos\theta)^2 - 1^2] d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \frac{\pi}{4}$$



3.5 Όγκοι στερεών

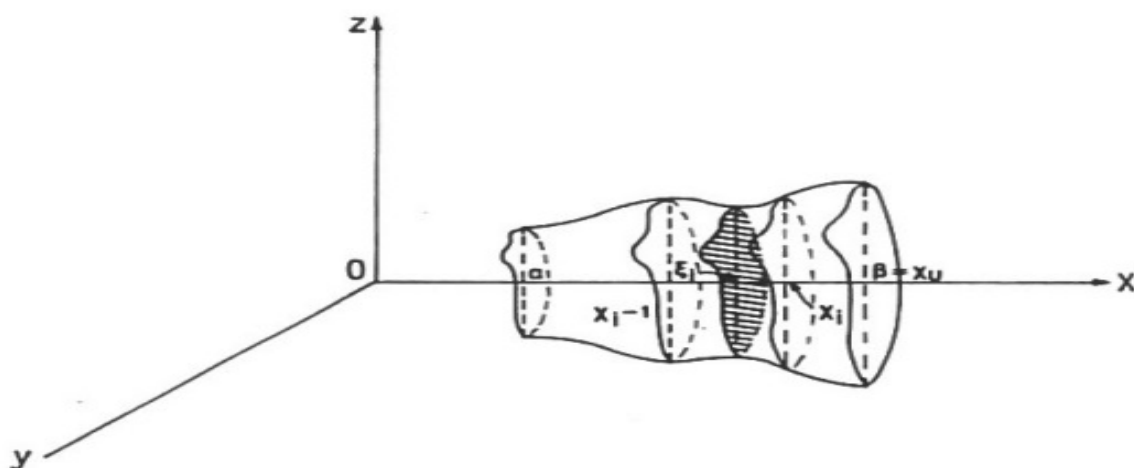
3.5.1 Όγκος στερεού με γνωστές κάθετες τομές προς ένα άξονα

Έστω στερεό (Σ) που περιορίζεται από δύο επίπεδα κάθετα στον άξονα Ox στα σημεία $x=a$, $x=\beta$. Αν είναι γνωστό το εμβαδό της τρέχουσας τομής που σχηματίζεται από το στερεό και τυχόν επίπεδο κάθετο στον xx' άξονα, το εμβαδό αυτό, εξαρτάται από την απόσταση του κάθετου επιπέδου από την αρχή των αξόνων, συνεπώς είναι μια συνάρτηση της απόστασης, δηλαδή της τετμημένης x .

Έτσι, αν A το εμβαδό της κάθετης τομής και x η απόσταση του κάθετου επιπέδου από την αρχή των αξόνων είναι $A=A(x)$. Έστω ότι η $A(x)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$. Ένας διαμερισμός του $[a, \beta]$ είναι $\Delta_\nu = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\nu = \beta\}$.

Με $\lambda \rightarrow 0$ στα σημεία $x_1, x_2, \dots, x_{\nu-1}$ φέρω επίπεδα κάθετα στον xx' άξονα οπότε το στερεό (Σ) χωρίζεται σε στοιχειώδη τεμάχια (πλάκες). Αν $[x_{i-1}, x_i]$ είναι ένα τυχόν υποδιάστημα της διαμέρισης και $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ με $i=1, 2, \dots, \nu$ το κάθετο επίπεδο στο ξ_i έχει εμβαδό $A(\xi_i)$.

Σχηματίζουμε τον στοιχειώδη ορθό κύλινδρο βάσεως $A(\xi_i)$, ύψους $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ άρα όγκου $V_i = A(\xi_i) \Delta_i x$, $i=1, 2, \dots, \nu$.



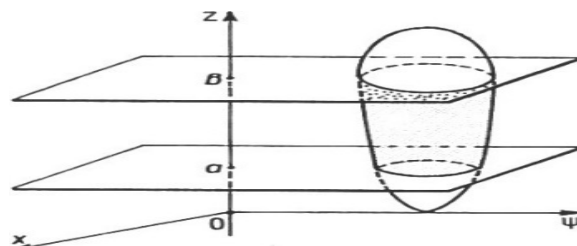
Σχ.8.11

Αν πάρω το άθροισμα όλων αυτών των στοιχειωδών κυλίνδρων, έχω ένα άθροισμα Riemann $\sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n A(\xi_i) \Delta_i x$. Το όριο του αθροίσματος αυτού, που υπάρχει διότι υπέθεσα ότι η $A(x)$ είναι συνεχής, λαμβάνεται εξ ορισμού ως όγκος του (Σ) όταν $\lambda \rightarrow 0$, δηλαδή $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\xi_i) \Delta_i x = \int_{\alpha}^{\beta} A(x) dx$ ή $V = \int_{\alpha}^{\beta} A(x) dx$.

Σχόλιο Θεωρώ ένα γεωμετρικό στερεό (Σ) . Ο όγκος V του στερεού περιλαμβάνεται μεταξύ των επιπέδων $z = a, z = \beta$ δίνεται από τον τύπο $V = \int_{\alpha}^{\beta} E(t) dt$ (T1). Όπου $E(t)$ είναι το εμβαδόν της τομής του (Σ) με το επίπεδο $z = t$.

Παρατήρηση

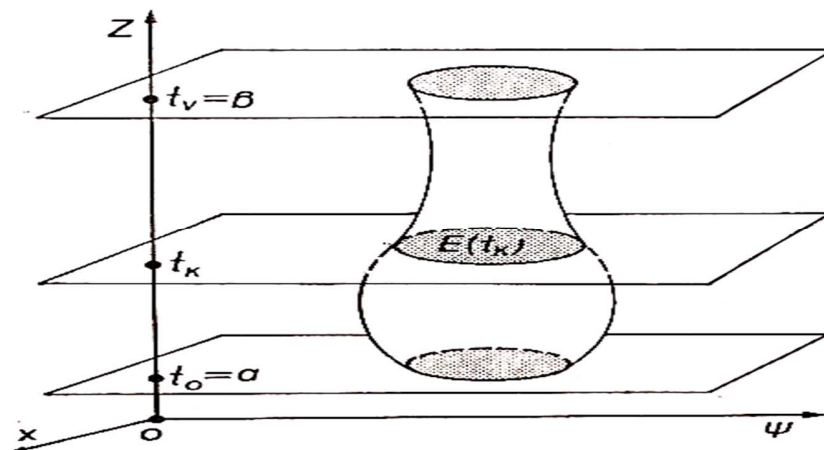
Ο (T1) ισχύει αν πάρω την τομή του στερεού με το επίπεδο $x = t$ ή $y = t$. Στην πρώτη περίπτωση ο (T1) δίνει τον όγκο του στερεού μεταξύ των επιπέδων $x = a, x = \beta$ ενώ στη δεύτερη μεταξύ των επιπέδων $y = a, y = \beta$.



3.5.2 Όγκος στερεού

Έστω τυχαίο γεωμετρικό στερεό (Σ) στο τρισσορθόγωνιο συστήμα αξόνων $Oxyz$. Για την εύρεση του όγκου του (Σ) θεωρούμε ότι κόβουμε αυτό σε πολύ λεπτές φέτες με επίπεδα παράλληλα προς το $Oxyz$ στα ύψη $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{\kappa-1} < t_{\kappa} < \dots < t_{\nu} = \beta$.

Το εμβαδό E της τομής του στερεού με τα παράλληλα επίπεδα είναι συνάντηση που εξαρτάται από το ύψος t . Άρα, για τα εμβαδά των διαφόρων τομών είναι $E(t_0), E(t_1), E(t_2), \dots, E(t_{\kappa-1}), E(t_{\kappa}), \dots, E(t_{\nu})$ και η συνάρτηση $E = E(t)$ με $t \in [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής σε κάθε υποδιάστημα $[t_{\kappa-1}, t_{\kappa}]$, $\kappa = 1, 2, \dots, \nu$.



Άρα, σε κάθε τέτοιο υποδιάστημα η συνάρτηση έχει μια ελάχιστη τιμή έστω μ_k και μια μέγιστη έστω M_k συνεπώς για τυχαίο $\xi \in [t_{k-1}, t_k]$ ισχύει $\mu_k \leq E(\xi) \leq M_k$ (1).

Αν το $[a, \beta]$ με διαιρετικά σημεία $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ το ισοδιαμερίσουμε, τότε το κοινό ύψος μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων παραλλήλων προς το $Oxyz$ είναι $t_k - t_{k-1} = \frac{\beta - \alpha}{n}$, $d_n \rightarrow 0$. Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της (1) με το d_n θα λάβουμε $\mu_k \cdot d_n \leq E(\xi) d_n \leq M_k d_n$ (2)

Ο όγκος του τμήματος (μια φέτα) του στερεού που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων στα ύψη t_{k-1}, t_k είναι $V_k = E(\xi) (t_k - t_{k-1}) = E(\xi) \cdot d_n$ διότι μπορούμε να θεωρήσουμε αυτό ως ένα στοιχειώδη κύλινδρο με εμβαδό βάσης το $E(\xi)$ και ύψος d_n οπότε η (2) γίνεται: $\mu_k d_n \leq V_k \leq M_k \cdot d_n$ (3). Αν την (3) γράψουμε για $k=1, 2, \dots, n$ και προσθέσουμε θα λάβουμε $S_n \leq V \leq \bar{S}_n$ (4) όπου (S_n) η ακολουθία των κατώτερων αθροισμάτων, $(\bar{S}_n)$ η ακολουθία των ανωτέρων αθροισμάτων και V ο όγκος του στερεού.

Είναι η $E=E(t)$ συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ οπότε οι ακολουθίες (S_n) και $(\bar{S}_n)$ έχουν κοινό όριο το ολοκλήρωμα από a έως β της $E(t)$. Τότε, από την (4) προκύπτει ο όγκος

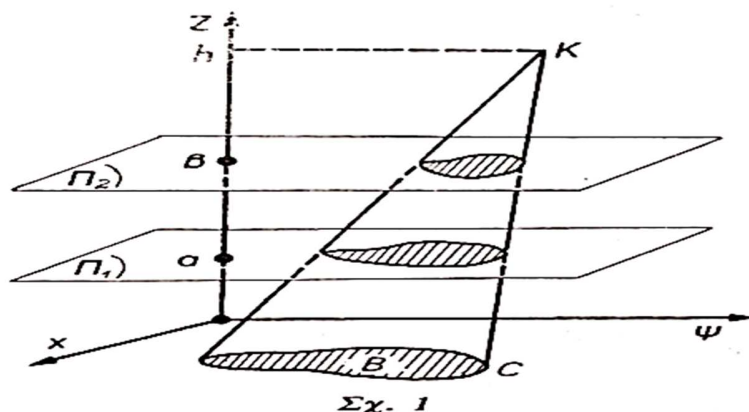
$$V = \int_a^{\beta} E(t) dt \quad (5).$$

3.5.3 Όγκος κυλίνδρου και πρίσματος

Στο τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$ θεωρώ κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό μια κλειστή γραμμή C που βρίσκεται στο επίπεδο $Oxyz$. Αν B είναι το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που περικλείει η C , τότε το εμβαδό κάθε τομής του στερεού αυτού με επίπεδο παράλληλο προς το $Oxyz$ είναι B . Έτσι, στον προηγούμενο τύπο η συνάρτηση $E = E(t)$ με $t \in [a, \beta]$ είναι σταθερή με σταθερή τιμή B . Άρα, ο τύπος για τον όγκο V του στερεού (Σ) που περικλείεται από την κυλινδρική επιφάνεια και τα επίπεδα π_1, π_2 , που είναι παράλληλα προς το

επίπεδο $Oxyz$ σε ύψη, a, β αντίστοιχα, είναι: $V = \int_a^{\beta} B dt = B \int_a^{\beta} dt = B \cdot (\beta - \alpha)$

Αν $\beta - a = h$ τότε $V = B \cdot h$ όπου B το εμβαδό της βάσης και h το ύψος. Ειδικά αν η κλειστή γραμμή C είναι κύκλος με ακτίνα ρ , το στερεό (Σ) είναι πλάγιος ή ορθός κύλινδρος και ο τύπος που δίνει τον όγκο V του είναι $V = \pi \rho^2 \cdot h$. Αν η κλειστή γραμμή C είναι πολύγωνο, τότε το στερεό (Σ) είναι πλάγιο ή ορθό πολυγωνικό πρίσμα και ο όγκος V του είναι το γινόμενο του εμβαδού B της βάσης αυτού επί το ύψος h (ύψος είναι η απόσταση των επιπέδων των βάσεων).



3.5.4 Όγκος κώνου και πυραμίδας

Στο τρισσορθόγωνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$ θεωρώ κωνική επιφάνεια με οδηγό μια κλειστή γραμμή C που βρίσκεται στο επίπεδο $Oxyz$ και κορυφή το σημείο K σε ύψος h .

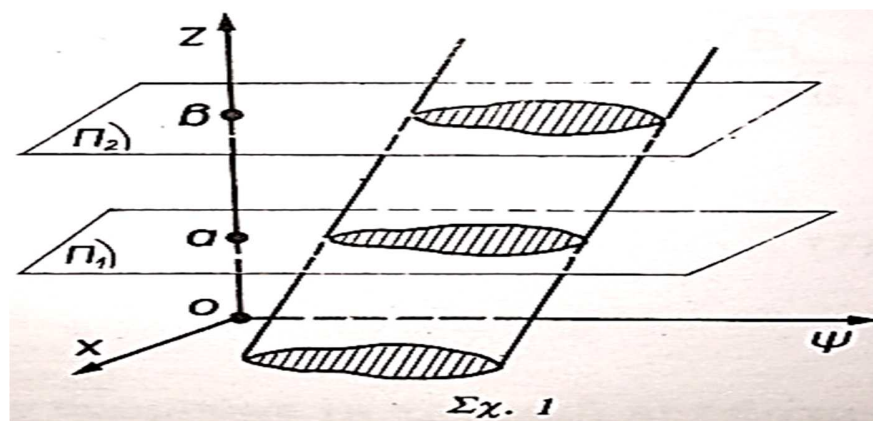
Αν B είναι το εμβαδό του επιπέδου χωρίου που περικλείει η C , τότε το εμβαδό κάθε τομής του στερεού αυτού με επίπεδο παράλληλο προς το $Oxyz$ σε ύψος t είναι το $E(t)$ όπου

$$\frac{E(t)}{B} = \frac{(h-t)^2}{h^2} \text{ δηλαδή η συνάρτηση } E=E(t) \text{ στον τύπο υπολογισμού του όγκου στερεού είναι}$$

$$E(t) = \frac{B}{h^2} \cdot (h-t)^2 \quad (1)$$

Έτσι, για τον όγκο V του στερεού (Σ) που περικλείεται από την κωνική επιφάνεια και τα επίπεδα Π_1, Π_2 που είναι παράλληλα προς το επίπεδο $Oxyz$ σε ύψη α, β αντίστοιχα ισχύει

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} E(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{B}{h^2} (h-t)^2 dt = \frac{B}{h^2} \left[-\frac{(t-h)^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{B}{3h^2} [(\beta-h)^3 - (\alpha-h)^3] \quad (2)$$



Αν το επίπεδο Π_1 ταυτίζεται με το επίπεδο $Oxyz$ είναι $\alpha=0$ και το επίπεδο Π_2 διέρχεται από το K , δηλαδή $\beta=h$, άρα ο όγκος V του (Σ) είναι $V = \frac{B}{2h^2} [0 + h^3]$ ή $V = \frac{1}{3} B \cdot h \quad (3)$

Αν η κλειστή γραμμή C είναι κύκλος ακτίνας ρ και $\alpha=0, \beta=h$ τότε το στερό (Σ) είναι κώνος πλάγιος ή ορθός, με εμβαδό βάσης $B = \pi \rho^2$ και ύψος h άρα ο όγκος του είναι $V = \frac{1}{3} \pi \rho^2 h \quad (4)$

Αν η κλειστή γραμμή C είναι κύκλος με ακτίνα R και $\alpha=0, \beta=u < h$, το στερεό (Σ) είναι κώλινος κώνος και αν ρ η ακτίνα της μικρής βάσης τότε $\frac{\rho}{R} = \frac{h-u}{h}$ οπότε ο τύπος (2) για τον όγκο του κώλινου κώνου δίνει $V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rp + p^2) \cdot u \quad (5)$

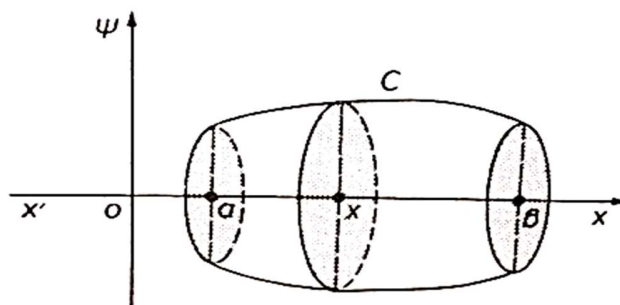
Αν η κλειστή γραμμή C είναι πολύγωνο, το στερεό (Σ) είναι πυραμίδα ($\alpha=0$ και $\beta=h$) ή κώλινη πυραμίδα ($\alpha=0$ και $\beta=u < h$) οπότε για τον όγκο της πυραμίδας είναι $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \quad (6)$

Για τον όγκο της κόλουρης πυραμίδας, αν B_1 το εμβαδό της μικρής βάσης, $\frac{B_1}{B} = \frac{(h-u)^2}{h^2}$
 άρα $\frac{h-u}{h} = \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}} \Rightarrow h = \frac{u\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}$ και $h-u = \frac{u\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}$ άρα, ο (2) για $\alpha=0$, $\beta=u$ δίνει

$$V = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B \cdot B_1} + B_1) \cdot u \quad (7).$$

3.5.5 Όγκος στερεών εκ περιστροφής

Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$ έστω η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f , όπου f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν στραφεί, περί τον άξονα xx' , το επίπεδο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ τον άξονα xx' και τη C , θα σχηματιστεί ένα «στερεό εκ περιστροφής». Κάθε τομή του στερεού αυτού με επίπεδο κάθετο στον άξονα xx' στο $[\alpha, \beta]$ είναι κύκλος ακτίνας $y = f(x)$, άρα το εμβαδόν είναι $E(x) = \pi f^2(x)$ για $x \in [\alpha, \beta]$. Από τον (5), ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής είναι $V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi f^2(x) dx$.



Όγκος στερεού από περιστροφή Θεωρώ χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη c με εξίσωση $y = \varphi(x)$, τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και τον άξονα xx' . Όταν το χωρίο περιστραφεί περί τον άξονα xx' (με πλήρη στροφή) γράφει ένα στερεό από περιστροφή (η εξίσωση $y = \varphi(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$) ο όγκος του οποίου είναι $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi^2(x)] dx$ (T2)

Παρατήρηση

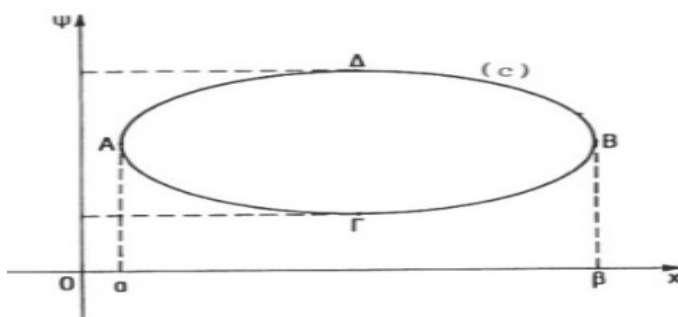
Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη c με εξίσωση $x = \varphi(y)$, τις ευθείες $y = \gamma$, $y = \delta$ και τον άξονα yy' είναι $V = \pi \int_{\gamma}^{\delta} \varphi^2(y) dy$ (T3). Θεωρώ το χωρίο που περικλείεται από κλειστή επίπεδη καμπύλη c . Όταν το χωρίο περιστραφεί γύρω από τον άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο του και που δεν τέμνει την καμπύλη, σχηματίζεται ένα στερεό που ο όγκος του βρίσκεται ως εξής: Θεωρώ τον άξονα περιστροφής ως άξονα xx' ενός ορθογωνίου συστήματος. Έστω A το σημείο της c με τη μεγαλύτερη τετμημένη β .

Έστω $y = \varphi_1(x)$ η εξίσωση της καμπύλης ΑΓΒ και $y = \varphi_2(x)$ η εξίσωση της καμπύλης ΑΔΒ. Αν οι φ_1, φ_2 είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi_2^2(x) - \varphi_1^2(x)] dx$ (T4).

Παρατήρηση

Αν το σχήμα περιορίζεται από τις καμπύλες $x = \varphi_1(y), x = \varphi_2(y)$, ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του περί τον άξονα yy' , είναι $V = \pi \int_{\gamma}^{\delta} [\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)] dy$ (T5)

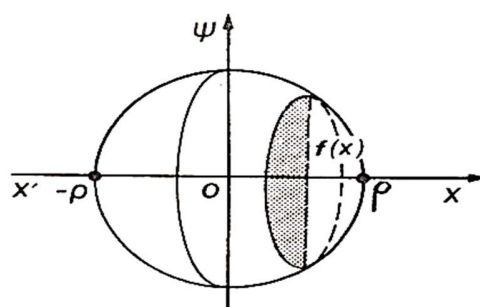
όπου γ, δ οι τεταγμένες των σημείων Γ, Δ (Γ είναι το σημείο της c με την μικρότερη και Δ με τη μεγαλύτερη τεταγμένη).



3.5.6 Όγκος σφαίρας

Έστω ημικύκλιο εξίσωσης $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ στο επίπεδο $Oxyz$. Αν στραφεί περί άξονα xx' , το στερεό εκ περιστροφής που σχηματίζεται είναι σφαίρα, ακτίνας ρ , όγκου

$$V = \int_{-p}^p \pi \cdot f^2(x) dx = \pi \int_{-p}^p (\rho^2 - x^2) dx = \pi \left[\rho^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-p}^p = \frac{4}{3} \pi \rho^3$$



Παρατήρηση

Για τον υπολογισμό του όγκου ορθού κώνου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος h θεωρώ ότι η ευθεία εξίσωσης $y = \frac{p}{h} x$ στρέφεται περί τον xx' οπότε ο όγκος είναι

$$V = \int_0^h \pi \cdot f^2(x) dx = \int_0^h \pi \cdot \frac{\rho^2}{h^2} x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi \rho^2 h.$$

Ομοίως, για τον όγκο ορθού κυλίνδρου ακτίνας βάσης ρ και ύψους h θεωρώ ότι η ευθεία $y = \rho$ στρέφεται περί τον xx' , άρα $V \int_{\alpha}^{a+h} \pi \cdot \rho^2 dx = \pi \rho^2 h$.

3.5.7 Εφαρμογές

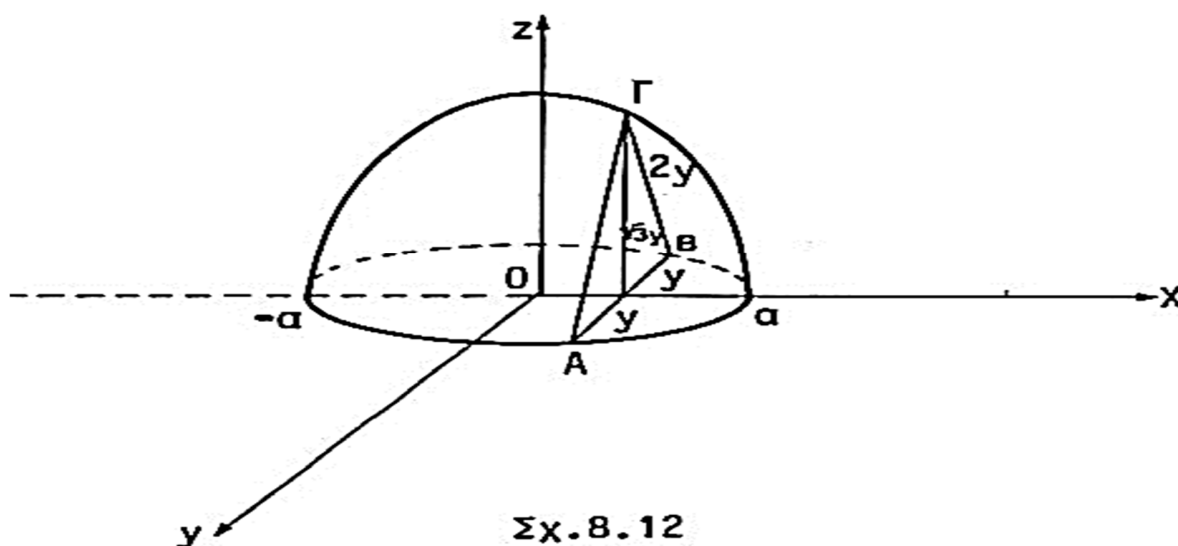
1. Ένα στερεό έχει κυκλική βάση ακτίνας a . Εύρεση του όγκου του, αν κάθε κάθετη τομή του επιπέδου, σε μια σταθερή διάμετρο, είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Λύση

Παίρνουμε ως σταθερή διάμετρο αυτή που κείται στον άξονα Ox . Η εξίσωση του κύκλου δίνεται από $x^2 + y^2 = a^2$. Το ισόπλευρο τρίγωνο βάσης $2y$ και ύψους $\sqrt{3}y$ έχει εμβαδόν

$$A(x) = \frac{1}{2} 2y \sqrt{3}y = \sqrt{3}y^2 \text{ και από } y^2 = a^2 - x^2 \text{ είναι } A(x) = \sqrt{3}(a^2 - x^2)$$

Ο τύπος (9) δίνει $V = \sqrt{3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \sqrt{3} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$

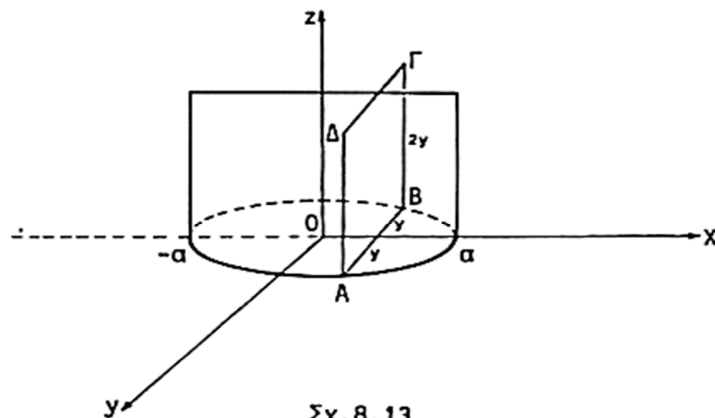


2. Το προηγούμενο παράδειγμα, αν η κάθετος τομή είναι ένα τετράγωνο

Λύση

Το τετράγωνο έχει πλευρά $2y$ και εμβαδόν $A(x) = 4y^2$. Από την εξίσωση του κύκλου είναι $y^2 = a^2 - x^2$, άρα $A(x) = 4(a^2 - x^2)$ Από (9) είναι

$$V = 4 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = 4 \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{16a^3}{3}$$



Σχ.8.13

3. Ένα στερεό έχει ως βάση του μία έλλειψη με μήκος μικρού άξονα 8 και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

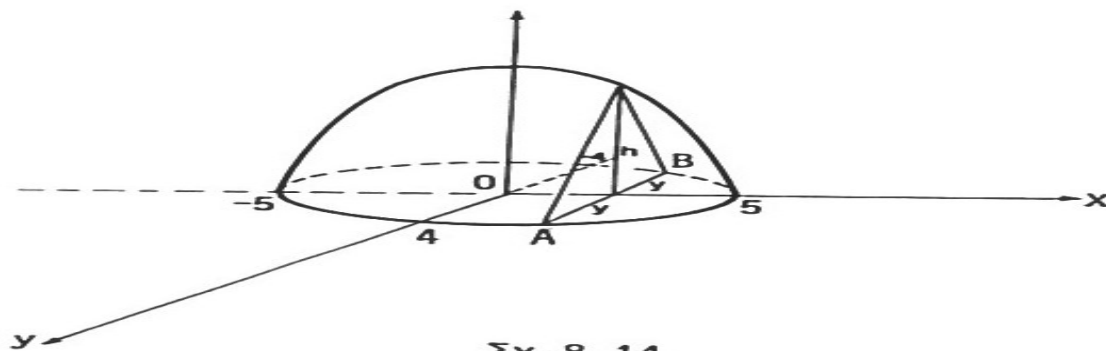
Βρείτε τον όγκο του στερεού, αν κάθε τομή στο μεγάλο άξονα είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο ύψους h .

Λύση

Έστω ότι ο μεγάλος άξονας βρίσκεται στον xx' άξονα. Αφού $2\beta = 8 \Leftrightarrow \beta = 4$.

Είναι $\frac{y}{\alpha} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{y^2}{\alpha^2} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \alpha = 5$. Τότε η εξίσωση της έλλειψης είναι

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

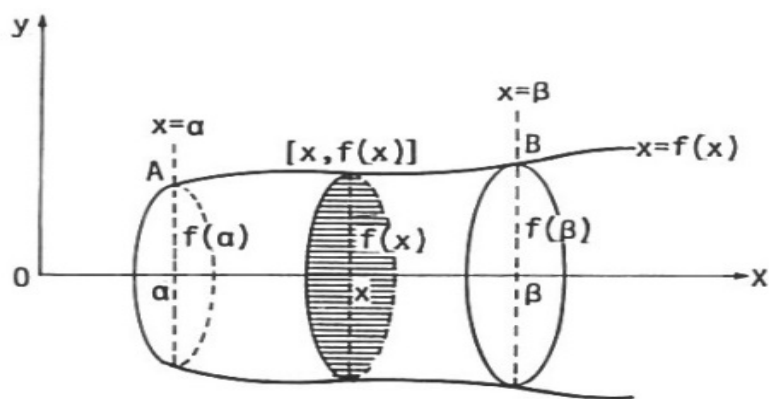


Σχ.8.14

Το ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση $2y$ και ύψος h , άρα $A(x) = \frac{1}{2}2yh = yh$ και επειδή από την εξίσωση της έλλειψης ισχύει ότι $y = \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$ είναι $A(x) = \frac{4h}{5}\sqrt{25-x^2}$, ο όγκος δίνεται από τον τύπο (9), άρα $V = \frac{4}{5}h \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} dx = 10\pi h$ (θέτοντας $x = \sin\theta$)

Παρατήρηση

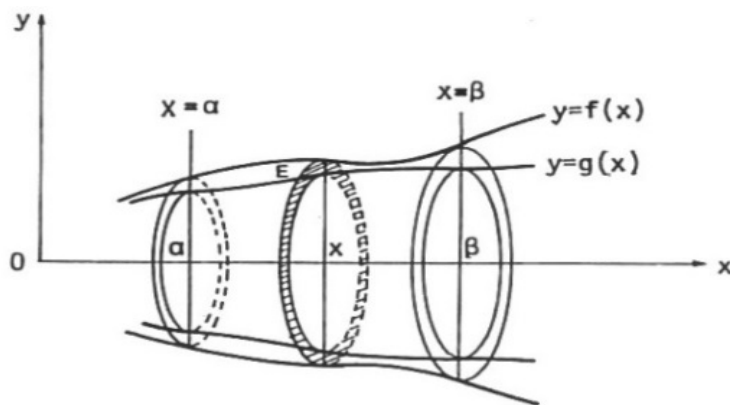
Έστω ότι ζητείται να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή, περί τον xx' άξονα, δύο καμπυλών $y = f(x)$, $y = g(x)$ ορισμένων και συνεχών στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ και από ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.



Ο xx' άξονας δεν ανήκει στο χωρίο E (Σχ.8.16).

Αν φέρω ένα επίπεδο κάθετο στον xx' άξονα, η τομή του στερεού και του επιπέδου είναι από κυκλικός δακτύλιος εμβαδού $A(x) = \pi \{f^2(x) - g^2(x)\}$, άρα ο (10) γράφεται

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [f^2(x) - g^2(x)] dx \quad (11).$$



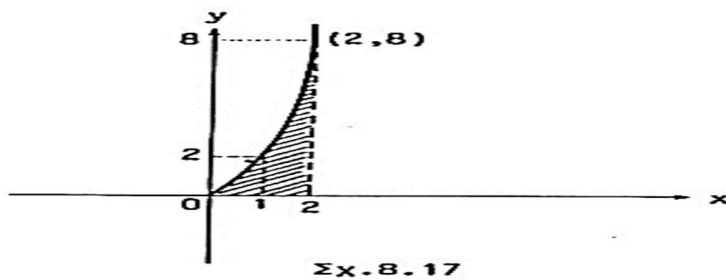
Σχ.8.16

4. Εύρεση του όγκου του στερεού που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = 2x^2$ περί τον xx' άξονα και περικλείεται από τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$.

Λύση

Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης περί τον xx' άξονα

δίνεται από τον τύπο (10) οπότε
$$V = \pi \int_0^2 (2x^2)^2 dx = 4\pi \int_0^2 x^4 dx = 4\pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{5}$$

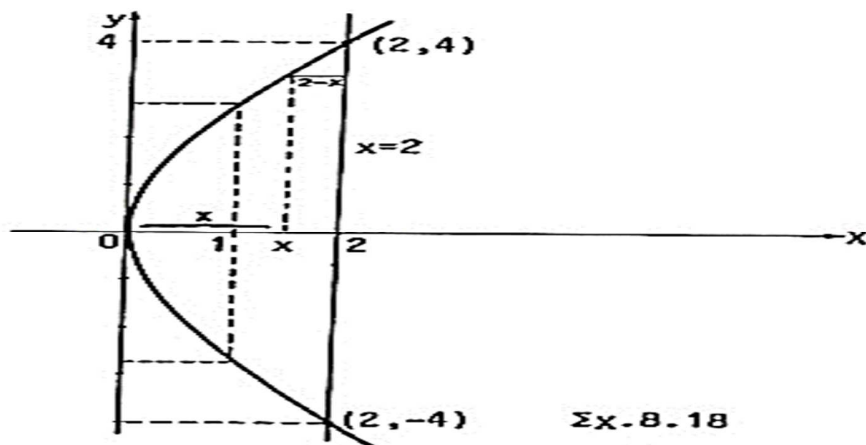


5. Εύρεση του όγκου του στερεού που παράγεται από την περιστροφή περί τον yy' άξονα της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y^2 = 8x$ και την ευθεία $x = 2$.

Λύση

Εύρεση των σημείων τόμης της καμπύλης $x = \frac{y^2}{8}$ και της ευθείας $x = 2$. Αύτα είναι $(2, 4)$ και $(2, -4)$. Η ολοκλήρωση θα γίνει κατά μήκος του yy' άξονα. Επειδή $\forall x \in [4, -4]$ η ευθεία είναι άνω από παραβολής, από τον (11) προκύπτει

$$V = \pi \int_{-4}^4 \left[4 - \frac{y^4}{64} \right] dy = 2\pi \int_0^4 \left[4 - \frac{y^4}{64} \right] dy = 2\pi \left[4y - \frac{y^5}{320} \right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}.$$



6. Εύρεση του όγκου που παράγεται από την περιστροφή της προηγούμενης παραβολής περί την ευθεία $x = 2$.

Λύση

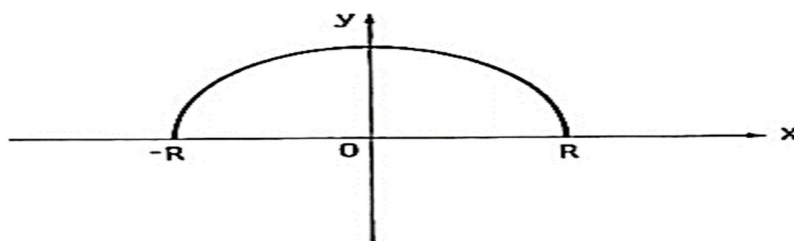
Επειδή η $x = 2$ είναι παράλληλη από τον yy' άξονα είναι

$$V = \int_{-4}^4 \left[2 - \frac{y^2}{8} \right]^2 dy = 2\pi \int_0^4 \left[2 - \frac{y^2}{8} \right]^2 dy = \frac{256\pi}{15}$$

7. Εύρεση του όγκου της σφαίρας.

Λύση

Η σφαίρα παράγεται από την πλήρη περιστροφή του ημικυκλίου περί τη διάμετρο του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$. Το ημικύκλιο είναι $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, με $x \in [-R, R]$. Αφού τα τεταρτοκύκλια είναι ίσα μεταξύ από, η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει από 0 μέχρι R και να διπλασιασθεί το αποτέλεσμα. Συνεπώς, $V = 2\pi \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}$



Σχ.8.19.

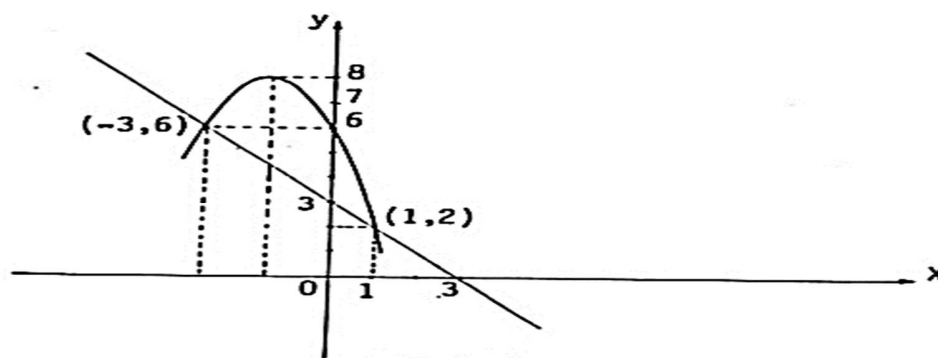
8. Εύρεση του όγκου του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή, περί τον x' άξονα, της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y = -x^2 - 3x + 6$ και την ευθεία $x + y = 3$.

Λύση

Τα σημεία τομής της καμπύλης με την ευθεία είναι $(-3, 6)$ και $(1, 2)$, αλλά $\forall x \in [-3, 1]$ η

παραβολή είναι πάνω από ευθείας. Άρα, $V = \pi \int_{-3}^1 [(-x^2 - 3x + 6)^2 - (x - 3)^2] dx =$

$$\pi \int_{-3}^1 (x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{6x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{30x^2}{2} + 27x \right]_{-3}^1 = 119,5\pi$$



Σχ.8.20

9. Εύρεση του όγκου που παράγεται από την κυκλοειδή $x = \theta - \sin\theta$, $y = 1 - \cos\theta$, αν περιστραφεί περί τον x' άξονα.

Λύση

Η μεταβολή από γωνίας είναι από 0 έως 2π και ο όγκος δίνεται από τον τύπο

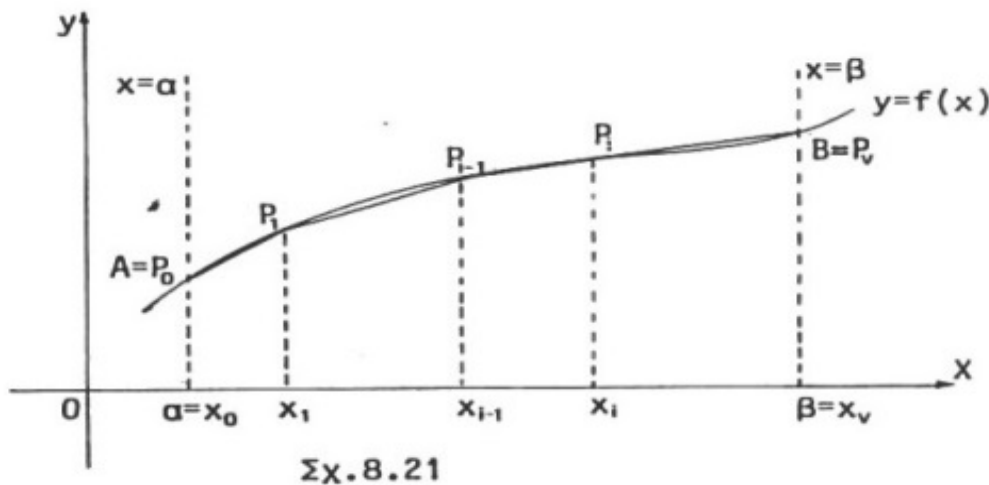
$$V = \pi \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d(\theta - \sin\theta) = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 (1 - \cos\theta) d\theta =$$

$$\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^3 d\theta = \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta) d\theta = 5\pi^2$$

3.6 Μήκος τόξου επίπεδης καμπύλης

3.6.1 Μήκος τόξου σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Έστω συνάρτηση $y = f(x) / [\alpha, \beta]$ και συνεχής. Αν παραστήσουμε το γράφημα αυτής $\Gamma = \{[x, f(x)] : x \in [\alpha, \beta]\}$ στο καρτεσιάνο επίπεδο που είναι μια καμπύλη, οι ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ αποκόπτουν ένα μέρος.



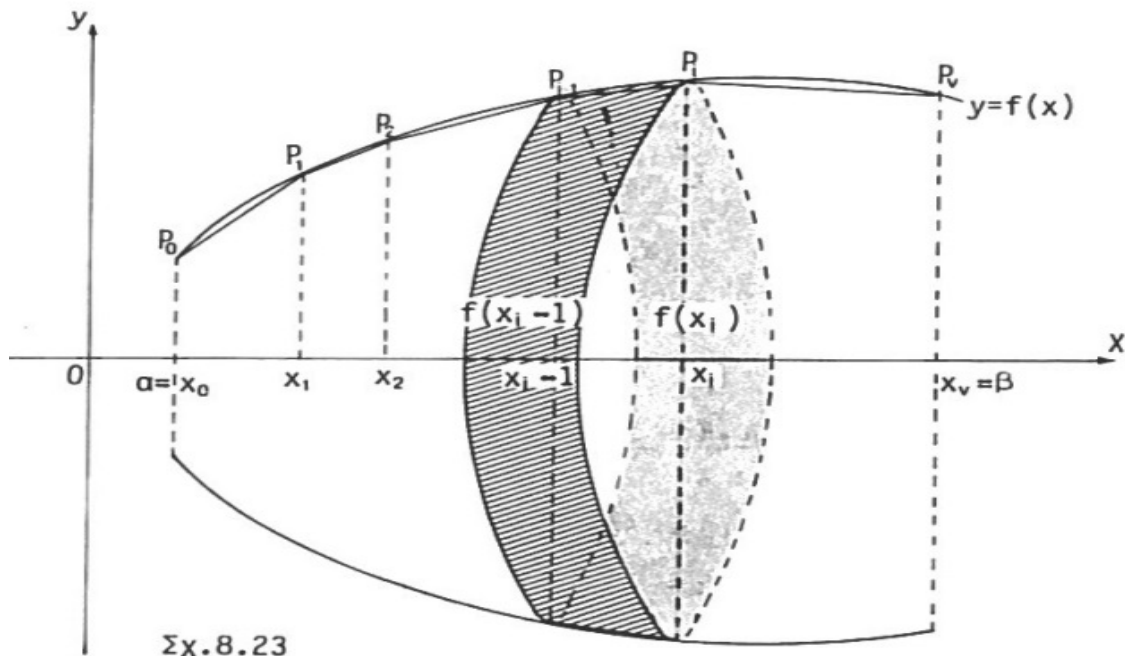
3.7 Εμβαδόν επιφάνειας στερεού εκ περιστροφής

3.7.1 Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Έστω συνάρτηση $y = f(x) / [\alpha, \beta]$ όπου $f(x), f'(x)$ συνεχείς στο $[a, \beta]$ και η $y=f(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο στο $[a, \beta]$. Το εμβαδόν της επιφάνειας που δημιουργείται από την περιστροφή του τόξου της καμπύλης $\Gamma = \{[x, f(x)] : x \in [a, \beta]\}$ περί τον xx' άξονα καλείται επιφάνεια εκ περιστροφής. Για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας που δημιουργείται κατά την περιστροφή της (Γ) περί τον xx' άξονα, παίρνω ένα διαμερισμό του $[a, \beta]$ τον $\Delta_v = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_v = \beta\}$.

Απο τα σημεία διαμέρισης $x_0, x_1, \dots, x_v$, φέρνω παραλλήλες προς τον yy' άξονα, που ορίζουν στο γράφημα της $y=f(x)$ τα σημεία $P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_v$.

Η περιστροφή του γραφήματος (Γ) της $y=f(x)$ περί τον xx' άξονα γεννά μια επιφάνεια της οποίας το εμβαδό προσεγγίζεται από το εμβαδό της επιφάνειας που γεννά η εγγεγραμμένη τεθλασμένη γραμμή $P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_v$. Κάθε χορδή της τεθλασμένης γραμμής παράγει έναν κόλικο κώνο.



Έστω $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\dots,n$ το τυχόν υποδιάστημα της πιο πάνω διαμέρισης και $P_{i-1}P_i, i=1,2,\dots,n$. Η τυχούσα χορδή της εγγεγραμμένης τεθλασμένης γραμμής, κατά την πλήρη περιστροφή, παράγει κώλο με ακτίνες βάσεων $f(x_{i-1}), f(x_i)$ η δε γενέτειρα αυτού $P_{i-1}P_i$ έχει μήκος $P_{i-1}P_i = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$, $i=1,2,3,\dots,n$ το δε εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώλου είναι $E_i = 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$, $i=1,2,\dots,n$ ή

$E_i = \pi [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2} \Delta_i x$, $i=1,2,\dots,n$ Το άθροισμα όλων των στοιχειωδών κώλων $\sum_{i=1}^n E_i = \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2} \Delta_i x$, $i=1,2,\dots,n$ δίνει μια πρώτη

προσέγγιση του εμβαδού της επιφάνειας που παράγει η $y=f(x)$ κατά την περιστροφή της περί τον xx' άξονα. Το όριο του αθροίσματος (14) λαμβάνεται εξ ορισμού ως εμβαδόν της επιφάνειας εκ περιστροφής περί τον xx' άξονα της καμπύλης $y=f(x)$. Το όριο υπάρχει διότι εξ' υποθέσεως οι $f(x), f'(x)$ είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$, άρα

$$E = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n E_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} \right)^2} \Delta_i x \quad (15).$$

Από το θεώρημα Lagrange (ή μέσης τιμής) σε κάθε διάστημα (x_{i-1}, x_i) υπάρχει ένα ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ τέτοιο ώστε $\Delta_i y = f'(\xi_i) \Delta_i x$ ή $\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(\xi_i)$ και η (15) γράφεται ως

$$E = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n E_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta_i x \quad (16).$$

Όταν $\lambda \rightarrow 0$ δεχόμαστε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(x_{i-1}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f(x_i) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\xi_i) = f(x)$ $i = 1, 2, \dots, n$ και $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f'(\xi_i) = f'(x)$, οπότε η (16) δίνει τον τύπο για το εμβαδόν εκ περιστροφής

$$E = 2\pi \int_a^\beta f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (17) \quad \text{ή} \quad E = 2\pi \int_a^\beta f(x) \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx} \right]^2} dx \quad (18).$$

Ο τύπος (18) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή $E = 2\pi \int_\gamma^\delta f(x) \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy} \right]^2} dy \quad (19)$ όπου $\gamma = f(a)$

και $\delta = f(\beta)$. Αν η καμπύλη $x = g(y) \in [\gamma, \delta]$, όπου $g(y)$ και $g'(y)$ συνεχείς, ως προς y στο $[\gamma, \delta]$, τότε το εμβαδόν της επιφάνειας εκ περιστροφής περί τον yy' άξονα δίνεται με έναν

απο τους τύπους $E = 2\pi \int_\gamma^\delta g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$, $E = 2\pi \int_\gamma^\delta g(y) \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy} \right]^2} dy \quad (20)$. Ο δεύτερος

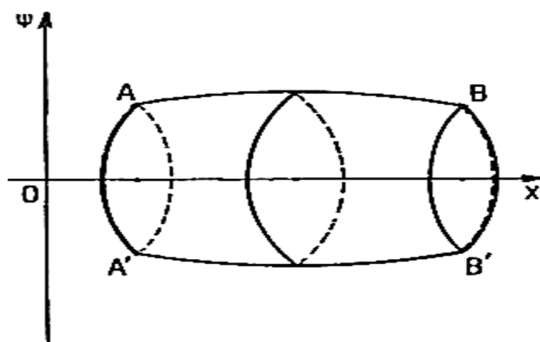
τύπος απο τους (20) γράφεται και $E = 2\pi \int_a^\beta g(y) \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy} \right]^2} dy \quad (21)$ όπου $a = g(\gamma)$, $\beta = g(\delta)$.

Περιπτώσεις

α) Το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται απο την περιστροφή ενός τόξου AB μίας καμπύλης c , που ορίζεται απο τη συνάρτηση $y = f(x)$ περί άξονα xx' δίνεται από τον τύπο:

$$E = 2\pi \int_a^\beta f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_a^\beta y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \quad (T_1) \quad \text{όπου } a, \beta \text{ είναι οι τετμημένες των}$$

σημείων A, B αντίστοιχα.



β) Το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από την περιστροφή ενός τόξου AB μίας καμπύλης c με εξίσωση $x = \varphi(y)$ περί άξονα yy' είναι $E = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(y) \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2} dy$ (T_2) όπου α, β είναι οι τεταγμένες των σημείων A, B αντίστοιχα.

γ) Το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από την περιστροφή περί άξονα xx' ενός τόξου AB μίας καμπύλης c , που ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = \sigma(t)$, $y = \varphi(t)$ είναι $E = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \sqrt{[\sigma'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2} dt = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ (T_3) όπου t_1, t_2 είναι οι τιμές της παραμέτρου t που αντιστοιχούν στα σημεία A, B.

δ) Αν η περιστροφή γίνεται περί άξονα yy' ισχύει ότι $E = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ (T_4)

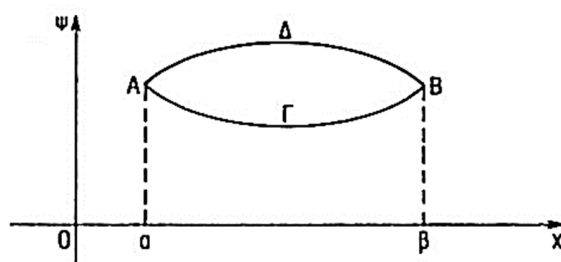
ε) Το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από την περιστροφή περί άξονα xx' ενός τόξου AB μίας καμπύλης c , που ορίζεται από τις εξισώσεις $x = \rho \cdot \cos \theta$, $y = \rho \cdot \sin \theta$, είναι

$E = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \cdot \sin \theta \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2} d\theta$ (T_5), όπου θ_1, θ_2 οι πολικές γωνίες που αντιστοιχούν στα σημεία A, B αντίστοιχα. Αν η περιστροφή γίνει περί άξονα yy' το εμβαδόν είναι

$E = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \cdot \cos \theta \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2} d\theta$ (T_6)

στ) Θεωρώ κλειστή επίπεδη καμπύλη c . Όταν περιστραφεί περί άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο της και δεν την τέμνει, γράφει επιφάνεια που το εμβαδόν της υπολογίζεται ως εξής. Θεωρώ ως άξονα περιστροφής τον xx' . Έστω A, B τα σημεία της c με τις μικρότερη τετμημένη α και μεγαλύτερη τετμημένη β αντίστοιχα. Έστω ότι $x = \varphi_1(y)$, $y = \varphi_2(y)$ οι εξισώσεις των τόξων AΓB και AΔB αντίστοιχα. Αν οι συναρτήσεις φ_1, φ_2 είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται είναι

$$E = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \left[\varphi_1(x) \sqrt{1 + [\varphi_1'(x)]^2} + \varphi_2(x) \sqrt{1 + [\varphi_2'(x)]^2} \right] dx \quad (T_7)$$



ζ) Το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή ενός τόξου AB μίας καμπύλης c με εξίσωση $y = f(x)$ περί ευθεία (ε) είναι $E = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} d(M, \varepsilon) \sqrt{1 + (y')^2} dx$ (T_8) όπου $d(M, \varepsilon)$ η απόσταση τυχαίου σημείου $M(x, y)$ του τόξου από την (ε) και α, β οι τετμημένες των σημείων A, B.

3.7.2 Σε παραμετρικές εξισώσεις

Έστω ότι η καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = g(u)$, $y = h(u)$ με $u \in [u_1, u_2]$ και ικανοποιούνται οι συνθήκες συνέχειας, τότε το εμβαδό δίνεται από τους τύπους $E = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} h(u) \sqrt{[g'(u)]^2 + [h'(u)]^2} du$ (22) αν η περιστροφή γίνεται περί τον xx' άξονα, και $E = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} g(u) \sqrt{[g'(u)]^2 + [h'(u)]^2} du$ (23) αν η περιστροφή γίνεται περί τον yy' άξονα.

3.7.3 Σε πολικές συντεταγμένες

Έστω $\rho = f(\theta) / [\theta_1, \theta_2]$ και ικανοποιείται η συνθήκη συνέχειας της $f(\theta), f'(\theta)$ στο $[\theta_1, \theta_2]$,

τότε το εμβαδό δίνεται από τους τύπους $E = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \sin \theta \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2} d\theta$ (24)

$$\text{ή } E = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \sin \theta \sqrt{\left[\frac{d\rho}{d\theta}\right]^2 + \rho^2} d\theta \quad (25).$$

3.7.4 Εφαρμογές

1. Εύρεση του εμβαδού της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της παραβολής $y^2 = 4x$ περί τον xx' άξονα από $x=1$ ως $x=4$. Είναι $y = 2\sqrt{x}$ διότι είναι θετική $\forall x \in [1, 4]$, συνεπώς

$$E = 2\pi \int_1^4 2\sqrt{x} \sqrt{1 + [(2\sqrt{x})']^2} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = 4\pi \int_1^4 \sqrt{x+1} dx = \frac{8\pi}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{8\pi}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$$

Από $y^2 = 4x$ είναι $x = \frac{y^2}{4}$ και θέτοντας τα όρια μεταβλής του x βρίσκω ότι το y μεταβάλλεται από 2 μέχρι 4 και ο (19) δίνει (όπου $y = \varphi(x)$)

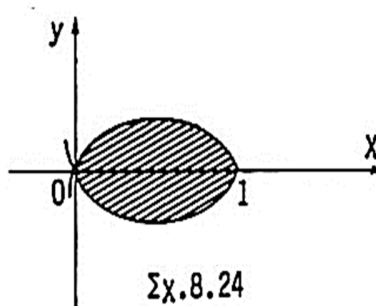
$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_2^4 y \sqrt{1 + \left[\left(\frac{y^2}{4}\right)'\right]^2} dy = 2\pi \int_2^4 \frac{y\sqrt{4+y^2}}{2} dy = \frac{\pi}{2} \int_2^4 [4+y^2]^{\frac{1}{2}} d(4+y^2) \\ &= \frac{\pi}{3} \left[(4+y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_2^4 = \frac{8\pi}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

2. Εύρεση του εμβαδού της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή του βρόγχου $8y^2 = x^2(1-x^2)$ περί τον xx' άξονα με $x \in [0, 1]$.

Παραγωγίζοντας, έχω ότι $16yy' = 2x - 4x^3$ και $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2x^3}{8y}$ άρα

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(x-2x^3)^2}{64y^2} = \frac{(3x-2x^3)^2}{64y^2}.$$

$$\text{Συνεπώς, } E = 2\pi \int_0^1 y \frac{3x-2x^3}{8y} dx = \frac{\pi}{4} \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$



3. Εύρεση του εμβαδού της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της καρδιοειδούς $\rho = \alpha(1-\cos\theta)$ περί τον πολικό άξονα. Από τον (25) είναι

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_0^\pi \rho \sin\theta \sqrt{\alpha^2 \sin^2\theta + \alpha^2 (1-\cos\theta)^2} d\theta = 2\pi \int_0^\pi \alpha(1-\cos\theta) \sin\theta \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha^2 \cos\theta} d\theta = \\ &= 2\sqrt{2}\alpha^2 \pi \int_0^\pi (1-\cos\theta) \sin\theta \sqrt{1-\cos\theta} d\theta = 2\sqrt{2}\alpha^2 \pi \int_0^\pi (1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}} d(1-\cos\theta) = \\ &= \frac{4\sqrt{2}\alpha^2 \pi}{5} \left[(1-\cos\theta)^{\frac{5}{2}} \right]_0^\pi = \frac{32\alpha^2 \pi}{5} \end{aligned}$$

4. Εύρεση του εμβαδού της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $x = \frac{t^2}{2} - 3, y = t$ περί τον άξονα xx' με $t \in [1, 4]$. Από τον (22) είναι

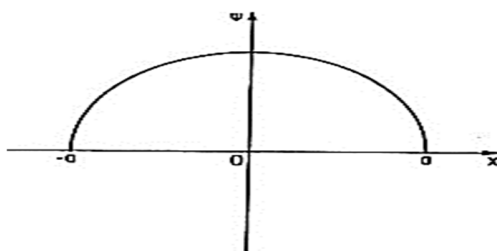
$$E = 2\pi \int_1^4 t \sqrt{1+t^2} dt = \frac{2\pi}{3} \left[(1+t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{2\pi}{3} \left[17^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right]$$

5. Εύρεση του εμβαδού της επιφάνειας που σχηματίζεται όταν το ημικύκλιο $x^2 + y^2 = \alpha^2$ (1) στραφεί περί άξονα xx' .

Η (1) δίνει την εξίσωση του άνω ημικυκλίου $y = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$. Ο (T_1) δίνει

$$E = 2\pi \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} \right) dx = \right.$$

$$\left. 2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(y \frac{\alpha}{y} \right) dx = 2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \alpha dx = 2\pi \alpha [x]_{-\alpha}^{\alpha} = 2\pi \alpha^2 + 2\pi \alpha^2 = 4\pi \alpha^2 \right.$$



6. Εύρεση του εμβαδού της επιφάνειας που σχηματίζεται από την περιστροφή περί τον άξονα xx' ενός τόξου AB καμπύλης c με εξίσωση $y = \sin(2x)$ όταν $A(0, 0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

$$\text{Ο } (T_1) \text{ δίνει } E = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \sqrt{1 + [(\sin 2x)']^2} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \sqrt{1 + 4\cos^2(2x)} dx$$

θέτω $t = 2\cos(2x)$ (1) άρα αν $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $t = -2$, συνεπώς

$$E = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2} \left(\frac{-1}{4} \right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt = \frac{-\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_{-2}^2 =$$

$$\pi \left[\sqrt{5} + \frac{\pi}{2} \ln(\sqrt{5} + 2) \right].$$

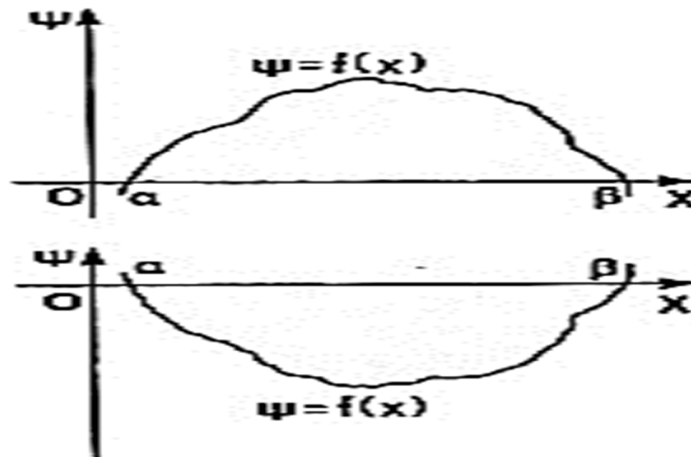
3.8 Ειδικές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

3.8.1 Καρτεσιανά εμβαδά

1. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από καμπύλη c (ορίζεται από τη συνάρτηση $y=f(x)$) και τον άξονα xx' , δίνεται από τους τύπους

$$E = \int_a^{\beta} f(x) dx, \text{ αν } f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \beta] \quad (T_1)$$

$$E = \int_a^{\beta} [-f(x)] dx, \text{ αν } f(x) \leq 0, \forall x \in [a, \beta] \quad (T_2)$$



Τα όρια ολοκλήρωσης βρίσκονται από τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Οι προηγούμενοι τύποι εκφράζονται και από τον $E = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right|$ (T_3)

2. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από μία καμπύλη c (που ορίζεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$), τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και τον άξονα xx' δίνεται από τους τύπους

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \text{ αν } f(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha, \beta] \quad (T_4)$$



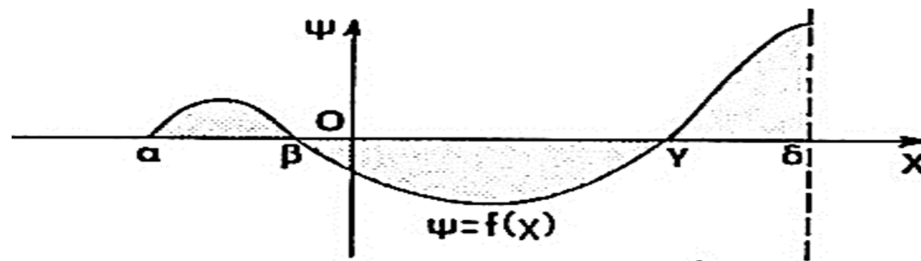
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} [-f(x)] dx, \text{ αν } f(x) < 0, \forall x \in [\alpha, \beta] \quad (T_5)$$



Οι προηγούμενοι τύποι, εκφράζονται από τον $E = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right|$ (T_6)

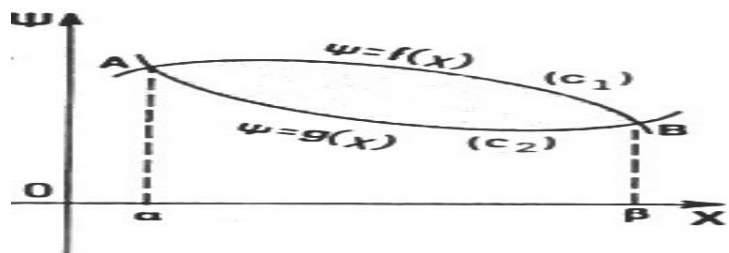
Αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$ τότε χωρίζω το $[\alpha, \beta]$ σε υποδιαστήματα στα οποία η f διατηρεί σταθερό πρόσημο και υπολογίζω τα αντίστοιχα εμβαδά.

Έτσι, για το επόμενο σχήμα είναι $E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} [f(x)] dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx$. Τα άκρα ολοκλήρωσης στην περίπτωση αυτή δίνονται από τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ ή από τις σχετικές $x = \lambda \in \mathbb{R}$.

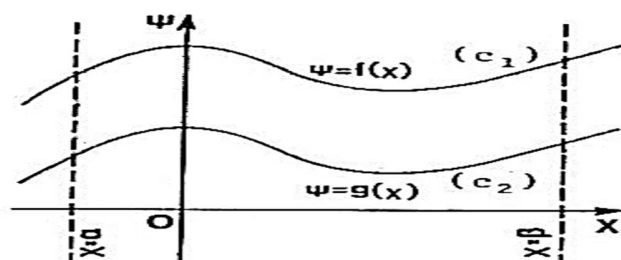


3. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις τεμνόμενες καμπύλες c_1, c_2 , που ορίζεται από τις συναρτήσεις $y = f(x), y = g(x)$ είναι $E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx$, αν $f(x) \geq g(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$ (T_7) ή $E = \int_{\alpha}^{\beta} [g(x) - f(x)] dx$, αν $g(x) \geq f(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$ (T_8)

Τα άκρα ολοκλήρωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των δύο καμπυλών και βρίσκονται από τη λύση του συστήματος $y = f(x), y = g(x)$. Οι προηγούμενοι τύποι εκφράζονται από τον κοινό τύπο $E = \left| \int_{\alpha}^{\beta} [g(x) - f(x)] dx \right|$ (T_9)



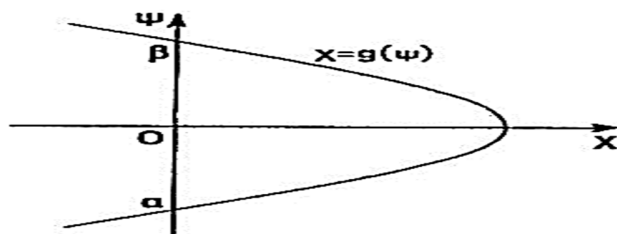
4. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες c_1, c_2 , που ορίζονται από τις συναρτήσεις $y = f(x), y = g(x)$ και τις ευθείες $x = a, x = b$ δίνεται από τους (T_7) ή (T_8).



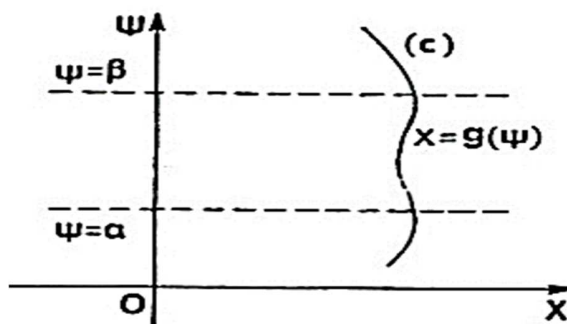
5. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα yy' και την καμπύλη c που ορίζεται από τη συνάρτηση $x = g(y)$, είναι $E = \int_{\alpha}^{\beta} g(y) dy$, αν $g(y) \geq 0, \forall y \in [\alpha, \beta]$ (T_{10})

ή $E = \int_a^\beta [-g(y)] dy$, αν $g(y) \leq 0, \forall y \in [a, \beta]$ (T_{11})

Τα άκρα ολοκλήρωσης βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης $g(y) = 0$.



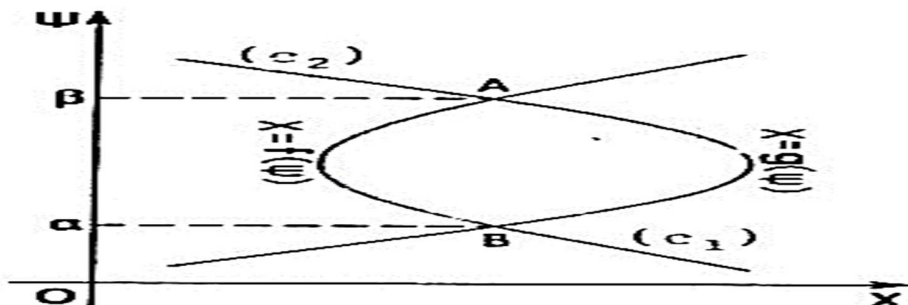
6. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $y = a, y = \beta$, τον άξονα yy' και την καμπύλη c , που ορίζεται από τη συνάρτηση $x = g(y)$, δίνεται από τους (T_{10}) ή (T_{11}) (ανάλογα αν είναι $g(y) \geq 0$ ή $g(y) \leq 0, \forall y \in [a, \beta]$).



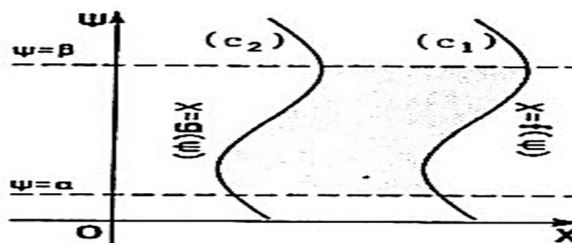
7. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις τεμνόμενες καμπύλες c_1, c_2 που ορίζονται από τις συναρτήσεις $x = f(y), x = g(y)$ είναι $E = \int_a^\beta [f(y) - g(y)] dy$, αν

$f(y) \geq g(y), \forall y \in [a, \beta]$ (T_{12}) ή $E = \int_a^\beta [g(y) - f(y)] dy$, αν $g(y) \geq f(y), \forall y \in [a, \beta]$

(T_{13}) . Τα άκρα ολοκλήρωσης είναι οι τεταγμένες των κοινών σημείων των δύο καμπυλών και βρίσκονται από τη λύση του συστήματος $x = f(y), x = g(y)$.



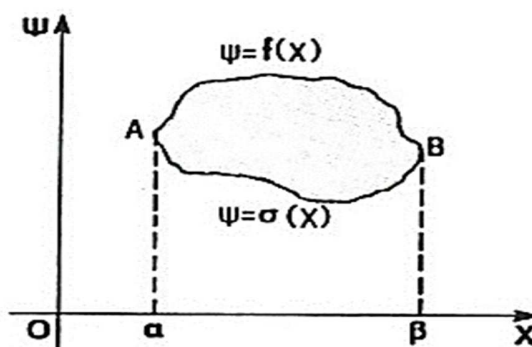
8. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $y = a$, $y = \beta$ και τις καμπύλες c_1 , c_2 που ορίζονται από τις συναρτήσεις $x = f(y)$, $x = g(y)$, δίνεται από τους (T_{12}) ή (T_{13}) (ανάλογα αν $f(y) \geq g(y)$ ή $g(y) \geq f(y)$, $\forall y \in [a, \beta]$).



9. Για την εύρεση του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη c , με εξίσωση $F(x, y) = 0$, εργαζόμαστε ως ακολούθως.

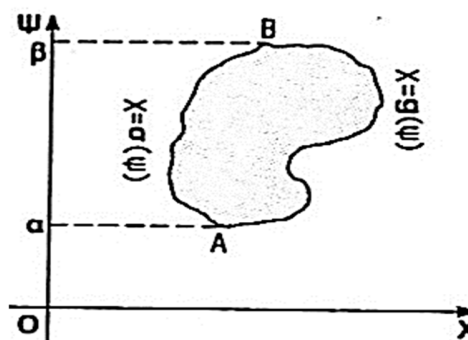
➤ Αν κάθε παράλληλη προς τον άξονα yy' τέμνει την κλειστή καμπύλη σε δύο το πολύ σημεία, τότε λύνω την (1) ως προς y και ορίζω τους δύο κλάδους της καμπύλης, τον πάνω, με εξίσωση $y = f(x)$ και τον κάτω με εξίσωση $y = \sigma(x)$.

Αν α, β είναι αντίστοιχα η μικρότερη και η μεγαλύτερη τετμημένη των σημείων της καμπύλης, βρίσκονται από το σύστημα $y = f(x)$, $y = \sigma(x)$, ισχύει $E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - \sigma(x)] dx$.



➤ Αν κάθε παράλληλη προς τον άξονα yy' τέμνει την κλειστή καμπύλη, σε τρία τουλάχιστον σημεία, λύνω την (1) ως προς x και ορίζω τους κλάδους της καμπύλης $x = g(y)$, $x = \sigma(y)$.

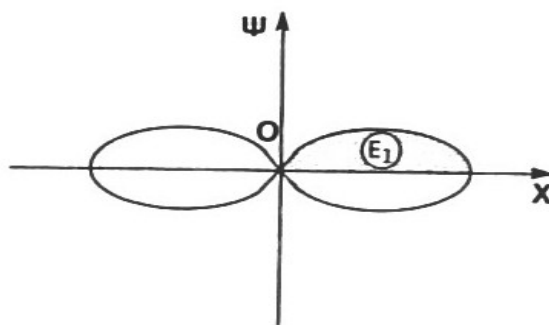
Αν α, β είναι αντίστοιχα η μικρότερη και μεγαλύτερη τεταγμένη των σημείων της καμπύλης, βρίσκονται από το σύστημα $x = g(y)$, $x = \sigma(y)$ και ισχύει $E = \int_{\alpha}^{\beta} [g(y) - \sigma(y)] dy$.



Παρατήρηση

Αν το χωρίο είναι συμμετρικό ως προς έναν τουλάχιστον άξονα υπολογίζω ένα μέρος του εμβαδού του χωρίου και παίρνω σαν ολικό εμβαδόν κατάλληλο πολλαπλάσιό του. Αυτό επιβάλλεται στην περίπτωση που τα όρια ολοκλήρωσης είναι αριθμοί αντίθετοι και η συνάρτηση περιττή, διότι τότε συχνά προκύπτει το εσφαλμένο αποτέλεσμα $E = 0$.

• Για την εύρεση του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της συνάρτησης $y = f(x)$, τον άξονα xx' και από οριζόντιες ή κατακόρυφες ασύμπτωτες της f , τότε χρησιμοποιώ κατάλληλο συνδυασμό τύπων με τη γεωμετρική ερμηνεία των ολοκληρωμάτων.



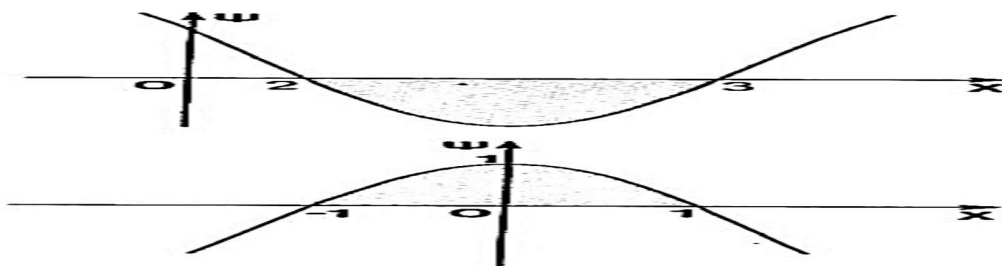
10. Εύρεση του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 5x + 6$ και τον άξονα xx' .

Λύση

Είναι $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x = 2, x = 3)$ και $x^2 - 5x + 6 \leq 0, \forall x \in [2, 3]$.

$$E = \int_2^3 -(x^2 - 5x + 6) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x \right]_2^3 =$$

$$\left(-\frac{27}{3} + \frac{45}{2} - 18 \right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{20}{2} - 12 \right) = \dots$$



11. Δείξτε ότι τα εμβαδά $S_0, S_1, \dots, S_v, \dots$ των χωρίων που σχηματίζονται από τον άξονα xx' και τις ανσίδες της καμπύλης $y = e^{-\alpha x} \sin x, (x \geq 0)$ σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\omega = e^{-\alpha\pi/\beta}$

Λύση

Το διάγραμμα της συνάρτησης τέμνει τον ημιάξονα Ox στα σημεία που οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $\sin(\beta x) = 0$ δηλαδή στα σημεία με τετμημένες $x_v = \frac{v\pi}{\beta}, v = 1, 2, \dots$

Είναι

$$y = e^{-\alpha x} \sin(\beta x) > 0, \forall x \in (x_{2\kappa}, x_{2\kappa+1}), \kappa = 0, 1, 2, \dots \text{ και}$$

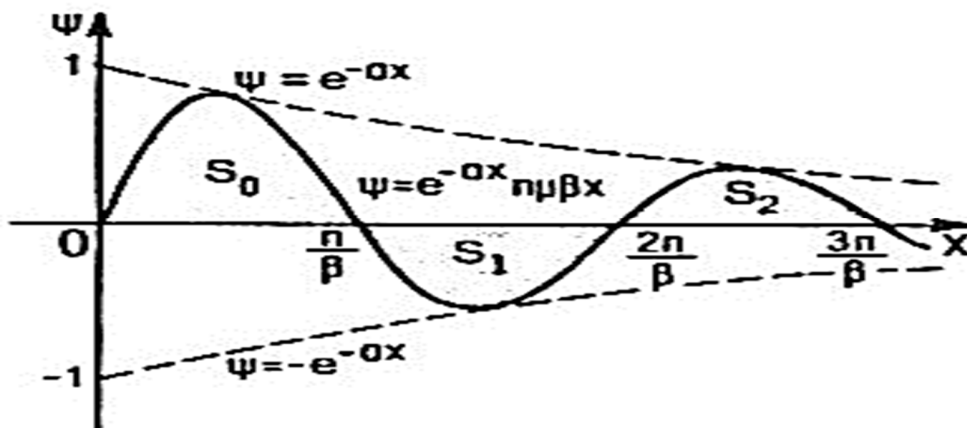
$$y = e^{-\alpha x} \sin(\beta x) > 0, \forall x \in (x_{2\kappa+1}, x_{2\kappa+2}), \kappa = 0, 1, 2, \dots \text{ διότι το πρόσημο της } y \text{ εξαρτάται από}$$

$$\text{το πρόσημο του } (-1)^v. \text{ Άρα } \int_{\frac{\beta}{\nu\pi}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{\beta}} |y| dx = (-1)^v \int_{\frac{\beta}{\nu\pi}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{\beta}} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) dx.$$

$$\text{Ισχύει ότι } \int e^{-\alpha x} \sin(\beta x) dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)] + c. \text{ Έτσι}$$

$$S_v = (-1)^v \int_{\frac{\beta}{\nu\pi}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{\beta}} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) dx = \frac{(-1)^{v+1}}{\alpha^2 + \beta^2} \left[e^{-\alpha(\frac{(\nu+1)\pi}{\beta})} \beta (-1)^{v+1} - e^{-\frac{\alpha\nu\pi}{\beta}} \beta (-1)^v \right] =$$

$$\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\frac{\alpha\nu\pi}{\beta}} (1 + e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}). \text{ Άρα } \omega = \frac{S_{v+1}}{S_v} = \frac{\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\frac{\alpha(\nu+1)\pi}{\beta}}}{\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\frac{\alpha\nu\pi}{\beta}} (1 + e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}})} = \frac{e^{-\frac{\alpha(\nu+1)\pi}{\beta}}}{e^{-\frac{\alpha\nu\pi}{\beta}} (1 + e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}})} = e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}$$



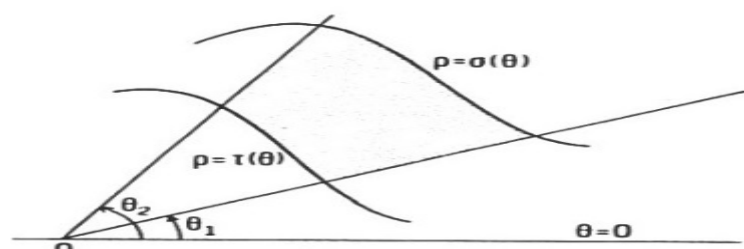
3.8.2 Πολικά εμβαδά

Οι καμπύλες ορίζονται με πολικές συντεταγμένες.

➤ Το εμβαδόν του χωρίου που, ως προς ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων, περικλείεται από την καμπύλη c , με εξίσωση $\rho = \rho(\theta)$ (όπου ρ η πολική ακτίνα του τυχαίου σημείου M της καμπύλης και θ η αντίστοιχη πολική γωνία) και από τις ημιευθείες (ακτίνες) $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ είναι

$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta \quad (T_1). \text{ Ο ίδιος τύπος δίνει και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από}$$

την καμπύλη $\rho = \rho(\theta)$.



➤ Το εμβαδόν του χωρίου που, ως προς ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων, περικλείεται μεταξύ των καμπυλών με εξισώσεις $\rho = \sigma(\theta)$, $\rho = \tau(\theta)$ και από τις ημιευθείες $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ είναι $E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\sigma^2(\theta) - \tau^2(\theta)] d\theta$ (T_2). Ο ίδιος τύπος δίνει και το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $\rho = \sigma(\theta)$, $\rho = \tau(\theta)$.

3.8.3 Παρατηρήσεις

Προκειμένου να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\rho = \rho(\theta)$, τα όρια ολοκλήρωσης εξαρτώνται από τη μορφή της καμπύλης. Έτσι:

1. Αν η εξίσωση της καμπύλης είναι της μορφής $\rho = a \cdot \sin(k\theta)$, $k \in \mathbb{N}^*$, τότε τα όρια ολοκλήρωσης είναι $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{k}$.

➤ Αν ο k είναι περιττός, τότε το ολικό εμβαδόν είναι $E_{\text{ολ}} = kE$ (τότε έχουμε ισοεμβαδικά φύλλα και το $E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta$ δίνει το εμβαδόν του ενός φύλλου).

➤ Αν ο k είναι άρτιος, τότε είναι $E_{\text{ολ}} = 2k \cdot E$ (διότι η καμπύλη αποτελείται από $2k$ φύλλα και E είναι το εμβαδόν του ενός φύλλου).

2. Αν η καμπύλη είναι της μορφής $\rho = a \cdot \cos(k\theta)$, $k \in \mathbb{N}^*$, τότε τα όρια ολοκλήρωσης είναι $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2k}$.

➤ Αν ο k είναι περιττός, τότε το ολικό εμβαδόν είναι $E_{\text{ολ}} = 2kE$, $E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta$. Η καμπύλη τότε αποτελείται από k φύλλα και E είναι το εμβαδόν του μισού φύλλου.

➤ Αν ο k είναι άρτιος τότε είναι $E_{\text{ολ}} = 4kE$. Η καμπύλη τότε αποτελείται από $2k$ φύλλα και E είναι το εμβαδόν του μισού φύλλου.

3. Αν η εξίσωση της καμπύλης είναι της μορφής $\rho = a + \beta \cdot \cos\theta$ ή $\rho = a - \beta \cdot \cos\theta$ τότε:

➤ Αν $[\alpha] > [\beta]$, (δηλαδή $\rho \neq 0$ για κάθε $\theta \in (0, 2\pi)$), τότε είναι $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$ και $E_{\text{ολ}} = E$.

➤ Αν $[\alpha] \leq [\beta]$ τότε $\theta_1 = 0$. Για να βρω το θ_2 βάζω στην εξίσωση της καμπύλης όπου ρ το 0 και λύνω ως προς θ . Η μικρότερη τιμή του θ είναι το θ_2 .

Για να βρω ποιο μέρος του εμβαδού έχω υπολογίσει, πρέπει να χαράξω την καμπύλη ώστε να δω πόσα φύλλα έχει και ποιο εμβαδόν έχω υπολογίσει.

4. Αν η εξίσωση της καμπύλης είναι της μορφής $\rho = a + \beta \cdot \sin(k\theta)$ ή $\rho = a - \beta \cdot \sin(k\theta)$ τότε:

➤ Αν $[\alpha] > [\beta]$ (δηλαδή είναι $\rho \neq 0 \forall \theta \in (0, 2\pi)$) είναι $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$ και $E_{\text{ολ}} = E$.

➤ Αν $[a] \leq [\beta]$ είναι $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$. Για να βρω το θ_2 βάζω στην εξίσωση της καμπύλης όπου $\rho=0$ και λύνω ως προς θ . Σαν θ_2 παίρνω τη μικρότερη τιμή του θ , Για να βρω ποιο μέρος του εμβαδού έχω υπολογίσει, πρέπει να χαράξω την καμπύλη ώστε να δω το πλήθος των φύλλων και ποιο εμβαδόν έχω υπολογίσει.

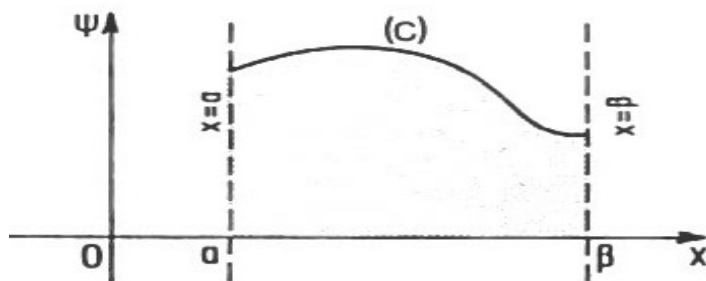
Σημείωση

Αν η καμπύλη είναι της μορφής $\rho^2 = a^2 \cdot \sin(k\theta)$ ή $\rho^2 = a^2 \cos(k\theta)$ είναι δυνατό να έχει το μισό αριθμό φύλλων από αυτο που δείχνουν οι τιμές k . Αυτό οφείλεται στο ότι τα υπόλοιπα φύλλα είναι φανταστικά. Στην περίπτωση αυτή, πρέπει να σχεδιάζουμε την καμπύλη για να δούμε ποιο μέρος του εμβαδού έχουμε υπολογίσει.

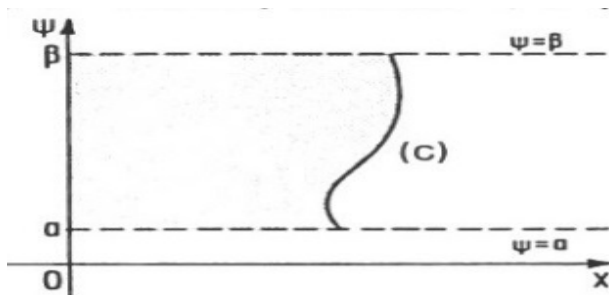
5. Για να βρω τα όρια ολοκλήρωσης στον τύπο (T_2) , αν οι καμπύλες τέμνονται, λύνω το σύστημα $\rho = \sigma(\theta)$, $\rho = \tau(\theta)$ και βρίσκω τις τιμές των θ_1 , θ_2 .

3.8.4 Παραμετρικά εμβαδά

➤ Αν μια συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ με $t \in [t_1, t_2]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη c της f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ είναι $E = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt$ (T_1) εφόσον $a = x(t_1)$, $\beta = x(t_2)$.



➤ Αν μια συνάρτηση $f(y)$ ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$, με $t \in [t_1, t_2]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη c της f , τον άξονα yy' και τις ευθείες $y = a$, $y = \beta$ δίνεται από τον τύπο $E = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t) dt$ (T_2) εφόσον $a = y(t_1)$, $\beta = y(t_2)$.

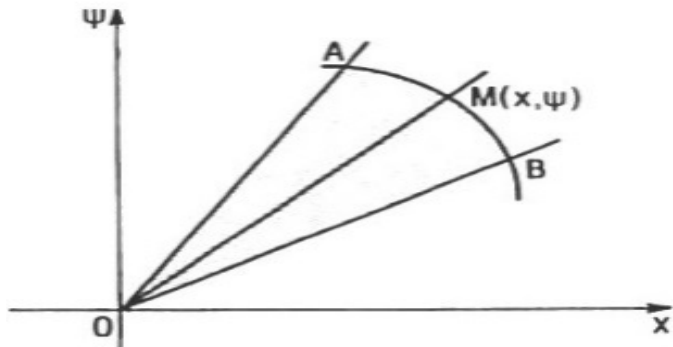


➤ **Εμβαδόν κυκλικού τομέα.** Θεωρώ καμπύλη c με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$. Έστω A, B δύο σημεία της καμπύλης στα οποία αντιστοιχούν οι τιμές t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) της παραμέτρου. Όσο αυξάνεται το t από t_1 έως t_2 , το σημείο $M(x, y)$ της καμπύλης c (και η επιβατική ακτίνα OM) κινείται πάντα κατά την ίδια φορά περιστροφής. Τότε το εμβαδόν του τομέα OAB που διαγράφεται από την επιβατική ακτίνα OM είναι

$$E = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt \quad (T_3)$$

Το εμβαδόν E είναι θετικό ή αρνητικό αν η κίνηση της OM γίνεται κατά την θετική ή αρνητική φορά αντίστοιχα. Αν η παράμετρος t εκφράζει το συντελεστή διεύθυνσης της επιβατικής ακτίνας OM , δηλαδή αν $y(t) = t \cdot x(t)$, τότε είναι $x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = x^2(t)$.

Άρα, $E = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$.



3.8.5 Παρατηρήσεις

1. Προκειμένου να βρω το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από μια κλειστή καμπύλη c θα χρησιμοποιήσω τον (T_3) . Στην περίπτωση αυτή οι τιμές της παραμέτρου t_1, t_2 αντιστοιχούν στα σημεία A, B που είναι η αρχή και το τέλος της καμπύλης όταν αυτή διαγράφεται κατά τη θετική φορά.

2. Αν το χωρίο είναι συμμετρικό ως προς έναν τουλάχιστον άξονα συντεταγμένων, βρίσκω το εμβαδόν με κατάλληλο πολλαπλάσιο του, διότι είναι δυνατόν, αν δεν χωρίσουμε κατάλληλα το χωρίο, να βρούμε το εσφαλμένο αποτέλεσμα $E=0$.

3. Αν είναι δύσκολο να βρω τα όρια ολοκλήρωσης t_1, t_2 φέρνω την καμπύλη στη μορφή $f(x, y) = 0$ (δηλαδή κάνω απαλοιφή της παραμέτρου). Ακολουθώ, βρίσκω από το διάστημα μεταβολής του x ή του y τις τιμές $(x = a, x = \beta)$ ή $(y = a, y = \beta)$ στις οποίες αντιστοιχούν οι τιμές t_1, t_2 της παραμέτρου, δηλαδή λύνω τις εξισώσεις $a = x(t)$, $\beta = x(t)$ ή $a = y(t)$, $\beta = y(t)$