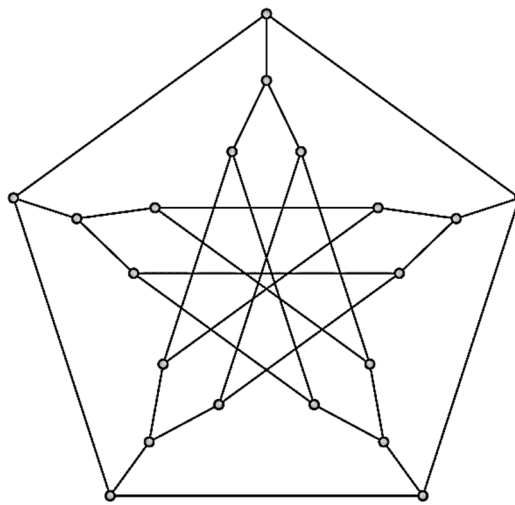




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Η θεωρία γραφημάτων



Σπουδαστής: Ψυχάκης Παναγιώτης (ΑΜ 8355)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (Μ.Εδ.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2020–2021

Ημερομηνία ανάθεσης: 04/ 05/ 2020
Ημερομηνία κατάθεσης: ... /06/ 2021
Ημερομηνία εξέτασης: ... / 06/ 2021

Α/Α	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Αντώνιος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Πρόλογος	4
1. Ιστορικά δρώμενα	4
2. Βασικοί ορισμοί της θεωρίας των γραφημάτων	4
2.1 Μη κατευθυνόμενο γράφημα	4
2.2 Κατευθυνόμενο γράφημα	5
2.3 Ανακυκλώσιμες και αντιπαράλληλες ακμές	5
2.4 Μονοπάτι	5
2.5 Απλό μονοπάτι (ή μονοκονδυλιά)	5
2.6 Κύκλος	6
2.7 Είδη γραφημάτων	6
2.8 Συνδεόμενο γράφημα	7
2.9 Συμπλήρωμα γραφήματος	9
2.10 Βαθμός της κορυφής	10
2.11 Θεώρημα βαθμών των κορυφών ή λήμμα της χειραψίας	10
2.12 Διχοτομισμό ή διμερές γράφημα	11
2.13 Χρωματισμός γράφημα	12
2.14 Χρωματικός αριθμός	13
2.14.1 Εφαρμογή	14
2.15 Κύκλος του Euler	15
2.15.1 Θεώρημα του Euler	16
2.16 William Hamilton	17
2.16.1 Κύκλος του Hamilton	18
2.17 Ισομορφισμός γραφημάτων	20
2.18 Επίπεδα γραφήματα	21
2.19 Απλοποίηση σειράς	22
2.20 Δέντρο	23
2.21 Δάσος	24
3. Εφαρμογές των γραφημάτων	26
3.1 Γραφήματα και Διαδίκτυο	26
3.2 Γραφήματα στη χημεία	27
3.3 Γραφήματα στην αρχιτεκτονική	27
3.4 Γραφήματα στα κοινωνικά δίκτυα	28
3.5 Ψυχαγωγικά γραφήματα	28
3.6 Η διαδρομή του αλόγου στο σκάκι	29
3.7 Covid-19	30
4. Συμπεράσματα	30
5. Βιβλιογραφία	31

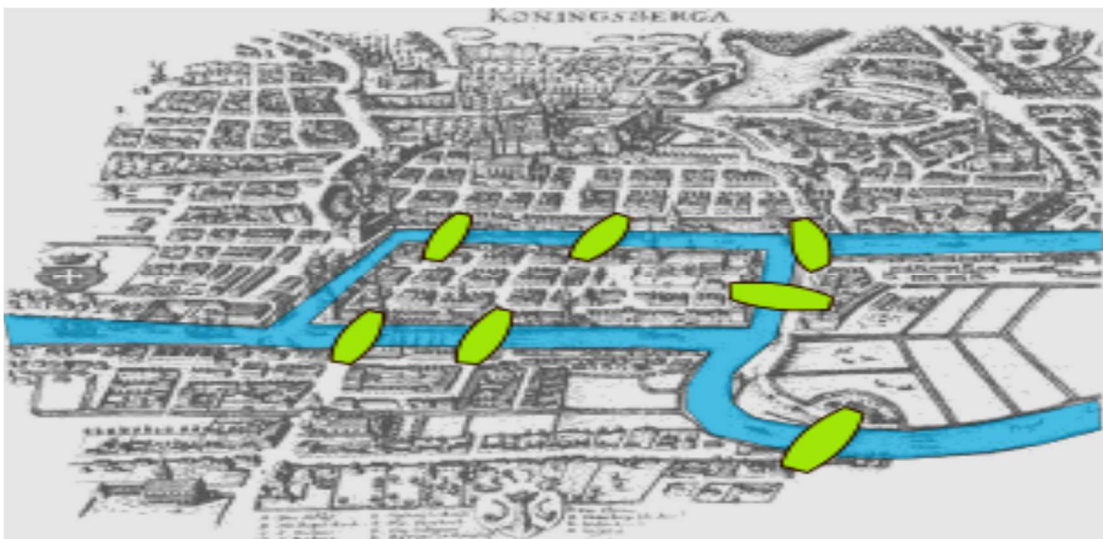
Πρόλογος

Ο πολιτισμός στις ημέρες μας, δε βασίζεται μόνο σε γράμματα και αριθμούς, αλλά είναι γεμάτος εικόνες, σχήματα, φωτογραφίες και χάρτες. Αυτά τα σχήματα, έχουν σημεία και γραμμές που λέγονται **γραφήματα**, αποτελούν αναπόσπαστο τομέα των μαθηματικών και βοηθούν στην επίλυση πολλών προβλημάτων. Θα παρουσιαστούν βασικές εφαρμογές των γραφημάτων, ώστε να διαπιστωθεί η χρησιμότητα τους στην καθημερινότητα μας.

1. Ιστορικά δρώμενα

Η θεωρία των γραφημάτων, ξεκίνησε από ένα τουριστικό–ψυχαγωγικό πρόβλημα που έλυσε ο Leonhard Euler, ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Γεννήθηκε στην Ελβετία, πέρασε μεγάλο μέρος της ζωής του στις ακαδημίες της Αγίας Πετρούπολης και του Βερολίνου και διακρίθηκε σε πολλούς τομείς. Εξέδωσε πάνω από 500 έργα και το 54% του έργου του πραγματοποιήθηκε μετά την απώλεια όρασης, το 1766. Θεωρείται πρωτοπόρος της θεωρίας των γραφημάτων για την επίλυση του προβλήματος με τις γέφυρες του Königsberg.

Η ιστορία λέει ότι το 1736 σε ένα από τα ταξίδια του, σταμάτησε στο Königsberg της Πρωσίας (σημερινό Καλίνινγκραντ). Η πόλη χωρίζεται σε τέσσερα μέρη που συνδέονται με επτά γέφυρες, αφού διασχίζεται από ένα ποτάμι. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η διάταξη της πόλης και οι τέσσερις διαφορετικές περιοχές.



Στη συνέχεια, υπήρξαν και άλλοι επιστήμονες που για να ολοκληρώσουν το έργο τους χρησιμοποίησαν ως βάση τα γραφήματα, όπως ο Kirchhoff το 1847, στα ηλεκτρικά κυκλώματα. Η θεωρία των γραφημάτων, αναπτύχθηκε ως τον 21^ο αιώνα οπότε αποτέλεσε ισχυρό όπλο για την επίλυση προβλημάτων και σε άλλες ειδικότητες.

2. Βασικοί ορισμοί της θεωρίας των γραφημάτων

2.1 Μη κατευθυνόμενο γράφημα

Μη κατευθυνόμενο γράφημα G , είναι μια διατεταγμένη δυάδα (V, E) όπου:

- V είναι το σύνολο των κορυφών (ή κόμβων): $V=(v_1, v_2, \dots, v_n)$
- E είναι το σύνολο των ακμών (ή πλευρών ή τόξων): $E=(e_1, e_2, \dots, e_m)$
- Η ακμή θεωρείται μη διατεταγμένη (η ακμή (v_i, v_j) είναι ίδια με την ακμή (v_j, v_i)), δηλαδή δεν υπάρχει κατεύθυνση. Δεν έχει σημασία στη σχηματική

απεικόνιση η τοποθέτηση των κορυφών στο επίπεδο. Σημασία έχει να έχει βάλεις τις κορυφές που φαίνονται στο σύνολο και να φαίνεται ποια είναι η συνδεσιμότητα των ακμών, όπως τονίζει το σύνολο ακμών.

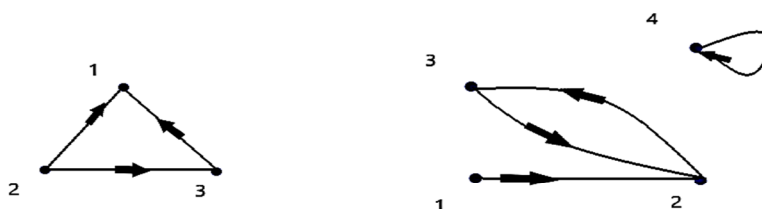
- Κάθε ακμή συνδέει δυο κορυφές, δηλαδή $e_k=(v_i, v_j)$ με v_i, v_j να ανήκει στο V για κάθε $k=1,2,\dots,m$

2.2 Κατευθυνόμενο γράφημα

Κατευθυνόμενο γράφημα G , είναι μια διατεταγμένη δυάδα (V,E) όπου:

- V είναι το σύνολο των κορυφών (ή κόμβων): $V=(v_1, v_2, \dots, v_n)$
- E είναι το σύνολο των ακμών (ή πλευρών ή τόξων): $E=(e_1, e_2, \dots, e_m)$
- Κάθε ακμή συνδέει δυο κορυφές, δηλαδή $e_k=(v_i, v_j)$ με v_i, v_j να ανήκει στο V για κάθε $k=1,2,\dots,m$
- Η ακμή θεωρείται διατεταγμένη (δηλαδή η ακμή (v_i, v_j) είναι ίδια με την ακμή (v_j, v_i)) δηλαδή υπάρχει κατεύθυνση.

Στα δύο παραδείγματα της παρακάτω εικόνας φαίνεται, από την κατεύθυνση που απεικονίζουν, πως τα σύνολα στη πραγματικότητα είναι το γράφημα. Σε ένα γράφημα κατευθυνόμενο και μη, με n συμβολίζουμε το πλήθος των κορυφών και με m το πλήθος των ακμών. Ένα γράφημα, έχει τουλάχιστον μια κορυφή (δεν υπάρχει γράφημα χωρίς κορυφές).



2.3 Ανακυκλώσιμες και αντιπαράλληλες ακμές

Ανακυκλώσιμες ακμές, είναι οι ακμές με αρχή και τέλος την ίδια κορυφή, παράλληλες ακμές, οι οποίες είναι ακμές με κοινά άκρα και κοινή φορά.

Αντιπαράλληλες ακμές, είναι οι ακμές με κοινά άκρα και αντίθετη φορά.

2.4 Μονοπάτι

Μονοπάτι P μήκους n από μια κορυφή v_0 σε μια κορυφή v_n είναι μια ακολουθία n ακμών, ακολουθώντας τις τυχόν κατευθύνσεις τους, άρα $(n+1)$ κορυφών που ξεκινά από τη κορυφή v_0 και καταλήγει στην κορυφή v_n .

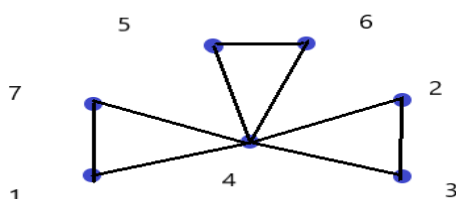
2.5 Απλό μονοπάτι (ή μονοκονδυλιά)

Απλό μονοπάτι, είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές. Στο παρακάτω παράδειγμα έχω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο θέλω να βρω το μέγιστο μήκος του μονοπατιού, αλλά και το μέγιστο μήκος του απλού μονοπατιού.

Για το 1^ο ερώτημα, από τη στιγμή που επιτρέπει να επαναλάβω όσες φορές θέλω, κορυφές και ακμές, σημαίνει ότι μπορώ να πηγαίνω τον περίπατο πάνω στο

γράφημα όσες φορές θέλω, όπότε μέγιστο μήκος δεν υπάρχει και μπορώ να συμβολίσω το αποτέλεσμα με $+\infty$.

Στο **2^ο ερώτημα** θέλω να βρω το μέγιστο μήκος του απλού μονοπατιού όπου δεν επιτρέπεται να πατήσω στην ίδια κορυφή και αυτό έχει ως αποτέλεσμα, το μέγιστο μήκος να είναι τέσσερα. Μπορώ να συμβολίσω το μονοπάτι που θα ακολουθήσω 1–7–4–5–6 δηλαδή μια ακολουθία διαδοχικών κορυφών. Βέβαια υπάρχουν και άλλες ισοδύναμες λύσεις.



2.6 Κύκλος

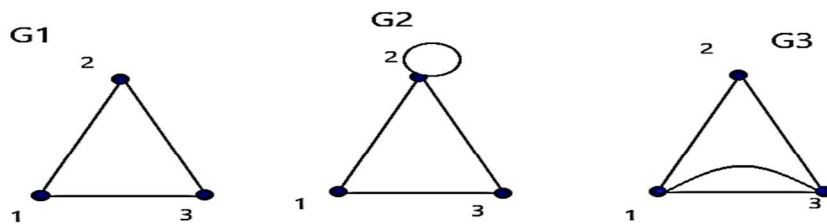
Κύκλος, είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές, που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή. Επιτρέπεται να περάσω από την ίδια κορυφή και δεν επιτρέπεται να περάσω από την ίδια ακμή.

2.7 Είδη γραφημάτων

Οι ακόλουθοι ορισμοί, αφορούν μόνο μη κατευθυνόμενα γραφήματα τα οποία θα ακολουθήσουμε σε όλη την πτυχιακή εργασία. Ένα γράφημα, θα χαρακτηρίζεται ως ακολούθως.

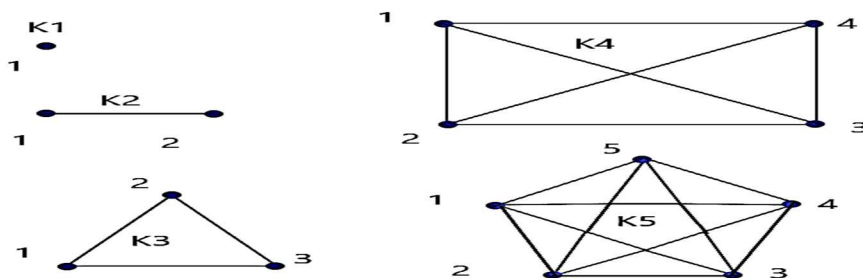
- **Απλό** γράφημα, χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές.
- **Πλήρες** (ή κλίκα) γράφημα, είναι ένα απλό γράφημα με όλες τις δυνατές ακμές.
- **Συνδεδεμένο** (ή συνδεδεμένο) γράφημα, αν κάθε δυο κορυφές του γραφήματος συνδέονται με μονοπάτι.

Στο παρακάτω παράδειγμα, θα δούμε τρία γραφήματα και ποια από αυτά είναι απλά, δηλαδή δεν περιέχουν ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές. Το G_1 είναι απλό, το G_2 δεν είναι απλό διότι περιέχει ανακύκλωση και αντίστοιχα το G_3 δεν είναι απλό διότι περιέχει παράλληλες ακμές. Το πλήρες γράφημα (ή κλίκα) των n κορυφών (συμβολισμός K_n) είναι ένα απλό γράφημα $G=(V,E)$ με n κορυφές που περιέχει όλες τις δυνατές ακμές. Τυπικά, για κάθε v_i, v_j να ανήκει στο V με $i \neq j$ η ακμή (v_i, v_j) να ανήκει στο E . Σημαντική παρατήρηση είναι ότι μια κλίκα n κορυφών έχει $n(n-1)/2$ ακμές. (Ο προηγούμενος τύπος είναι οι συνδυασμοί των n κορυφών ανά 2 και προκύπτει από τη συνδυαστική). Στο παρακάτω σχήμα, φαίνονται οι 5 πρώτες κλίκες.

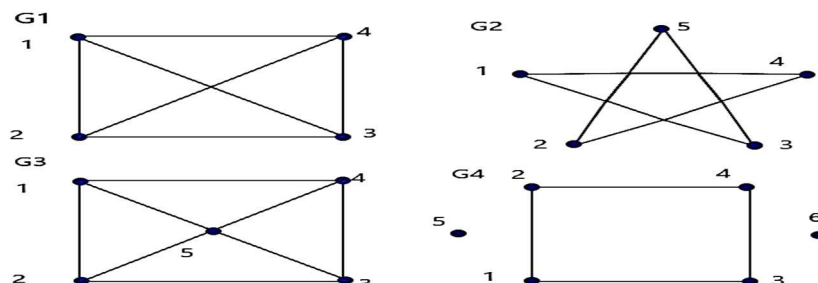


Στο επόμενο παράδειγμα, θα δούμε ποια από τα γραφήματα είναι πλήρη και αν δεν είναι πλήρη, πόσες ακμές πρέπει να προσθέσουμε για να γίνει το κάθε γράφημα πλήρες. Το **1^ο γράφημα** είναι πλήρες και κλίκα τεσσάρων κορυφών για K_4 .

Στο **2^ο γράφημα** βλέπουμε ότι λείπουν κορυφές και για να είναι πλήρες πρέπει να προσθέσουμε πέντε ακμές ώστε να έχουμε κλίκα K_5 . Το 5 μπορούμε να το βγάλουμε και από τον σχετικό τύπο.



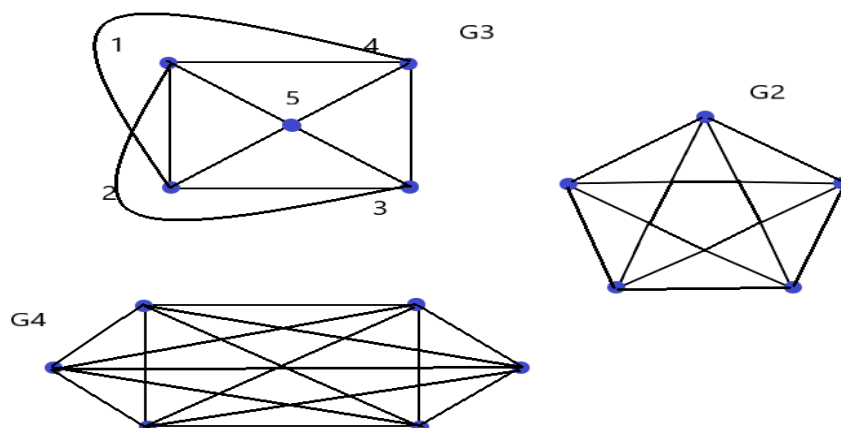
Για $n=5$ έχω 10 ακμές και για αυτό μου υπολείπονται ακόμα 5 ακμές, αφού το γράφημα από μόνο του, έχει 5 ακμές. Ανάλογα και για το τρίτο γράφημα, έχω 8 ακμές και 5 κορυφές, από τον τύπο για $n=5$ έχω 10 ακμές, άρα υπολείπονται ακόμα 2 ακμές. Στο **τελευταίο γράφημα** για $n=6$ από τύπο έχω 15 ακμές. Στο γράφημα έχω μόνο 4 ακμές και για αυτό υπολείπονται ακόμα 11 κορυφές. Σχηματικά τα γραφήματα 2, 3, 4 έχουν ως εξής.



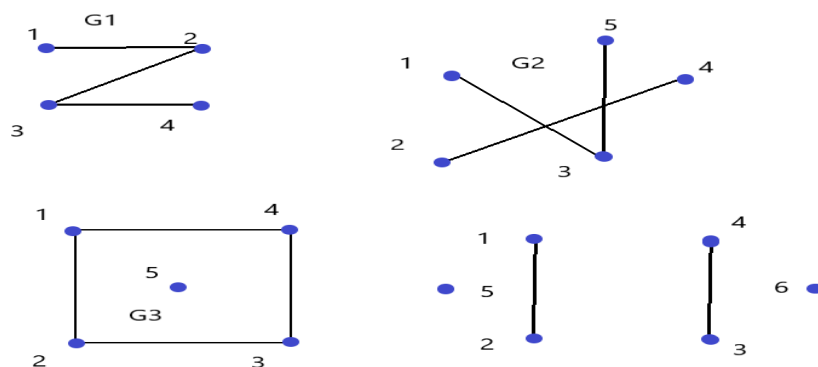
2.8 Συνδεδεμένο γράφημα

Συνδεδεμένο (ή συνδεδεμένο) καλείται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα που οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές κορυφές συνδέονται με τουλάχιστον ένα μονοπάτι. Τυπικά, για κάθε v_i, v_j που ανήκει στο V με $i \neq j$ υπάρχει μονοπάτι από την v_i στη v_j .

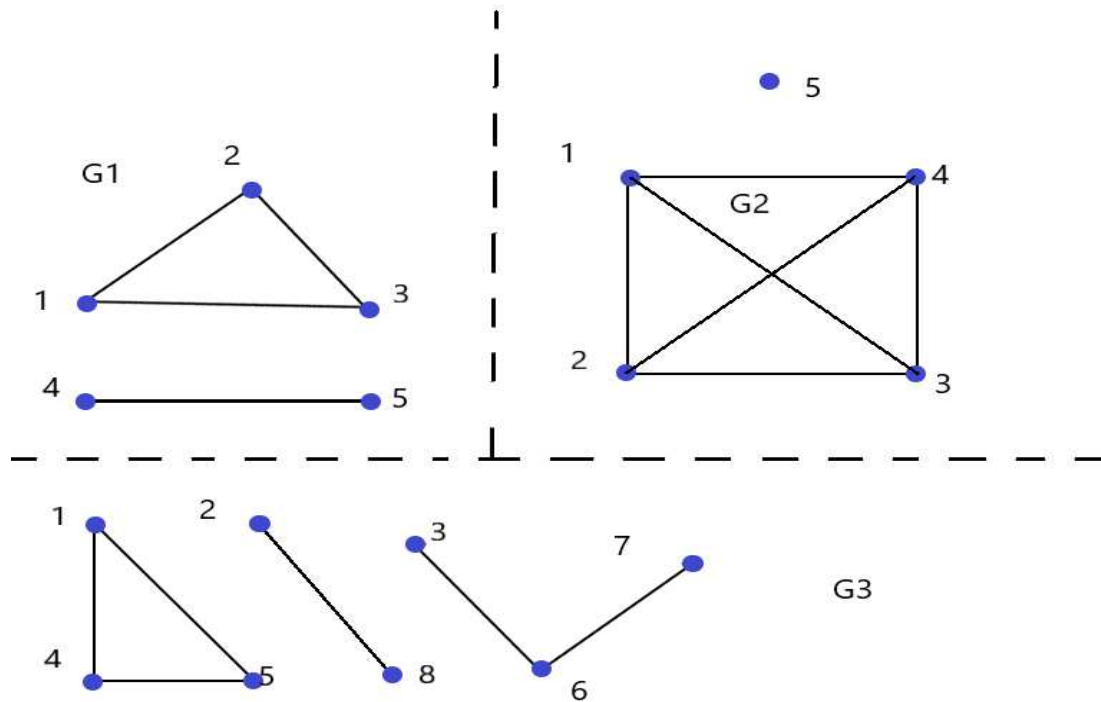
Σχεδόν όλα τα γραφήματα μέχρι τώρα ήταν συνδεόμενα. Στο παρακάτω παράδειγμα θα δούμε γραφήματα μη συνδεόμενα. Το 1^ο γράφημα αποτελείται από δυο κομμάτια, τα οποία αναδεικνύουν πως υπάρχουν κορυφές αλλά δε συνδέονται μεταξύ τους με μονοπάτι από την κορυφή 3 στην κορυφή 5.



Οπότε δεν έχω αυτή την προσβασιμότητα και έτσι έχω ένα μη συνδεόμενο γράφημα. Και στα άλλα δυο γραφήματα, έχω κάποια υπογραφήματα στα οποία δεν υπάρχει κοινή σύνδεση μεταξύ των υπογραφημάτων με κάποιο μονοπάτι. Δηλαδή, αν ένα γράφημα είναι μη συνδεδεμένο, τότε κάθε μεγιστοτικό (ως προς τις κορυφές) συνδεόμενο υπογράφημα του λέγεται **συνεκτική συνιστώσα** ή ασύνδετο τμήμα.



Πρακτικά συνεκτική συνιστώσα, είναι ένα κομμάτι του γραφήματος στο οποίο μπορούμε να μεταβούμε μέσω ενός μονοπατιού, από κάθε κορυφή σε κάθε άλλη. Γενικά, ένα γράφημα είναι συνδεόμενο οπότε θα αποτελείται από μια συνεκτική συνιστώσα ή μη συνδεόμενο οπότε θα αποτελείται από τουλάχιστον δυο συνεκτικές συνιστώσες. Παρακάτω θα δοθεί ένα παράδειγμα με συνδεόμενα γραφήματα και όποια από αυτά δεν είναι, από πόσες συνεκτικές συνιστώσες αποτελούνται και πόσες ακμές πρέπει να προσθέσω, ώστε να γίνουν συνδεόμενα.



Το 1^ο γράφημα είναι συνδεόμενο, αποτελείται από τέσσερις κορυφές και κάθε κορυφή είναι προσβάσιμη μέσω ενός μονοπατιού. Το 2^ο γράφημα είναι μη συνδεόμενο και το μόνο που χρειάζεται είναι να τραβήξω την κορυφή 3 προς τα πάνω, ώστε να χωρίσουν για να έχω δυο συνεκτικές συνιστώσες και να προσθέσω απλά μια ακμή για να γίνει συνδεόμενο.

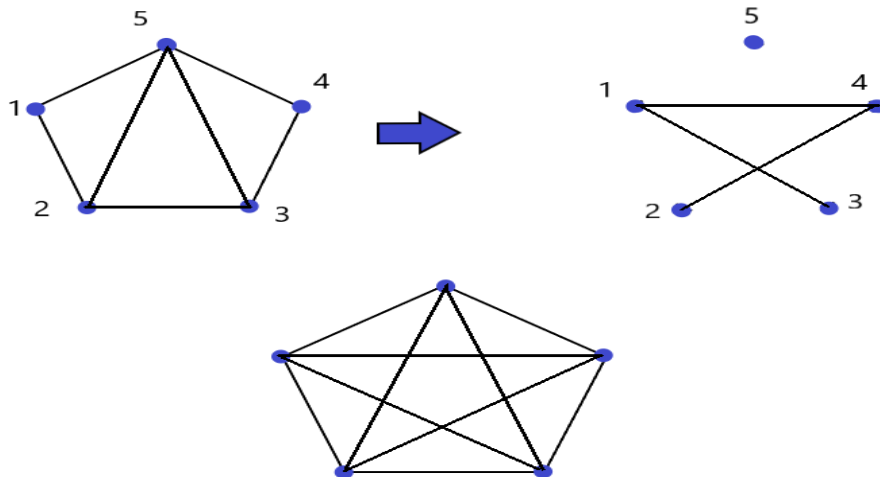
Στο 3^ο γράφημα έχω δυο συνεκτικές συνιστώσες, οπότε είναι μη συνδεόμενο και αρκεί να προσθέσω μια μόνο ακμή για να γίνει το γράφημα συνδεόμενο (μια κορυφή μόνη της θεωρείται συνδεόμενο γράφημα). Για το 4^ο γράφημα έχω τέσσερις συνεκτικές συνιστώσες, οπότε το γράφημα είναι μη συνδεόμενο και για να γίνει συνδεόμενο πρέπει να προσθέσω τρεις ακμές. Τέλος, αφού το γράφημα δεν είναι συνδεόμενο και αποτελείται από k συνεκτικές συνιστώσες και κάθε ακμή συνδέει δυο συνεκτικές συνιστώσες, θα χρειαστώ $(k-1)$ ακμές αποδεικνύοντας το με επαγωγή.

2.9 Συμπλήρωμα γραφήματος

Έστω ένα απλό γράφημα $G=(V,E)$. Συμπλήρωμα του G , καλείται το γράφημα $G^c=(V^c,E^c)$ που έχει τις ίδιες κορυφές με το G και έχει ως ακμές αυτές που δεν περιέχονται στο G . Άρα, θα έχω:

ακμές γραφήματος + ακμές συμπληρώματος = ακμές κλίκας

αλλιώς, από τον τύπο πρέπει να ισχύει ότι $E+E^c=n(n-1)/2$. Στο επόμενο παράδειγμα, έστω ένα γράφημα $G=(V,E)$. Θα κατασκευάσω με τις ίδιες κορυφές το συμπλήρωμα του γραφήματος, δηλαδή με βάση τον προηγούμενο τύπο θα δω πόσες ακμές υπολείπονται, ώστε βάζοντας το ένα γράφημα πάνω στο άλλο να έχω ένα πλήρες γράφημα (ή κλίκα). Έστω ένα γράφημα $G=(V,E)$. Τότε υπογράφημα του G καλείται ένα γράφημα $G^c=(V^c,E^c)$ που περιέχει κάποιες κορυφές και κάποιες ακμές του G που συνδέουν αυτές τις κορυφές. Απαγορεύεται στο υπογράφημα να έχω ακμή που δεν ανήκει στο αρχικό γράφημα.

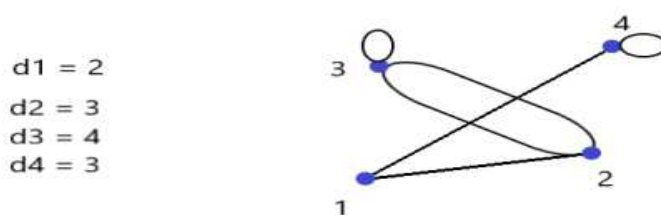


2.10 Βαθμός της κορυφής

Βαθμός της κορυφής v_i , είναι το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε αυτήν και συμβολίζεται με $d(v_i)$. Για λόγους ευκολίας, θα το γράφω απλά βαθμός μιας συγκεκριμένης κορυφής. Ειδικά για μη απλά γραφήματα, η ανακύκλωση μετρά κατά 2 στο βαθμό της κορυφής. Στα επόμενο παραδείγμα βλέπω το βαθμό κορυφής, ώστε να υπάρξει μια εξικοίωση.

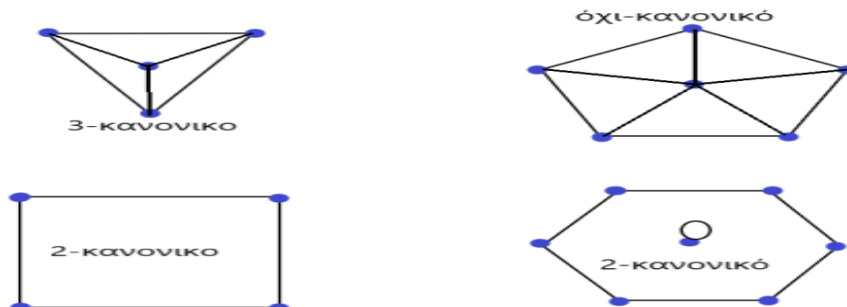
2.11 Θεώρημα βαθμών των κορυφών ή λήμμα της χειραψίας

Λέει ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι ίσο με το διπλάσιο των ακμών, δηλαδή $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$. Ισχύει ότι **το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα, είναι άρτιος αριθμός και το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό, είναι άρτιος αριθμός.**



Άλλος ένας ορισμός για ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα: Θα λέγεται k -κανονικό αν και μόνο αν όλες οι κορυφές έχουν βαθμό k . Ενώ αν αναφέρεται ότι το γράφημα είναι κανονικό, σημαίνει ότι όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό. Επίσης σε ένα k -κανονικό γράφημα ισχύει $m = nk/2$. Στο παρακάτω παράδειγμα φαίνεται ποιο

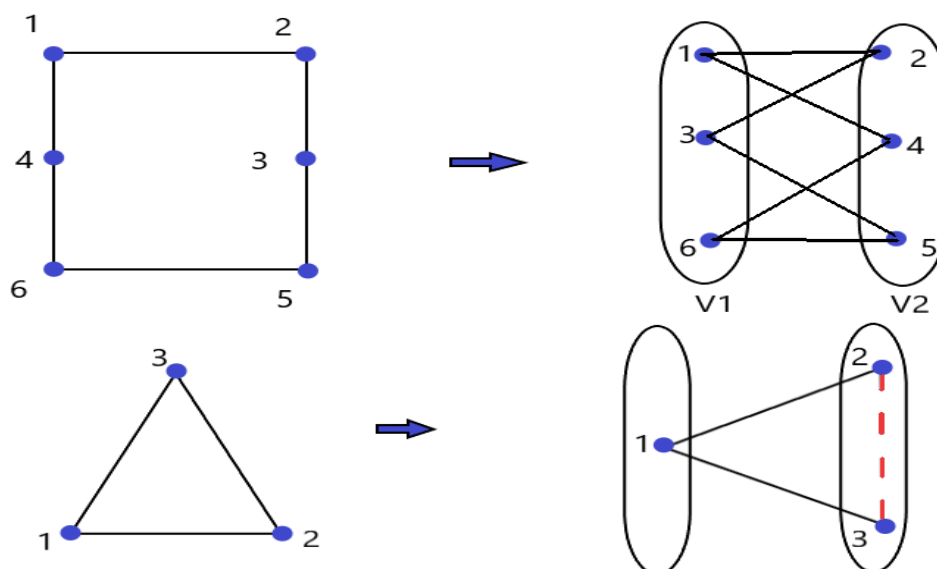
γράφημα είναι κανονικό. Στο **1^ο γράφημα** όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό τρία οπότε θα έχουμε 3-κανονικό γράφημα. Στο **2^ο γράφημα** υπάρχει κορυφή που είναι διαφορετικού βαθμού από τις υπόλοιπες οπότε δεν είναι κανονικό. Στο 3^ο γράφημα είναι 2-κανονικό για το λόγο ότι όλες οι κορυφές είναι βαθμού δύο και τέλος στο **τελευταίο γράφημα** είναι και αυτό 2-κανονικό επειδή όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό δύο.



Τέλος αν μιλήσουμε για πλήρες γράφημα (ή κλίκα) το K_n είναι ένα $(n-1)$ κανονικό γράφημα. Στο παραπάνω παράδειγμα στο **1^ο γράφημα** βλέπουμε ότι ισχύει και τέτοιο και έτσι έχουμε ένα K_4 πλήρες ή κλίκα γράφημα.

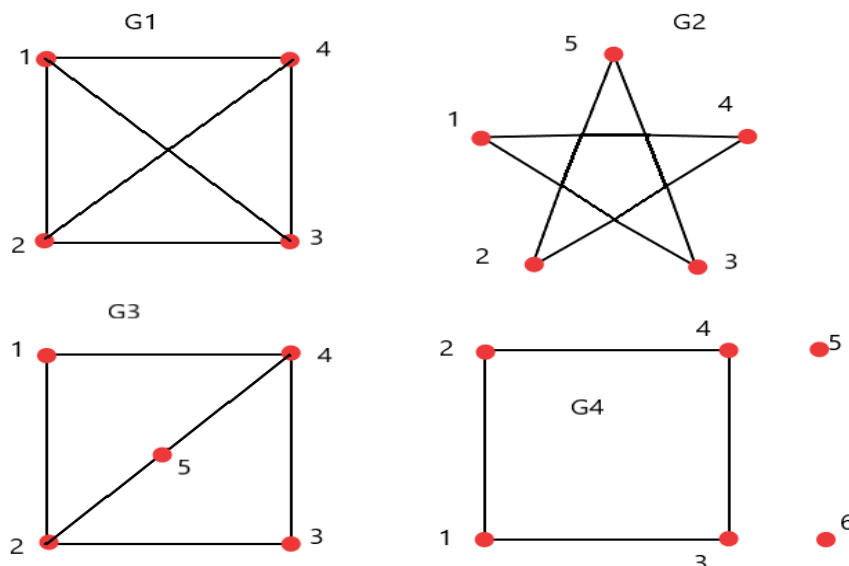
2.12 Διχοτομίσιμο ή διμερές γράφημα

Διχοτομίσιμο ή διμερές γράφημα είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V, E)$ όταν οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν (χωριστούν) σε δυο ξένα μεταξύ τους σύνολα V_1 και V_2 (δηλαδή $V_1 \cup V_2 = V$ και $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει το ένα της άκρο σε κορυφή του V_1 και το άλλο της άκρο της V_2 . Τα σύνολα V_1 και V_2 καλούνται **μερίδια κορυφών**. Στο παρακάτω παράδειγμα θα δώ ποια γραφήματα είναι διχοτομίσιμα και ποια όχι.



Το **1^ο γράφημα** είναι διχοτομίσιμο με διαίρεση τα V_1 και V_2 ενώ το **2^ο γράφημα** δεν είναι διχοτομίσιμο διότι και η κορυφή 2 και η κορυφή 3 συνδέονται με

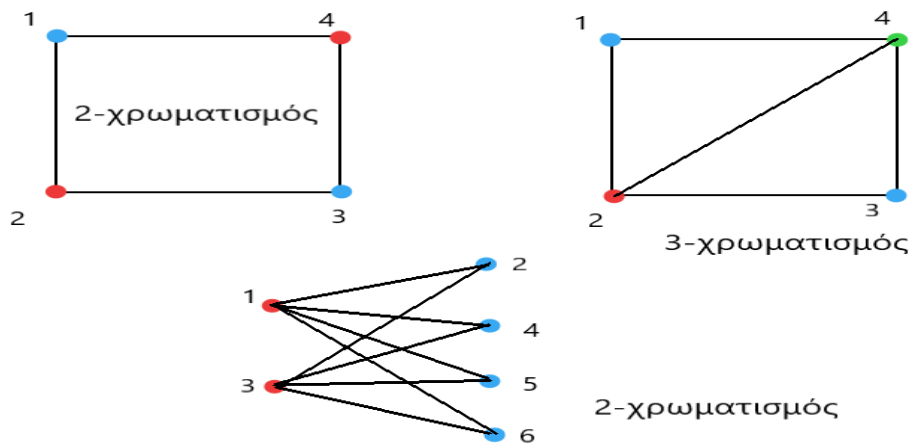
τη κορυφή 1, οπότε θα πάνε να κάτσουν στη διαίρεση τη δεξιά και αφού μια ακμή συνδέει αυτές τις κορυφές που είναι του ίδιου μεριδίου, έπεται ότι το γράφημα δεν είναι διχοτομίσσιμο. Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι, **όταν ένα γράφημα περιέχει ένα τρίγωνο τότε αυτό δε μπορεί να είναι διχοτομίσσιμο**. Στο παρακάτω παράδειγμα θα δω ποια γραφήματα είναι διχοτομίσσιμα.



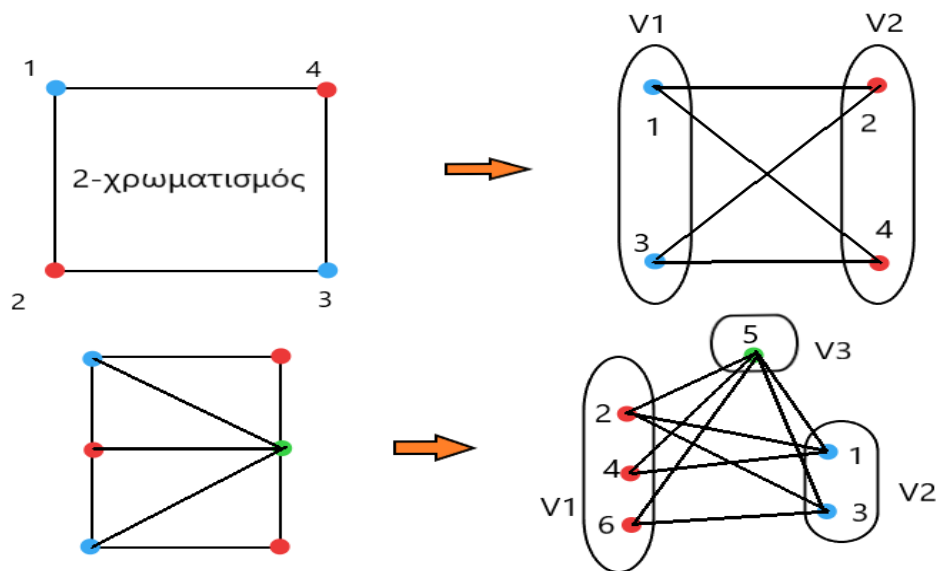
Μπορώ να διαπιστώσω πως το **1^ο γράφημα** δεν είναι διχοτομίσσιμο διότι περιέχει τρίγωνο. Το **2^ο γράφημα**, ανήγοντας το σε ένα πεντάγωνο θα δούμε πως δυο κορυφές που βρίσκονται στο ίδιο μερίδιο ενώνονται και για αυτό το γράφημα δεν είναι διχοτομίσσιμο. Στο **3^ο γράφημα** φτιάχνοντας τη κατασκευή με τα δυο μερίδια και βάζοντας τις κορυφές, βλέπω πως το γράφημα είναι διχοτομίσσιμο. Στο **τελευταίο γράφημα** έχω έναν κύκλο με 4 κορυφές και άλλες 2 κορυφές άκυρες, φτιάχνω τα δυο μερίδια και βάζοντας τις 4 κορυφές χωρίς να υπάρχει κάποιο θέμα, μας μένουν οι κορυφές 5 και 6 και αφού δεν υπάρχει κάποια ένωση με ακμή απλά μπορούμε να τις τυπώσουμε με οποιαδήποτε μορφή στα δυο μερίδια, οπότε χωρίς κάποιο πρόβλημα θα χαρακτηρίσουμε το γράφημα ως διχοτομίσσιμο. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω είναι στο ότι **ένα γράφημα είναι διχοτομίσσιμο αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους**.

2.13 Χρωματίσιμο γράφημα

Ένα γράφημα $G=(V,E)$ είναι k -χρωματίσιμο αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματιστούν με k -χρώματα, ώστε δυο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα, ή ισοδύναμα αν μπορώ να διαμερίσω τις κορυφές σε k -σύνολα ανεξαρτησίας (με κάθε σύνολο να χρωματίζεται με ένα χρώμα). Ένα k -χρωματίσιμο γράφημα θα λέγεται και k -μερές (σε αναλογία το 2-χρωματίσιμο γράφημα έχει 2 σύνολα ανεξαρτησίας να καλείται διμερές). Στο επόμενο παράδειγμα, φαίνεται ο χρωματισμός των γραφημάτων, αναλόγως της γειτονία των κορυφών. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το **3^ο γράφημα** που είναι 2-χρωματίσιμο εκτός από αυτό επειδή χωρίζεται σε δύο μέρη όπως φαίνεται θα λέγεται και **διμερές** γιατί ένα μέρος μπορεί να χρωματιστεί με το ίδιο χρώμα.



Ένα πόρισμα που προκύπτει από τον χρωματισμό των γραφημάτων, είναι ότι ένας έγκυρος χρωματισμός δεν απαιτεί τον χρωματισμό των κορυφών με το ελάχιστο δυνατό πλήθος χρωμάτων. Έτσι, αν ένα γράφημα είναι π.χ. 2-χρωματίσιμο τότε μπορεί να είναι και 3-χρωματίσιμο και n -χρωματίσιμο, δηλαδή δεν υπάρχει περιορισμός. Άλλος ένας ορισμός είναι ότι, το 2-χρωματίσιμο γράφημα λέγεται και 2-μερές διότι, δεδομένου ενός 2-χρωματισμού μπορώ να χωρίσω τις κορυφές σε δυο σύνολα ανεξαρτησίας, ώστε οι κορυφές κάθε συνόλου να είναι χρωματισμένες με το ίδιο χρώμα. Ένα k -χρωματίσιμο γράφημα λέγεται και k -μερές για τον ίδιο λόγο που αναφέραμε για το διμερές γράφημα. Ένα παράδειγμα είναι το ακόλουθο, που δείχνει ακριβώς ότι ένα 2-χρωματίσιμο είναι και διμερές και πως ένα 3-χρωματίσιμο είναι και τριμερές.

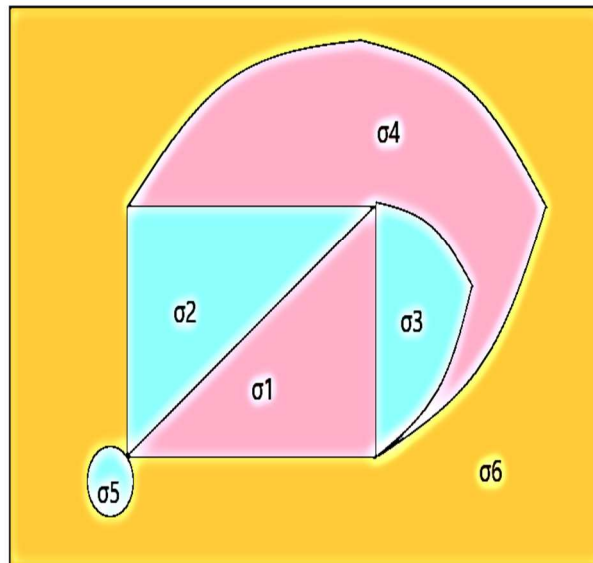


2.14 Χρωματικός αριθμός

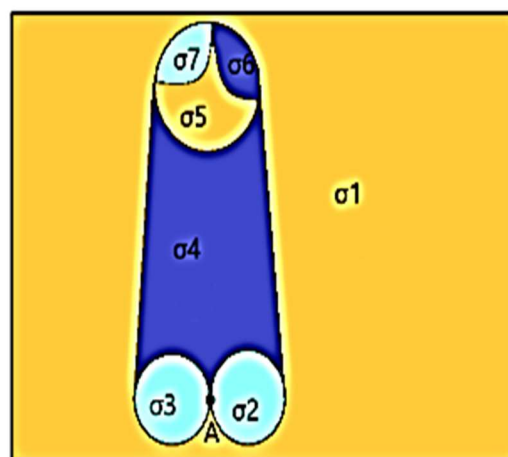
Χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος $G=(V,E)$ καλείται το ελάχιστο k για το οποίο ο γράφος είναι k -χρωματίσιμος και θα συμβολίζεται ως $\chi(G)$.

2.14.1 Εφαρμογή

Έστω τα χωρία $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$. Βάζω χρώματα και όταν υπάρχει ακμή ενδιάμεσα, αλλάζω χρώμα. Προσοχή ακμή όχι σημείο. Άρα, έχω ότι τα χωρία $\sigma_5, \sigma_2, \sigma_3$ θα έχουν χρώμα μπλε, τα χωρία σ_1, σ_4 θα έχουν χρώμα ροζ και το χωρίο σ_6 θα έχει χρώμα πορτοκαλί. Επειδή το σ_5 είναι σημείο και όχι ακμή, μπορεί να πάρει και το χρώμα ροζ. Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα χρώματα θα είναι τρία διότι δεν έχω μόνο άρτιο βαθμό κορυφών.



Αντίστοιχα, για το δίπλα σχήμα έχω 3 χρώματα με επτά χωρία. Προσοχή. Στα χωρία σ_3, σ_2 έχω ίδιο χρώμα διότι το A είναι σημείο και όχι ακμή. Άρα, το χρώμα δεν αλλάζει στους δύο κύκλους.



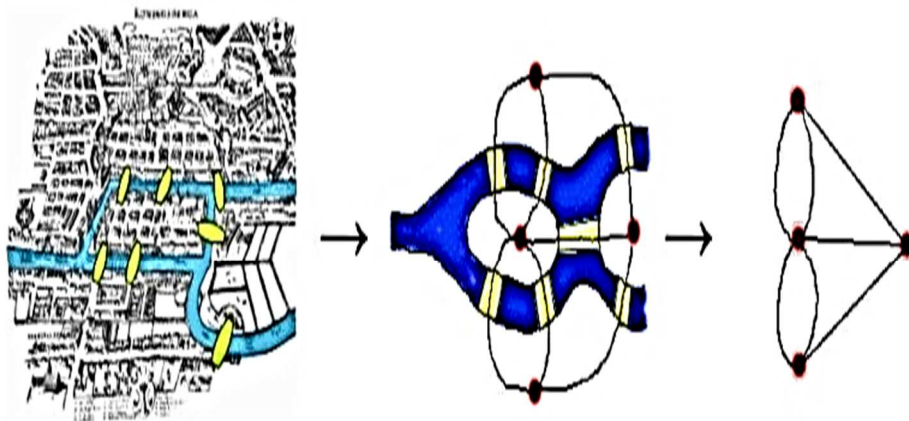
2.15 Κύκλος του Euler

Ο Euler, ως φοιτητής στο Königsberg αναρωτιέται πως μπορώ να κάνω περίπατο και να περάσω από κάθε μια από τις 7 γέφυρες της πόλης ακριβώς μια φορά; Αυτό που έκανε ήταν να μοντελοποιήσει το πρόβλημα, με το 1^ο γράφημα που κατασκευάστηκε ποτέ, με αποτέλεσμα να αναζητήσει έναν κύκλο που διέρχεται από κάθε ακμή, ακριβώς μια φορά.



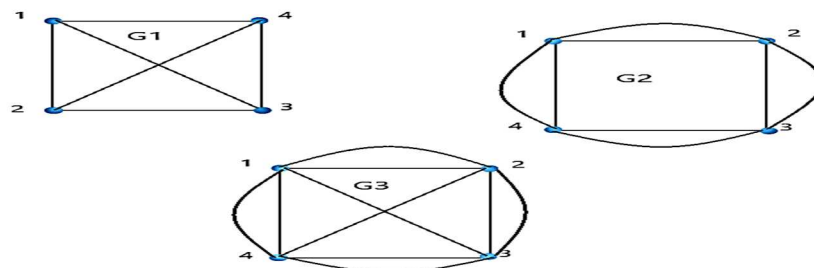
Ένας κύκλος Euler σε γράφημα $G=(V,E)$, είναι ένας κύκλος που περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος και διέρχεται, από κάθε ακμή, ακριβώς μια φορά. Αν ισχύουν όλα τα παραπάνω, το γράφημα λέγεται κύκλος του Euler.

Μοντελοποίηση Προβλήματος

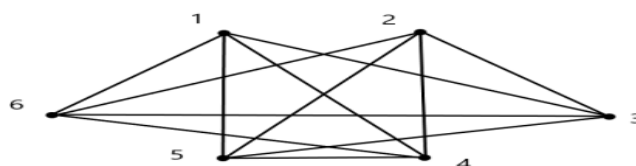


2.15.1 Θεώρημα του Euler

Για το λόγο αυτό, έχω το θεώρημα του Euler για την ύπαρξη του κύκλου Euler, που λέει πως **ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν είναι συνδεδεμένο και αν όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό**. Στο επόμενο παράδειγμα θα δω τι σημαίνει αυτό σχηματικά.

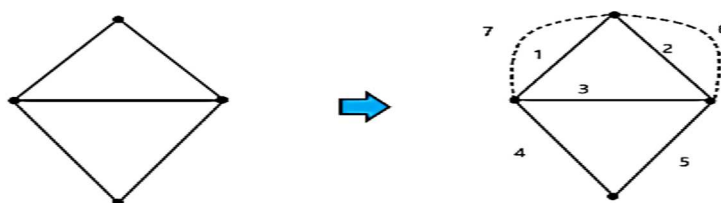


Στο 1^ο και στο 3^ο **γράφημα** δεν υφίσταται κύκλος του Euler, διότι οι κορυφές δεν είναι άρτιου βαθμού. Στο 2^ο **γράφημα**, παρατηρώ πως οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό και για αυτό έχω κύκλο Euler. Για να κλείσω πάνω στο γράφημα του Euler παρατηρώ ότι το γράφημα έχει τουλάχιστον μια κορυφή περιττού βαθμού, άρα αυτομάτως το γράφημα δεν έχει κύκλο του Euler οπότε δε μπορεί να γίνει περίπατος που να περνά από κάθε γέφυρα του Königsberg ακριβώς μια φορά. Ένα μονοπάτι (κύκλος) του Euler σε ένα γράφημα, είναι ένα μονοπάτι του γραφήματος που διέρχεται από όλα τα σημεία ακριβώς μια φορά. Το επόμενο παράδειγμα έχει κύκλωμα Euler;



Με βάση τα προηγούμενα, όλες οι κορυφές του γραφήματος είναι άρτιου βαθμού, οπότε είναι κύκλωμα Euler. Αυτό, έχει ως αποτέλεσμα ότι μπορώ να διακρίνω αν ένα κύκλωμα είναι Euler, απλά μετρώντας τους βαθμούς των κορυφών.

Υπάρχει η δυνατότητα, αν ένα γράφημα δεν είναι κύκλωμα Euler, να το μετατρέψω σε γράφημα Euler, με την προσθήκη μιας καινούργιας ακμής. Στο επόμενο σχήμα, βλέπω μια πιθανή μετατροπή γραφήματος σε Euler. Αυτή η μετατροπή, βοηθά στο σχεδιασμό διαδρομών, μέσω υπολογιστών, ώστε να διευκολύνονται στη καθημερινή τους ζωή επαγγέλματα που έχουν σχέση με ειδικές διανομές ή παραλαβές.



Ακολουθεί παράδειγμα που ζητά το ελάχιστο πλήθος των ακμών που πρέπει να προσθέσω στο παρακάτω γράφημα, ώστε το γράφημα που θα προκύψει να έχει κύκλο του Euler και αφού γίνει αυτό, να βρω έναν κύκλο του Euler, δηλαδή ένα μονοπάτι στο γράφημα που προκύπτει.



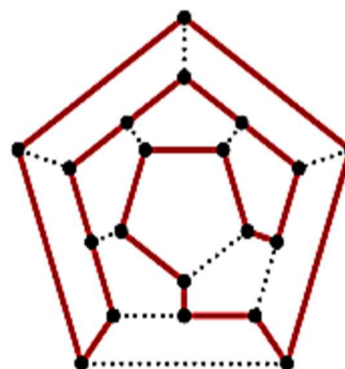
Στο παραπάνω σχήμα, βλέπω ένα γράφημα γνωστό ως **γράφημα Petersen** και είναι ευρέως γνωστό διότι αν μια πρόταση μπορεί να αποδειχθεί στο γράφημα Petersen, θα ισχύει για όλα τα γραφήματα, αφού είναι ένα από τα πιο περίπλοκα γραφήματα που έχουν κατασκευαστεί ποτέ. Είναι εμφανές ότι, το συγκεκριμένο γράφημα δεν έχει κύκλο Euler, διότι όλες οι κορυφές του είναι περιττού βαθμού.

Αρκεί μια κορυφή να έχει περιττό βαθμό, ώστε να μην ισχύει το θεώρημα του Euler για αυτό προκειμένου να έχει κύκλο του Euler, πρέπει να προσθέσω το ελάχιστο πλήθος των ακμών. Αν προσθέσω μια ακμή, αυτομάτως θα διορθώσει το βαθμό των δυο κορυφών, σε άρτιο βαθμό. Το γράφημα έχει 10 κορυφές, οπότε πρέπει να προσθέσω 5 ακμές. Άρα, το σχήμα θα έχει τη διπλανή μετατροπή. Στο τέλος, ζητά να κατασκευάσω έναν κύκλο του Euler από το γράφημα που προκύπτει και με βάση το θεώρημα, πατάω όσες φορές θέλω στις κορυφές, αλλά ακριβώς μια φορά στις ακμές. Συνεπώς, θα έχω τον κύκλο 1-4-10-9-2-1-6-7-3-8-5-6-4-8-10-7-9-5-2-3-1 δηλαδή, από την κορυφή που θα ξεκινήσω, εκεί θα τελειώσω. Βέβαια, ο κύκλος που κατέγραψα δεν είναι ο μοναδικός και για αυτό υπάρχουν και άλλες τέτοιες ακολουθίες. Είναι πολύ σημαντικό ότι τα γραφήματα θέλουν εξάσκηση και τίποτα δε γίνεται τυχαία.

2.16 William Hamilton

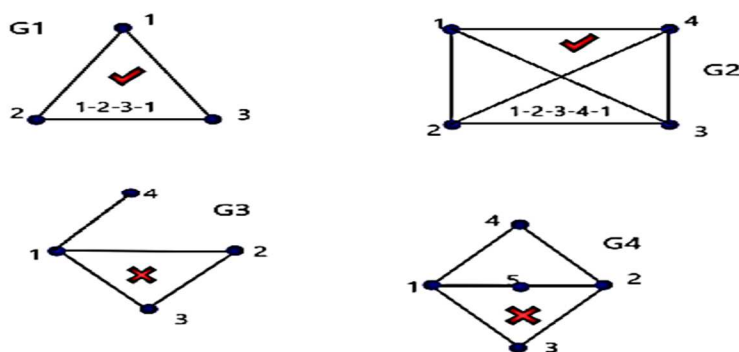
Ο Hamilton (1805–1865), σε ηλικία 13 ετών γνώριζε 13 γλώσσες, μεταξύ των οποίων και ελληνικά, σε ηλικία 17 ετών επεσήμανε λάθος στο έργο του Laplace «Πραγματεία για την ουράνια μηχανική», σε ηλικία 22 ετών διορίστηκε καθηγητής της αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο του Δουβλίνου και διετέλεσε πρόεδρος της Ακαδημίας της Ιρλανδίας. Τη φήμη του οφείλει στην επινόηση και επεξεργασία ενός ιδιότυπου συστήματος αριθμών, το λεγόμενο **κβαντέρνιο** (λογισμός τετραέδρων) και για αυτό θεωρείται ένας από τους ιδρυτές του διανυσματικού λογισμού.

Το **1859**, έγινε ιδιαίτερα γνωστός όταν πήρε ένα δωδεκάεδρο, δηλαδή ένα κανονικό πολύεδρο με 20 κορυφές, έβαλε 20 ονόματα πόλεων στις κορυφές αυτές και σκέφτηκε το παιχνίδι της εύρεσης μίας διαδρομής στο δωδεκάεδρο στην οποία αναχωρώντας κάποιος από τη μία πόλη να επιστρέψει στην ίδια, έχοντας επισκεφτεί τις άλλες 19 πόλεις μια μόνο φορά.



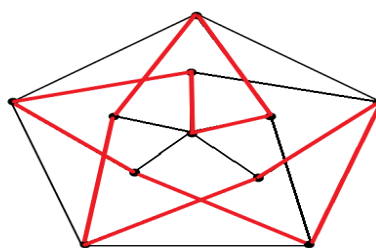
2.16.1 Κύκλος του Hamilton

Κύκλος του Hamilton, σε ένα γράφημα $G=(V,E)$ είναι ένας κύκλος που περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος και διέρχεται από κάθε κορυφή ακριβώς μια φορά. Αν ισχύουν τα παραπάνω, λέμε πως το γράφημα είναι κύκλος Hamilton και δείχνω την ακολουθία κορυφών με τη φορά που τις επισκέφτηκα. Δηλαδή, για να έχω κύκλο του Hamilton, πρέπει ο βαθμός κορυφής να είναι μικρότερος ή ίσος με δυο και οι κορυφές να είναι ίσες με τις ακμές $m=n$. Στο παρακάτω παράδειγμα φαίνεται κατασκευαστικά, πως λειτουργεί ένας τέτοιος κύκλος.

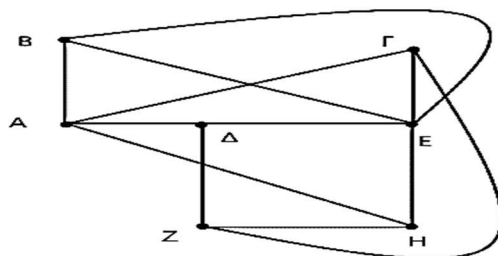


Στο 1^ο και στο 2^ο γράφημα, φαίνεται ξεκάθαρα πως υπάρχει κύκλος του Hamilton, έχοντας γράψει την αντίστοιχη ακολουθία στο κάτω μέρος του σχήματος.

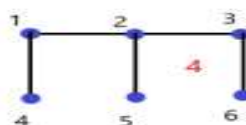
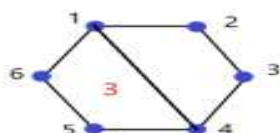
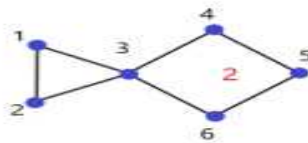
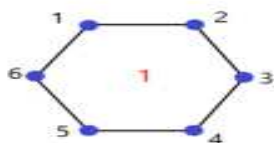
Στο 3^ο και στο 4^ο γράφημα, δεν υφίσταται κύκλος του Hamilton, διότι περνάω από μια συγκεκριμένη κορυφή για 2^η φορά, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό. Τέλος, έχω τον ορισμό για το μονοπάτι του Hamilton που είναι ένα μονοπάτι το οποίο διέρχεται ακριβώς μια φορά από κάθε κορυφή του γραφήματος και ισχύει (k) κορυφές με $(k-1)$ ακμές. Σημαντική παρατήρηση είναι πως αν και ομοιάζουν μεταξύ τους τα κυκλώματα του Hamilton και του Euler, δεν πρέπει να συγχέονται, διότι στο κύκλωμα Euler είναι δυνατή η διέλευση μόνο μια φορά από τις ακμές, ενώ στη περίπτωση των κυκλωμάτων του Hamilton αυτό που δε μπορεί να επαναληφθεί, είναι οι κορυφές. Άλλο ένα παράδειγμα κυκλώματος του Hamilton είναι το παρακάτω, που έχει 11 κορυφές και κάνοντας τα ακόλουθα βήματα ξεκινώντας από την κεντρική κορυφή και συνεχίζοντας προς τις άλλες κορυφές, θα καταφέρω να δημιουργήσω μια διαδρομή, επιστρέφοντας στην αρχική κορυφή. Είναι δύσκολο το να βρω έναν κύκλο του Hamilton σε ένα γράφημα που έχει χαμηλή συνδεσμολογία ακμών και για αυτό χρειάζεται εξάσκηση για την ανάπτυξη των δεξιοτήτων πάνω στη θεωρία γραφημάτων. Η διαίσθηση το πως θα κατασκευάσω έναν κύκλο του Hamilton, είναι καθαρά και μόνο θέμα εμπειρίας για αυτό θέλει εξάσκηση.



Στο επόμενο παράδειγμα, θα δω αν στο σχήμα έχω κύκλο του Hamilton. Έχω 7 κορυφές και 12 ακμές. Αρχικά, βρίσκω τις κορυφές με το μεγαλύτερο βαθμό. Η κορυφή E είναι βαθμού 5, άρα δε χρειάζομαι 3 ακμές. Η κορυφή A, είναι βαθμού 4, άρα δε χρειάζομαι 2 ακμές.



Οι κορυφές B, Γ, Δ, Z, H είναι βαθμού 3, όμως οι κορυφές B, Δ, H είναι γειτονικές με την A και η Γ είναι γειτονική με την E, οπότε αυτές δεν τις πειράζουμε. Η κορυφή Z είναι βαθμού 3, άρα δε χρειαζόμαστε 1 ακμή. Συνεπώς, δε χρειάζομαι 6 ακμές, άρα από τις 12 ακμές μένουν 6 συνολικά ακμές. Όμως, έχουμε 7 κορυφές και θέλουμε 7 ακμές και έτσι δεν έχω κύκλο του Hamilton. Στα παρακάτω γραφήματα φαίνεται σχηματικά η διαφορά Euler–Hamilton. Για αρχή, η άσκηση ζητά να κατασκευάσω 4 απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα 6 κορυφών, όπου το **1^ο γράφημα** δείχνει ότι έχει κύκλο του Hamilton και κύκλο του Euler.



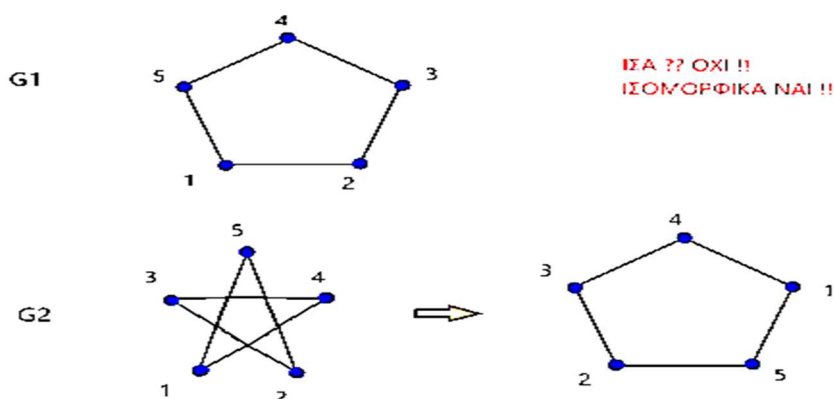
Το **2^ο γράφημα** δείχνει ότι δεν έχει κύκλο του Hamilton και έχει κύκλο του Euler. Το **3^ο γράφημα** δείχνει ότι δεν έχει κύκλο του Hamilton και δεν έχει κύκλο του Euler και το **4^ο γράφημα** δείχνει ότι δεν έχει ούτε κύκλο του Hamilton ούτε κύκλο του Euler. Βλέποντας τα σχήματα από πάνω, συμπεραίνω πως το **1^ο γράφημα** έχει κύκλο του Euler, διότι διέρχεται από τις ακμές μια φορά και οι κορυφές είναι άρτιου βαθμού και επίσης έχει κύκλο του Hamilton, διότι διέρχεται από όλες τις κορυφές μια φορά. Στο **2^ο γράφημα**, έχω κύκλο του Euler, διότι διέρχεται από όλες τις ακμές μια φορά και οι κορυφές είναι άρτιου βαθμού και δεν είναι κύκλος του Hamilton διότι ότι υπάρχει κορυφή από την οποία πρέπει να ξαναπεράσουμε ώστε να ολοκληρωθεί ο κύκλος.

Στο **3^ο γράφημα** δεν υπάρχει κύκλος του Euler, διότι δε μπορεί να περάσει από όλες τις ακμές μια φορά ενώ υπάρχει κορυφή βαθμού 3 και έχουμε κύκλο του Hamilton, διότι διέρχεται από όλες τις κορυφές μια φορά. Στο **4^ο γράφημα**, παρατηρώ πως δεν υπάρχει κύκλος του Euler, διότι ξαναπερνά από ίδια ακμή και υπάρχουν κορυφές μονού βαθμού και επίσης δεν υπάρχει κύκλος του Hamilton, διότι

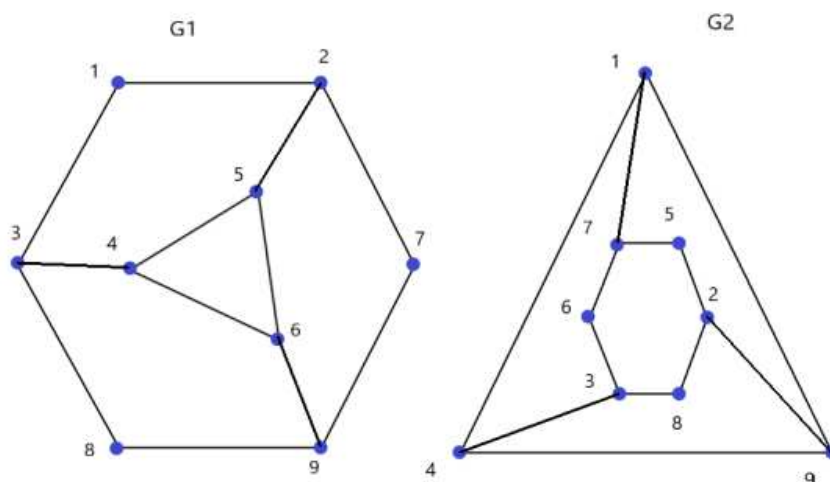
διέρχεται ξανά από ίδια κορυφή. Συμπεραίνω πως παρά τη δυσκολία εντοπισμού τους σε μεγάλα γραφήματα, τα κυκλώματα του Hamilton είναι πολύ σημαντικά για την οργάνωση ταξιδιών, για τις παραλαβές κάθε τύπου, για τη διανομή των εμπορευμάτων σε αλυσίδες supermarket, κτλ.

2.17 Ισομορφισμός γραφημάτων

Δύο γραφήματα είναι ισόμορφα, όταν διατηρούνται οι κορυφές και η μεταξύ τους συνδεσμολογία, δηλαδή πρέπει να υπάρχει μια αντιστοιχία 1-1 και επί μεταξύ κορυφών και ακμών, ώστε να διατηρούνται οι βαθμοί των κορυφών. Αλλιώς, τα $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ είναι ισομορφικά αν υπάρχει συνάρτηση f από το V_1 στο V_2 1-1 και επί τέτοια ώστε $(v_i, v_j) \in E_1$ και $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ (αν μπορώ να κάνω μια αντιστοίχιση των κορυφών του V_1 στις κορυφές του V_2 τέτοια ώστε αν η ακμή (v_i, v_j) ανήκει στο σύνολο ακμών του 1^{ου} γραφήματος τότε και η εικόνα αυτής της ακμής στο 2^ο γράφημα θα ανήκει στο σύνολο των ακμών του 2^{ου} γραφήματος). Δηλαδή, υπάρχει αντιστοίχιση των κορυφών ώστε να ταυτίζονται οι ακμές. Στο παραδίπλα παράδειγμα βλέπω δυο ισόμορφα γραφήματα. Η συνάρτηση ισομορφισμού είναι $f: V_1 \rightarrow V_2$ οπότε $f(v_1)=v_2, f(v_2)=v_5, f(v_3)=v_1, f(v_4)=v_4, f(v_5)=v_3$. Το ένα μπορεί να ζωγραφιστεί ξανά στο επίπεδο, ώστε να ταυτίζονται οι ακμές. Τα γραφήματα δεν είναι ίσα είναι ισομορφικά.



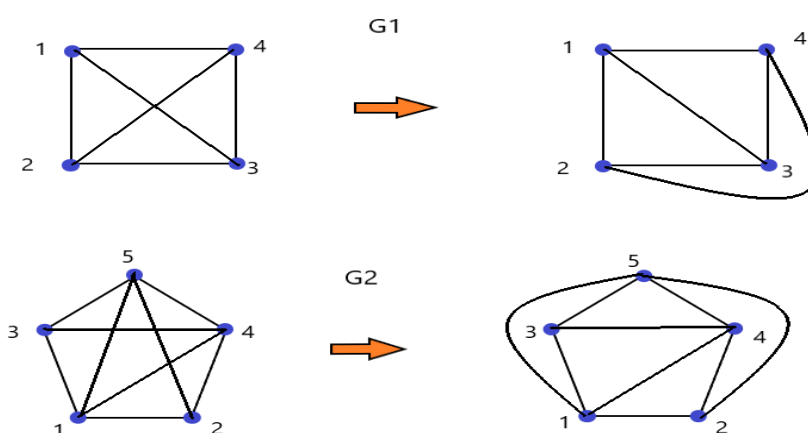
Στο επόμενο παράδειγμα, θα δείξω ότι δυο γραφήματα είναι ισομορφικά. Αφού δώσω πρώτα τη συνάρτηση ισομορφισμού, θα προσπαθήσω να κάνω μια αντιστοίχιση των κορυφών ώστε να ταυτίζονται οι κορυφές, με αποτέλεσμα τα γραφήματα να είναι ισομορφικά.



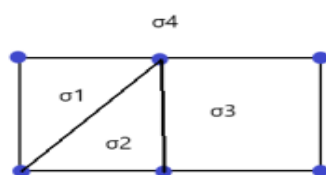
Παρατηρώ πως το εσωτερικό τρίγωνο του 1^{ου} γραφήματος, αν το ανοίξω προς τα έξω, θα δώσει το τρίγωνο του 2^{ου} γραφήματος. Ακολουθώντας τα βήματα του προηγούμενου παραδείγματος η συνάρτηση ισομορφισμού $f: V_1 \rightarrow V_2$ έχει ως εξής. $f(v_1)=v_6$, $f(v_2)=v_7$, $f(v_3)=v_3$, $f(v_4)=v_4$, $f(v_5)=v_1$, $f(v_6)=v_9$, $f(v_7)=v_5$, $f(v_8)=v_8$, $f(v_9)=v_2$. Άρα, καταλήγω στο αποτέλεσμα πως αυτά τα δυο γραφήματα είναι ισομορφικά.

2.18 Επίπεδα γραφήματα

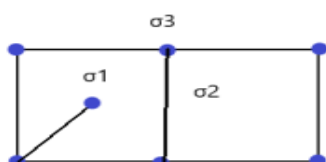
Ένα γράφημα $G=(V,E)$ είναι επίπεδο, αν μπορώ να το απεικονίσω στο επίπεδο, χωρίς να τέμνονται οι ακμές του. Για να δείξω ότι ένα γράφημα είναι επίπεδο, ζωγραφίζω ξανά τις ακμές του γραφήματος χωρίς αυτές να τέμνονται. Στο παρακάτω παράδειγμα, φαίνεται πως τα γραφήματα είναι επίπεδα, κάνοντας έναν απλό μετασχηματισμό των ακμών χωρίς να τέμνονται μεταξύ τους οι ακμές.



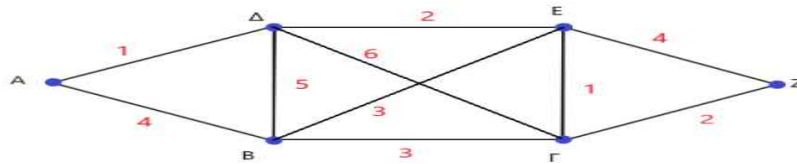
Για να αποδείξω πως ένα γράφημα είναι επίπεδο, μπορώ από το μαθηματικό τύπο του Euler που ισχύει μόνο για τα συνδεδεμένα γραφήματα και σχετίζει το πλήθος των χωρίων με το πλήθος των ακμών και των κορυφών ενός γραφήματος. Ο τύπος λέει ότι: $\sigma = m - n + 2$. Ένα παράδειγμα για να γίνει κατανοητός ο μαθηματικός τύπος είναι το παρακάτω όπου γράφοντας τον τύπο του Euler και κάνοντας ακριβές αντικατάσταση θα δούμε πως τα γραφήματα είναι επίπεδα.



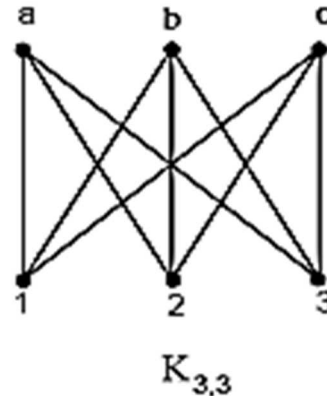
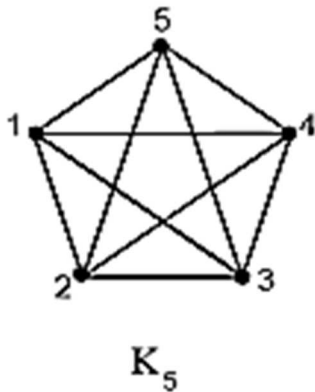
επαληθεύουμε τον τύπο του Euler οπότε $\sigma=4$



επαληθεύουμε τον τύπο του Euler οπότε $\sigma=3$



Από την άλλη, υπάρχουν σχήματα που δεν είναι επίπεδα γραφήματα, τα λεγόμενα προβλήματα των οικογενειών και των πηγαδιών, που συμβολίζονται ως $K_{3,3}$ αλλά και του μη επίπεδου γραφήματος K_5 αυτά είναι τα εξής παρακάτω.

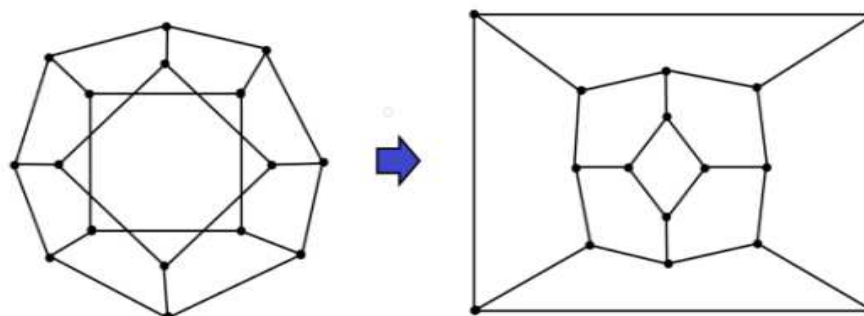


Από ορισμό ισχύει πως δυο γραφήματα καλούνται ομοιομορφικά, αν μπορούν να απλοποιηθούν, με απλοποιήσεις σειράς, σε ισομορφικά γραφήματα.

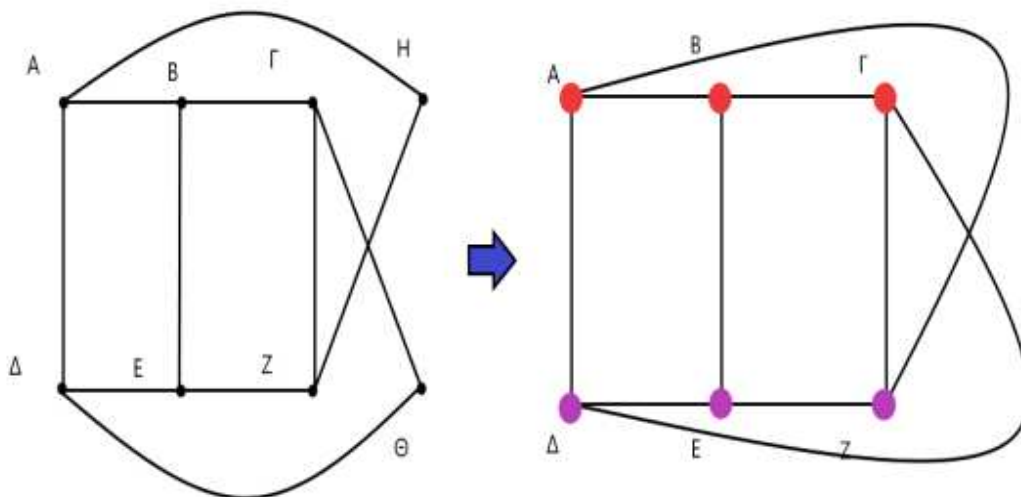
2.19 Απλοποίηση σειράς

Απλοποίηση σειράς, είναι μια πράξη σε γράφημα που απαλείφει κορυφές βαθμού 2. Σε περίπτωση που για ένα γράφημα θέλουμε να αποδείξουμε πως δεν είναι επίπεδο και φέρνει σχηματικά σε ένα από τα παραπάνω σχήματα, τότε κάνουμε αυτή την ομοιομορφία ώστε να πούμε πως υπάρχει αυτή η ισομορφία για να αποφύγουμε το μπλέξιμο. Για αυτό έχουμε το **θεώρημα του Kuratowski** που λέει πως ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικά προς K_5 , $K_{3,3}$. Στο επόμενο σχήμα, θα σκεφτούμε το μετασχηματισμό που πρέπει να γίνει ώστε το σχήμα που θα ακολουθήσει να είναι επίπεδο. Για αυτό, είναι σημαντικό για να αποδείξουμε πως ένα σχήμα είναι επίπεδο να υπάρχει μια τριβή και εξάσκηση πάνω στους μετασχηματισμούς.

Επίπεδο Γράφημα



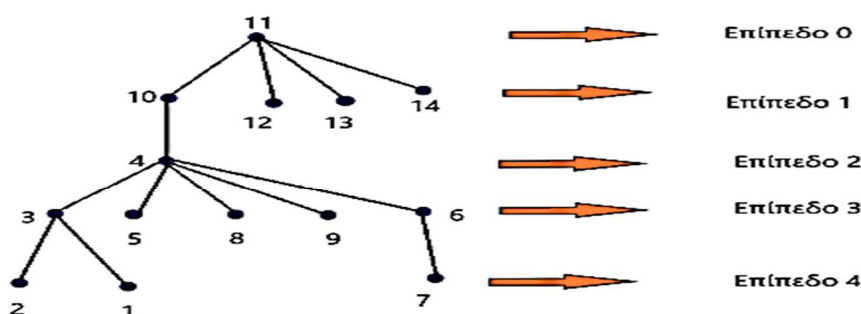
Στο παρακάτω σχήμα, το γράφημα δεν είναι επίπεδο, διότι οι κορυφές H, Θ είναι βαθμού 2 οπότε δεν την λαμβάνω υπόψη ενώ όλες οι άλλες είναι βαθμού 3 και βλέπω αν είναι ομοιόμορφο με το γράφημα $K_{3,3}$ και σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το γράφημα δεν είναι επίπεδο.



Βάρος ενός μονοπατιού, είναι το άθροισμα των βαρών των ακμών του. Συντομότερο μονοπάτι, είναι το μονοπάτι με το ελάχιστο βάρος. Στο παρακάτω γράφημα, έχουν αντιστοιχηθεί βάρη στις ακμές και θέλουμε να βρούμε το συντομότερο δρομολόγιο με το ελάχιστο βάρος. Το μονοπάτι αυτό είναι Α-Δ-Ε-Γ-Ζ με βάρος 6. Το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ένας ο αλγόριθμος Dijkstra που χρησιμοποιείται στο GPS για τον υπολογισμό συντομότερης διαδρομής ώστε να κερδίσουμε χρόνο και βενζίνη κατά τις μετακινήσεις μας. Ένα γράφημα με βάρη (ή βεβαρημένο γράφημα) είναι ένα γράφημα που σε κάθε ακμή έχει αντιστοιχηθεί ένα βάρος (που συνήθως συμβολίζει χιλιομετρική απόσταση, χρόνο διέλευσης κλπ.).

2.20 Δέντρο

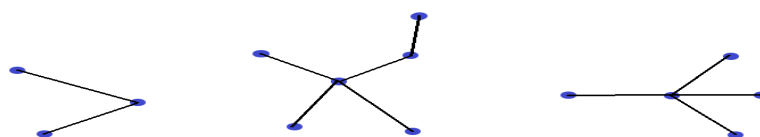
Ένα γράφημα $G=(V,E)$ είναι δένδρο, αν υπάρχει απλό μονοπάτι από κάθε κορυφή $v_i \in V$ σε κάθε κορυφή $v_j \in V$ με $i \neq j$ χωρίς να σχηματίζεται κύκλος. Στο επόμενο γράφημα βλέπουμε μια ριζωμένη απεικόνιση ενός δένδρου.



Μια ριζωμένη απεικόνιση είναι όταν επιλέγουμε ως ρίζα ενός δένδρου μια κορυφή. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε επιλέξει την κορυφή 11. Επίσης, στο γράφημα ορίζουμε ως επίπεδο (ή βάθος) κορυφής την απόσταση κορυφής από τη ρίζα (στο παράδειγμα μας το επίπεδο της κορυφής 6 από τη ρίζα είναι 3). Το ύψος του δένδρου, είναι το μέγιστο επίπεδο κορυφής που στο παράδειγμα είναι το 4. Τέλος, ο βαθμός του δένδρου είναι ο μέγιστος βαθμός της κορυφής που στο παράδειγμα είναι η κορυφή 4 που έχει βαθμό 6.

2.21 Δάσος

Ένα γράφημα $G=(V, E)$ είναι δάσος, αν είναι η ένωση των δένδρων είναι ένα μη συνδεδεμένο γράφημα, που κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι δένδρο. Αν ένα δάσος αποτελείται από k δένδρα, τότε έχει $n-k$ ακμές. Στο παρακάτω γράφημα βλέπουμε ένα δάσος που αποτελείται από 3 δένδρα.



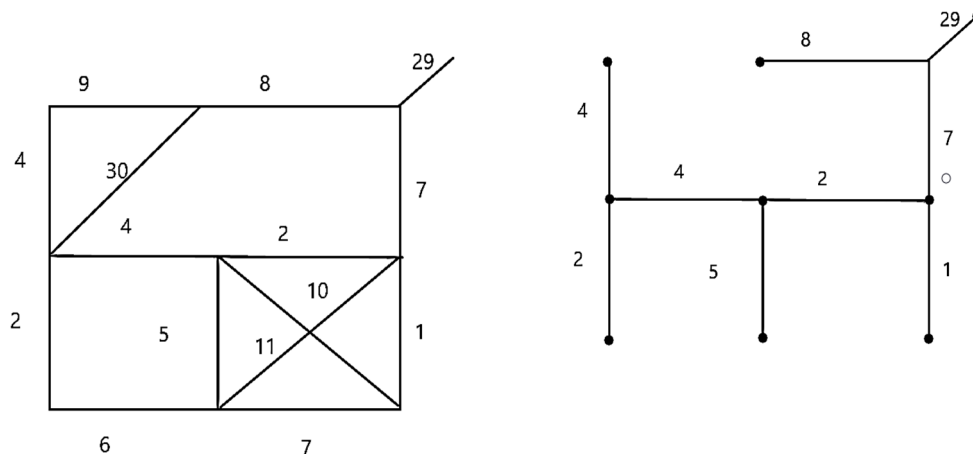
Με βάση τα παραπάνω έχουμε το θεώρημα των δένδρων και τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- Το γράφημα είναι δένδρο δηλαδή υπάρχει απλό μονοπάτι από κάθε κορυφή σε κάθε κορυφή.
- Το γράφημα είναι συνδεδεμένο και άκυκλο.
- Το γράφημα είναι συνδεδεμένο και έχει $n-1$ ακμές.
- Το γράφημα είναι άκυκλο και έχει $n-1$ ακμές.

Το συμπέρασμα είναι ότι το θεώρημα δίνει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι ένα γράφημα δένδρο και τελικά το δένδρο είναι ένα άκυκλο συνδεδεμένο γράφημα με $(n-1)$ ακμές που υπάρχει μοναδικό μονοπάτι μεταξύ κάθε δυο διαφορετικών κορυφών. Επίσης έχουμε δυο ακόμα ικανές και αναγκαίες συνθήκες του θεωρήματος ώστε ένα γράφημα να είναι δένδρο.

- Το γράφημα είναι ελαχιστοτικά συνδεδεμένο (δηλαδή είναι συνδεδεμένο και αν του αφαιρέσουμε έστω μια ακμή τότε παύει να είναι συνδεδεμένο).
- Το γράφημα να είναι μεγιστοτικά άκυκλο (δηλαδή να είναι άκυκλο και αν του προσέσθουμε έστω μια ακμή τότε παύει να είναι άκυκλο).

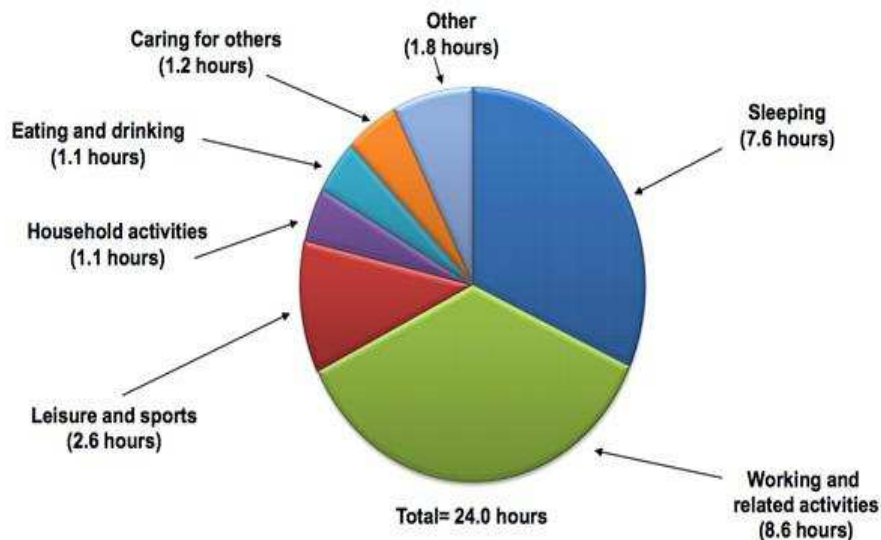
Ο αλγόριθμος του Dijkstra (τον επινόησε το 1956 και τον δημοσίευσε το 1959) είναι ευρέως διαδεδομένος και χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές. Χρήση του αλγόριθμου αυτού κάνει το πρωτόκολλο OSPF (Open shortest path first), το οποίο είναι το εσωτερικό πρωτόκολλο πύλης δικτύου του Διαδικτύου. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος, υπολογίζει τα συντομότερα μονοπάτια και αναλόγως το βάρος που θα έχει η κάθε ακμή θα υπολογίζεται συνολικά από το τελικό δένδρο που θα μείνει. Στο παρακάτω γράφημα ξεκινάω από τις πλευρές με μεγαλύτερο μήκος και όταν ανήκουν σε κύκλο μπορώ να τις διώξω από το σχήμα. Την πλευρά 30 μπορώ να τη διώξω αφού ανήκει στο τρίγωνο, ενώ τη πλευρά 29 δε μπορώ να τη διώξω αφού δεν ανήκει σε κύκλο. Αφού έχω διώξει κάποιες πλευρές, μεταφέρω το σχήμα που περισσεύει και υπολογίζω το ελάχιστο βάρος, αθροίζοντας τις πλευρές που απόμειναν, ή αλλιώς την ελάχιστη διαδρομή, οπότε το ελάχιστο βάρος είναι 62.



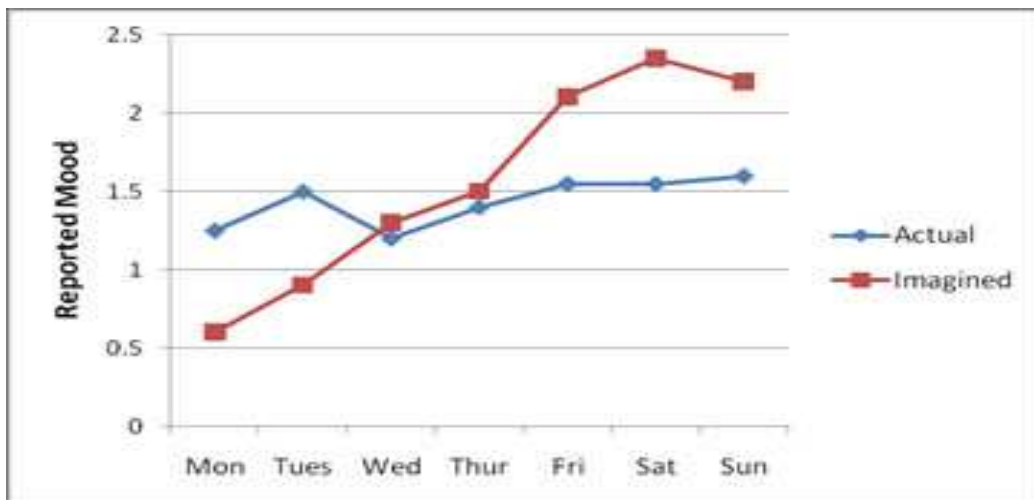
Άλλα παραδείγματα με γραφήματα δέντρων στην καθημερινότητα μας μπορούμε να συναντήσουμε στο μετρό, στα γενεαλογικά δέντρα, στα μαθηματικά, στις πιθανότητες κλπ. Παρακάτω, θα δούμε ένα γράφημα δένδρων από το μετρό της Αγγλίας που παρόλο το μέγεθος μπορούμε να διακρίνουμε τις κορυφές αλλά και τα διαφορετικά χρώματα των κάθε γραμμών.



Είναι σημαντικό να μπορώ να διαβάσω και να κατανοήσω τα γραφήματα, διότι παρά την απλότητα τους είναι εύκολα διαχειρίσιμα, ώστε να μπορέσουμε να τα απλοποιήσουμε για καλύτερη κατανόηση. Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται μια τυπική εργάσιμη ημέρα ενός Αμερικάνου ηλικίας 25–54 ετών, με παιδιά. Τα δεδομένα είναι από την αμερικάνικη στατιστική υπηρεσία.



Έρευνα του πανεπιστημίου Harvard έδειξε ότι υπερεκτιμούμε πόσο ευτυχισμένοι είμαστε στα γενέθλια μας, υποτιμούμε πόσο ευτυχισμένοι είμαστε τη Δευτέρα το πρωί και κάνουμε συνέχεια τις ίδιες εκτιμήσεις ανεξαρτήτως τι συνέβη στο παρελθόν. Οι Παρασκευές τις περισσότερες φορές δεν είναι τόσο ωραίες όσο φανταζόμαστε. Η πραγματική μας διάθεση και η διάθεση που περιμέναμε ότι θα είχαμε κατά τη διάρκεια της εβδομάδας φαίνεται στο παρακάτω γράφημα.



3. Εφαρμογές των γραφημάτων

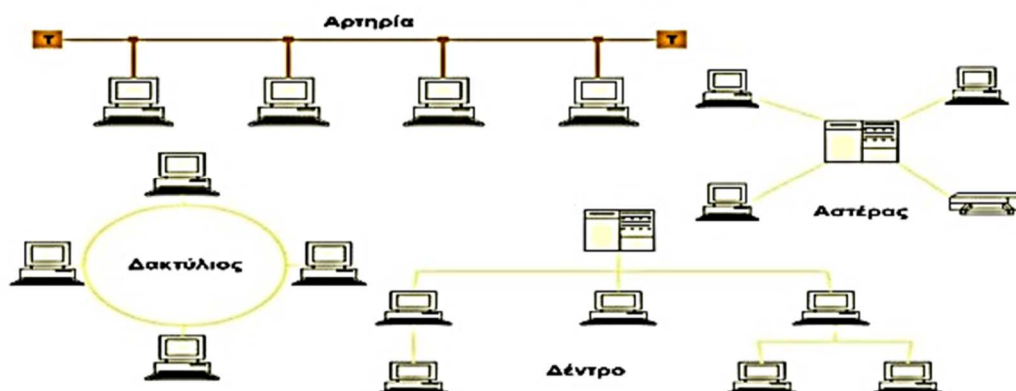
3.1 Γραφήματα και Διαδίκτυο

Τα δίκτυα των υπολογιστών συνδέονται με πολλούς τρόπους, δημιουργώντας συγκεκριμένους τύπους γραφημάτων, όπως το:

- δίκτυο δακτυλίου,
- δίκτυο αστέρα,
- δίκτυο αρτηρία ή δίκτυο δέντρου

και για αυτό αναφερόμαστε σε τοπολογίες δικτύων.

Βασικές Τοπολογίες Δικτύων



3.2 Γραφήματα στη χημεία

Τα γραφήματα έχουν ιδιαίτερη εφαρμογή στην αναπαράσταση και μελέτη ειδικών των μοριακών δομών. Στη χημεία, χρησιμοποιούνται τα γραφήματα για να αναπαράστησουν διάφορες ενώσεις.

Όνομα	Μοριακός τύπος	Συντακτικός τύπος	Προσομοίωμα
Μεθάνιο	CH_4	$\begin{array}{c} \text{H} \\ \\ \text{H}-\text{C}-\text{H} \\ \\ \text{H} \end{array}$	
Αιθάνιο	C_2H_6	$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \\ \quad \\ \text{H}-\text{C}-\text{C}-\text{H} \\ \quad \\ \text{H} \quad \text{H} \end{array}$	
Προπάνιο	C_3H_8	$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \\ \quad \quad \\ \text{H}-\text{C}-\text{C}-\text{C}-\text{H} \\ \quad \quad \\ \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \end{array}$	
Βουτάνιο	C_4H_{10}	$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \\ \quad \quad \quad \\ \text{H}-\text{C}-\text{C}-\text{C}-\text{C}-\text{H} \\ \quad \quad \quad \\ \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \end{array}$	

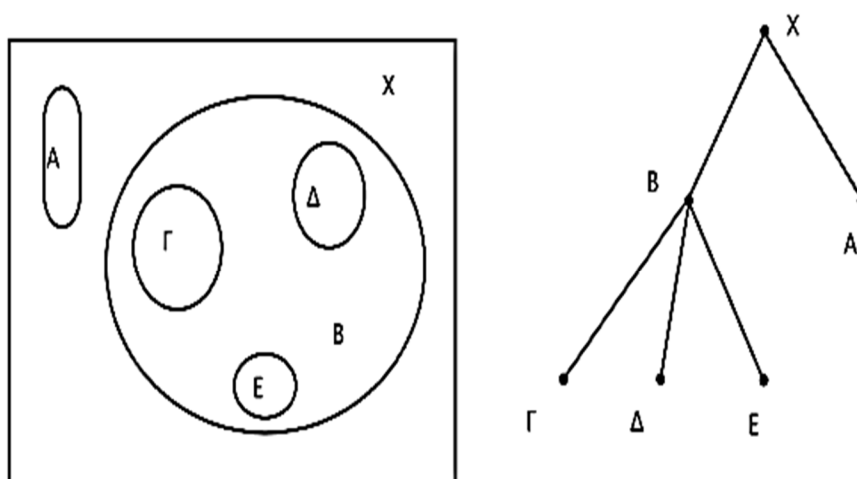
3.3 Γραφήματα στην αρχιτεκτονική

Για τη διεθνή έκθεση του 1958 στις Βρυξέλλες δημιουργήθηκε το Atomium, μια εντυπωσιακή χαλύβδινη κατασκευή ύψους 103 m. Ο μηχανικός Andre Waterkeyn εμπνεύστηκε το σχέδιο του από το γράφημα που αναπαριστά το μόριο του σιδήρου κατασκευάζοντας 9 σφαίρες και 20 συνδέσεις.



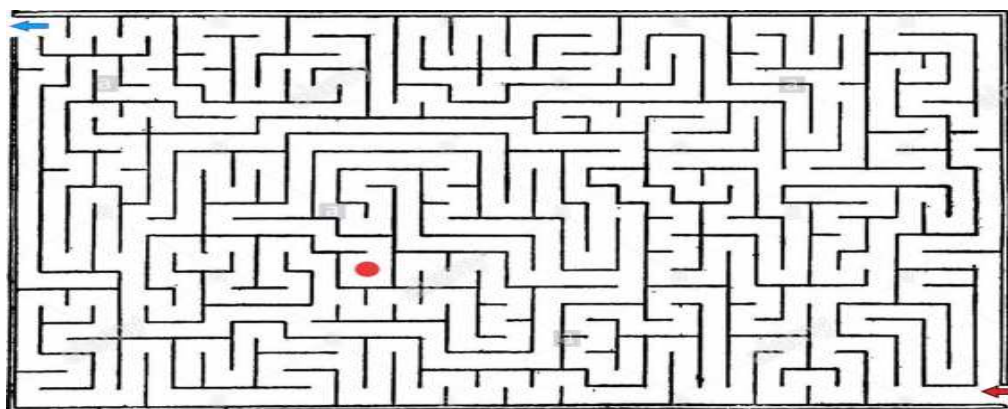
3.4 Γραφήματα στα κοινωνικά δίκτυα

Τα γραφήματα, είναι πολύτιμα εργαλεία στις κοινωνικές επιστήμες και ιδιαίτερα στις κοινωνιολογικές, ανθρωπολογικές, γεωγραφικές και οικονομικές μελέτες καθώς και στις μελέτες επικοινωνίας κοινωνικής ψυχολογίας κτλ. που αναλύουν κοινωνικά δίκτυα. Μια κοινωνική δομή αναπαρίσταται σε ένα γράφημα, μέσω των κόμβων και οι ακμές μεταξύ αυτών των κόμβων δείχνουν τις σχέσεις συνάφειας.



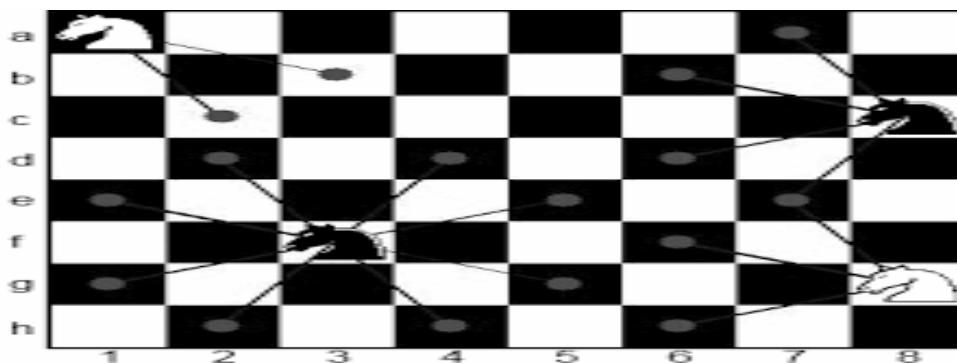
3.5 Ψυχαγωγικά γραφήματα

Υπάρχουν πολλά παιχνίδια που αφορούν τη σχεδίαση γραφημάτων ή τη διαπίστωση μέσω αυτών για το αν υπάρχει νικηφόρα στρατηγική ή όχι. Ένα από τα ιστορικά παιχνίδια είναι ο λαβύρινθος του Rouse Ball. Στο διάσημο παιχνίδι σημειώνεται η είσοδος, η έξοδος και η θέση του θησαυρού. Η διαδρομή για το θησαυρό, αποτελείται από γραμμές και σημεία διακλάδωσης. Κάθε γραμμή, πρέπει να διανυθεί δύο φορές. Έχοντας κορυφές άρτιου βαθμού, μπορούμε να διανύσουμε τη διαδρομή βάζοντας σημάδια στο έδαφος, ώστε να μην ξαναπεράσουμε.



3.6 Η διαδρομή του αλόγου στο σκάκι

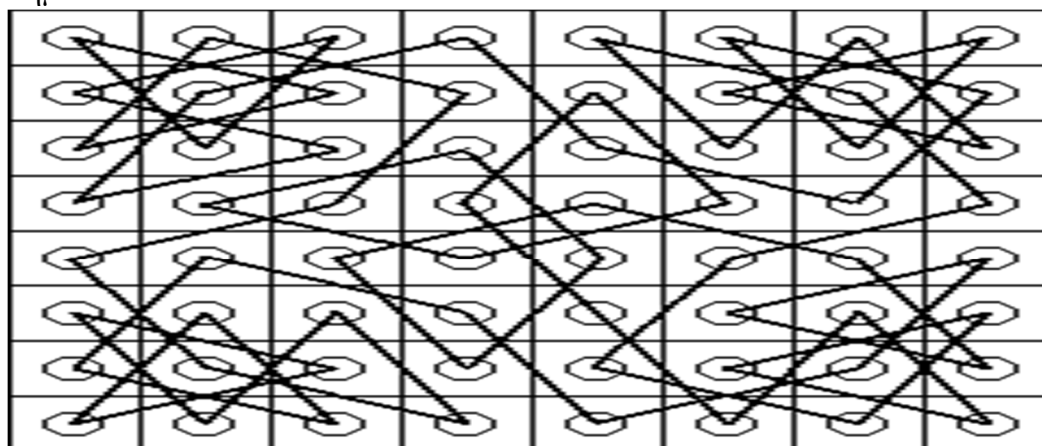
Στο σκάκι, το αλόγο μπορεί να κινηθεί από ένα δεδομένο τετράγωνο σε μια από τις το πολύ 8 θέσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ο πίνακας των μετρήσεων του αλόγου στη σκακιέρα έχει ως εξής:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		55				57	48	
2		44	53	56	39	46	51	58
3	54	31	42	45	52	49	38	47
4	43	34	29	40	23	36	27	50
5	30	41	32	35	28	25	22	37
6	33	16	13	24	21	8	5	26
7	12	1	18	15	10	3	20	7
8	17	14	11	2	19	6	9	4

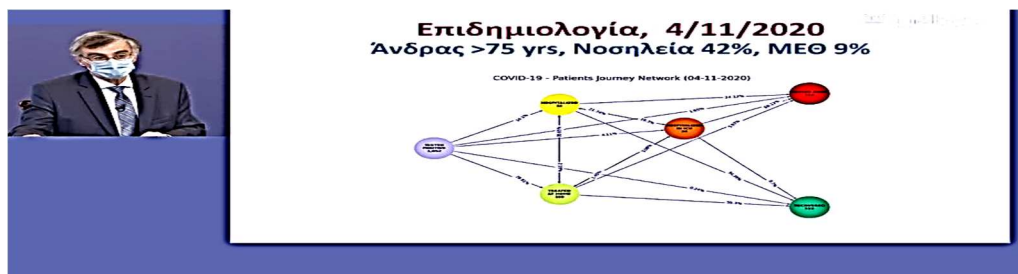
Ο αριθμός των κινήσεων είναι 57. Ο Euler το 1759 ανέλυσε τη σπαζοκεφαλιά της διαδρομής του αλόγου στο σκάκι, αναζητώντας έναν κύκλο του Hamilton. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται μια τέτοια λύση. Υπάρχουν αρκετές επιστήμες που έχουν ως κύρια βάση τους τη θεωρία των γραφημάτων και χάρη σε αυτήν εξελίχθηκαν ένα βήμα παραπάνω, με αποτέλεσμα σήμερα να μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτό το εργαλείο μάθησης για την επίλυση προβλημάτων και για την κατανόηση των μαθηματικών.



By Tsu-wang Yang Aug.11.1999
amosyang@yahoo.com

3.7 Covid-19

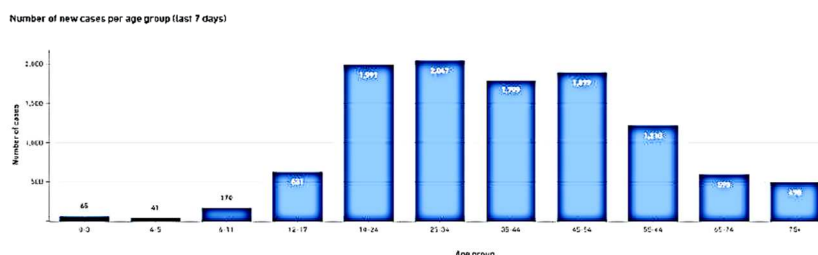
Ένας θανατηφόρος ιός που έχει δημιουργηθεί το τελευταίο χρόνο και έχει εξαπλωθεί σε όλο το πλανήτη έχοντας σπείρει σε πολλές ανθρώπινες ζωές το θάνατο. Στην Ελλάδα ο καθηγητής λοιμωξιολογίας κ. Τσιόδρας ενημέρωνε σε τακτά χρονικά διαστήματα για τα καθημερινά κρούσματα με χρήση γραφημάτων, όπως το παρακάτω.



Στο τελευταίο γράφημα, έχουμε μια αναφορά της εξάπλωσης, ανάλογα με την ηλικία. Μεγάλη έξαρση του ιού γίνεται στις νεαρές ηλικίες. Τα παιδιά και η σχέση τους με τον Covid-19 έχουν βρεθεί πάλι στο προσκήνιο αφενός γιατί καιρό έχει πέσει ο μέσος όρος ηλικίας των κρουσμάτων που καταγράφονται στην χώρα μας, αφετέρου διότι ξεκινάν οι σχεδιασμοί για την έναρξη της σχολικής χρονιάς τον Σεπτέμβριο. Παρόλο που μελέτες δείχνουν ότι τα παιδιά μικρότερων ηλικιών ενδέχεται να είναι λιγότερο πιθανό να προσβληθούν από τον ιό, στη χώρα μας τον τελευταίο καιρό καταγράφεται σημαντική αύξηση κρουσμάτων στις παιδικές ηλικίες.

Επιδημιολογία, 4/11/2020

ηλικία διάγνωσης, τελευταίες 7 ημέρες, >65 yrs (1091↑)



4. Συμπεράσματα

Ανάμεσα στα εκπαιδευτικά πλεονεκτήματα των γραφημάτων μπορούμε να ξεχωρίσουμε τα ακόλουθα:

- Τα γραφήματα, είναι συχνά πολύ επιτυχημένα παραδείγματα μαθηματικής μοντελοποίησης. Παρά την απλότητα τους, βοηθούν ιδιαίτερα στην περιγραφή και στη μελέτη πολλών ενδιαφερόντων και πραγματικών προβλημάτων
- Τα γραφήματα, προσφέρουν χρήσιμες εφαρμογές και συνδέσεις των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή, κάτι που είναι πολύ σημαντικό.
- Δουλεύοντας με γραφήματα, ερχόμαστε σε επαφή με καθαρά μαθηματικές συλλογιστικές μορφές υψηλής εκπαιδευτικής αξίας.
- Τα γραφήματα, επιτρέπουν την επίλυση προβλημάτων και αυτό έχει ως αποτέλεσμα την βαθύτερη και ουσιαστικότερη κατανόηση των μαθηματικών.

- Ένα διάγραμμα, είναι μια απλοποιημένη και δομημένη οπτική παρουσίαση εννοιών, ιδεών, κατασκευών, σχέσεων, στατιστικών δεδομένων, ανατομίας κλπ. Χρησιμοποιείται σε όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες για να παρουσιάσει, για να απλοποιήσει και γενικά για να κάνει κατανοητό το θέμα με το οποίο σχετίζεται. Τα διαγράμματα είναι χρήσιμα διότι μπορούμε να προβλέψουμε εξελίξεις που δε φαίνονται και για να μελετάμε καταστάσεις εκεί που δε μπορούμε να κατανοήσουμε τι συμβαίνει.
- Τα γραφήματα, μας βοηθούν να απεικονίζουμε τα δεδομένα μας με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε τον μέγιστο δυνατό αντίκτυπο στο ακροατήριό μας.

5. Βιβλιογραφία

- Αγγελής, Ε. και Μπλήρης, Γ. (2003). «Διακριτά μαθηματικά», 1^η έκδοση, Θεσσαλονίκη, εκδόσεις Τζιόλα
- Πάλλας, Ν. (2014). «Γραφήματα, αλγόριθμοι γραφημάτων, πεπερασμένες γεωμετρίες», Αθήνα, εκδόσεις Τσότρας
- Σπύρου, Π. (1999). «Θεωρία γραφημάτων», Αθήνα, εκδόσεις Αθήνα
- Claudi Alsina (2012). «Οι χάρτες του μετρό και τα νευρωνικά δίκτυα», Αθήνα, εκδόσεις 4π
- Wikipedia
- Youtube
- Google