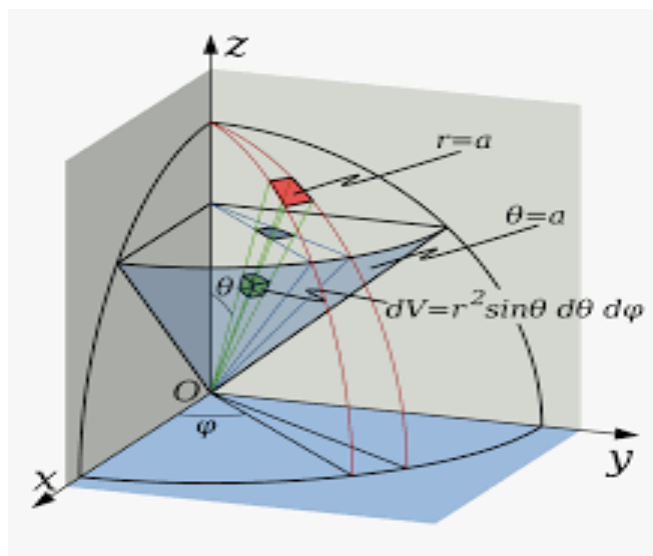




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων στη φυσική



Σπουδαστής: **Βελούδης Παναγιώτης** (AM 7868)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),**
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2020–2021

Ημερομηνία ανάθεσης: **03.12.2019**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **....09.2020**
 Ημερομηνία εξέτασης: **....09.2020**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Ιδιαίτερα ικανοποιητική	
2	Χρηστίδη Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
3	Φραγκιαδάκης Νικόλαος Δρ. Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Αναπληρωτής Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Έργο παραγόμενο από σταθερή δύναμη.....	4
1.1 Εφαρμογές.....	5
2. Έργο παραγόμενο από μεταβλητή δύναμη.....	7
2.1 Εφαρμογές.....	7
3. Διαφορά δυναμικής ενέργειας	8
3.1 Εφαρμογές.....	8
4. Ενέργεια ελατηρίου.....	9
5. Ροπές επιπέδων χωρίων και στερεών εκ περιστροφής – κέντρα βάρους	9
5.1 Πρώτο θεώρημα του Πάππου.....	11
5.2 Εφαρμογές.....	13
6. Ροπές αδρανείας επιπέδων επιφανειών και στερεών εκ περιστροφής.....	16
6.1 Εφαρμογές.....	18
7. Κέντρο βάρους και ροπές αδρανείας επίπεδης καμπύλης	19
7.1 Εφαρμογές.....	22
8. Κέντρο βάρους και ροπές αδρανείας επιφάνειας εκ περιστροφής	24
8.1 Δεύτερο θεώρημα του Πάππου	25
8.2 Γεωμετρική ροπή	25
8.3 Εφαρμογές.....	26
9. Πίεση των ρευστών.....	34
9.1 Δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια βυθισμένη σε υγρό.....	34
9.2 Εφαρμογές.....	35

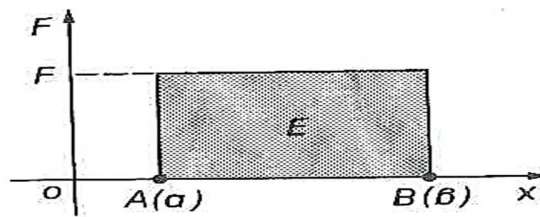
1. Έργο παραγόμενο από σταθερή δύναμη

Αν η δύναμη F είναι σταθερή κατά μέτρο, τότε το έργο W που παράγει όταν εφαρμόζεται σε υλικό σημείο και έχει ως διεύθυνση τη διεύθυνση της κίνησης και μετακινεί το σημείο απόσταση S από την αρχική θέση, κινούμενο επί ευθύγραμμης τροχιάς, είναι $W = F \cdot s$.

Έστω υλικό σημείο που κινείται στον άξονα xx' . Θεωρώ ως θετική φορά του άξονα, τη φορά κίνησης του σημείου. Η θέση A του σημείου στον άξονα, καθορίζεται από την απόσταση του από την αρχή O . Αν στο σημείο ασκείται δύναμη της οποίας το μέτρο εξαρτάται μόνο από τη θέση του σημείου, τότε η συνάρτηση που δίνει το μέτρο της δύναμης είναι $y = F(x)$ όπου x η απόσταση του κινητού από την αρχή O . Για τον υπολογισμό του έργου που παράγει η δύναμη, όταν μετατοπίζει το υλικό σημείο στον άξονα από τη θέση $A(\alpha)$ στη θέση $B(\beta)$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

A. Αν η δύναμη έχει τη φορά κίνησης και είναι ανεξάρτητη του x , δηλαδή σταθερή, η συνάρτηση της δύναμης είναι $y=F$ (σταθερή) και το ζητούμενο έργο W είναι $W = F(\beta - \alpha) = F \cdot s$ (1) Το έργο δίνεται αριθμητικά από το εμβαδό του χωρίου E (σχ. 1)

$$\text{και } E = W = \int_a^\beta F \, dx = F \int_a^\beta dx = F(\beta - \alpha)$$



Σχ. 1

B. Αν η δύναμη έχει φορά που σχηματίζει γωνία θ με τη φορά κίνησης και είναι ανεξάρτητη του x , δηλαδή σταθερή, αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία παράλληλη προς τη διεύθυνση της κίνησης, μέτρου $F_x = F \cdot \cos\theta$. Η κάθετη συνιστώσα δεν παράγει έργο, ενώ η επιτροχία συνιστώσα είναι σταθερή κατά μέτρο και με διεύθυνση τη διεύθυνση κίνησης, άρα το παραγόμενο έργο είναι

$$W = \int_a^\beta F \cdot \cos\theta \, dx = F \cdot \cos\theta \int_a^\beta dx = F \cdot \cos\theta (\beta - \alpha) = F \cdot \cos\theta \cdot s = F_x \cdot s \quad (2)$$

Το πρόσημο του έργου καθορίζεται από το συνημίτονο της γωνίας θ . Αν $0^\circ < \theta < 90^\circ$ τότε το έργο είναι θετικό. Αν $\theta = 90^\circ$ τότε το έργο είναι μηδέν. Αν $90^\circ < \theta < 180^\circ$ τότε το έργο είναι αρνητικό, δηλαδή καταναλισκόμενο.

Γ. Αν η δύναμη έχει τη φορά κίνησης και εξαρτάται από το x , η συνάρτηση της δύναμης είναι η συνεχής συνάρτηση $y = F(x)$ ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$. Για τον υπολογισμό του ζητούμενου έργου ισοδιαμερίζω το $[\alpha, \beta]$ με τα διαιρετικά σημεία

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{v-1} < x_v = \beta \text{ και το πλάτος κάθε υποδιαστήματος είναι } \Delta_x = \frac{\beta - \alpha}{v}$$

και $\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\beta - \alpha}{v} = 0$. Έτσι μπορώ να δεχτώ ότι σε καθένα από τα υποδιαστήματα $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{v-1}, x_v]$ η F διατηρεί σταθερή τιμή, έστω την τιμή που έχει στο

αριστερό άκρο. Άρα, από (1) το έργο που παράγει η δύναμη από x_0 έως x_1 είναι $W_1 = F(x_0)(x_1 - x_0) = F(x_0) \cdot \frac{\beta - \alpha}{\nu} = F(x_0) \cdot \Delta_x$. Όμοια, από x_1 έως x_2 είναι $W_2 = F(x_1) \cdot \Delta_x$ και τελικά από $x_{\nu-1}$ έως x_ν είναι $W_\nu = F(x_{\nu-1}) \cdot \Delta_x$. Έτσι, το παραγόμενο έργο στο $[\alpha, \beta]$ είναι $W = \lim_{\Delta_x \rightarrow +\infty} [F(x_0) \cdot \Delta_x + F(x_1) \cdot \Delta_x + \dots + F(x_{\nu-1}) \cdot \Delta_x]$ όπου $\Delta_x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$. Από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος για το έργο της F στο $[\alpha, \beta]$ είναι $W = \int_a^\beta F(x) dx$ (3)

1.1 Εφαρμογές

1. Η επιμήκυνση ενός ελατηρίου μήκους 10 cm, είναι ανάλογη με τη δύναμη F που του ασκείται. Ποιο είναι το έργο W της F=25 Kp, όταν το ελατήριο επιμηκύνεται κατά το $\frac{1}{5}$ του αρχικού του μήκους;

Λύση

Είναι $F(x)=Kx$, $K=\text{σταθερά}$ και $x = \frac{1}{5}10 = 2 \text{ cm} = \frac{2}{100} \text{ m}$ άρα $F = k \cdot x \Leftrightarrow 25 = k \frac{2}{100} \Leftrightarrow k = 1.250$ οπότε $W = \int_0^{0,02} 1250x dx = 1250 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0,02} = 0,5 \text{ KJm}$

2. Ποιο έργο παράγεται από τη δύναμη F με την οποία ηλεκτρικό φορτίο q_1 απωθεί άλλο q_2 από την θέση A_1 που απέχει από το q_1 απόσταση R_1 στη θέση A_2 που απέχει απόσταση R_2 από το q_1 , αν το q_1 είναι τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος αξόνων;

Είναι $F = K \frac{q_1 q_2}{R^2}$, άρα $W = \int_{R_1}^{R_2} F dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{K q_1 q_2}{R^2} = K q_1 q_2 \left[-\frac{1}{R} \right]_{R_1}^{R_2} = K q_1 q_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

3. Μια δεξαμενή χωρητικότητας $V_0=200 \text{ L}$ περιέχει αέρα με πίεση $P_0=10^7 \text{ N/m}^3$ που εκτονώνεται, σε σταθερή θερμοκρασία, μέχρι η πίεση να γίνει $P_1=10^5 \text{ N/m}^3$, μέσα σε μηχανή χωρίς τριβές. Πόσο έργο παράγεται από αυτή την εκτόνωση;

Λύση

Υποθέτω ότι ο αέρας ακολουθεί τον νόμο των Boyle–Marriott δηλαδή $P_1 V_1 = P_0 V_0 = C$ σταθερά (1). Έστω s το εμβαδό του κυλίνδρου της μηχανής μέσα στο οποίο εκτονώνεται ο αέρας της δεξαμενής. Το έμβολο του κυλίνδρου θα μετατοπισθεί κατά dx (ο κύλινδρος της μηχανής έχει τοποθετηθεί σε ένα σύστημα αξόνων xOy , ώστε ο xx' άξονας να είναι άξονας του κυλίνδρου). Τότε παράγεται ένα στοιχειώδες έργο

$dw = F dx$ (2), όπου F η ολική δύναμη. Είναι $P_1 = \frac{F}{S}$ ή $F = SP_1$ (3)

Άρα, η (2) γράφεται $dW = SP_1 dx = P_1 dV_1$ (4) διότι $S dx = dV_1$

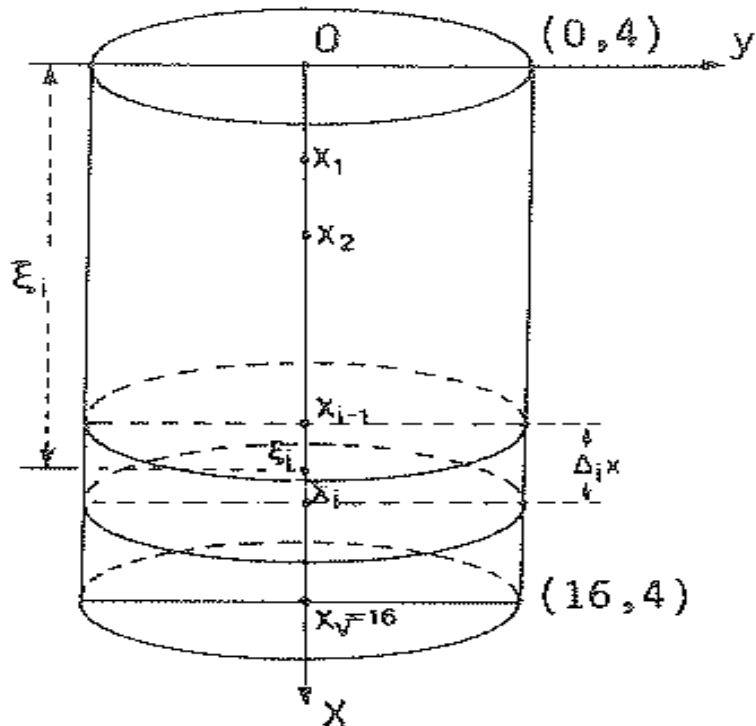
Από (1) είναι $V_1 = \frac{P_0 \cdot V_0}{P_1}$ και παραγωγίζοντας $P_1 dV_1 + V_1 dP_1 = 0$ ή $dV_1 = \frac{V_1 dP_1}{P_1}$ οπότε η (4)

γράφεται $dW = -P_1 V_1 \frac{dP_1}{P_1} = -P_0 V_0 \frac{dP_1}{P_1}$. Ολοκληρώνοντας είναι

$$W = -P_0 V_0 \int_{P_0}^{P_1} \frac{dP_1}{P_1} = -P_0 V_0 [\log P_1] \frac{P_1}{P_0} = -P_0 V_0 (\log P_1 - \log P_0) = P_0 V_0 \log \frac{P_0}{P_1}$$

Και αντικαθιστώντας $W = 10^7 \cdot 0,2 \cdot \log 100 = 10^7 \cdot 0,2 \cdot 4,6 = 9,2 \cdot 10^6 \text{ Joules}$

4. Ορθό κυλινδρικό δοχείο ακτίνας $R=4 \text{ cm}$ και ύψους $h=16 \text{ cm}$ είναι γεμάτο με νερό. Ποιο είναι το έργο που παράγεται αντλώντας το νερό, από την κορυφή του δοχείου;



Λύση

Έστω ο κύλινδρος του σχήματος και το σύστημα αξόνων xy που παίρνω ώστε η αρχή να είναι το κέντρο της βάσης του κυλίνδρου και ο xx' άξονας κατακόρυφος. Παίρνω ένα διαμερισμό του διαστήματος $[0, 16]$ και έστω $[x_{i-1}, x_i]$ το τυχόν υποδιάστημα με $\lambda \rightarrow 0$. Λόγω του διαμερισμού, ο κύλινδρος χωρίζεται σε στοιχειώδεις κυλίνδρους πάχους $\Delta_i x$, $i=1,2,\dots,n$ (1) το δε βάρος αυτού είναι $W_i = \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \xi_i \cdot \Delta_i x$ με ε το ειδικό βάρος του νερού. Για όλους τους στοιχειώδεις κυλίνδρους, το παραγόμενο έργο είναι

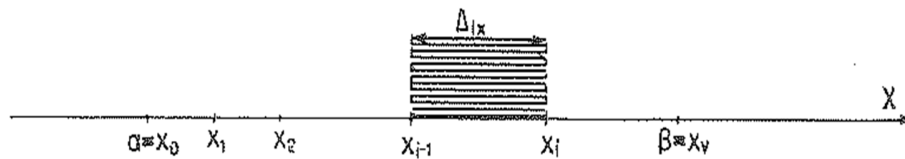
$$\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \xi_i \cdot \Delta_i x, \text{ άρα } W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \xi_i \cdot \Delta_i x = \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \int_0^{16} x dx$$

$$\text{Συνεπώς, } W = 16 \cdot \varepsilon \cdot \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{16} = 16 \cdot \varepsilon \cdot \pi \cdot 128 = 2.048 \cdot \pi \text{ erg με } \varepsilon = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

2. Έργο παραγόμενο από μεταβλητή δύναμη

Αν η δύναμη δεν είναι σταθερή κατά μέτρο, αλλά μεταβάλλεται σε κάθε θέση x του υλικού σημείου, τότε προκειμένου να βρω το έργο που παράγει, όταν εφαρμόζεται στο υλικό σημείο και μετακινεί αυτό από τη θέση $x = a$ στη θέση $x = b$, εργάζομαι ως εξής:

Αφού η δύναμη μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, είναι συνάρτηση της τετμημένης x (παίρνω το δρόμο ως άξονα xx'), δηλαδή $F(x)$ και έστω ότι είναι ορισμένη και συνεχή στο $[\alpha, \beta]$. Κάνω μία διαμέριση Δ_n του $[\alpha, \beta]$ την $\Delta_n = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = \beta\}$:



Σχ. 9.1

Αν $\lambda \rightarrow 0$ και σε κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης θεωρηθεί η δύναμη σταθερή, η δύναμη στο τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ μήκους $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ είναι $F(\xi_i)$, όπου $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ συνεπώς παράγει ένα στοιχειώδες έργο από x_{i-1} μέχρι x_i που είναι λόγω της (1) $W_i = F(\xi_i) \Delta_i x$, $i=1, 2, \dots, n$. Αν πάρω το άθροισμα όλων αυτών των στοιχειωδών έργων είναι $\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta_i x$ (2) που παρέχει μια πρώτη προσέγγιση του όλου έργου που παράγεται από την $F(x)$ στο $[\alpha, \beta]$. Παίρνοντας το όριο της (2) με $\lambda \rightarrow 0$ έχω, αφού υπέθεσα την $F(x)$ συνεχή

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n W_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta_i x = \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx \quad \text{ή} \quad W = \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx \quad (3)$$

Η (3) δίνει το έργο που παράγει η μεταβλητή δύναμη που εφαρμόζεται σε ένα υλικό σημείο και μετακινεί αυτό, επί ευθυγράμμου τροχιάς, από το σημείο α μέχρι το σημείο β .

2.1 Εφαρμογές

1. Εύρεση του έργου του βάρους, κατά την εκτόξευση πυραύλου σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης.

Λύση

Το ζητούμενο έργο A είναι αρνητικό διότι το βάρος B του πυραύλου σε κάθε σημείο της τροχιάς του έχει φορά αντίθετη από τη μετατόπιση. Η δύναμη έλξης του πυραύλου είναι $B = G \frac{m_{\Pi} \cdot m_{\Gamma}}{x^2}$ όπου m_{Π} , m_{Γ} οι μάζες πυραύλου και Γης αντίστοιχα, x η απόσταση πυραύλου από κέντρο της Γης και G η σταθερά παγκόσμιας έλξης. Έστω R η ακτίνα της Γης. Είναι

$$\begin{aligned}
A &= - \int_R^{+\infty} B dx = - \int_R^{+\infty} \frac{Gm_{\Pi} \cdot m_{\Gamma}}{x^2} dx = -Gm_{\Pi} \cdot m_{\Gamma} \int_R^{+\infty} x^{-2} dx = -Gm_{\Pi} \cdot m_{\Gamma} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_R^{\beta} x^{-2} dx = \\
&= -Gm_{\Pi} \cdot m_{\Gamma} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_R^{\beta} = -Gm_{\Pi} \cdot m_{\Gamma} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{R} \right] = -\frac{Gm_{\Pi} \cdot m_{\Gamma}}{R} = -\frac{Gm_{\Pi} \cdot m_{\Gamma}}{R^2} \\
R &= -B_0 \cdot R. \text{ (Όπου } B_0 \text{ το βάρος στην επιφάνεια της Γης)}
\end{aligned}$$

3. Διαφορά δυναμικής ενέργειας

Μάζα m από σημείο A που απέχει r_A από το κέντρο της Γης ανυψώνεται σε σημείο B που απέχει r_B από το κέντρο της γης. Για τον υπολογισμό της διαφοράς δυναμικής ενέργειας $E(B) - E(A)$, ισοδιαμερίζω το $[r_A, r_B]$ με τα διαιρετικά σημεία $r_0 = r_A < r_1 < r_2 < \dots < r_{v-1} < r_v = r_B$. Το πλάτος του κάθε υποδιαστήματος είναι $\Delta_r = \frac{r_B - r_A}{v}$

όπου $\lim_{v \rightarrow +\infty} \Delta_r = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{r_B - r_A}{v} = 0$. Αν g_k η επιτάχυνση της βαρύτητας στο σημείο που απέχει από το κέντρο της Γης r_k , τότε $g_k = \frac{G \cdot M}{r_k^2}$ όπου G η παγκόσμια σταθερά και M η μάζα

της Γης. Η δυναμική ενέργεια της m στο σημείο αυτό είναι $m \cdot g \cdot r_k$ και η διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ του σημείου P_{k-1} με απόσταση r_{k-1} και του σημείου P_k με

$$E(P_k) - E(P_{k-1}) = mg_k \Delta r = m \cdot \frac{G \cdot M}{r_k^2} \Delta r = G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r_k^2} \Delta r$$

απόσταση r_k , είναι

Τότε $E(B) - E(A) = \lim_{\Delta_r \rightarrow 0} \left[\frac{G \cdot m \cdot M}{r_1^2} \Delta_r + \frac{G \cdot m \cdot M}{r_2^2} \Delta_r + \dots + \frac{G \cdot m \cdot M}{r_v^2} \Delta_r \right]$ και από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος είναι

$$E(B) - E(A) = GmM \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = GmM \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = GmM \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

3.1 Εφαρμογές

1. Εύρεση της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ηλεκτρονίου, όταν μεταπηδά από επιτρεπτή τροχιά ακτίνας r_1 σε άλλη επιτρεπτή τροχιά ακτίνας r_2 , σύμφωνα με τις συνθήκες Bohr.

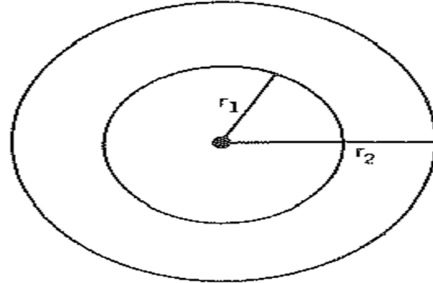
Λύση

Η δύναμη που ασκείται μεταξύ πυρήνα-ηλεκτρονίου είναι από το νόμο Coulomb $F = K \frac{Qe}{r^2}$ (όπου Q το φορτίο του πυρήνα, e το φορτίο του ηλεκτρονίου και r η απόσταση πυρήνα-ηλεκτρονίου). Έτσι, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta E_j = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{KQe}{r^2} dr = KQe \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = KQe \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = KQe \left[-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right] = KQe \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Τα r_1, r_2 θα υπολογισθούν από την 1^η συνθήκη του Bohr $mvr = n \frac{h}{2\pi}$ ($n=1, 2, \dots$) και την

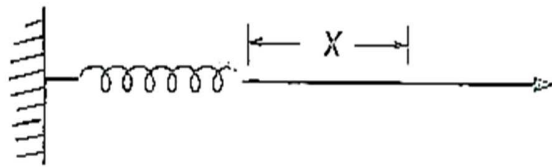
κεντρομόλο δύναμη $\frac{mv^2}{r} = K \frac{Qe}{r^2}$.



4. Ενέργεια ελατηρίου

Σε ιδανικό ελατήριο ασκείται δύναμη ώστε να το επιμηκύνει κατά απόσταση x . Η αντίσταση του ελατηρίου είναι μία δύναμη μέτρου F ανάλογου της επιμήκυνσης (νόμος του Hooke) δηλαδή ισχύει ότι $F = k \cdot x$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου. Η διεύθυνση της F είναι η διεύθυνση της κίνησης, άρα ο (3) για το έργο της F και την απομάκρυνση

από τη θέση $x=a$ έως $x=\beta$ είναι:
$$W = \int_a^\beta (k \cdot x) dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^\beta = k \frac{\beta^2 - a^2}{2}.$$



5. Ροπές επιπέδων χωρίων και στερεών εκ περιστροφής – κέντρα βάρους

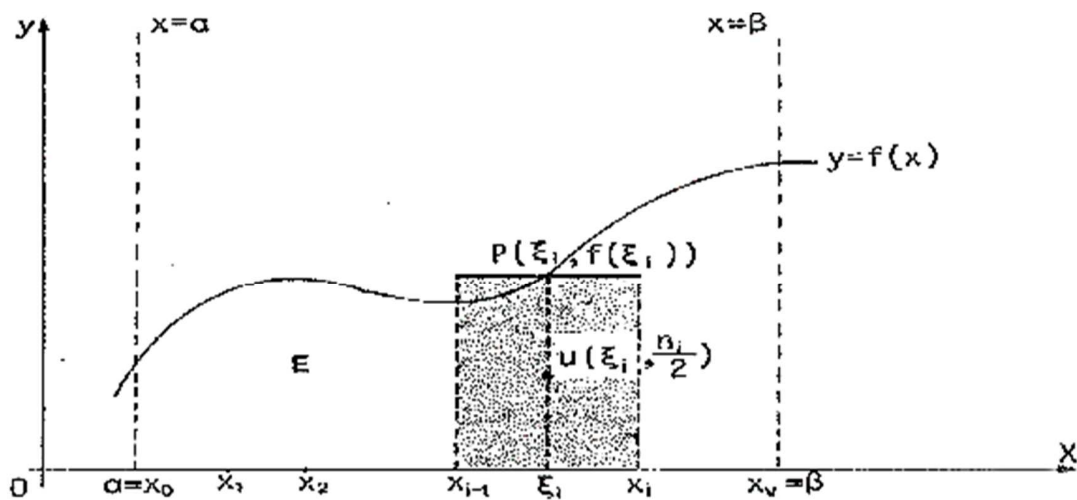
Η μάζα ενός στερεού σώματος είναι το μέτρο της ποσότητας της ύλης από την οποία αυτό αποτελείται, ενώ ο όγκος του είναι το μέτρο του χώρου που αυτό καταλαμβάνει στο διάστημα. Αν η μάζα, ανά μονάδα όγκου είναι ίδια, σε όλη την έκταση του σώματος, τότε το σώμα λέγεται **ομογενές**. Θα θεωρώ την πυκνότητα ίση με τη μονάδα. Συνηθίζεται (σε μηχανική και φυσική) να θεωρώ μια δεδομένη μάζα συγκεντρωμένη σε ένα σημείο που καλείται **κέντρο μάζας** (ή κέντρο βαρύτητας). Για ένα ομογενές σώμα, αυτό το σημείο συμπίπτει με το **κέντρο βάρους** ή το γεωμετρικό του κέντρο. Π.χ το κέντρο μάζας μιας λαστιχένιας μπάλας συμπίπτει με το κέντρο βάρους (κέντρο) της μπάλας που υποτίθεται σαν γεωμετρικό στερεό (σφαίρα). Το κέντρο βάρους ενός ορθογωνίου φύλλου χαρτιού κείται στη μέση απόσταση μεταξύ των δύο επιφανειών, αλλά μπορεί να θεωρηθεί τοποθετημένο σε μία των επιφανειών του, στην τομή των διαγώνιων. Άρα, το κέντρο μάζας ενός λεπτού ελάσματος ταυτίζεται με το κέντρο βάρους αυτού, που θεωρείται ως επίπεδη επιφάνεια, το δε εμβαδό της επιφάνειας ταυτίζεται αριθμητικά με τη μάζα του ελάσματος.

Ονομάζω **ροπή** M_Γ μίας επίπεδης επιφάνειας, ως προς μια γραμμή Γ , το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας επί την απόσταση d του κέντρου βάρους (κέντρο μάζας) από τη γραμμή Γ . Η ροπή μίας σύνθετης επιφάνειας, ως προς τη Γ , είναι το άθροισμα των ροπών των ανεξαρτήτων επιπέδων ως προς τη γραμμή Γ . Αν η επιφάνεια αναφέρεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων xOy , τότε ροπή M_x αντίστοιχα M_y της επιφάνειας ως προς τους xx' και yy' άξονες, ονομάζω το γινόμενο του εμβαδού αυτής, επί την απόσταση του

κέντρου βάρους της από τους xx' και yy' άξονες, αντίστοιχα. Αν μια επίπεδη επιφάνεια έχει εμβαδό E και κέντρο βάρους $K(\bar{X}, \bar{Y})$ με ροπές M_x, M_y , ως προς τους xx' και yy' άξονες αντίστοιχα, τότε από τον ορισμό $E \cdot \bar{X} = M_y$ και $E \cdot \bar{Y} = M_x$ (1)

Έστω ότι το κέντρο βάρους ενός ορθογωνίου είναι το σημείο τομής των διαγώνιων (το κέντρο αυτού). Μπορώ να υπολογίσω το κέντρο βάρους (συντεταγμένες) ενός επιπέδου χωρίου E που ορίζεται από συνάρτηση $y=f(x)$ ορισμένη και συνεχή στο $[a, \beta]$, τις ευθείες $x=a, x=\beta$ και του xx' άξονα με $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \beta]$.

Έστω μια τυχούσα διαμέριση Δ_n του $[a, \beta]$ την $\Delta_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta\}$ και $[x_{i-1}, x_i]$ ένα τυχαίο υποδιάστημα αυτής. Έστω σημείο $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ το μέσο του.



Σχ. 9.2

Σχηματίζω το στοιχειώδες ορθογώνιο με βάση $\chi_{i-1}=\Delta_i x$ και ύψος $n_i=f(\xi_i)$ (Σχήμα 9.2), τότε για το εμβαδό του στοιχειώδους αυτού ορθογωνίου είναι $E_i = n_i \Delta_i x$ με

$i=1,2,\dots,n$ και για ροπή αυτού ως προς τον xx' άξονα $M_{i,x} = \frac{n_i}{2} n_i \Delta_i x = \frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$,

$i=1,2,\dots,n$ και αν σχηματίσω τα αθροίσματα Riemann είναι $\sum_{i=1}^n M_{i,x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$.

Επειδή υπέθεσα ότι η f συνεχής $\forall x \in [a, \beta]$, το όριο της υπάρχει και

$$M_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_{i,x} = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x = \frac{1}{2} \int_a^\beta [f(x)]^2 dx \quad \text{ή} \quad M_x = \frac{1}{2} \int_\beta^a [f(x)]^2 dx.$$

$$\text{Επειδή } E = \int_a^\beta f(x) dx \quad \text{η (1) γίνεται} \quad \bar{Y} \int_a^\beta f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^\beta [f(x)]^2 dx \quad \text{ή} \quad \bar{Y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^\beta [f(x)]^2 dx}{\int_a^\beta f(x) dx} \quad (4)$$

Αν λάβω τη ροπή του (2), ως προς τον άξονα yy' είναι $M_{i,y} = \xi_i n_i \Delta_i x = \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x, i=1, 2, \dots, n$ και πάρω τα αθροίσματα Riemann, προκύπτει

$$M_y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx \text{ ή } M_y = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx \quad (5) \text{ οπότε η (1) λόγω}$$

$$\text{της (5) γράφεται } \bar{X} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx \text{ ή } \bar{X} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx} \quad (6)$$

Ονομάζω **ροπή του όγκου V ενός στερεού**, που παράγεται από την περιστροφή επίπεδης επιφάνειας, περί άξονα συντεταγμένων, σε σχέση με το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων και κάθετης στους άξονες, το γινόμενο του όγκου V επί την κάθετη απόσταση d του κέντρου βάρους της επιφάνειας από το κάθετο επίπεδο στους άξονες. Αν η επίπεδη επιφάνεια περιστραφεί περί τον xx' άξονα, τότε το κέντρο βάρους της $K(\bar{X}, \bar{Y})$ βρίσκεται στον xx' άξονα. Αν M_{yz} η ροπή του στερεού, σε σχέση με το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και κάθετου στον xx' άξονα είναι $V \cdot \bar{x} = M_{yz}, \bar{y} = 0$ (7) δηλαδή το κέντρο βάρους έχει συντεταγμένες $(\bar{x}, 0)$.

Αν η επίπεδη επιφάνεια περιστραφεί περί τον yy' άξονα, τότε το κέντρο βάρους της $K(\bar{X}, \bar{Y})$ βρίσκεται στον yy' άξονα. Αν M_{xz} η ροπή του στερεού σε σχέση με το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και κάθετου στον yy' άξονα είναι $V \cdot \bar{y} = M_{xz}, \bar{x} = 0$ (8) δηλαδή το κέντρο βάρους έχει συντεταγμένες $(0, \bar{y})$.

Με ανάλογο τρόπο, όπως στην περίπτωση του επιπέδου χωρίου βρίσκω $M_{yz} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x [f(x)]^2 dx$ (9) και αν $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 dx$ (10) ο όγκος εκ περιστροφής, ο (7)

$$\text{γράφεται λόγω των (9), (10) } \pi \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 dx \cdot \bar{x} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x [f(x)]^2 dx \text{ ή } \bar{X} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x [f(x)]^2 dx}{\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 dx} \text{ με}$$

$\bar{y} = 0$ (11) όταν ο άξονας περιστροφής περνά από το κέντρο βάρους.

5.1 Πρώτο θεώρημα του Πάππου

Αν μία επίπεδη επιφάνεια έχει περιστραφεί περί άξονα, που κείται στο επίπεδό της και δεν τέμνει την επιφάνεια, ο όγκος του στερεού που παράγεται ισούται με το γινόμενο της επιφάνειας (εμβαδού) και του μήκους του κύκλου που γράφεται από το κέντρο βάρους της επιφάνειας.

Έτσι αν $y=f(x)/[a, b]$ συνεχής με $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ και πάρω μια διαμέριση Δ_n του $[a, b]$ την $\Delta_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b\}$ με $\lambda \rightarrow 0$ και στο τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ αντιστοιχίσω το στοιχειώδες ορθογώνιο με βάση $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ και ύψος $n_i = f(\xi_i)$, όπου $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ το μέσο αυτού (Σχήμα 9.3) έχω, όταν αυτό περιστραφεί περί τον άξονα yy' , ότι το $u\left(\xi_i, \frac{n_i}{2}\right)$ διαγράφει κύκλο ακτίνας ξ_i και μήκους

$2\pi\xi_i$.

Άρα, από το θεώρημα του Πάππου, για τον όγκο που παράγει το στοιχειώδες ορθογώνιο είναι $V_i = 2\pi\xi_i \cdot f(\xi_i)\Delta_i x$, $i=1,2,\dots,n$. Αν πάρω το άθροισμα των

στοιχειωδών όγκων V_i είναι $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta_i x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$ (12)

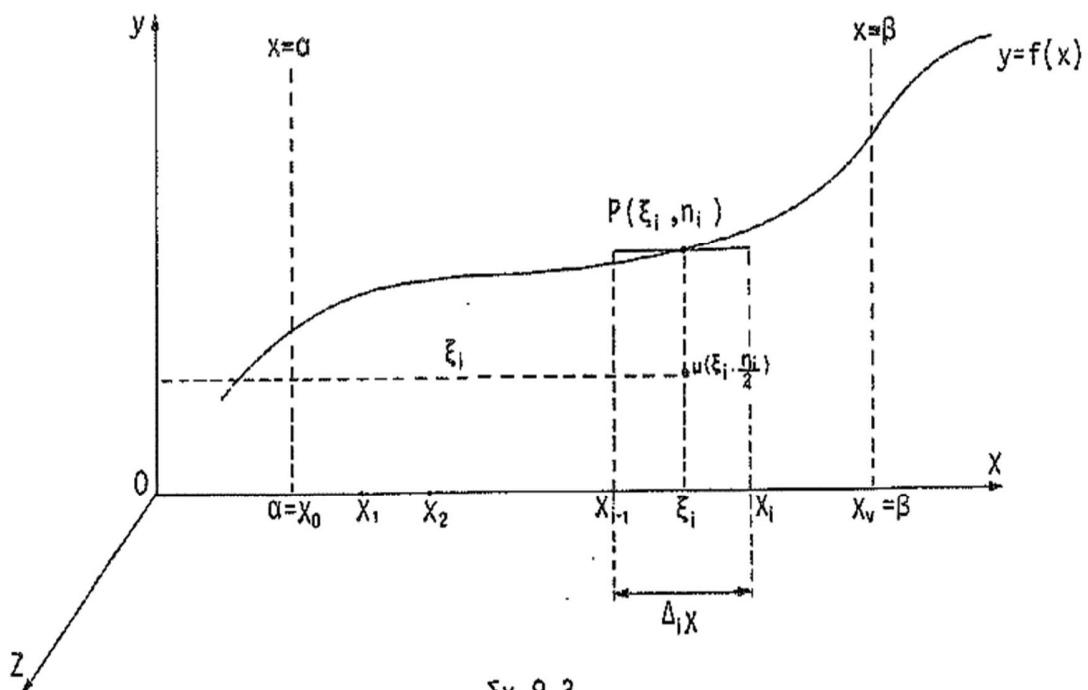
Η ροπή του στοιχειώδους όγκου V_i λόγω της (8) είναι $M_{ixz} = 2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta_i x \cdot \frac{f(\xi_i)}{2}$, $i=1,2,\dots,n$. Αν πάρω το άθροισμα των ροπών M_{ixz} , λόγω

της συνέχειας της f είναι $M_{xz} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_{ixz} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi\xi_i \frac{[f(\xi_i)]^2}{2} \Delta_i x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx$ ή

$M_{xz} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx$ (13). Η (8) από (12), (13) γράφεται

$$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx \cdot \bar{Y} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx \quad \text{ή} \quad \bar{Y} = \frac{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx}{\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx} \quad \text{με} \quad \bar{X} = 0 \quad (14) \quad \text{όταν ο άξονας}$$

περιστροφής διέρχεται από το κέντρο βάρους.



Σχ.9.3

5.2 Εφαρμογές

1. Εύρεση της ροπής αδρανείας ως προς τον άξονα yy' του επίπεδου χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y=4-x^2$ και τον άξονα xx'

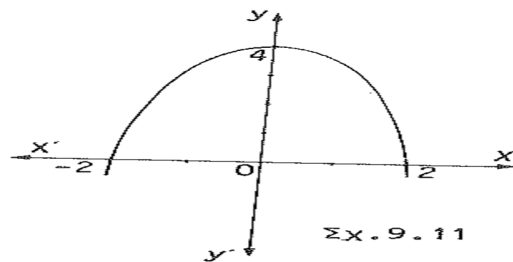
Λύση

Η παραβολή τέμνει τον άξονα xx' στα σημεία $(-2, 0)$, $(2, 0)$ και από (15) είναι

$$I_y = \int_{-2}^2 x^2(4-x^2)dx = 2 \int_0^2 (4x^2 - x^4)dx = 2 \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128}{15} \quad \text{Επειδή}$$

$$E = \int_{-2}^2 (4-x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} \quad \text{είναι για την ακτίνα ροπής αδρανείας από τον τύπο}$$

$$I_y = ER^2 \quad \text{ή} \quad \frac{128}{15} = \frac{32}{3} R^2 \quad \text{ή} \quad R = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



2. Εύρεση της ροπής αδρανείας, ως προς τον άξονα xx' , του επίπεδου χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y^2=4x$ και την ευθεία $x=4$.

Λύση

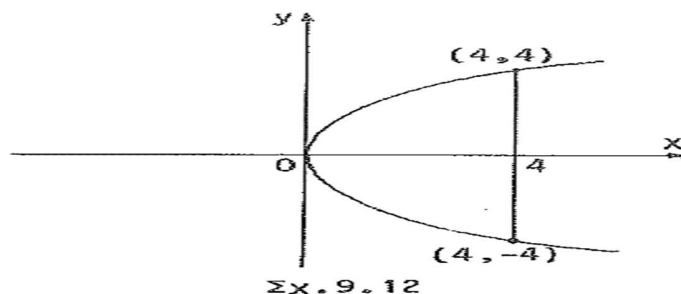
$$\text{Για το μισό του χωρίου που είναι πάνω από τον άξονα } xx' \quad I_{1x} = \frac{1}{4} \int_0^4 y^3 dx = \frac{1}{4} \int_0^4 (4x)^{\frac{3}{2}} dx$$

Άρα, η ροπή αδρανείας ολοκλήρου του επιπέδου χωρίου είναι

$$I_x = 2 \cdot \frac{1}{4} \int_0^4 (4x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} 4^{\frac{3}{2}} \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{256}{5} \quad \text{Το εμβαδό του χωρίου είναι}$$

$$E = 2 \int_0^4 f(x) dx = 2 \int_0^4 (4x)^{\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot 4^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{64}{3} \quad \text{Συνεπώς} \quad R^2 = \frac{I_x}{E} = \frac{\frac{256}{5}}{\frac{64}{3}} = \frac{12}{5} \quad \text{ή}$$

$$R = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$



3. Εύρεση της ροπής αδρανείας του επίπεδου χωρίου, που ορίζεται από τις καμπύλες

$y=f(x)$ και $y=g(x)$ ορισμένων στο $[a, \beta]$ και συνεχών, ως προς τους άξονες xx', yy'

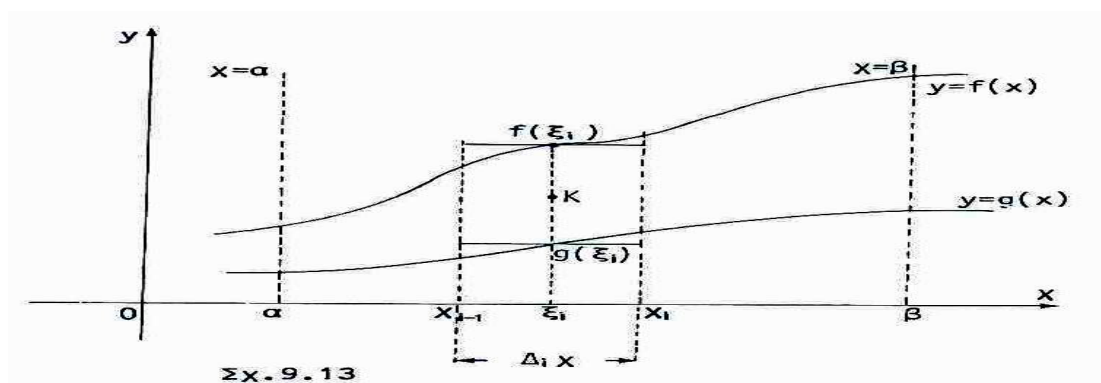
Λύση

Αν πάρω μια διαμέριση του $[a, \beta]$ και στο τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ ένα ενδιάμεσο σημείο ξ_i , το μέσο αυτού είναι για το κέντρο βάρους του τυχόντος ορθογωνίου $K(\xi_i, \frac{f(\xi_i) - g(\xi_i)}{2})$. Η απόσταση του K από τον άξονα xx' είναι $\frac{f(\xi_i) + g(\xi_i)}{2}$. Εξ'

ορισμού είναι για το ορθογώνιο $I_{ix} = \frac{[f(\xi_i) + g(\xi_i)]^2}{4} [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x$ αντίστοιχα

$I_{iy} = \xi_i^2 [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x$ και αν πάρω τα αθροίσματα για όλα τα ορθογώνια είναι

$$I_x = \frac{1}{4} \int_a^\beta [f^2(x) - g^2(x)][f(x) + g(x)] dx \quad \text{αντίστοιχα} \quad I_y = \int_a^\beta x^2 [f(x) - g(x)] dx$$



4. Εύρεση της ροπής αδρανείας, περί τον άξονα xx' , του στερεού που παράγεται με περιστροφή του επίπεδου χωρίου που περιέχεται στο πρώτο τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος αξόνων και ορίζεται από τις γραμμές $y^2=4x$, $y=0$, $x=3$, αν αυτό περιστραφεί περί τον άξονα xx' .

Λύση

$$\text{Είναι } I_x = \frac{\pi}{2} \int_0^3 [f(x)]^4 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^3 (4x)^2 dx = 8\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 72\pi$$

Ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $V = \pi \int_0^3 4x dx = 4\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 18\pi$ και για την

$$\text{ακτίνα ροπής είναι } R^2 = \frac{I_x}{V} = \frac{72\pi}{18\pi} = 4 \quad \text{άρα } R=2$$

5. Εύρεση της στατικής ροπής και της ροπής αδρανείας του ημικυκλίου $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($x \in [-r, r]$) ως προς τον άξονα xx' .

Λύση

$$\text{Είναι } M_x = \int_{-r}^r y \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^r dx = 2r^2.$$

Είναι

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}$$

$$dx = r \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2r \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \quad (\text{συνάρτηση άρτια}). \text{ Για να υπολογίσω το τελευταίο}$$

ολοκλήρωμα θέτω $x = r \sin t$ (1) $\Rightarrow dx = r \cos t dt$. Αν $x=0$ τότε $t=0$. Αν $x=r$ τότε $t = \frac{\pi}{2}$. Άρα,

$$I_x = 2r \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} = r \cdot \cos t dt = r^3 \int_0^{\pi/2} [1 + \cos(2t)] dt = r^3 \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{2}$$

6. Εύρεση των στατικών ροπών και των ροπών αδρανείας του τόξου του 1^{ου} τεταρτημόριου της αστροειδούς με εξισώσεις $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

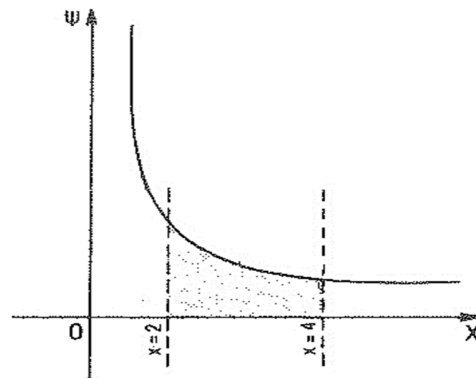
Λύση

Λόγω συμμετρίας της καμπύλης ως προς τους άξονες, είναι $M_x = M_y$ και $I_x = I_y$. Στο 1^ο τεταρτημόριο η παράμετρος t ανήκει στο διάστημα $[0, \pi/2]$. Έχω $d\ell = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} dt = 3^a \sin t \cos t dt$. Άρα,

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} y d\ell = \int_0^{\pi/2} (a \cdot \sin^3 t \cdot 3a \cdot \sin t \cdot \cos t) dt = \left[\frac{3a^2}{5} \sin^5 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} a^2 \quad \text{και}$$

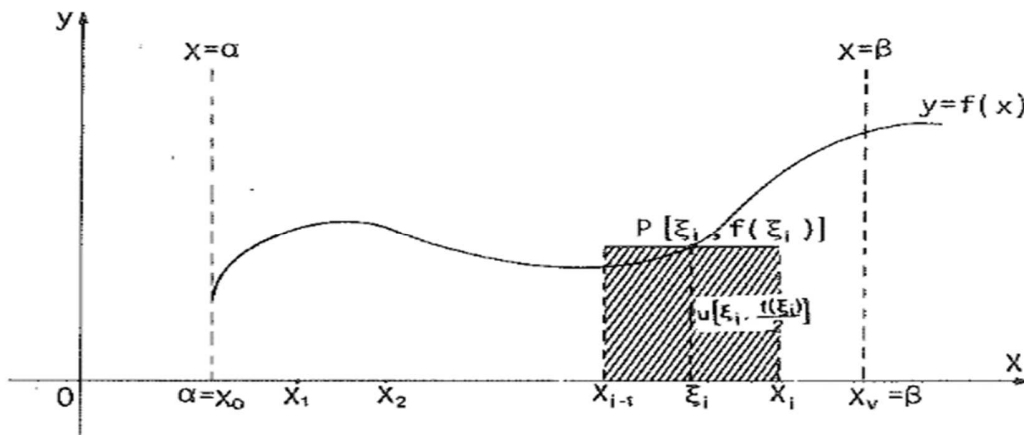
$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} y^2 d\ell = \int_0^{\pi/2} (a^2 \sin^6 t \cdot 3a \cdot \sin t \cdot \cos t) dt = \left[\frac{3}{8} a^3 \sin^8 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8} a^3. \text{ Άρα,}$$

$$M_x = M_y = \frac{3}{5} a^2, \quad I_x = I_y = \frac{3}{8} a^3$$



6. Ροπές αδρανείας επίπεδων επιφανειών και στερεών εκ περιστροφής

Έστω $y=f(x)/[a, \beta]$ συνεχής, με $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \beta]$ και E το εμβαδό το οριζόμενο από την $f(x)$, τις ευθείες $x=a, x=\beta$, και τον xx' άξονα, ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων. Ονομάζω **ροπή αδρανείας** I_x, I_y , ως προς xx', yy' άξονες ενός ορθογωνίου συστήματος, μιας επίπεδης επιφάνειας, το γινόμενο του εμβαδού E αυτής επί το τετράγωνο της απόστασεως του κέντρου βάρους της από τους Ox αντίστοιχα Oy άξονες του συστήματος.



ΣΧ.9.8

Αν πάρω μία διαμέριση Δ_v του $[a, \beta]$ την

$\Delta_v = \{\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_v = \beta\}$ και θεωρήσω το τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ και σε αυτό αντιστοιχίσω το στοιχειώδες ορθογώνιο με βάση $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ και ύψος $f(\xi_i)$ που αντιστοιχεί στο σημείο $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ μέσο αυτού. Τότε εξ' ορισμού είναι

$$I_{ix} = \frac{[f(\xi_i)]^2}{4} f(\xi_i) \Delta_i x \text{ αντίστοιχα } I_{iy} = \xi_i^2 f(\xi_i) \Delta_i x \text{ με } i=1, 2, \dots, v \text{ και αν αθροίσω όλες}$$

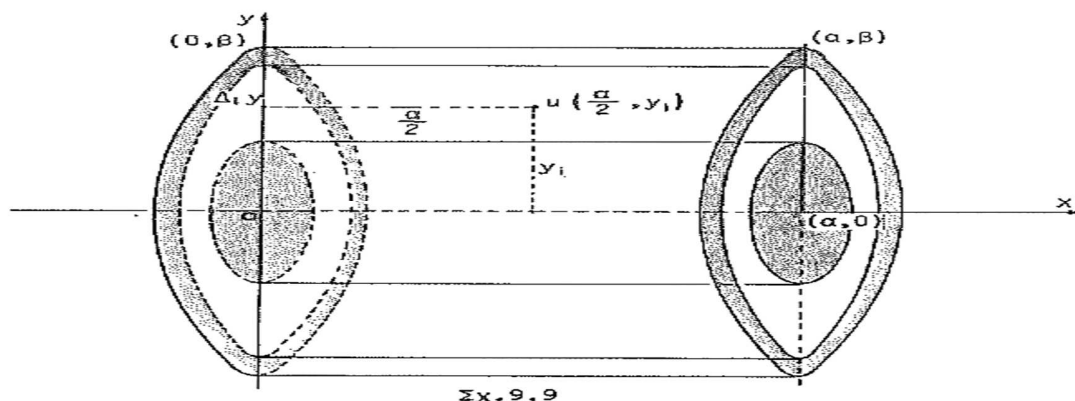
τις στοιχειώδεις ροπές που αντιστοιχούν στα στοιχειώδη ορθογώνια στη δεδομένη διαμέριση είναι

$$I_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v I_{ix} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v \frac{[f(\xi_i)]^2}{4} f(\xi_i) \Delta_i x \quad \text{αντίστοιχα}$$

$I_y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v I_{iy} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v \xi_i^2 f(\xi_i) \Delta_i x$ και επειδή η $f(x)/[a, \beta]$ είναι συνεχής, τα ανωτέρω όρια

$$\text{υπάρχουν και δίνουν } I_x = \frac{1}{4} \int_a^\beta [f(x)]^3 dx \text{ αντίστοιχα } I_y = \int_a^\beta x^2 f(x) dx \quad (15)$$

Ονομάζω **ροπή αδρανείας του όγκου V** ενός στερεού που παράγεται από την περιστροφή μιας επίπεδης επιφάνειας περί άξονα (άξονα στερεού), το γινόμενο του όγκου του παραγόμενου στερεού επί το τετράγωνο της απόστασης του κέντρου βάρους της επιφάνειας από τον άξονα. Έστω ότι θέλω να βρω τη ροπή αδρανείας ενός κυλίνδρου, ως προς τον άξονα αυτού, που παράγεται από ένα ορθογώνιο με διαστάσεις a και β που περιστρέφεται περί την a .



Παίρνω ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy έτσι ώστε οι Ox , Oy να βρίσκονται στις διαδοχικές πλευρές του ορθογωνίου. Παίρνω το στοιχειώδες ορθογώνιο που έχει βάση a και ύψος $\Delta_i y$. Αυτό έχει κέντρο βάρους $u(\frac{a}{2}, y_i)$, συνεπώς η ροπή αδρανείας αυτού ως προς τον xx' άξονα είναι $J_{ix} = y_i^2 (\alpha \Delta_i y)$, $i=1, 2, \dots, n$ του δε στερεού που παράγεται από το στοιχειώδες ορθογώνιο βάσει του θεωρήματος του Πάππου είναι $I_{ix} = 2\pi y_i y_i^2 \alpha \Delta_i y$, $i=1, 2, \dots, n$ και αν πάρω το άθροισμα όλων αυτών των στοιχειωδών ροπών αδρανείας, ως προς τον xx' άξονα είναι

$$I_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n I_{ix} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n 2\pi y_i y_i^2 \alpha \Delta_i y = 2\pi \alpha \int_0^\beta y^3 dy = 2\pi \alpha \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^\beta = \frac{\pi \alpha \beta^4}{2} = \frac{1}{2} \pi \alpha \beta^2 \cdot \beta^2$$

και αν λάβω υπόψη ότι το δοθέν ορθογώνιο περιστρεφόμενο περί τον xx' άξονα παράγει κύλινδρο όγκου $V=\pi\beta a$ τότε η ανωτέρω γράφεται $I_x = \frac{1}{2} V \beta^2$ (16) όπου β ακτίνα του κυλίνδρου, όταν περιστρέφεται περί τον xx' άξονα. Αν το ορθογώνιο περιστρέφεται περί τον yy' άξονα η ροπή, ως προς αυτόν τον άξονα είναι $I_y = \frac{1}{2} V a^2$ (17) όπου a ακτίνα του κυλίνδρου. Από (16) και (17) μπορώ να βρω τη ροπή αδρανείας του όγκου στερεού που παράγεται από την περιστροφή μίας επίπεδης επιφάνειας περί τον xx' άξονα, ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων και που περικλείεται από την συνεχή καμπύλη $y=f(x)/[a, \beta]$ τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ και τον xx' άξονα (Σχήμα 9.10)

Κάνω μια διαμέριση Δ_n του $[a, \beta]$ την $\Delta_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta\}$ με $\lambda \rightarrow 0$, παίρνω τον τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \dots, n$ και σχηματίζω τους στοιχειώδεις κυλίνδρους που παράγονται από τα στοιχειώδη ορθογώνια με βάσεις $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ και ύψος $f(\xi_i)$, $i=1, 2, \dots, n$ περιστρεφόμενα περί τον άξονα xx' . Οι στοιχειώδεις αυτοί κύλινδροι έχουν ύψος $\Delta_i x$ και ακτίνα $f(\xi_i)$, όπου $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ το μέσον αυτού. Κάθε στοιχειώδης κύλινδρος έχει όγκο $\Pi[f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$ η δε ροπή αδρανείας, ως προς τον xx' άξονα, από (16) είναι $I_{ix} = \frac{1}{2} \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x [f(\xi_i)]^2 = \frac{1}{2} \pi [f(\xi_i)]^4 \Delta_i x$ και αν αθροίσω τις ροπές αδρανείας όλων των στοιχειωδών κυλίνδρων είναι

$I_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n I_i x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \pi [f(\xi_i)]^4 \Delta_i x$ και επειδή η $f(x)/[\alpha, \beta]$ είναι συνεχής, το όριο υπάρχει και συνεπώς $I_x = \frac{\pi}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^4 dx$ (18). Ομοίως, προκύπτει ότι $I_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x^3 f(x) dx$ (19)

6.1 Εφαρμογές

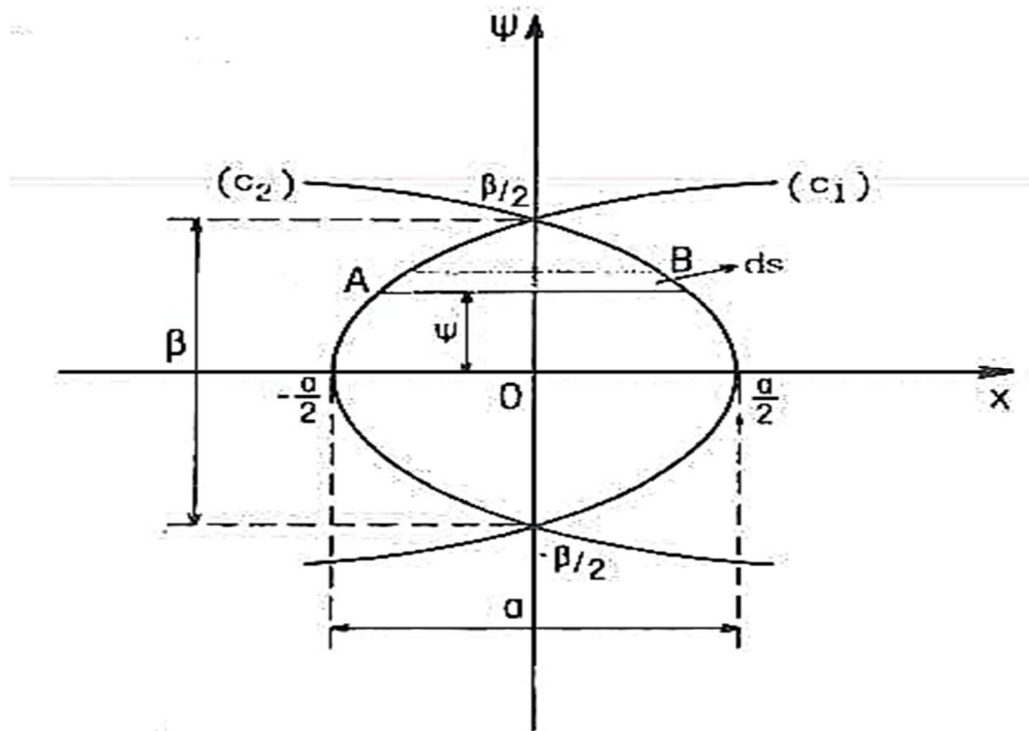
1. Εύρεση της ροπής αδρανείας ως προς τον xx' , του χωρίου που περικλείεται από της παραβολές (c_1) : $y^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha} \left(x + \frac{\alpha}{2} \right)$, (c_2) $y^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha} \left(\frac{\alpha}{2} - x \right)$ και τον άξονα xx' .

Λύση

Είναι $dI_x = y^2 ds$ (1) όπου ds είναι το εμβαδόν του στοιχειώδους χωρίου που είναι παράλληλο προς τον άξονα xx' . Είναι $ds = |AB| dy$ (2). Είναι

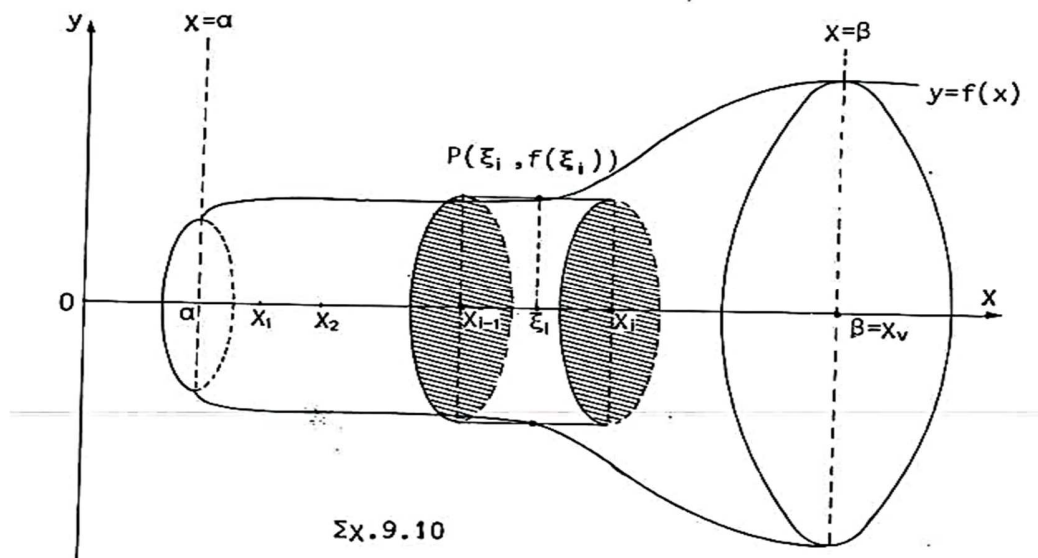
$|AB| = x_2 - x_1 = 2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2\alpha}{\beta^2} y^2 \right) = \alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2} y^2$ (3). Άρα, η (1) δίνει (2) και (3)

$$dI_x = y^2 \left(\alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2} y^2 \right) dy \Rightarrow I_x = \int_0^{\beta/2} y^2 \left(\alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2} y^2 \right) dy = \dots = \frac{\alpha \beta^3}{60}.$$

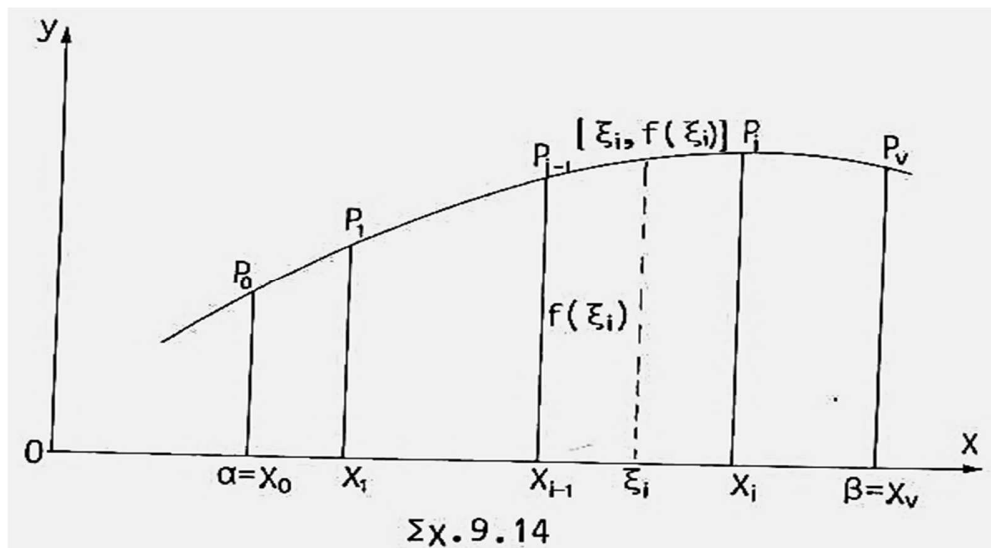


7. Κέντρο βάρους και ροπές αδρανείας επίπεδης καμπύλης

Ονομάζω ροπή υλικού σημείου μάζας m ως προς ευθεία Γ , το γινόμενο της μάζας m επί την απόσταση d του υλικού σημείου από τη Γ . Το γινόμενο της μάζας του υλικού σημείου επί d^2 ορίζεται ως ροπή αδρανείας του υλικού σημείου ως προς τη Γ . Είναι αντίστοιχα $M_\Gamma = md$ και $I_\Gamma = md^2$ (1) Αν υπάρχει στο επίπεδο, ένα σύστημα υλικών σημείων που μαζών m_i , $i=1,2,\dots,n$ με αντίστοιχες αποστάσεις από την ευθεία Γ , d_i ,



$i=1,2,\dots,n$ τότε ορίζω ως ροπή και ροπή αδρανείας, τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^n M_{i\Gamma} = \sum_{i=1}^n m_i d_i$ αντίστοιχα $\sum_{i=1}^n I_{i\Gamma} = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$ (2). Έστω ότι στο επίπεδο που ανήκει το υλικό σημείο μάζας m υπάρχει σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy . Τότε έχει συντεταγμένες (x, y) άρα οι (1) γράφονται $M_x=my$, $M_y=mx$ (3) αντίστοιχα $I_x=my^2$, $I_y=mx^2$ (4). Αν (x_i, y_i) είναι οι συντεταγμένες των σημείων μαζών m_i , $i=1,2,\dots,n$ οι (2) γράφονται $\sum_{i=1}^n M_{i\Gamma} x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$, $\sum_{i=1}^n M_{i\Gamma} y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$ (5) αντίστοιχα $\sum_{i=1}^n I_{i\Gamma} x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$, $\sum_{i=1}^n I_{i\Gamma} y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$ (6) Αν για το σύστημα των υλικών σημείων m_i , $i=1,2,\dots,n$ θεωρήσω σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$, του συστήματος αξόνων, στο οποίο είναι συγκεντρωμένες οι μάζες αυτές, ώστε $\sum_{i=1}^n m_i \bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i$, $\sum_{i=1}^n m_i \bar{y} = \sum_{i=1}^n m_i y_i$ (7), το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$ ονομάζεται κέντρο βάρους του συστήματος m_i , $i=1,2,\dots,n$. Έστω καμπύλη εξίσωσης $y=f(x)/[\alpha, \beta]$ συνεχής, με συνεχή $f'(x) \forall x \in [\alpha, \beta]$. Την καμπύλη αυτή θεωρώ ως σύνολο υλικών σημείων και ομογενή. Στην ομογενή καμπύλη, η μάζα ενός μέρους της είναι ανάλογη του μήκους του μέρους αυτού. Θεωρώ ότι η πυκνότητα $P=1$, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα του προβλήματος.



Έστω $P_0 P_v$ το τόξο της καμπύλης που ορίζεται από την $y=f(x)/[\alpha, \beta]$. Κάνω ένα διαμερισμό Δ_v του $[\alpha, \beta]$ τον $\Delta_v = \{\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_v = \beta\}$ με $\lambda \rightarrow 0$ και παίρνω το τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \dots, v$. Από τα σημεία της διαμέρισης φέρω παραλλήλους προς τον άξονα των y που τέμνουν το τόξο $P_0 P_v$ στα σημεία $P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_v$ και ορίζουν στοιχειώδη τόξα. Έστω $P_{i-1} P_i = \Delta_i S$ ένα τέτοιο τόξο, $i=1, 2, \dots, v$. Τότε $\Delta_i S$ έχει μάζα $\Delta m_i = P \Delta_i S = \Delta_i S$, $i=1, 2, \dots, v$ (1) διότι θεωρήσα ότι πυκνότητα $P=1$.

Έστω $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ένα ενδιάμεσο σημείο του τυχαίου υποδιαστήματος. Στο τόξο $P_{i-1} P_i = \Delta_i S$ αντιστοιχεί το σημείο $(\xi_i, f(\xi_i))$ στο οποίο θεωρώ συγκεντρωμένη τη μάζα αυτού, άρα από (5) είναι $\sum_{i=1}^v M_i x = \sum_{i=1}^v f(\xi_i) \Delta_i S$, $\sum_{i=1}^v M_i y = \sum_{i=1}^v \xi_i \Delta_i S$ και επειδή η συνάρτηση $y=f(x)$ είναι συνεχής $\forall x \in [\alpha, \beta]$ υπάρχει το όριο, με $\lambda \rightarrow 0$ οπότε

$$M_x = \lim_{i=1}^v \sum M_i x = \lim_{i=1}^v \sum f(\xi_i) \Delta_i S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dS \text{ και } M_y = \lim_{i=1}^v \sum M_i y = \lim_{i=1}^v \sum \xi_i \Delta_i S = \int_{\alpha}^{\beta} x dS$$

Άρα, οι ροπές του τόξου που ορίζεται από την καμπύλη με εξίσωση $y=f(x)$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ ως προς τους x, y άξονες είναι $M_x = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dS$, $M_y = \int_{\alpha}^{\beta} x dS$ (8) ή

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx, \quad M_y = \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx \quad (9)$$

Επίσης, από (6) είναι $\sum_{i=1}^v I_i x = \sum_{i=1}^v y_i^2 \Delta_i S$, $\sum_{i=1}^v I_i y = \sum_{i=1}^v x_i^2 \Delta_i S$ οπότε

$$I_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v I_i x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v [f(\xi_i)]^2 \Delta_i S = \int_{\alpha}^{\beta} y^2 dS \text{ και } I_y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v I_i y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v \xi_i^2 \Delta_i S = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dS$$

Άρα, οι ροπές αδρανείας του τόξου που ορίζεται από την καμπύλη $y=f(x)$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ ως προς τους x, y άξονες είναι $I_x = \int_{\alpha}^{\beta} y^2 dS$, $I_y = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dS$ ή

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx \quad I_y = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx \quad (10)$$

Από (7) είναι $\sum_{i=1}^n \bar{x} \Delta_i S = \sum_{i=1}^n \xi_i \Delta_i S$, $\sum_{i=1}^n \bar{y} \Delta_i S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i S$ και επειδή τα όρια υπάρχουν λόγω της συνεχειας είναι με $\lambda \rightarrow 0$ $\bar{x} \cdot S = \int_{\alpha}^{\beta} x dS$, $\bar{y} \cdot S = \int_{\alpha}^{\beta} y dS$ (10') ή επειδή

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx \quad \text{είναι} \quad \bar{x} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx} \quad (11)$$

- Η στατική ροπή του τμήματος AB μια καμπύλης (c) με εξίσωση $y=f(x)$, ως προς τον άξονα xx' είναι από $M_x = \int_{\alpha}^{\beta} y \sqrt{1+(y')^2} dx$ (5). Η στατική ροπή ως προς τον άξονα yy'

είναι $M_y = \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1+(y')^2} dx$ (6). Η ροπή αδρανείας του τμήματος AB μιας καμπύλης με

εξίσωση $y=f(x)$ ως προς τον άξονα xx' είναι $I_x = \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \sqrt{1+(y')^2} dx$ (7). Η ροπή αδρανείας

ως προς τον άξονα yy' είναι $I_y = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \sqrt{1+(y')^2} dx$ (8).

- Το κέντρο βάρους $M(x_0, y_0)$ ομογενούς υλικής γραμμής με εξίσωση $y=f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$

είναι $x_0 = \frac{M_y}{\ell}$, $y_0 = \frac{M_x}{\ell}$ (ℓ είναι το μήκος της γραμμής). Δηλαδή $x_0 = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1+(y')^2} dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(y')^2} dx}$,

$y_0 = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} y \sqrt{1+(y')^2} dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(y')^2} dx}$ (9) Αν η εξίσωση της ομογενούς γραμμής δίνεται με παραμετρικές

εξισώσεις $x=\varphi(t)$, $y=\sigma(t)$ με $t \in [t_1, t_2]$, οι συντεταγμένες του κ.β. είναι

$$x_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt}, \quad y_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt} \quad (10)$$

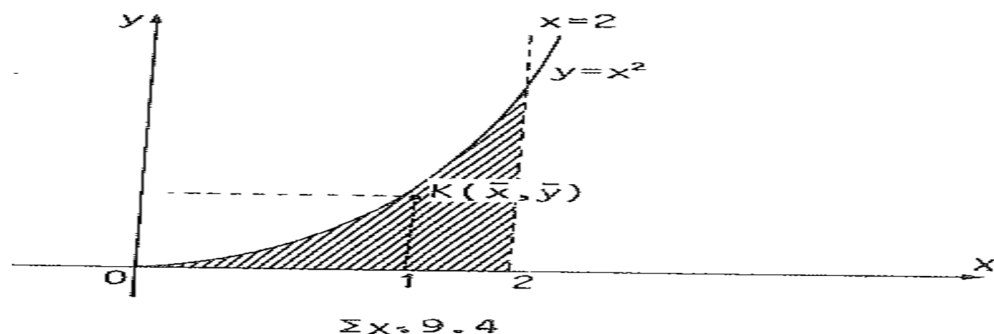
7.1 Εφαρμογές

1. Εύρεση του κέντρου βάρους του επίπεδου χωρίου που περιορίζεται από την καμπύλη $y=x^2$, την ευθεία $x=2$ και τον άξονα xx' (Σχ. 9.4)

Λύση: Η καμπύλη διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Έτσι, $E = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2)^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{16}{5} \quad M_y = \int_0^2 x \cdot x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4 \quad \text{Από (4), (6) είναι}$$

$$\bar{Y} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{8}{3}} = \frac{6}{5}, \quad \bar{X} = \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{2} \quad \text{άρα } K\left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5}\right).$$



2. Εύρεση του κέντρου βάρους του επίπεδου χωρίου που περιορίζεται από την καμπύλη $y=9-x^2$ και τις ευθείες $x=0$, $y=0$ (πρώτο τεταρτημόριο).

Λύση

Η καμπύλη τέμνει τους άξονες Ox , Oy στα σημεία $(3, 0)$ και $(0, 9)$ αντίστοιχα. Έτσι,

$$E = \int_0^3 (9-x^2) dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{54}{3} = 18$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^3 (9-x^2)^2 dx = \frac{324}{5} \quad M_y = \int_0^3 x(9-x^2) dx = \frac{81}{4}.$$

$$\text{Τότε } \bar{X} = \frac{\frac{81}{4}}{18} = \frac{9}{8}, \quad \bar{Y} = \frac{\frac{324}{5}}{18} = \frac{18}{5} \quad \text{άρα } K\left(\frac{9}{8}, \frac{18}{5}\right).$$

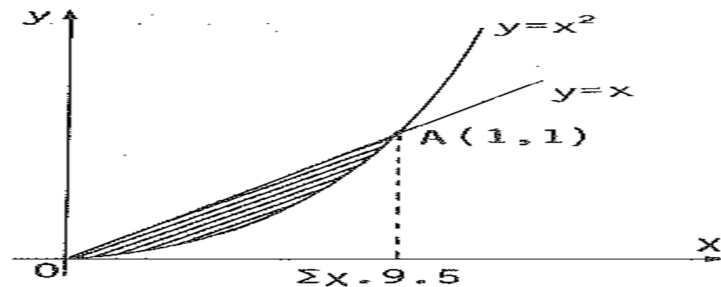
3. Εύρεση του κέντρου βάρους του επίπεδου χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y=x^2$ και την ευθεία $y=x$ (Σχήμα 9.5)

Λύση

Τα σημεία που τέμνονται οι καμπύλες είναι $A(1, 1)$ και $O(0, 0)$. Τότε $E = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$

, $M_y = \int x(x - x^2) dx = \frac{1}{12}$ $M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 (x + x^2)(x - x^2) dx = \frac{1}{15}$. Από (4), (5) είναι $\bar{y} = \frac{2}{5}$,

$\bar{x} = \frac{1}{2}$ άρα $K\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$.



4. Εύρεση του κέντρου βάρους του επίπεδου χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $x=y^2$ και $x^2=-27y$.

Λύση

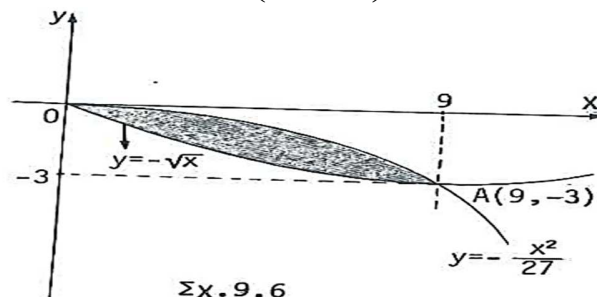
Τα σημεία τομής των καμπυλών είναι $(9, -3)$ και $(0, 0)$, οι δε καμπύλες γράφονται

$y = -\sqrt{x}$ και $y = -\frac{x^2}{27}$, οπότε $E = \int_0^9 \left(-\frac{x^2}{27} - (-\sqrt{x}) \right) dx = \int_0^9 \left(-\frac{x^2}{27} + \sqrt{x} \right) dx = 9$

$M_x = \frac{1}{2} \int_0^9 \left(-\frac{x^2}{27} + \sqrt{x} \right) \left(-\frac{x}{27} - \sqrt{x} \right) dx = -\frac{243}{20}$

$M_y = \int_0^9 x \left(-\frac{x^2}{27} + \sqrt{x} \right) dx = \int_0^9 \left(-\frac{x^2}{27} + x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{729}{20}$. Από (4), (5) $\bar{y} = \frac{-243}{20 \cdot 9} = -\frac{27}{20}$,

$\bar{x} = \frac{729}{20 \cdot 9} = \frac{81}{20}$. Άρα, το κέντρο βάρους είναι $K\left(\frac{81}{20}, -\frac{27}{20}\right)$.



5. Εύρεση του κέντρου βάρους $K(\bar{X}, 0)$ του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από την καμπύλη $y=4-x^2$ και τις ευθείες $x=0, y=0$,

περί τον άξονα xx'

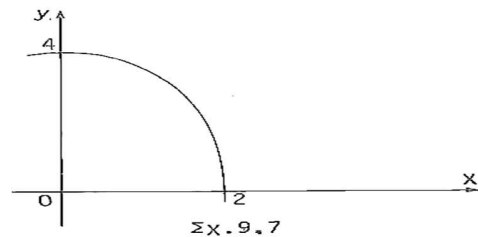
Λύση

Η καμπύλη τέμνει τους άξονες στα σημεία (2, 0) και (0, 4). Τότε

$$V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^2 (4-x^2)^2 dx = \frac{256\pi}{15}$$

$$M_{yz} = \pi \int_0^2 x[f(x)]^2 dx = \pi \int_0^2 x(4-x^2)^2 dx = \frac{32\pi}{3} \quad \text{και από (11) είναι } \bar{X} = \frac{\frac{32\pi}{3}}{\frac{256\pi}{15}} = \frac{5}{8} \quad \text{άρα}$$

$$K\left(\frac{5}{8}, 0\right)$$



6. Εύρεση του κέντρου βάρους $K(0, \bar{y})$ του στερεού της προηγούμενης εφαρμογής, αν η περιστροφή γίνει γύρω από τον άξονα yy' .

Λύση

Από τις (12), (13) είναι αντίστοιχα $V = 2\pi \int_0^2 xf(x)dx = 2\pi \int_0^2 x(4-x^2)dx = 8\pi$

$$M_{xz} = \pi \int_0^2 x(4-x^2)^2 dx = \frac{32\pi}{3} \quad \text{και από (14)} \quad \bar{Y} = \frac{\frac{32\pi}{3}}{8\pi} = \frac{4}{3} \quad \text{άρα } K(0, \bar{y}) = K\left(0, \frac{4}{3}\right)$$

8. Κέντρο βάρους και ροπές αδρανείας επιφάνειας εκ περιστροφής

Έστω η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή του τόξου P_0P_V (Σχήμα 9.14) περί xx' άξονα, με τις προϋποθέσεις που τέθεισαν εκεί για την καμπύλη $y=f(x)$. Το στοιχειώδες τόξο $\Delta_i S$ παράγει μία επιφάνεια εμβαδού $E_i = 2\pi f(\xi_i)\Delta_i S$ **(1)** και συνεπώς ροπή $M_{iy} = 2\pi \xi_i f(\xi_i)\Delta_i S$. Το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή

του τόξου P_0P_V είναι συνεπώς $E = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v E_i = 2\pi \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v f(\xi_i)\Delta_i S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(x)ds$ ή

$$E = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \textbf{(2)} \quad \text{και η ροπή}$$

$$M_y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v M_{iy} = 2\pi \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^v \xi_i f(\xi_i)\Delta_i S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)ds \quad \text{ή}$$

$$M_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \textbf{(3)}$$

Ο (1) από (2), (3) γράφεται $2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx \cdot \bar{X} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$ ή

$$\bar{X} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} xf(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx}, \quad \bar{y} = 0 \quad (4)$$

Για τη ροπή αδρανείας του στοιχειώδους εμβαδού

είναι $I_i x = 2\pi f(\xi_i) \Delta_i S \cdot [f(\xi_i)]^2 = 2\pi [f(\xi_i)]^3 dS$ άρα,

$$I_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\nu} I_i x = 2\pi \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\nu} [f(\xi_i)]^3 dS = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^3 dS \quad \text{ή} \quad I_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^3 \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$$

(5)

8.1 Δεύτερο θεώρημα του Πάππου

Αν ένα τόξο καμπύλης περιστρέφεται περί άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό του, αλλά δεν τέμνει το τόξο, το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή αυτού, ισούται με το γινόμενο του μήκους του τόξου και του μήκους της περιφέρειας του κύκλου που διαγράφει το κέντρο βάρους του τόξου.

8.2 Γεωμετρική ροπή

Θεωρώ επίπεδο χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$. Ονομάζω **γεωμετρική ροπή** βαθμού ν του χωρίου ως προς τον άξονα

$$yy' \text{ το ολοκλήρωμα } P_{\nu} = \int_{\alpha}^{\beta} (x^{\nu} y) dx \quad (\text{με } \nu \in \mathbb{N}).$$

➤ Αν $\nu=0$ τότε P_0 δίνει το εμβαδόν E του χωρίου.

➤ Αν $\nu=1$ τότε ο P_1 δίνει τη στατική ροπή (ή απλά ροπή) του χωρίου ως προς τον άξονα yy' . Έτσι η στατική ροπή P_1 ως προς τον άξονα yy' δίνεται από τον τύπο

$$P_1 = M_y = \int_{\alpha}^{\beta} xy dx \quad (1) \quad \text{Η στατική ροπή ως προς τον } x'x \text{ δίνεται από } M_x = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx \quad (2)$$

➤ Αν $\nu=2$ τότε ο $P_2 = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 y dx$ δίνει την ροπή αδρανείας του χωρίου ως προς τον yy' .

• Αν το χωρίο είναι ομογενές, ονομάζω κέντρο βάρους το σημείο $K(x_0, y_0)$ με $x_0 = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} xy dx}{\int_{\alpha}^{\beta} y dx}$

$$, y_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx}{\int_{\alpha}^{\beta} y dx} \quad (3) \quad (\text{είναι } x_0 = \frac{M_y}{E}, y_0 = \frac{M_x}{E}).$$

- Αν το χωρίο περικλείεται από τις καμπύλες (c_1) , (c_2) με εξισώσεις $y=\varphi(x)$, $y=\sigma(x)$, οι

συντεταγμένες του κέντρου βάρους είναι
$$x_0 = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x[\varphi(x) - \sigma(x)]dx}{\int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(x) - \sigma(x)]dx},$$

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi^2(x) - \sigma^2(x)]dx}{\int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(x) - \sigma(x)]dx} \quad (4)$$

8.3 Εφαρμογές

1. Εύρεση του κέντρου βάρους του 1^{ου} τεταρτημόριου τόξου του κύκλου $x^2+y^2=9$.

Λύση

Είναι $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $1+[f'(x)]^2 = 1+\frac{x^2}{y^2} = \frac{9}{y^2}$, $y = \sqrt{9-x^2}$, είναι

$$\bar{x} = \frac{\int_0^3 x \frac{3}{y} dx}{\int_0^3 \frac{3}{y} dx} = \frac{3 \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx}{3 \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}} = \frac{-[\sqrt{9-x^2}]_0^3}{[\text{τοξημ} \frac{x}{3}]_0^3} = \frac{6}{\pi}, \quad \bar{y} = \frac{\int_0^3 y \frac{3}{y} dx}{3 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{6}{\pi}, \quad \text{άρα}$$

$$K(\bar{x}, \bar{y}) = K\left(\frac{6}{\pi}, \frac{6}{\pi}\right)$$

Οι ροπές του τεταρτημόριου είναι, ως προς τους άξονες xx' , yy' είναι

$$M_x = \int_0^3 \sqrt{9-x^2} \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} dx = 3 \int_0^3 dx = 9,$$

$$M_y = \int_0^3 x \frac{3}{y} dx = 3 \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx = -3 \left[(9-x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^3 = 9 \quad \text{Για ροπές αδρανείας είναι}$$

$$I_x = \int_0^3 (9-x^2) \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} dx = 3 \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{27\pi}{4}$$

$$I_y = \int_0^3 x^2 \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} dx = 3 \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{27\pi}{4}$$

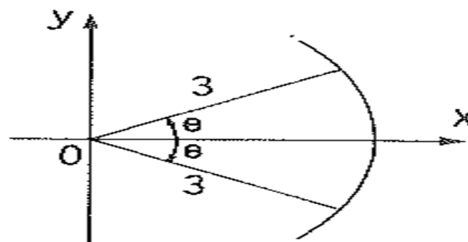
2. Εύρεση του κέντρου βάρους κυκλικού τόξου ακτίνας $R=3$ και επίκεντρης γωνίας 2θ .

Λύση

Παίρνω τόξο όπως στο σχήμα και το κέντρο βάρους είναι $(\bar{x}, 0)$. Η εξίσωση της περιφερείας του κύκλου που ανήκει το τόξο είναι $x^2 + y^2 = 9$ άρα $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ και είναι

$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \frac{3}{x} dy$. Το y μεταβάλλεται από 0 μέχρι $3\eta\mu\theta$ διότι το $\bar{x}$ του τόξου

ταυτίζεται με το $\bar{x}$ του άνω μισού. Έτσι, $\bar{X} = \frac{\int_0^{3\eta\mu\theta} x \frac{3}{x} dy}{3\theta} = \frac{3[y]_0^{3\eta\mu\theta}}{3\theta} = \frac{3\eta\mu\theta}{\theta}$, $\bar{y} = 0$ (το τόξο που έχει γωνία θ σε ακτίνα έχει μήκος $S=R\theta$).



Σχ. 9.15

3. Εύρεση της ροπής αδρανείας της υποκυκλοειδούς καμπύλης $x=R\eta\mu^3t$, $y=R\sigma\upsilon\nu^3t$, ως προς τον άξονα xx'

Λύση

Είναι $I_x = \int_a^\beta y^2 \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ και $\frac{dx}{dt} = 3R\eta\mu^2t\sigma\upsilon\nu t dt$, $\frac{dy}{dt} = -3R\sigma\upsilon\nu^2t\eta\mu t dt$.

Η I_x είναι τετραπλάσια της ροπής του 1^{ου} τεταρτημόριου λόγω συμμετρίας. Άρα,

$$I_x = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sigma\upsilon\nu^6 t \cdot 3R\eta\mu t \sigma\upsilon\nu t dt = -12R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^7 t \cdot d\sigma\upsilon\nu t = \frac{3}{2} R^3$$

$$\text{Άρα, } I_x = \frac{3}{2} R^3.$$

4. Εύρεση του κέντρου βάρους της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της ευθείας $4y+3x=8$ από 0 μέχρι 2 γύρω από τον άξονα xx' .

Λύση

$$\text{Είναι } y = \frac{8-3x}{4}, \frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{3}{4}, \sqrt{1+[f'(x)]^2} = \frac{5}{4} \text{ άρα } \bar{X} = \frac{\int_0^2 x(8-3x)dx}{\int_0^2 (8-3x)dx} = \frac{4}{5}, \bar{y} = 0$$

$$\text{άρα } K(\bar{x}, \bar{y}) = K\left(\frac{4}{5}, 0\right).$$

5. Εύρεση της ροπής αδρανείας της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της ευθείας $y=2x$ περί τον άξονα xx' από 0 μέχρι 2.

Λύση

Είναι $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 2$, $\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{5}$ άρα από (5) είναι

$$I_x = 2\pi \int_0^2 (2x)^3 \sqrt{5} dx = 16\sqrt{5}\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 64\sqrt{5}\pi. \text{ Συνεπώς, } I_x = 64\sqrt{5}\pi$$

6. Εύρεση της ροπής αδρανείας, ως προς τον άξονα yy' , του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του επιπέδου χωρίου του προηγούμενου παραδείγματος.

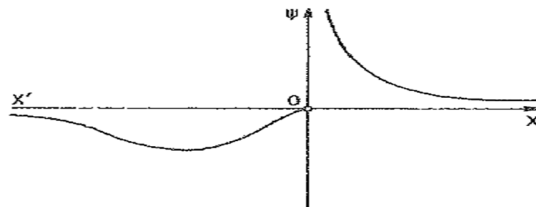
Λύση

$$\text{Είναι } I_y = 2\pi \int_0^3 x^3 f(x) dx = 4\pi \int_0^3 x^3 x^{\frac{1}{2}} dx = 4\pi \int_0^3 x^{\frac{7}{2}} dx = 4\pi \left[\frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} \right]_0^3 = 72\sqrt{3}\pi$$

7. Εύρεση του όγκου του στερεού που παράγεται από την περιστροφή περί άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από το τόξο της καμπύλης (c) με εξίσωση $y = \frac{1}{x} e^{1/x}$ όταν $x \in (-\infty, 0)$ και τον ημιάξονα Ox' .

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } V &= \pi \int_{-\infty}^0 y^2 dx = \pi \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{2/x} dx = \pi \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^- \\ \lambda \rightarrow -\infty}} \int_{\lambda}^{\varepsilon} \frac{1}{x^2} e^{2/x} dx = -\frac{\pi}{2} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^- \\ \lambda \rightarrow -\infty}} \int_{\lambda}^{\varepsilon} e^{2/x} d(2/x) = \\ &= -\frac{\pi}{2} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^- \\ \lambda \rightarrow -\infty}} \left[e^{2/x} \right]_{\lambda}^{\varepsilon} = -\frac{\pi}{2} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^- \\ \lambda \rightarrow -\infty}} \left[e^{2/\varepsilon} - e^{2/\lambda} \right] = -\frac{\pi}{2} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} e^{2/\varepsilon} - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^{2/\lambda} \right] = -\frac{\pi}{2} (0 - 1) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



8. Εύρεση του όγκου του στερεού που προκύπτει από περιστροφή του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ περί την οριζόντια ασύμπτωτή της.

Λύση

Είναι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Άρα η $y = 0$ δηλαδή ο άξονας xx' είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Είναι

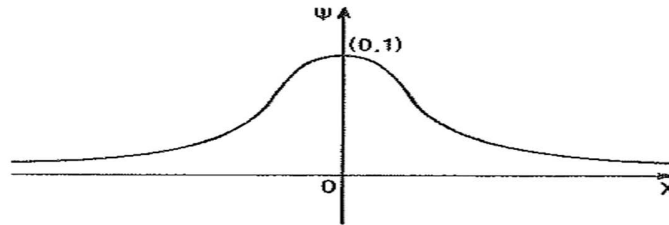
$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}. \text{ Θέτω } x = \varepsilon \varphi \text{ (1) } dx = \frac{d\varphi}{\sigma \nu \nu^2 \varphi} = (1 + \varepsilon \varphi^2 \omega) d\omega.$$

Όταν $x \rightarrow -\infty$ από (1) είναι $\omega \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

Όταν $x \rightarrow +\infty$ από (1) είναι $\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Έτσι,

$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\varepsilon\varphi^2\omega}{(1+\varepsilon\varphi^2\omega)^2} d\omega = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \omega d\omega = \pi \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\sin(2\omega)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}$$



9. Εύρεση του κέντρου μάζας του χωρίου που περικλείεται από την υπερβολή $xy=1$ και τις ευθείες $x=2$, $x=4$.

Λύση

Οι συντεταγμένες, από (2) είναι $x_0 = \frac{\int_2^4 x \frac{1}{x} dx}{\int_2^4 \frac{1}{x} dx} = \frac{2}{\ln 2}$, $y_0 = \frac{\int_2^4 \frac{1}{x^2} dx}{2 \int_2^4 \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{8 \ln 2}$.

10. Εύρεση του κέντρου μάζας του τόξου της κυκλοειδούς καμπύλης $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$.

Λύση

Είναι $x=a(t-\sin t) \Rightarrow dx=a(1-\cos t)dt \Rightarrow \frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$. Είναι $y=a(1-\cos t) \Rightarrow dy=a \sin t dt$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = a \cdot \sin t$. Έτσι

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2(1+\cos^2 t - 2\cos t)a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{2-2\cos t} = a2 \sin \frac{t}{2}$$

Από (10) $x_0 = \frac{\int_0^{2\pi} a(t-\sin t) \cdot 2a \cdot \sin \frac{t}{2} dt}{\int_0^{2\pi} 2a \cdot \sin \frac{t}{2} dt}$. Ο αριθμητής δίνει

$$\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)2a \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 2a^2 \left[-2t \cdot \cos \frac{t}{2} + 4 \sin \frac{t}{2} - \frac{4}{3} \sin^3 \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8\pi a^2.$$

Ο παρονομαστής δίνει

$$\int_0^{2\pi} 2a \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 16a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{4} \cos \frac{t}{4} d\left(\frac{t}{4}\right) = 16a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{4} d\left(\frac{t}{4}\right) = 8a \left[\sin^2 \frac{t}{4} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

Άρα, $x_0 = \frac{8\pi a^2}{8a} = \pi a$. Είναι

$$y_0 = \frac{\int_0^{2\pi} y 2\alpha \cdot \sin \frac{t}{2} dt}{\int_0^{2\pi} \alpha \cdot \sin \frac{t}{2} dt} = \frac{2\alpha \int_0^{2\pi} \alpha(1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt}{8\alpha} = \frac{2\alpha^2 \left[-4 \cos \frac{t}{2} + \frac{4}{3} \cos^3 \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi}}{8\alpha} = \frac{2\alpha^2 \frac{16}{3}}{8\alpha} = \frac{4}{3}\alpha$$

$$\text{Άρα } K = (\pi\alpha, \frac{4}{3}\alpha)$$

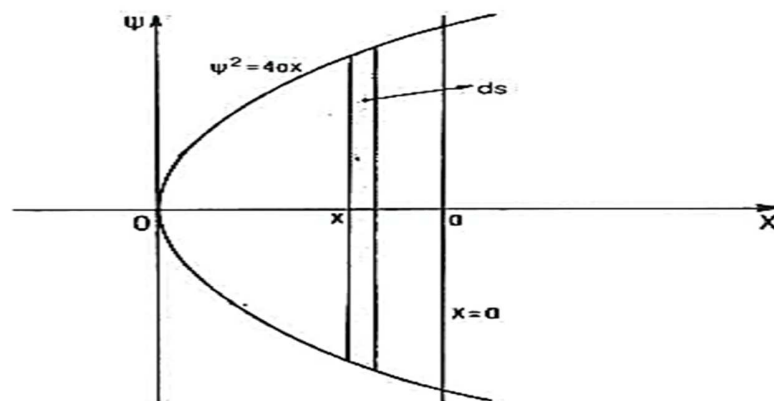
11. Εύρεση της ροπής αδρανείας ως προς τον άξονα yy' του σχήματος που περικλείεται από την παραβολή $y^2=4ax$ και την ευθεία $x=a$, $a>0$.

Λύση

Έστω ds το εμβαδόν της στοιχειώδους ζώνης που είναι παράλληλη προς τον άξονα yy' .

Είναι $dI_x = x^2 ds$ (1) Είναι $ds = 2|y|dx = 2\sqrt{4ax} dx$ (2) Έτσι, η (1) δίνει:

$$dI_x = 4x^2 \sqrt{ax} dx \Rightarrow I_x = \int_0^a 4x^2 \sqrt{ax} dx = 4\sqrt{a} \int_0^a x^{5/2} dx = \dots = \frac{8}{7} a^4$$



12. Εύρεση των στατικών ροπών ως προς τους άξονες yy' , xx' και του κέντρου βάρους του ομογενούς χωρίου του 1ου τεταρτημόριου που περικλείεται από την έλλειψη $4x^2+9y^2=36$ και τον κύκλο $x^2+y^2=9$.

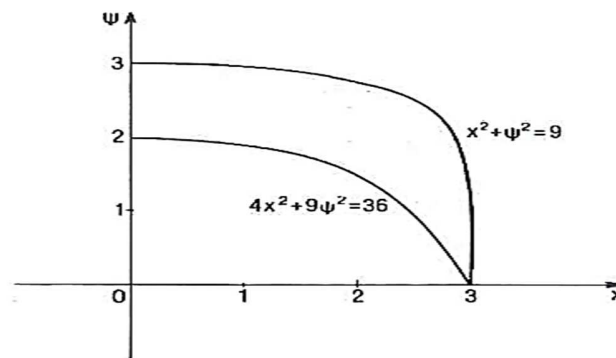
Λύση

Είναι

$$M_y = \int_0^3 x(y_2 - y_1) dx = \int_0^3 x \left[\sqrt{9-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^3 x \sqrt{9-x^2} dx = 3 \text{ και}$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^3 (y_2^2 - y_1^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left[(9-x^2) - \frac{4}{9}(9-x^2) \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(5 - \frac{5}{9}x^2 \right) dx = 5$$

Έστω x_0, y_0 οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους K . Είναι $x_0 = \frac{M_y}{E}$, $y_0 = \frac{M_x}{E}$ όπου E το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου. Είναι $E = \frac{3\pi}{4}$. Άρα, $x_0 = \frac{4}{\pi}$, $y_0 = \frac{20}{3\pi}$.



13. Εύρεση του κέντρου βάρους του ομογενούς χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \frac{2}{\pi}x$, $y = \sin x$ ($x \geq 0$).

Λύση

Τα κοινά σημεία των δύο καμπύλων είναι $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Το εμβαδόν του χωρίου είναι

$$E = \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx = \frac{4 - \pi}{4}. \quad \text{Ισχύει ότι } x_0 = \frac{M_y}{E}, \quad y_0 = \frac{M_x}{E} \quad \text{και}$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x - \frac{4x^2}{\pi^2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{4x^3}{3\pi^2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{24},$$

$$M_y = \int_0^{\pi/2} x \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}. \quad \text{Άρα, } x_0 = \frac{12 - \pi^2}{12 - 3\pi}, \quad y_0 = \frac{\pi}{6(4 - \pi)}$$

14. Εύρεση του κέντρου βάρους του τόξου AB της ομογενούς υλικής γραμμής με εξίσωση $y = \operatorname{ch} x$ όταν $A(0, 1)$, $B(a, \operatorname{cha})$.

Λύση

Έστω x_0, y_0 οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους. Είναι $x_0 = \frac{M_y}{\ell}$, $y_0 = \frac{M_x}{\ell}$

$$\text{Έχω } \ell = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^a \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sha}.$$

$$M_y = \int_0^a x \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^a x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^a x \operatorname{ch} x dx = [x \operatorname{sh} x]_0^a - \int_0^a \operatorname{sh} x dx = a \operatorname{sha} - \operatorname{cha} + 1$$

$$\text{Και } M_x = \int_0^a y \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^a y \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^a y \operatorname{ch} x dx = \int_0^a \operatorname{ch}^2 x dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^a (1 + ch(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{sh(2x)}{2} \right]_0^a = \frac{a}{2} + \frac{sh(2a)}{4}.$$

Άρα $x_0 = \frac{asha - cha + 1}{sha},$

$$y_0 = \frac{\frac{a}{2} + \frac{ch2a}{4}}{sha}$$

15. Εύρεση του κέντρου βάρους του τόξου της καρδιοειδούς καμπύλης $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (1), που περιέχεται μεταξύ των ημιευθειών $\varphi = 0, \varphi = \pi$.

Λύση

Η εξίσωση της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις είναι

$$x = \rho \cdot \cos \varphi \stackrel{(1)}{=} \alpha(1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi \stackrel{(1)}{=} \alpha(1 + \cos \varphi) \sin \varphi$$

$$\text{Είναι } d\ell = \sqrt{(\rho'_{\varphi})^2 + \rho^2} d\varphi = 2\alpha \cdot \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi *$$

$$\text{Άρα, } \ell = \int_0^{\pi} \sqrt{(\rho'_{\varphi})^2 + \rho^2} d\varphi = \int_0^{\pi} \alpha \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 4\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι} \quad x_0 &= \frac{1}{4\alpha} \int_0^{\pi} x d\ell = \frac{1}{4\alpha} \int_0^{\pi} \left[\alpha(1 + \cos \varphi)(\cos \varphi) 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] d\varphi = \\ &= \alpha \int_0^{\pi} \left[\cos \varphi \cdot \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] d\varphi = \alpha \int_0^{\pi} \left[\cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= \alpha \int_0^{\pi} \left[\cos^5 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \left(1 - \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] d\varphi = \alpha \int_0^{\pi} \left[2\cos^5 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] d\varphi = \\ &(\text{κάνω την αντικατάσταση } \frac{\varphi}{2} = \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\alpha \int_0^{\pi/2} (2\cos^5 \omega - \cos^3 \omega) d\omega = 2\alpha \left[2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \omega \cdot \cos \omega d\omega - \int_0^{\pi/2} \cos^2 \omega \cdot \cos \omega d\omega \right] = \\ &= 4\alpha \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \omega)^2 d(\sin \omega) - 2\alpha \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \omega) d(\sin \omega) = 4\alpha \frac{4}{5} \frac{2}{3} - 2\alpha \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι} \quad y_0 &= \frac{1}{4\alpha} \int_0^{\pi} y d\ell = \frac{1}{4\alpha} \int_0^{\pi} \left[\alpha(1 + \cos \varphi)(\sin \varphi) 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] d\varphi = \\ &= 2\alpha \int_0^{\pi} \left[\cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] d\varphi = \left[-\frac{4}{5} \alpha \cos^5 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]_0^{\pi} = \frac{4}{5} \alpha. \end{aligned}$$

*Είναι: $\sqrt{(\rho'_{\varphi})^2 + \rho^2} = \sqrt{(-\alpha \sin \varphi)^2 + \alpha^2(1 + \cos \varphi)^2} = \alpha \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 1 + 2\cos \varphi} =$

$$\alpha \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = 2\alpha \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right), \text{ διότι } 0 \leq \varphi \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

16. Εύρεση του κέντρου βάρους του τόξου της καμπύλης με εξίσωση $y = \alpha \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, αν $-\alpha \leq x \leq \alpha$.

Λύση

Η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον yy' . Άρα, το κέντρο βάρους βρίσκεται στον άξονα yy' . Έστω x_0, y_0 , οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } x_0=0 \quad \text{και} \quad y_0 &= \frac{1}{\ell} \int_{-\alpha}^{\alpha} y d\ell = \frac{1}{\ell} \int_{-\alpha}^{\alpha} y \sqrt{1+(y')^2} dx = \frac{1}{\ell} \int_{-\alpha}^{\alpha} \alpha \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \sqrt{1+sh^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)} dx = \\ &= \frac{1}{\ell} \int_{-\alpha}^{\alpha} \alpha \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \frac{1}{\ell} \int_{-\alpha}^{\alpha} \alpha \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\alpha} \alpha \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \ell = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1+(y')^2} dx = 2 \int_0^{\alpha} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \left[2\alpha sh\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right]_0^{\alpha} = 2\alpha sh1.$$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι η (1) δίνει } y_0 &= \frac{2}{2\alpha sh1} \int_0^{\alpha} \alpha \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \frac{1}{sh1} \int_0^{\alpha} \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \frac{1}{2sh1} \int_0^{\alpha} \left[1 + \operatorname{ch}\left(\frac{2x}{\alpha}\right) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2sh1} \left[x + \frac{\alpha}{2} sh\left(\frac{2x}{\alpha}\right) \right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha}{2sh1} \left(1 + \frac{1}{2} sh^2 \right) \end{aligned}$$

17. Εύρεση του κέντρου βάρους του ομογενούς χωρίου που περικλείεται από την έλλειψη $x = \alpha \cos t$, $y = \beta \sin t$ και από τους άξονες των συντεταγμένων (στο 1^ο τεταρτημόριο).

Λύση

Το εμβαδόν $E_{ολ}$ της έλλειψης είναι $E_{ολ} = \pi \alpha \beta$.

Άρα, το εμβαδόν του χωρίου είναι $E = \frac{\pi \alpha \beta}{4}$.

Στο 1^ο τεταρτημόριο το x μεταβάλλεται από 0 έως α ενώ το t από $\pi/2$ έως 0.

$$\text{Είναι } x_0 = \frac{1}{E} \int_0^{\alpha} xy dx = \frac{1}{E} \int_{\pi/2}^0 [\alpha \cos t \cdot \beta \sin t \cdot (-\alpha \sin t)] dt = \frac{\alpha^2 \beta}{E} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t \cdot \cos t) dt =$$

$$\frac{\alpha^2 \beta}{E} \cdot \frac{1}{3} [\sin^3 t]_0^{\pi/2} = \frac{\alpha^2 \beta}{3E} = \frac{4\alpha^2 \beta}{3\pi \alpha \beta} = \frac{4\alpha}{3\pi}. \text{ Είναι}$$

$$y_0 = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} y^2 dx = \frac{1}{2E} \int_{\pi/2}^0 \beta^2 \sin^2 t (-\alpha \cdot \sin t) dt = \frac{2\alpha \beta^2}{\pi \alpha \beta} \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t) d(\cos t) =$$

$$\frac{2\beta}{\pi} \left[\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{\pi/2}^0 = \frac{4\beta}{3\pi}$$

18. Εύρεση της στατικής ροπής ως προς τον άξονα xx' , του τόξου έλλειψης με $y \geq 0$ και του τόξου κύκλου με $y \geq 0$.

Λύση

Έστω $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ η εξίσωση της έλλειψης. Είναι $y^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2$.

Θέλω να βρω τη στατική ροπή του τόξου AB της έλλειψης ως προς τον xx' όπου $A(-\alpha,0)$, $B(\alpha,0)$. Είναι $M_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} y \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{y^2 + (yy')^2} dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2 + \frac{\beta^4}{\alpha^4} x^2} dx =$

$$= \frac{\beta}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} x^2} dx = \frac{\beta}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 x^2} dx =$$

$$= \frac{2\beta}{\alpha} \int_0^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 x^2} dx^* = \frac{\beta}{\alpha} \left(\alpha \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon} \operatorname{τοξ} \sin \varepsilon \right) =$$

$$\beta \left(\beta + \frac{\alpha}{\varepsilon} \operatorname{τοξ} \sin \varepsilon \right) \Leftrightarrow M_x = \beta \left(\beta + \frac{\alpha}{\varepsilon} \operatorname{τοξ} \sin \varepsilon \right).$$

($\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}$ εκκεντρότητα έλλειψης). Στην περίπτωση κύκλου είναι $\alpha=\beta$, $\varepsilon=0$. Είναι $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{τοξ} \eta \mu \varepsilon}{\varepsilon} = 1$. Άρα $M_x = \beta(\beta + \alpha) = \beta(\beta + \beta) = 2\beta^2$.

*Συνάρτηση άρτια

9. Πίεση των ρευστών

Πίεση καλείται η δύναμη που ασκείται στη μονάδα του εμβαδού, δηλαδή η κάθετη δύναμη F που ασκείται σε μια (επίπεδη) επιφάνεια δεδομένου εμβαδού S δια της επιφάνειας στην οποία η F είναι κατανεμημένη, δηλαδή $P = \frac{F}{S}$ (1) Η πίεση P σε οριζόντια επιφάνεια εμβαδού S , που μια στήλη ενός υγρού ύψους h έχει σαν βάση είναι $P = \varepsilon h$ (2) όπου ε =ειδικό βάρος υγρού είναι $F = PS$ ή $F = \varepsilon \cdot h \cdot S$ (3) Η πίεση που ασκείται από ένα υγρό σε οποιοδήποτε σημείο μέσα σε αυτό, είναι η ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις. Όλα τα πιο πάνω με την προϋπόθεση ότι το υγρό βρίσκεται σε ισορροπία.

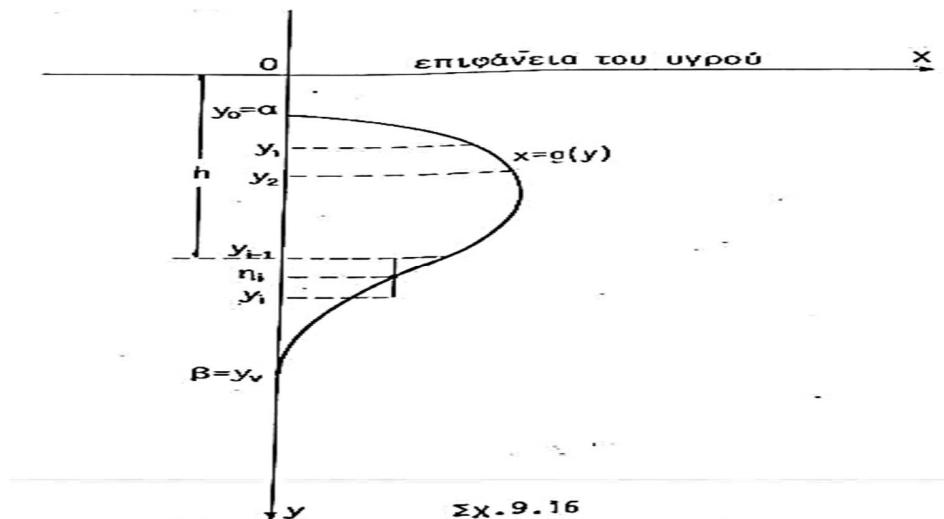
9.1 Δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια βυθισμένη σε υγρό

Έστω επίπεδη επιφάνεια βυθισμένη κατακόρυφα σε υγρό (Σχήμα 9.16) ειδικού βάρος ε . Θεωρώ την βυθισμένη επίπεδη επιφάνεια στο επίπεδο xy με τον άξονα xx' στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και τον θετικό άξονα yy' κατευθυνόμενο προς τα κάτω.

Αν $x=g(y)/[\alpha, \beta]$, συνεχής είναι η καμπύλη που με τον άξονα ορίζουν τη βυθισμένη επιφάνεια και α το ανώτερο σημείο της επιφάνειας αυτής και β το κατώτερο σημείο. Για να υπολογίσω τη δύναμη που ασκείται σε αυτήν εργαζόμαι ως εξής: Παίρνω έναν διαμερισμό Δ_n του $[\alpha, \beta]$ τον $\Delta_n = \{\alpha = y_0 < y_1 < \dots < y_{i-1} < y_i < \dots < \beta = y_n\}$ με $\lambda \rightarrow 0$ και από τα σημεία της διαμέρισης φέρνω παράλληλες προς την επιφάνεια του υγρού και έστω $[y_{i-1}, y_i]$ το τυχόν υποδιάστημα. Σχηματίζω το στοιχειώδες ορθογώνιο με πλάτος $y_i - y_{i-1} = \Delta_i y$ και μήκος $g(n_i)$ με $i=1, 2, \dots, n$ όπου $n_i \in [y_{i-1}, y_i]$. Έστω h το βάθος της πάνω βάσης του στοιχειώδους αυτού ορθογωνίου από την επιφάνεια του υγρού. Η δύναμη που ασκείται στο στοιχειώδες ορθογώνιο με διαστάσεις $\Delta_i y$ και $g(n_i)$ είναι $F_i = \varepsilon n_i g(n_i) \Delta_i y$. Το άθροισμα Riemann $\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon n_i g(n_i) \Delta_i y$ (4) δίνει κατά προσέγγιση τη δύναμη που

ασκείται στην επιφάνεια του (Σχήμα 9.16). Και επειδή η $x=g(y)$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ υπάρχει το όριο του (4) και είναι $F = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varepsilon n_i g(n_i) \Delta_i y = \varepsilon \int_a^\beta y g(y) dy$.

Συνεπώς, η ολική δύναμη που ασκείται στη βυθισμένη επιφάνεια δίνεται από τον τύπο $F = \varepsilon \int_a^\beta y g(y) dy$ (5)



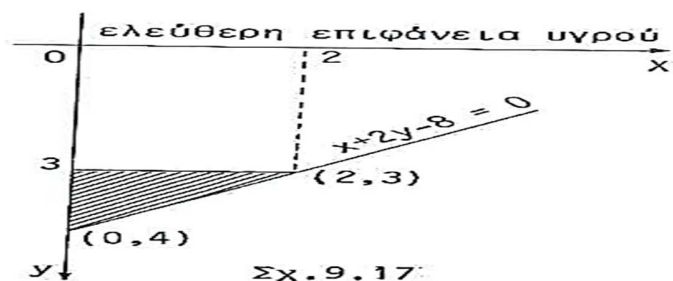
9.2 Εφαρμογές

1. Εύρεση της δύναμης που ασκείται στη μία όψη επιφάνειας που ορίζεται από τις γραμμές $x=0$, $y=3$ και $x+2y-8=0$ και είναι βυθισμένη σε υγρό ειδικού βάρους ε .

Λύση

Η $x+2y-8=0$ τέμνεται με την $y=3$ στο σημείο $(2, 3)$ και τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $(0, 4)$. Από την $x+2y-8=0$ είναι $x=8-2y$ και ο (5) δίνει

$$F = \varepsilon \int_3^4 y(8-2y) dy = \varepsilon \int_3^4 (8y-2y^2) dy = \varepsilon \left[4y^2 - \frac{2y^3}{3} \right]_3^4 = \frac{10}{3} \varepsilon$$

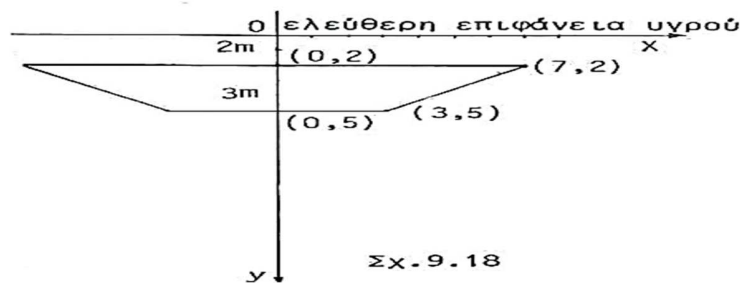


2. Ισοσκελές τραπέζιο μικρής βάσης 6 m, μεγάλης βάσης 14 m, ύψους 3 m, είναι βυθισμένο κατακόρυφα σε υγρό με τη μικρή βάση προς τα κάτω και σε απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια σε σχέση με τη μεγάλη βάση 2 m. Βρείτε την ολική δύναμη που ασκείται σε αυτό, από το υγρό (δίνεται ειδικό βάρος υγρού ε)

Λύση

Παίρνω τους άξονες όπως στο παρακάτω σχήμα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (3, 5), (7, 2) έχει εξίσωση $x = \frac{29}{3} - \frac{4y}{3}$ και από (5) για την ολική δύναμη

$$F = 2\varepsilon \int_2^5 y \left(\frac{29}{3} - \frac{4y}{3} \right) dy = 2\varepsilon \int_2^5 \left(\frac{29}{3}y - \frac{4y^2}{3} \right) dy = 2\varepsilon \left[\frac{29y^2}{6} - \frac{4y^3}{9} \right]_2^5 = 99\varepsilon$$

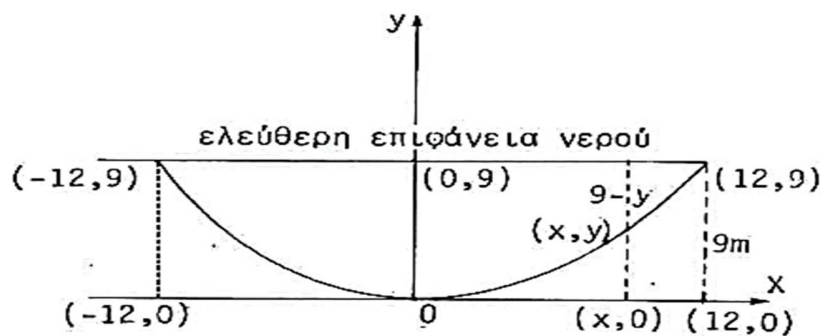


3. Δίσκος που έχει μορφή παραβολικού τμήματος με βάση 24 m και ύψος 9 m, είναι βυθισμένος σε υγρό ειδικού βάρους ε , έτσι ώστε η βάση του, να είναι στο ίδιο επίπεδο με την επιφάνεια του νερού. Ποια είναι η δύναμη που ασκείται στην πλευρά του δίσκου;

Λύση

Η παραβολή έχει εξίσωση $x^2 = ky$ και επειδή διέρχεται από το σημείο (12, 9) ισχύει ότι $12^2 = k \cdot 9 \Rightarrow k = 16$ άρα $x^2 = 16y$. Από την (5) για την ολική δύναμη είναι

$$F = 2\varepsilon \int_0^9 (9-y)4\sqrt{y} dy = 8\varepsilon \int_0^9 (9y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}) dy = 8\varepsilon \left[6y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} \right]_0^9 = \frac{2592}{5}\varepsilon$$



Σχ.9.19