



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Τα 23 προβλήματα του Hilbert



Σπουδαστής: **Νάσος Ιωάννης** (AM 8040)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.), Επίκουρος Καθηγητής**

Ακαδημαϊκό έτος: **2019 – 2020**

Ημερομηνία ανάθεσης: 06.05.2020
Ημερομηνία κατάθεσης: ... / 0... / 2020
Ημερομηνία εξέτασης: ... / 0... / 2020

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Ιδιαίτερα ικανοποιητική	
2	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
3	Φραγκιαδάκης Νικόλαος Δρ. Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Αναπληρωτής Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Περίληψη.....	4
2. Πρόλογος.....	4
3. Το έργο του Hilbert στα θεμέλια των μαθηματικών	6
4. Ιστορική αναδρομή στα θεμέλια των μαθηματικών.....	7
5. Η λογική θεμελίωση των μαθηματικών	7
6. Λογική και η γνώση της φύσης.....	8
7. Η διάλεξη του Hilbert για τη λογική και τη γνώση της φύσης.....	8
8. Τα θεμέλια της γεωμετρίας (1889).....	11
8.1 Αξιώματα σύνδεσης	11
8.2 Αξιώματα διάταξης.....	11
8.3 Αξιώματα ισότητας.....	11
8.4 Αξιώματα συνέχειας.....	12
9. Το ξενοδοχείο του Hilbert.....	12
10. Τα προβλήματα του Hilbert.....	13
10.1 Το πρόβλημα του Cantor για τους πληθικούς αριθμούς του συνεχούς. Η υπόθεση του συνεχούς.....	13
10.2 Η συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής.....	15
10.3 Η ισότητα των όγκων δύο τετράεδρων με ίσες βάσεις και ίσα ύψη	16
10.4 Το πρόβλημα της ευθείας γραμμής ως η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Εναλλακτικές γεωμετρίες.....	16
10.5 Η αρχή του Lie για συνεχείς ομάδες μετασχηματισμών χωρίς την υπόθεση της διαφορισιμότητας των συναρτήσεων που ορίζουν τις ομάδες	17
10.6 Αξιοματικοποίηση της μαθηματικής φυσικής.....	17
10.7 Η αρρητότητα και η υπερβατικότητα κάποιων συγκεκριμένων αριθμών.....	17
10.8 Προβλήματα πρώτων αριθμών (Η κατανομή των πρώτων και η υπόθεση του Riemann).....	17
10.9 Η απόδειξη του γενικότερου νόμου της αντιστροφής σε κάθε αριθμητικό σώμα.....	18
10.10 Καθορισμός της επιλυσιμότητας μίας διοφαντικής εξίσωσης	18
10.11 Τετραγωνικές μορφές με τυχαίους αλγεβρικούς συντελεστές	19
10.12 Επέκταση του θεωρήματος του Kronecker για τα αβελιανά σώματα σε οποιοδήποτε ρητό αλγεβρικό σύνολο.....	19
10.13 Αδυναμία λύσης της γενικής εξίσωσης 7ου βαθμού θεωρώντας συναρτήσεις δύο μόνο μεταβλητών.....	20
10.14 Απόδειξη ότι ορισμένα πλήρη συστήματα συναρτήσεων είναι πεπερασμένα.....	20
10.15 Αυστηρή θεμελίωση της απαριθμητικής γεωμετρίας του Schubert.....	20
10.16 Πρόβλημα στην τοπολογία των αλγεβρικών καμπυλών και επιφανειών.....	21
10.17 Παράσταση ορισμένων μορφών ως αθροίσματα τετραγώνων	21
10.18 Διαμέριση του χώρου σε ίσα πολύεδρα.....	21
10.19 Είναι πάντα οι λύσεις των κανονικών προβλημάτων του λογισμού μεταβολών αναγκαστικά αναλυτικές;	22
10.20 Το γενικό πρόβλημα των οριακών τιμών	22
10.21 Απόδειξη της ύπαρξης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που να έχουν προκαθορισμένη μονοδρομική ομάδα	22
10.22 Ομογενοποίηση των αναλυτικών σχέσεων μέσω αυτομορφικών συναρτήσεων.....	23
10.23 Περαιτέρω ανάπτυξη των μεθόδων του λογισμού μεταβολών	23
11. Το φορμαλιστικό πρόγραμμα	23
12. Το 4ο αξίωμα του Peano	25
13. Από τη γλώσσα στη μεταγλώσσα.....	25
14. Poincare εναντίον Hilbert.....	27
15. Επίλογος.....	28
16. Βιβλιογραφία.....	29

1. Περίληψη

Ο David Hilbert (1862–1943), είναι ο μοναδικός μαθηματικός του 20^{ού} αιώνα, στη ζωή του οποίου απεικονίζεται ολόκληρη η ιστορία των μαθηματικών της εποχής του. Για τον Hilbert, «στα μαθηματικά δεν υπάρχει δεν θα μάθουμε ποτέ». Στον τάφο του, είναι γραμμένη η φράση που χαρακτήριζε τη ζωή και τη φιλοσοφία του «Πρέπει να μάθουμε και θα μάθουμε».



Το ανήσυχο πνεύμα του, οραματίστηκε το μέλλον της μαθηματικής σκέψης και στις 08.08.1900, στη διάρκεια του 2^{ου} Παγκόσμιου μαθηματικού συνεδρίου στο Παρίσι (Σορβόνη), έκανε μια σημαντικότερη διάλεξη, όπου διατύπωσε τα 23 άλυτα προβλήματα και παρουσίασε 10 από αυτά (1, 2, 6, 7, 8, 13, 16, 19, 21, 22). Όταν παρουσίασε τη λίστα με τα 23 προβλήματα, είχε δηλώσει ότι το καλύτερο τεστ για ένα πρόβλημα ήταν το τεστ «του πρώτου τυχόντα». Αν μπορούσες να εξηγήσεις στο 1^ο άτομο που θα συναντούσες στο δρόμο το πρόβλημα και να το καταλάβαινε, τότε είχες μπροστά σου το τέλειο πρόβλημα, δηλαδή ήταν διατυπωμένο με τον καλύτερο τρόπο. Τα προβλήματα, ήταν όλα άλυτα εκείνη την περίοδο και πολλά από αυτά είχαν μεγάλη επιρροή στους μαθηματικούς του 20^{ου} αιώνα. Ωστόσο, η διάλεξή του είχε εκτοπιστεί σε ένα από τα δευτερεύοντα τμήματα του συνεδρίου, μαζί με μια μελέτη για τους αρχαίους Ιάπωνες γεωμέτρες και την πρόταση υιοθέτησης μιας κοινής επιστημονικής γλώσσας από όλες τις χώρες. Ο David Hilbert, είχε επιλεγεί φυσικά για να δώσει μια από τις βασικές διαλέξεις στη συνάντηση στο Παρίσι, αλλά ο Γερμανός μαθηματικός είχε καθυστερήσει τόσο πολύ να διαλέξει το θέμα του που οι διοργανωτές αναγκάστηκαν τελικά να τον αποκλείσουν από το πρόγραμμα. Βλέποντάς τον να ανεβαίνει στο βήμα φορώντας τα τόσο χαρακτηριστικά γυαλιά του, το κοινό αναρωτήθηκε τι μπορεί να έκανε όλον αυτόν τον καιρό. Η διάδοση του παράδοξου του συνόλου όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους, ήταν γρήγορη και κινητοποίησε τους κύκλους των Ευρωπαίων μαθηματικών: στην Αγγλία, ο Whitehead θα ανακοίνωνε το τέλος των «ευτυχισμένων και ήρεμων πρωινών».

Στη Γερμανία, ο Frege αναγκάστηκε να προσθέσει ένα παράρτημα στις *Βάσεις της αριθμητικής* του, ενώ στη Γαλλία, ο Henri Poincare, εχθρός της μαθηματικής λογικής, θα επαναλάμβανε νικητήρια «η τυπική λογική δεν είναι στείρα: παράγει αντιφάσεις». Η πλήρης λίστα με τα 23 προβλήματα δημοσιεύθηκε αργότερα, με πιο σημαντική τη μετάφραση της το 1902 από τη Μαρί Φρανσέ Ουίνστον Νίουσον στο περιοδικό της αμερικάνικης μαθηματικής εταιρείας. Ο «προκλητικός» Hilbert, έριξε το γάντι στους μαθηματικούς του 20^{ου} αιώνα. Μέχρι σήμερα, τα περισσότερα από τα περίφημα 23 προβλήματα του επιλύθηκαν, ενώ άλλα παραμένουν ανεπίλυτα.

2. Πρόλογος

Γεννήθηκε την **23.01.1862** και φοίτησε στο γυμνάσιο και Πανεπιστήμιο της περιοχής. Ήταν το πρώτο από τα δυο παιδιά του Ότο και της Maria Therese (Erdtmann) Hilbert. Γεννήθηκε στο Königsberg της Πρωσίας (σύμφωνα με δήλωση του ιδίου) ή στο Wehlau (γνωστό από το 1946 ως Znamensk) κοντά στο Königsberg,

όπου ο πατέρας του εργάζονταν την περίοδο γέννησης του. Το φθινόπωρο του **1872** πήγε στο Friedrichskolleg γυμνάσιο του Friedrichskolleg (Collegium fridericianum, το ίδιο σχολείο που παρακολούθησε και ο Καντ 140 χρόνια αργότερα), αλλά ύστερα από μια δυστυχή περίοδο μεταφέρθηκε (φθινόπωρο του **1879**) και αποφοίτησε (άνοιξη **1880**) από το Wilhelm Gymnasium που προσανατολιζόταν στις επιστήμες.

Μετά την αποφοίτηση, εγγράφηκε (φθινόπωρο του 1880) στο Πανεπιστήμιο του Königsberg. Την άνοιξη του **1882** ο Hermann Minkowski (2 έτη νεότερος από τον Hilbert, καταγόμενος από το Königsberg, ήταν τόσο ταλαντούχος που αποφοίτησε νωρίτερα από το γυμνάσιο και πήγε στο Βερολίνο για 3 εξάμηνα), επέστρεψε στο Königsberg και μπήκε στο πανεπιστήμιο. «Ο Hilbert ήξερε την τύχη του από τη στιγμή που την είδε». Παρά την αποδοκιμασία του πατέρα του, έγινε σύντομα φίλος με τον ντροπαλό, προικισμένο Minkowski. Το **1884**, ο Adolf Hurwitz έφτασε από το Gottingen σαν αναπληρωτής καθηγητής. Προέκυψε μια έντονη και προσοδοφόρα επιστημονική ανταλλαγή μεταξύ των τριών και κυρίως μεταξύ των Minkowski και Hilbert, οι οποίοι ασκούσαν μια αμοιβαία επιρροή ο ένας στον άλλο, σε διάφορες περιόδους στην επιστημονική τους καριέρα.

Το **1884** εκπόνησε τη διδακτορική του διατριβή, το **1885** απέκτησε το διδακτορικό του με διατριβή, γραμμένη από τον Ferdinand von Lindemann, υπό τον τίτλο «*Über invariante Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen*» (Οι αμετάβλητες ιδιότητες των ειδικών δυαδικών μορφών, κυρίως των σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων). Το **1886**, αναγορεύτηκε καθηγητής του ίδιου Πανεπιστημίου. Στη συνέχεια, κλήθηκε στο Πανεπιστήμιο του Gottingen, όπου και διατήρησε έδρα μέχρι το τέλος της καριέρας του, το **1930**. Μέχρι το **1895** ήταν Privatdozent (λέκτορας) στο Πανεπιστήμιο. Νυμφεύτηκε την Käthe Jerosch (1864–1945), κόρη εμπόρου από το Königsberg, μια ειλικρινή, νέα κοπέλα με ανεξαρτησία μυαλού, που ταίριαζε στο δικό του. Μια ιστορία λέει ότι κατά τη διάρκεια μιας δεξίωσης, η σύζυγός του τον έστειλε στην κρεβατοκάμαρά του να αλλάξει ρούχα.

Εκείνος, ανέβηκε στο δωμάτιό του και άρχισε να αλλάζει, αλλά απορροφημένος από τη ρουτίνα της αλλαγής ρούχων, ξεχάστηκε και έπεσε για ύπνο. Η ιστορία τελειώνει με τη γυναίκα του να τον σηκώνει από το κρεβάτι έξαλλη. Στο Königsberg απέκτησαν το παιδί τους, τον Φραντς (1893–1969). Το **1895**, ως αποτέλεσμα παρέμβασης του Felix Klein, διατήρησε τη θέση του καθηγητή μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Gottingen, που εκείνη την περίοδο ήταν το καλύτερο κέντρο έρευνας μαθηματικών στον κόσμο. Παρέμεινε εκεί για το υπόλοιπο της ζωής του. Ο γιος του Φραντς υπέφερε κατά τη διάρκεια της ζωής του από μη διαγνώσιμη ψυχική ασθένεια, η κατώτερη του νοημοσύνη ήταν απογοήτευση για τον πατέρα του. Ο Minkowski, ο καλύτερος και πιο αληθινός φίλος του Hilbert, πέθανε πρόωρα από ρήξη εντέρου το **1909**. Ο Hilbert, απέκτησε γρήγορα ιδιαίτερα μεγάλη φήμη, αφού απέδειξε με καινοφανείς και μεγαλοφυείς μεθόδους το γενικό θεώρημα που καθορίζει το πέρας της βάσης στο σύστημα των αμετάβλητων και των συμμεταβλητών ενός αλγεβρικού τύπου, με οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών.

Το πρώτο του έργο, με τίτλο «*Zahlbericht*», παρέμεινε επί 40 χρόνια στην κορυφή του τομέα της θεωρίας των αλγεβρικών αριθμών. Γνωστότερο και σημαντικότερο έργο του θεωρείται το βιβλίο «*Οι βάσεις της γεωμετρίας*» που κυκλοφόρησε το **1899**. Σε αυτό, προσπάθησε να συμβιβάσει τα «*Στοιχεία*» του Ευκλείδη, με τις αυστηρά αμετάβλητες βάσεις που απαιτεί η κλασική γεωμετρία, προκαλώντας έντονες συζητήσεις και σημειώνοντας τη γέννηση της γενικής τοπολογίας. Σημαντικότερη, ήταν η συμβολή του στη θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων, που δημιούργησε ο Fredholm, ενώ σε αυτόν οφείλεται, η πρώτη γενική απόδειξη της περίφημης υπόθεσης του E. Waring, σχετικά με τη δυνατότητα να

εκφραστεί κάθε ακέραιος αριθμός ως άθροισμα δυνάμεων ακέραιων αριθμών. Με το έργο του αυτό, ο Hilbert συνέβαλε στην εξέλιξη της μαθηματικής φυσικής, της κινητικής θεωρίας των αερίων και της θεωρίας της σχετικότητας.

«Τι ευτυχία να είναι κανείς μαθηματικός σήμερα! Παντού τα μαθηματικά ανθίζουν και καινούργιοι βλαστοί ξεπετάγονται. Διότι με τις εφαρμογές τους στις φυσικές επιστήμες και με τη σύνδεσή τους με τη φιλοσοφία, τα μαθηματικά γίνονται όλο και πιο σημαντικά και βρίσκονται στη διαδικασία επανάκτησης της παλιάς, κεντρικής τους θέσης!»

Τα προβλήματα, έχουν μεγάλη κύμανση σε θεματολογία και ακρίβεια διατύπωσης. Μερικά, είναι διατυπωμένα με τόση ακρίβεια, ώστε είναι δυνατό να απαντηθούν με μια θετική ή αρνητική απάντηση όσον αφορά την ισχύ τους, όπως το 3^ο (πιθανώς το πιο εύκολο για κάποιον μη μυημένο στα μαθηματικά και ήταν το 1^ο που λύθηκε) ή το διαβόητο 8^ο (η υπόθεση του Riemann). Υπάρχουν άλλα προβλήματα (σημειωτέων το 5^ο) για τα οποία οι ειδικοί έχουν συμφωνήσει σε μια διατύπωση και λύση, στη μετάφραση που δόθηκε, αλλά παραμένουν και άλυτα προβλήματα που συνδέονται μεταξύ τους, γεγονός το οποίο ενδέχεται να επιδίωκε ο ίδιος ο Hilbert. Μερικές φορές οι διατυπώσεις του Hilbert δεν ήταν αρκετά ακριβείς, έτσι ώστε να προσδιορίσουν πλήρως ένα πρόβλημα, ωστόσο υποδηλώνονται σε ικανοποιητικό βαθμό, έτσι ώστε τα συγκεκριμένα προβλήματα να μπορούν να προσεγγιστούν σήμερα, για παράδειγμα οι περισσότεροι αλγεβριστές θα προτιμούσαν το 9^ο πρόβλημα να αναφέρεται ως (εικασία) η αλληλογραφία του Lagrange στις παραστάσεις της απολύτου ομάδας του Galois ενός σώματος αριθμών. Ακόμη, άλλα προβλήματα (π.χ. 11^ο, 16^ο) αποτελούν ακμάζοντες υποκλάδους των σύγχρονων μαθηματικών, όπως η θεωρία των τετραγωνικών μορφών και οι πραγματικές αλγεβρικές καμπύλες.

3. Το έργο του Hilbert στα θεμέλια των μαθηματικών

Η έρευνα του Hilbert στα θεμέλια των μαθηματικών, έγινε κατά τη διάρκεια δύο ξεχωριστών περιόδων στην αρχή και στο τέλος της καριέρας του. Οι δύο περίοδοι χωρίζονται από ένα διάστημα περίπου 12 ετών. Στην **1^η περίοδο**, ανήκουν οι τρεις πρώτες εκδόσεις του έργου του με τον τίτλο «*Grundlagen der geometrie*», δύο άρθρα σχετικά με τα θεμέλια της Αριθμητικής (Hilbert 1900 και 1904). Στη **2^η περίοδο**, ανήκουν τα βιβλία που συνέγραψε με τον Wilhelm Ackerman (*Grundzüge der theoretischen Logik*, 1928) και τον Paul Bernays (*Grundlagen der Mathematik*, σε δύο τόμους το 1934 και το 1939) και 8 άρθρα σχετικά με τη θεωρία της απόδειξης, τη λογική και τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Η παρούσα εργασία, βασίζεται στα δημοσιευμένα άρθρα του Hilbert πάνω στα θεμέλια των μαθηματικών.

Τα πρώτα τρία από αυτά τα άρθρα, είναι ζητήματα καίριας σημασίας για τα θεμέλια των μαθηματικών. Έχουν μεταφραστεί από τον Stefan Bauer–Mengelberg και είναι άμεσα διαθέσιμα στο van Heijenoort το 1967. Πέρα από αυτό το δημοσιευμένο υλικό, η περιουσία του Hilbert στο Gottingen περιλαμβάνει μια εκτεταμένη συλλογή από επιστολές και χειρόγραφα στην βιβλιοθήκη «*Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek*» και μια συλλογή από 80 ογκώδεις τόμους των επίσημων πρακτικών από τις διαλέξεις του. Οι σημειώσεις έγιναν από τους βοηθούς του (μεταξύ των οποίων, οι Ackerman, Courant, Hellinger, Schinfinkel και Bernays), διορθώθηκαν από τον Hilbert, δεσμεύτηκαν και έχουν κατατεθεί στη βιβλιοθήκη του Ινστιτούτου Μαθηματικών στο Gottingen. Ένας κατάλογος των θεμάτων που καλύπτει ο Hilbert στις διαλέξεις του Gottingen βρίσκεται στο προσάρτημα του 3^{ου} τόμου του έργου του Hilbert με τον τίτλο «*Gesammelte Abhandlungen*» (1932–19355). Περίπου 20 από αυτούς τους τόμους,

ασχολούνται με θέματα λογικής, θεωρίας συνόλων, θεωρίας της απόδειξης, τα θεμέλια της γεωμετρίας και τη φιλοσοφία των μαθηματικών και της φυσικής.

Το μεγαλύτερο έργο του, όσο έζησε στην Καινιξβέργη, ήταν πάνω στην τότε ανθούσα θεωρία των αλγεβρικών σταθερών. Αποδεικνύοντας την τελική βάση του θεωρήματος, έλυσε το κεντρικό πρόβλημα στον τομέα και έθεσε το επιστέγασμα σχετικά με τη θεωρία των σταθερών, των οποίων η προέλευση ανάγεται στην εποχή του George Boole. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου στην Königsberg, απλοποιεί τις υπάρχουσες αποδείξεις της υπερβατικότητας των σταθερών e και π .

4. Ιστορική αναδρομή στα θεμέλια των μαθηματικών

Οι πιο σημαντικές πρόοδοι στα θεμέλια των μαθηματικών έχουν συμβεί κατά τη διάρκεια τριών περιόδων: της κλασικής αρχαιότητας, του 17^{ου} αιώνα και της σύγχρονης περιόδου. Σε αυτές τις περιόδους, μεγάλοι φιλόσοφοι είναι επίσης μεγάλοι μαθηματικοί και τα μεγάλα προβλήματα των μαθηματικών είναι μεγάλα προβλήματα της φιλοσοφίας. Η 1^η περίοδος έδωσε τους Αριστοτέλη, Ευκλείδη, Πλάτωνα, Πυθαγόρα, Ζήνωνα και Αρχιμήδη. Οι μελέτες και σκέψεις τους για τους άρρητους αριθμούς, τα παράδοξα της κίνησης, τις μαθηματικές αποδείξεις, τα αξιώματα της γεωμετρίας, τη συλλογιστική λογική «έριξαν» τα θεμέλια για όλα όσα επρόκειτο να ακολουθήσουν.

Η 2^η περίοδος έδωσε τους Galileo, Descartes, Newton και Leibniz. Την περίοδο αυτή εμφανίστηκε ο απειροστικός λογισμός, η αναλυτική γεωμετρία, ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός, η μαθηματική φυσική και μια πληθώρα εμπνευσμένων μαθηματικών συστημάτων της μεταφυσικής. Αυτή η περίοδος, έχει λιγότερο διερευνηθεί. Τα γραπτά είναι ογκώδη, η γλώσσα αρχαϊζουσα και τα μαθηματικά κείμενα πολύπλοκα και δυσανάγνωστα. Για παράδειγμα, ακόμη και σήμερα τα γραπτά του Leibniz εξακολουθούν να δημοσιεύονται. Γραπτές μελέτες με λιγότερα αριθμητικά στοιχεία, συχνά θάβονται σε σκοτεινά αρχεία κάποιας βιβλιοθήκης. Παρά την ύπαρξη κάποιων υπέροχων μονογραφιών, ο 17^{ος} αιώνας παραμένει η λιγότερο κατανοητή και λιγότερο προσιτή από τις τρεις περιόδους. Η σύγχρονη περίοδος, χωρίζεται σε δύο υποπεριόδους που επικαλύπτονται τόσο χρονολογικά όσο και εννοιολογικά. Η 1^η υποπερίοδος αρχίζει με τον Cant και διαρκεί μέχρι τον Hilbert. Η 2^η υποπερίοδος αρχίζει με τον Frege και συνεχίζει μέχρι σήμερα.

5. Η λογική θεμελίωση των μαθηματικών

Τον Σεπτέμβριο 1922 στη Λειψία, έδωσε διάλεξη στην «*Deutsche Naturforscher Gesellschaft*» όπου παρουσίασε τη θεωρία των αποδείξεων του, ως πλέον μια ώριμη θεωρία, εισάγοντας διάφορες τεχνικές βελτιώσεις και διευκρινίσεις. Συγκεκριμένα:

- Βελτιώνει το τυπικό σύστημα, προσθέτοντας ένα ειδικό σύμβολο, την τυπική άρνηση. (Προηγουμένως είχε επιτραπεί μόνο το αρχικό σύμβολο σημάδι $\neq$ για την αριθμητική ανισότητα).
- Τελειοποιεί την αναφορά του για τη διάκριση, μεταξύ τυπικής γλώσσας και μεταγλώσσας και ο ίδιος διακρίνει τώρα σαφώς τους τρόπους εξαγωγής συμπερασμού που επιτρέπονται σε κάθε μία. Στη μεταγλώσσα, κάποιος κάνει πράξεις με την πεπερασμένη λογική, δηλαδή μια λογική που ασχολείται με πεπερασμένες οντότητες, αλλά στην επίσημη γλώσσα οι τρόποι εξαγωγής συμπερασμάτων είναι πιο ισχυροί. Στις παραγράφους 13–15 της διάλεξης, ο Hilbert βεβαιώνει την ύπαρξη των

ποσοδεικτών στις άπειρες οντότητες, ως το ακριβές σημείο όπου τα παραδοσιακά μαθηματικά απομακρύνονται από την πεπερασμένη λογική.

- Ο ίδιος, περιγράφει μια απόδειξη της συμβιβαστότητας ενός στοιχειώδους, χωρίς ποσοδείκτες, τυπικού συστήματος της θεωρίας των αριθμών.

- Αρχίζει να επεκτείνει τη θεωρία της απόδειξης του για την ανάλυση και τη θεωρία των συνόλων και στο τέλος της μελέτης, σκιαγραφεί μια στρατηγική για την απόδειξη της συμβιβαστότητας μιας έκδοσης του αξιώματος της επιλογής του Zermelo, για τους πραγματικούς αριθμούς.

- Χειρίζεται μεταβατικά τμήματα των μαθηματικών, εισάγει ένα ειδικό τελεστή "τ" στις προτάσεις. Το "τ" διέπτετε από ένα ενιαίο μεταβατικό αξίωμα $A(\tau A) \rightarrow A(\alpha)$. Ο "τ" πρέπει να θεωρηθεί ως τελεστής αντιπαράδειγματος. Δηλαδή, για κάθε πρόταση A, ο τA υποτίθεται ότι επιλέγει ένα αντιπαράδειγμα για το A, εφόσον υπάρχει ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα. Με λίγα λόγια, το αξίωμα λέει ότι αν το A ισχύει, ακόμη και στο υποτιθέμενο αντιπαράδειγμα, τότε ισχύει γενικά. Ο Hilbert μπορεί τώρα να καθορίσει τους ποσοδείκτες με όρους του "τ". Γιατί το $(\forall x)A(x)$ ισχύει μόνο στην περίπτωση που το $A(x)$ ισχύει για κάθε $\tau(A)$.

Έτσι ορίζουμε $(\forall x)A(x) \equiv A(\tau(A))$ Και με την ίδια συλλογιστική $(\exists x)A(x) \equiv A(\bar{\tau})$

Έτσι ο τελεστής «τ» συνδέει τους ποσοδείκτες, μια αρχή της μεταβατικής επιλογής, και το *tertium non datur* για τις άπειρες οντότητες. Από το μεταβατικό αξίωμα και τον ορισμό των ποσοδεικτών, προκύπτει ότι $\forall \alpha () \equiv (\exists) - (\exists x)A(x) \equiv A(\bar{\tau})$

Τον τύπο αυτό, ο Hilbert τον αναγνωρίζει ως «*tertium non datur*» για τις άπειρες οντότητες. Ο ειδικός τελεστής «τ» (που ο Hilbert και ο Μπέρνεϋς αντικατέστησαν γρήγορα με το γνωστό, ελληνικό ε) επιτρέπει επίσης στον Hilbert την εξάλειψη των ποσοδεικτών από την τυπική γλώσσα του: Γιατί έχουν αντικατασταθεί από τον τελεστή «ε», ο οποίος διέπτετε από ένα μεμονωμένο μεταβατικό αξίωμα. Αυτό, απλοποιεί σημαντικά τη θεωρία αποδείξεων. Γιατί η τυπική απόδειξη, αποτελείται αποκλειστικά από αντικαταστάσεις και από εφαρμογές του προτασιακού λογισμού. Η στρατηγική του Hilbert για την απόδειξη της συμβιβαστότητας, ήταν η εξής «*Να αντικαταστήσει τους (πεπερασμένου πλήθους) «ε-όρους» σε όλες τις αποδείξεις από διαδοχικές αριθμητικές τιμές με τον πιο αποτελεσματικό τρόπο. Η ελπίδα του ήταν ότι, η διαδικασία αυτή θα μπορούσε να αποδειχθεί ότι θα κατέληγε σε έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων, αφήνοντας τύπους παραδεκτούς από όλους, χωρίς ποσοδείκτες.*»

6. Λογική και η γνώση της φύσης

Η παρακάτω διάλεξη, δόθηκε στην Königsberg το φθινόπωρο του 1930 με την ευκαιρία της απονομής στον Hilbert, του τιμητικού τίτλου της πόλης. Ο Hilbert είχε αποσυρθεί και εδώ συνοψίζει την αντίληψή του για την πρακτική των μαθηματικών. Λίγα χρόνια αργότερα, ο κύκλος Hilbert στο Göttingen εκκαθαρίστηκε από τους ναζί. Πολλοί από τους φίλους και συνεργάτες του, οδηγήθηκαν στην εξορία. Ο Hilbert στα 70 του, έμεινε πίσω. Του δίνονταν μια απλή σύνταξη στο Göttingen, όπου και πέθανε το 1943. Οι ακροτελεύτιες λέξεις που είπε στη διάλεξη στην Königsberg, χαρακτήθηκαν στον τάφο του.

7. Η διάλεξη του Hilbert για τη λογική και τη γνώση της φύσης

Ξεκινά τη διάλεξή του, εξετάζοντας ένα παλιό φιλοσοφικό πρόβλημα, δηλαδή το επίμαχο ερώτημα σχετικά με τι ποσοστό σκέψης και εμπειρίας, έχουν οι γνώσεις μας. Το ερώτημα αυτό είναι βασικό, μιας και από την απάντησή του, θα εξακριβώσει το γενικό χαρακτήρα της γνώσης του στις φυσικές επιστήμες. Ισχυρίζεται ότι, μπορούμε

να δώσουμε σήμερα μια σωστή απάντηση σε αυτό το ερώτημα, με περισσότερη βεβαιότητα για **δύο λόγους**:

- «Ο 1^{ος} λόγος, είναι ο ταχύς ρυθμός με τον οποίο οι επιστήμες μας αναπτύσσονται σήμερα. Οι πιο σημαντικές ανακαλύψεις της προηγούμενης περιόδου, από τον Κοπέρνικο, τον Κέπλερ, τον Γαλιλαίο και τον Νεύτωνα ως τον Μάξγουελ, κατανέμονται σε μεγάλα χρονικά διαστήματα σχεδόν τεσσάρων αιώνων. Η σύγχρονη περίοδος, αρχίζει με την ανακάλυψη των ερτζιανών κυμάτων. Από τότε τα γεγονότα εξελίσσονται με ταχύ ρυθμό: Ο Ρέντγκεν ανακαλύπτει τις ακτίνες X, η Κιουρί ανακαλύπτει την ραδιενέργεια, ο Planck καθιερώνει την κβαντική θεωρία. Και στην πιο πρόσφατη περίοδο, οι ανακαλύψεις των νέων φαινομένων και οι εκπληκτικές συνδέσεις τους έρχονται συσσωρευτικά, έτσι ώστε η αφθονία των προσδοκιών γίνεται σχεδόν ανησυχητική: η θεωρία του Rutherford της ραδιενέργειας, η εξήγηση του νόμου *hν* του Einstein, του φάσματος του Bohr, η αρίθμηση των στοιχείων του Mosley, η θεωρία της σχετικότητας του Einstein, η αποσύνθεση του αζώτου του Rutherford, η δομή των στοιχείων του Bohr, η θεωρία των ισοτόπων του Άστον.»

Έτσι, κατά τον Hilbert στο πεδίο της φυσικής και μόνο, υπήρξε μια ατέλειωτη αλληλουχία ανακαλύψεων, όπου η θεωρία και η πράξη, η σκέψη και η εμπειρία συνεχώς αποδεικνύονται να διαπλέκονται πολύ στενά. Προχωρούσε τότε η θεωρία και τότε το πείραμα, πάντα επιβεβαιώνοντας αμοιβαία, την ολοκλήρωση και την ενδυνάμωσή τους. Το ίδιο ισχύει για τη χημεία, για την αστρονομία και για τις βιολογικές επιστήμες. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με τον Hilbert υφίστανται δύο πλεονεκτήματα σε σχέση με τους παλαιούς φιλοσόφους: **«Πρώτον**, έχουμε ζήσει μέσα από έναν μεγάλο αριθμό τέτοιων ανακαλύψεων, και έχουμε εξοικειωθεί με τις προκύπτουσες νέες απόψεις κατά τη διάρκεια του σχηματισμού τους. **Και δεύτερο**, μεταξύ των νέων ανακαλύψεων υπήρχαν πολλές που τροποποίησαν τις παλαιές, για παράδειγμα, η νέα αντίληψη του χρόνου στη θεωρία της σχετικότητας, ή της αποσύνθεσης των χημικών στοιχείων, καθώς και για το πώς εξαλείφονται προκαταλήψεις που παλαιότερα δεν μπορούσε κανένας να αγνίζει.»

- Ο 2^{ος} λόγος, ισχυρίζεται ο Hilbert είναι ότι η τεχνική του πειραματισμού και η τέχνη της δημιουργίας θεωρητικών κατασκευασμάτων στη φυσική, έφθασε τότε σε νέα ύψη, αλλά η ομολογή τους επιστήμη, αυτή της λογικής, είχε επίσης σημειώσει σημαντική πρόοδο. Υπήρχε μια γενική μέθοδος για τη θεωρητική επεξεργασία των ζητημάτων στις φυσικές επιστήμες, η οποία σε κάθε περίπτωση διευκόλυνε την ακριβή διατύπωση του προβλήματος και βοηθούσε στην προετοιμασία της λύσης του, δηλαδή η αξιωματική μέθοδος. Το ερώτημα που θέτει ο Hilbert είναι, τι συμβαίνει με αυτή την αξιωματική μέθοδο, η οποία είναι σήμερα στα χείλη όλων μας; Η βασική της ιδέα, στηρίζεται στο γεγονός ότι γενικά ακόμη και σε ολοκληρωμένους τομείς της γνώσης, μερικές προτάσεις (που ονομάζονται αξιώματα) αρκούν για την εύστοχη λογική κατασκευή ολόκληρου του οικοδομήματος της θεωρίας. Αλλά η σημασία τους δεν έχει εξηγηθεί πλήρως με αυτή την παρατήρηση. Τα παραδείγματα σύμφωνα με τον Hilbert, θα είναι ο ευκολότερος τρόπος για να διευκρινιστεί η αξιωματική μέθοδος. Το παλαιότερο και πιο γνωστό παράδειγμα της αξιωματικής μεθόδου, είναι η ευκλείδεια γεωμετρία. Αλλά ο Hilbert προτιμά να απεικονίσει την αξιωματική μέθοδο αρκετά σύντομα με δύο παραδείγματα: ένα παράδειγμα από τη σύγχρονη βιολογία, και ένα άλλο παράδειγμα από τις θεωρητικές επιστήμες. Ξεκινά πρώτα με ένα παράδειγμα από τη βιολογία:

«Η Δροσοφίλα (*Drosophila*) είναι μια μικρή μύγα, αλλά το ενδιαφέρον μας σε αυτήν είναι μεγάλο. Είναι το αντικείμενο του πιο εκτεταμένου, προσεκτικού, και επιτυχημένου πειράματος αναπαραγωγής. Είναι συνήθως γκρι, με κόκκινα μάτια, χωρίς κηλίδες, με στρογγυλά και μακριά φτερά. Αλλά υπάρχουν επίσης μύγες με αποκλίνοντα

ιδιαίτερα χαρακτηριστικά: είναι κίτρινες μέχρι γκρι, έχουν άσπρα μάτια ή κόκκινα μάτια κ.λπ. Αυτά τα πέντε ειδικά χαρακτηριστικά συχνά συνδυάζονται. Δηλαδή, όταν μια μύγα είναι κίτρινη, έχει επίσης λευκά μάτια και κηλίδες, με σχισμένα και κολοβά φτερά. Και όταν έχουν κολοβά φτερά τότε έχουν επίσης κίτρινα με λευκά μάτια και ούτω καθεξής. Αλλά τώρα με κατάλληλες διασταυρώσεις – παράγουμε μελλοντικές γενιές που εμφανίζουν μικρότερο αριθμό αποκλίσεων από αυτές που συμβαίνουν στους συνηθισμένους συνδυασμούς – μάλιστα το ποσοστό είναι ένας σταθερός αριθμός. Οι αριθμοί που έτσι κάποιος βρίσκει πειραματικά, συμπίπτουν με τα ευκλείδεια αξιώματα της γραμμικής ισοτιμίας και με τα αξιώματα της γεωμετρικής έννοιας του «μεταξύ» και έτσι οι νόμοι της κληρονομικότητας εφαρμόζονται ως εφαρμογές τέλειων αξιωμάτων τόσο εκπληκτικά, που πιθανότατα ούτε η πιο τολμηρή φαντασία δεν θα μπορούσε να επινοήσει.»

Στη συνέχεια, αναπτύσσει ένα δεύτερο παράδειγμα για την αξιωματική μέθοδο, από τις θεωρητικές επιστήμες.

«Στις θεωρητικές επιστήμες, έχουμε συνηθίσει την εφαρμογή των τυπικών διαδικασιών σκέψης και των αφηρημένων μεθόδων. Η αξιωματική μέθοδος, ανήκει στη λογική. Με τη λέξη λογική, πολλοί καταλαβαίνουν κάτι πολύ βαρετό και πολύ δύσκολο. Σήμερα, η επιστήμη της λογικής έχει γίνει εύκολο να κατανοηθεί και είναι πολύ ενδιαφέρουσα. Για παράδειγμα, κάποιος ξέρει ότι υπάρχουν ήδη στην καθημερινή ζωή, μέθοδοι και σχηματισμοί εννοιών που χρησιμοποιούνται και απαιτούν μεγάλο ποσό αφαίρεσης και ότι μπορεί να γίνουν κατανοητοί μόνο από την ασυνείδητη εφαρμογή της αξιωματικής μεθόδου. Για παράδειγμα, η γενική διαδικασία της άρνησης και ιδίως η έννοια του «άπειρου». Όσον αφορά την έννοια του «άπειρου», θα συνειδητοποιήσουμε ότι το «άπειρο» δεν έχει διαισθητική έννοια και ότι χωρίς λεπτομερέστερη έρευνα δεν έχει απολύτως κανένα νόημα., διότι παντού υπάρχουν καθορισμένα αντικείμενα. Δεν υπάρχει άπειρη ταχύτητα και καμία δύναμη ή αποτέλεσμα δεν μπορεί να διαδίδεται απείρως γρήγορα. Επιπλέον, το ίδιο το αποτέλεσμα είναι αδύνατον να μπορεί να διαιρεθεί απείρως. Ακόμη και το φως έχει ατομική δομή, όπως ακριβώς και τα κβάντα της δράσης του. Πιστεύω ακράδαντα ότι ακόμη και το διάστημα είναι πεπερασμένο και ότι μια ημέρα οι αστρονόμοι θα είναι σε θέση να μας πουν πόσα χιλιόμετρα μακρύ, ψηλό και μεγάλο είναι. Και παρόλο που υπάρχουν στην πραγματικότητα συχνά περιπτώσεις πολύ μεγάλων αριθμών (για παράδειγμα, η απόσταση των άστρων σε χιλιόμετρα, ή ο αριθμός των διαφορετικών παρτίδων στο σκάκι), ωστόσο η απεραντοσύνη ή η γιγαντιαία αφαίρεση, είναι εφικτή μόνο μέσα από τη συνειδητή ή ασυνείδητη εφαρμογή της αξιωματικής μεθόδου. Αυτή η αντίληψη του απείρου, το οποίο έχω θεμελιώσει μέσω λεπτομερών ερευνών, απαντά σε μια σειρά από σημαντικά ερωτήματα. Ειδικότερα, αυτό δείχνει την αβασιμότητα των αντινομιών του Καντ για τον χώρο και της απερίοριστης δυνατότητας της διαίρεσης και επομένως, τις δυσκολίες που ανακύπτουν με αυτόν τον τρόπο.»

Ο Hilbert έγραψε το 1919:

«Δεν μιλάμε σε καμία περίπτωση για αυθαιρεσία. Τα μαθηματικά δεν είναι όπως ένα παιχνίδι του οποίου τα καθήκοντα καθορίζονται αυθαίρετα από θεσπισμένους κανόνες. Αντίθετα, είναι ένα εννοιολογικό σύστημα που διαθέτει εσωτερική ανάγκη που δεν μπορεί παρά να είναι έτσι και με κανένα τρόπο διαφορετικά. Ποιος από εμάς δεν θα ήταν ευτυχής να σηκώσει το πέπλο πίσω από το οποίο βρίσκεται κρυμμένο το μέλλον; Να ρίξει μία ματιά στην επερχόμενη πρόοδο της επιστήμης μας και να μάθει τα μυστικά αυτής της ανάπτυξης στους επόμενους αιώνες; Να μάθει ποιοι θα είναι οι συγκεκριμένοι στόχοι προς τους οποίους οι κορυφαίες μαθηματικές διάνοιες των επερχόμενων γενεών θα στρέψουν τις προσπάθειές τους; Ποιες νέες μέθοδοι και νέες

αλήθειες από το ευρύ και πλούσιο φάσμα των μαθηματικών σκέψεων θα αποκαλυφθούν στους επόμενους αιώνες;»

8. Τα θεμέλια της γεωμετρίας (1889)

8.1 Αξιώματα σύνδεσης

1. Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία A, B υπάρχει πάντα μια ευθεία a , η οποία τα περιέχει.
2. Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία A, B δεν υπάρχουν περισσότερες από μια ευθείες που να τα περιέχουν.
3. Επί μιας ευθείας, υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία.
4. Προς τρία οποιαδήποτε σημεία A, B, C , που δεν βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία, υπάρχει ένα επίπεδο α το οποίο περιέχει τα τρία σημεία A, B, C .
5. Προς τρία οποιαδήποτε σημεία A, B, C , τα οποία δεν ανήκουν (συγχρόνως) πάνω σε μία ευθεία, δεν υπάρχει παρά ένα και μόνον ένα επίπεδο που τα περιέχει.
6. Αν δύο σημεία A, B μιας ευθείας a βρίσκονται σε ένα επίπεδο α τότε κάθε σημείο της a βρίσκεται στο επίπεδο α .
7. Αν δύο επίπεδα α, β έχουν ένα κοινό σημείο A , τότε αυτά έχουν τουλάχιστον ένα ακόμα κοινό σημείο B .
8. Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία που δεν βρίσκονται σε ένα επίπεδο.

8.2 Αξιώματα διάταξης

1. Αν ένα σημείο B κείται μεταξύ δύο σημείων A και C , (συμβολικά $A-B-C$) τότε τα A, B, C είναι τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας και το B κείται επίσης μεταξύ των C και A (συμβολικά $C-B-A$).
2. Ως προς δύο σημεία A και C , υπάρχει πάντοτε ένα σημείο B της ευθείας AC , τέτοιο ώστε το C να κείται μεταξύ των A και B , (συμβολικά $A-C-B$).
3. Σε ότι αφορά τρία οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία μιας ευθείας, ένα και μόνο ένα από αυτά κείται μεταξύ των δύο άλλων.
4. Οποιαδήποτε τέσσερα διαφορετικά σημεία A, B, C, D μιας ευθείας, μπορούν πάντα να διαταχθούν έτσι ώστε το B να κείται μεταξύ του A και του C και επίσης μεταξύ των A και D και επιπροσθέτως, έτσι ώστε το C να κείται μεταξύ του A και D και επίσης μεταξύ του B και D .
5. (Αξίωμα του **Pasch**) Ας είναι A, B, C τρία σημεία μη κείμενα σε ευθεία γραμμή και a μια ευθεία στο επίπεδο ABC , η οποία δεν συναντά κανένα από τα σημεία A, B, C . Αν κατ' ακολουθία η ευθεία a διέρχεται από ένα σημείο του τμήματος AB , τότε αυτή θα διέρχεται επίσης οπωσδήποτε από ένα σημείο του τμήματος AC ή από ένα σημείο του τμήματος BC .

8.3 Αξιώματα ισότητας

1. Αν A, B είναι δύο σημεία μιας ευθείας a και ακόμα A' είναι ένα σημείο πάνω στην ίδια ή σε μια άλλη ευθεία a' , τότε σε μια καθορισμένη μεριά της a' ως προς το A' μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα και μόνον ένα σημείο B' , τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να είναι ίσο με το $A'B'$.
2. Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$ και ένα τμήμα $A''B''$ είναι ίσα προς το αυτό τμήμα AB , τότε και το $A'B'$ είναι ίσο προς το τμήμα $A''B''$. Συντομότερα, αν δύο τμήματα είναι ίσα προς ένα τρίτο, τότε αυτά είναι και μεταξύ τους ίσα.
3. Έστω AB και BC δύο ευθύγραμμα τμήματα πάνω σε μια ευθεία a , χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία και ακόμα $A'B'$ και $B'C'$ είναι δύο τμήματα πάνω στην ίδια ή σε

άλλη ευθεία a' , επίσης χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία αν είναι $AB \equiv A'B'$ και $BC \equiv B'C'$, τότε θα είναι επίσης και $AC \equiv A'C'$.

4. Θεωρούμε γωνία (h, k) κορυφής O και μια ευθεία a' . Αν h' είναι ημιευθεία της a' εκπορευόμενη από ένα σημείο O' επί της ευθείας τότε υπάρχει μία και μόνο μία ημιευθεία k' έτσι ώστε η γωνία (h, k) να είναι ίση προς τη γωνία (h', k') . Συμβολικά γράφουμε $(h, k) \equiv (h', k')$. Κάθε γωνία είναι ίση με τον εαυτό της, δηλαδή $(h, k) \equiv (h, k)$ και $(h, k) \equiv (k, h)$.

5. Αν σε δύο τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ ισχύουν οι ισότητες $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ και $BAC \equiv B'A'C'$ τότε θα εκπληρώνονται επίσης και οι ισότητες $ABC \equiv A'B'C'$ και $ACB \equiv A'C'B'$.

6. Αξίωμα παραλληλίας (Ευκλείδειο Αξίωμα).

7. (Αξίωμα **Playfair**) Αν a ευθεία και A ένα σημείο κείμενο εκτός της ευθείας a , τότε υπάρχει μια και μόνο μία ευθεία που διέρχεται από το A και δεν τέμνει την a . Η ευθεία αυτή καλείται παράλληλη προς την a που διέρχεται από το A .

8.4 Αξιώματα συνέχειας

1. (Αρχιμήδειο αξίωμα) Αν AB και CD είναι δυο ευθύγραμμα τμήματα, τότε πάνω στην ευθεία AB υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος από σημεία $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ τέτοια ώστε τα τμήματα $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, να είναι ίσα προς το τμήμα CD και το σημείο B να κείται μεταξύ των A_{n-1} και A_n .

2. (Αξίωμα πληρότητας) Τα σημεία μιας ευθείας a συγκροτούν ένα τέτοιο σύστημα, το οποίο με τις σχέσεις της διάταξης και της ισότητας, δεν μπορεί να επεκταθεί (δηλαδή να του επισυνάψουμε και άλλα σημεία) με τρόπο ώστε να παραμένουν αληθείς οι σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των στοιχείων του καθώς και οι βασικές ιδιότητες που απορρέουν από τα αξιώματα I–III και VI.

9. Το ξενοδοχείο του Hilbert

Αποτελεί κοινό τόπο σε κάθε βιβλίο της ιστορίας των μαθηματικών μια καταπληκτική ιστορία για τις παραξενιές του μαθηματικού απείρου που αποδίδεται στο μαθηματικό Hilbert. Ένα βράδυ ένας ταξιδιώτης μπαίνει στο ξενοδοχείο «Το άπειρο». «Ατύχησες μεγάλε.» Απαντά ευγενέστατα ο ξενοδόχος, «είμαστε γεμάτοι.» Το ξενοδοχείο διαθέτει μια απειρία δωματίων. Ο ξενοδόχος προσθέτει: Περίμενε λίγο, έχω μια ιδέα που θα μου επιτρέψει να σε φιλοξενήσω. Όταν όλοι οι ένοικοι του ξενοδοχείου ξυπνήσουν και μαζευτούν στο εντευκτήριο, θα παρακαλέσω τον καθένα να μετακομίσει σε δωμάτιο με νούμερο που βρίσκεται στην αμέσως επόμενη θέση από το δικό του νούμερο δωματίου, δηλαδή ο ένοικος του δωματίου 1 θα πάει στο δωμάτιο 2, αυτός του δωματίου 2 θα πάει στο δωμάτιο 3, αυτός του δωματίου 3 στο δωμάτιο 4 κτλ. μέχρι το άπειρο. Ορίστε η λύση, λέει ο ξενοδόχος δίνοντας στον επισκέπτη το κλειδί του δωματίου 1.

Την επόμενη νύχτα φτάνει στο ξενοδοχείο ένα λεωφορείο. Ένα ιδιαίτερο λεωφορείο που περιέχει άπειρο αριθμό επιβατών. Αλλά το ξενοδοχείο «Το άπειρο» ήταν ακόμη γεμάτο. Ο ξενοδόχος επιλύει αυτό το νέο πρόβλημα με τον εξής τρόπο: ο ένοικος του δωματίου 1 θα περάσει στο δωμάτιο με αριθμό 2, αυτός του δωματίου 2 στο δωμάτιο με αριθμό 4, αυτός του δωματίου 3 στο δωμάτιο με αριθμό 6, αυτός του δωματίου 4 στο δωμάτιο με αριθμό 8 κτλ. μέχρι το άπειρο. Χάρη σε αυτές τις μετακινήσεις, ο άπειρος αριθμός των παλαιών επισκεπτών θα τοποθετηθεί στα δωμάτια με άρτιο αριθμό και έτσι ο άπειρος αριθμός των νέων επισκεπτών θα τοποθετηθεί στα δωμάτια με περιττό αριθμό. Και έτσι βολεύτηκαν όλοι οι επισκέπτες. Εκείνη τη στιγμή ο ξενοδόχος κατάλαβε ότι δεν θα είχε ποτέ πληρότητα.

10. Τα προβλήματα του Hilbert

Ο Hilbert, ήταν ένας ιδιαίτερα χαρισματικός μαθηματικός που είχε ευρείες γνώσεις στους περισσότερους τομείς των μαθηματικών και προσέφερε πολλά στη θεωρία των αναλλοίωτων, στη θεμελίωση της ευκλείδειας γεωμετρίας, στη συναρτησιακή ανάλυση με τους χώρους Hilbert και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών και της φυσικής. Σε συνεργασία με τους μαθητές του, συνέβαλε στη μαθηματική υποδομή που χρειαζόταν στην κβαντομηχανική και σε άλλους κλάδους της φυσικής. Αξίζει να αναφερθούν κάποια από τα ονόματα των μαθητών του (75 υποψήφιοι διδάκτορες) οι οποίοι στη συνέχεια έγιναν διάσημοι μαθηματικοί. Είναι οι Hermann Weyl, Hugo Steinhaus, Ernst Zermelo, Otto Blumenthal, Wilhelm Ackermann και άλλοι. Ο Hilbert υποστήριζε ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα έπρεπε ή να έχει λύση ή απόδειξη ότι είναι αδύνατο. Πίστευε ότι στα μαθηματικά δεν υπάρχει το άγνωστο (*ignorabimus*). Ο Hilbert, ξεκίνησε την παρουσίαση των 23 προβλημάτων του με ένα μεγάλο πρόλογο θέτοντας κάποιες ερωτήσεις:

«Ποιος από εμάς δεν θα ήταν ευτυχής να σηκώσει το πέπλο πίσω από το οποίο βρίσκεται κρυμμένο το μέλλον; Να ρίξει μία ματιά στην επερχόμενη πρόοδο της επιστήμης και να μάθει τα μυστικά αυτής της ανάπτυξης στους επόμενους αιώνες; Να μάθει ποιοι θα είναι οι συγκεκριμένοι στόχοι προς τους οποίους οι κορυφαίες μαθηματικές διάνοιες των επερχόμενων γενεών θα στρέψουν τις προσπάθειές τους; Ποιες νέες μέθοδοι και νέες αλήθειες από το ευρύ και πλούσιο φάσμα των μαθηματικών σκέψεων θα αποκαλυφθούν στους επόμενους αιώνες;»

Έπειτα συνέχισε μιλώντας για την φύση των μαθηματικών προβλημάτων και λέγοντας ότι η επίλυση τους είναι αυτή που βοηθά τα μαθηματικά να αναπτύσσονται. Τα προβλήματα, όπως χαρακτηριστικά είπε, αποτελούν ένδειξη ότι ένας επιστημονικός κλάδος είναι ζωντανός! Ένα πρόβλημα είναι πρώτης τάξης αν ανοίγει ένα νέο θέμα οδηγώντας το ενδεχομένως σε ένα νέο επίπεδο έρευνας. Ένα τέτοιο πρόβλημα θα επιβιώσει και αν κάποτε λυθεί. Ξεκίνησε αναφέροντας δύο ονομαστά προβλήματα την εποχή εκείνη.

Το **πρόβλημα του Bernoulli της βραχυστόχρονης καμπύλης** ή καμπύλης ταχύτερης καθόδου που έθεσε το 1696, που ήταν το έναυσμα για να διατυπωθούν μία σειρά από σημαντικά προβλήματα. Καθώς και το τελευταίο θεώρημα του Fermat: Η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει μη μηδενικές ακέραιες λύσεις για κανένα n μεγαλύτερο του 2. Το τελευταίο θεώρημα του Fermat το 1900 παρέμενε άλυτο, αν και είχε αποδειχθεί για πολλούς εκθέτες (τελικά λύθηκε το 1995 από τον Andrew Wiles). Παρόλα αυτά, είχε δώσει το έναυσμα για τη διερεύνηση ενός νέου κλάδου των μαθηματικών, της θεωρίας αλγεβρικών σωμάτων. Ο Hilbert, μίλησε για την αυστηρότητα που χρειάζεται μία απόδειξη. Για να λυθεί ένα πρόβλημα, πρέπει να υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος σαφώς διατυπωμένων υποθέσεων που να καταλήγουν στο συμπέρασμα ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Αυστηρότητα δεν θα πρέπει να υπάρχει μόνο σε κάποιους κλάδους των μαθηματικών, αλλά σε όλους τους τομείς της επιστήμης. Στη συνέχεια, άρχισε την παρουσίαση των προβλημάτων. Στην πραγματικότητα στην ομιλία του δεν ανέφερε και τα 23 προβλήματα, αλλά επέλεξε κάποια από αυτά. Ο πλήρης κατάλογος των προβλημάτων δημοσιεύτηκε στο γερμανικό περιοδικό Göttingen Nachrichtent.

10.1 Το πρόβλημα του Cantor για τους πληθικούς αριθμούς του συνεχούς. Η υπόθεση του συνεχούς

Το 1^ο πρόβλημα στο οποίο αναφέρθηκε ο Hilbert, σε αυτή την ιστορική ομιλία, ήταν του Cantor (1845–1918) και ανήκει στον κλάδο της θεωρίας συνόλων. Ο Cantor, ασχολήθηκε με τον πληθάριθμο των άπειρων συνόλων. Εισήγαγε τον

πληθάριθμο για να μπορέσει να συγκρίνει το μέγεθος των άπειρων συνόλων και απέδειξε ότι ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι αυστηρά μικρότερος από αυτόν του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Ωστόσο, οι αποδείξεις που έδωσε δεν έδειχναν τι γίνεται ανάμεσα στους δύο πληθάριθμους.

Έτσι, εισήγαγε την **υπόθεση του συνεχούς**, η οποία λέει ότι δεν υπάρχει σύνολο του οποίου ο πληθάριθμος να βρίσκεται αυστηρά μεταξύ αυτού των φυσικών αριθμών και αυτού των πραγματικών αριθμών. Ο Cantor προσπάθησε για πολλά χρόνια να το αποδείξει, αλλά μάταια. Το πρόβλημα αυτό επανέφερε ο Hilbert, με την ομιλία του. Το 1938 ο Kurt Godel, απέδειξε ότι η γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς είναι συνεπής με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων των Zermelo – Fraenkel. Αργότερα, το 1963, ο Paul Cohen απέδειξε ότι και η άρνηση της υπόθεσης είναι επίσης συνεπής με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων των Zermelo – Fraenkel.

Συνεπώς, **αποδείχθηκε ότι είναι αδύνατο να αποδειχθεί ή να μην αποδειχθεί η υπόθεση του συνεχούς με βάση τα αξιώματα αυτά**. Το συνεχές του τίτλου, αναφέρεται στο συνεχές των αριθμών όπως έχει επικρατήσει να λέγεται η ευθεία των πραγματικών και αυτό συμβολίζεται με το σύμβολο $\mathbb{R}$. Ο πιο γρήγορος τρόπος προσέγγισης του προβλήματος είναι ο διαισθητικός, τον οποίο μπορεί να κατανοήσει ο καθένας. Τα σύνολα, μπορούν να ταξινομηθούν σε διακριτές δομές (δηλαδή, χωρίς κοινά στοιχεία), τις λεγόμενες κλάσεις ισοδυναμίας με τη βοήθεια μιας σχέσης R ανάμεσα σε σύνολα η οποία ονομάζεται **σχέση ισοδυναμίας**. Αν ένα αντικείμενο x συνδέεται με κάποιο άλλο y μέσω της σχέσης R , γράφουμε xRy .

Καλούμε την R σχέση ισοδυναμίας αν η R πληρεί τρεις βασικές ιδιότητες:

- Η R είναι **ανακλαστική**: δηλαδή xRx για κάθε x
- Η R είναι **συμμετρική**: δηλαδή, αν xRy , τότε yRx
- Η R είναι **μεταβατική**: αν xRy και yRz , τότε xRz

Μια κλάση ισοδυναμίας συνόλων που καθορίζεται από την R , μπορεί να οριστεί επιλέγοντας ένα από τα στοιχεία της, έστω το στοιχείο a :

Κλάση τον $a = \{x \mid xRa\}$.

Δηλαδή, ανήκουν στην ίδια κλάση τα σύνολα εκείνα τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω της R . Όπως είναι λογικό, αν aRb , τότε:

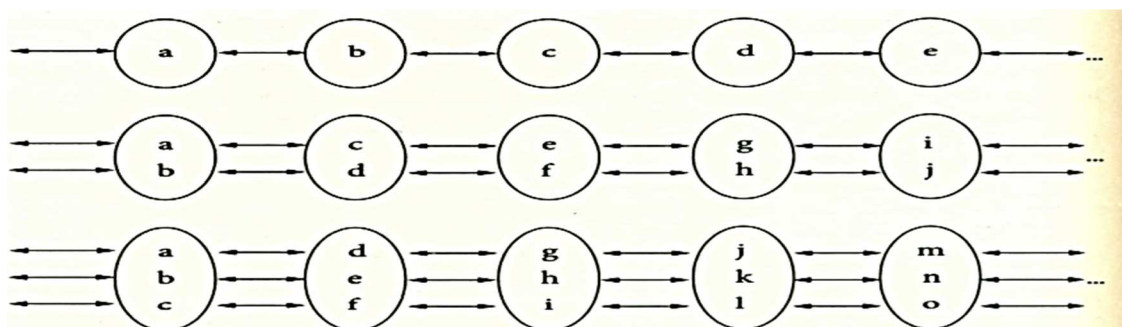
Κλάση τον $a =$ Κλάση τον b .

Παρατηρούμε ότι, ο καθορισμός μιας κλάσης μπορεί να γίνει μέσω οποιουδήποτε από τα στοιχεία της, τα οποία καλούνται αντιπρόσωποι της κλάσης. Οι κλάσεις ισοδυναμίας, είναι εξ' ορισμού μη κενές (σε μαθηματική γλώσσα γράφουμε τάξη τον $a \neq \emptyset$) αφού λόγω της ανακλαστικότητας, $x \in$ κλάση τον x .

Οι διαφορετικές κλάσεις είναι διακριτές, αφού αν οι a και b είχαν κάποιο κοινό στοιχείο x , θα διαπιστώναμε ότι:

- xRa και xRb εξ' ορισμού
- $xRa \Rightarrow aRx$ λόγω συμμετρίας
- aRx και $xRb \Rightarrow aRb$ λόγω μεταβατικότητας
- κλάση του $a =$ κλάση τον b εξ' ορισμού.

και άρα οι κλάσεις ταυτίζονται. Ας μεταφέρουμε τα παραπάνω στη γλώσσα των συνόλων. Αντικαθιστούμε το R με τον τελεστή ο οποίος διαβάζεται «σε ένα προς ένα αντιστοιχία με το b ». Ορίζουμε τη σχέση $\sim$ με πολύ απλά λόγια: δύο σύνολα A και B συνδέονται μέσω του τελεστή και γράφουμε $A \sim B$, όταν μπορεί να οριστεί ανάμεσά τους μια αμφιμονοσήμαντη (ή ένα προς ένα) αντιστοιχία. Είναι διαισθητικά προφανές ότι η σχέση $\sim$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα σε σύνολα. Αυτό μπορεί να ελεγχθεί εύκολα. Ας δούμε ένα σχεδιάγραμμα των κλάσεων που προκύπτουν:



Η κλάση του 1, του 2, του 3 κ.ο.κ.

Ανήκουν στην ίδια κλάση τα σύνολα εκείνα ανάμεσα στα οποία μπορεί να υπάρξει ένα προς ένα αντιστοίχιση. Τα σύνολα που συνδέονται μεταξύ τους, ανήκουν στην ίδια κλάση και οι κλάσεις είναι διακριτές και μη κενές. Μπορούμε να πούμε ότι κάθε κλάση είναι πληθαριθμική. Σε απλή γλώσσα, αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία κάθε κλάσης έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Στη γλώσσα των συμβόλων, μπορούμε να γράψουμε και να διαβάσουμε: Κλάση των $A = \text{Πληθάριθμος των } A = \#A$.

Όταν ένα σύνολο είναι πεπερασμένο, συνηθίζουμε να μιλάμε για το «πλήθος» των στοιχείων του, αντί για τον «πληθάριθμο» αυτών. Συμβολίζουμε τον πληθάριθμο του κενού συνόλου με «0». Οι πληθάριθμοι που παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον καθώς είναι οι τελευταίοι που ανακαλύφθηκαν και έχουν τις πιο ενδιαφέρουσες ιδιότητες, είναι οι λεγόμενοι **υπερπεπερασμένοι πληθάριθμοι**.

Είναι εύκολο να δούμε, όπως ακριβώς το είδε και ο άνθρωπος στον οποίο οφείλουμε τον ορισμό του απείρου, George Cantor (1845–1918), ότι τα βασικά αριθμητικά σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, ο οποίος συμβολίζεται με $\aleph_0$ και είναι ο πρώτος από τους πληθάριθμους απείρων συνόλων, οι οποίοι ονομάζονται και υπερπεπερασμένοι πληθάριθμοι. $\#N = \#Z = \#Q = \aleph_0$

Όταν ένα σύνολο έχει πληθάριθμο $\aleph_0$, λέγεται ότι είναι **αριθμήσιμο**. Επίσης παράξενο είναι το γεγονός ότι διαφορετικά σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Για παράδειγμα, το σύνολο R των πραγματικών αριθμών, που παραδοσιακά ταυτίζεται με την ευθεία, έχει τον ίδιο πληθάριθμο με τα $R^2, R^3, \dots, R^n$, αφού φαίνεται αντιφατικό το ότι μια ευθεία μπορεί να έχει τον ίδιο αριθμό σημείων με ένα τετράγωνο και με έναν κύβο. Όταν ο Cantor έδειξε ότι ο πληθάριθμος των σημείων της ευθείας είναι ίδιος με τον πληθάριθμο του χώρου, σκόνταψε πάνω στη δυσπιστία των συγχρόνων του.

10.2 Η συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής

Μια θεωρία λέγεται **συνεπής** όταν δεν είναι δυνατό να αποδειχθεί ταυτόχρονα μια πρόταση και το αντίθετό της, από τους επαγωγικούς κανόνες του συστήματος. Δεν είναι αποδεκτό, για παράδειγμα, από τη μία να αποδεικνύεται ότι $2+2=4$ και από την άλλη ότι $2+2 \neq 4$. Είναι αναμενόμενο, ένα σύστημα που στηρίζεται στις λογικές συνεπαγωγές να είναι πλήρες. Αυτό σημαίνει ότι κάθε πρόταση του συστήματος η οποία είναι αληθής πρέπει να είναι δυνατόν να αποδειχθεί. Για παράδειγμα, η πρόταση $2+2 = 4$ πρέπει να μπορεί να αποδειχθεί με τα εργαλεία της αριθμητικής. Βεβαίως, μιλάμε για προτάσεις μέσα στο ίδιο το σύστημα. Έτσι, η πρόταση, «Ίσως, να βρέξει την Κυριακή» δεν έχει κανένα απολύτως νόημα στο πεδίο της αριθμητικής.

Αυτό που διερωτάται ο Hilbert στο 2^ο πρόβλημα, δεν είναι αρκετά ξεκάθαρο με την πρώτη ματιά. Σε γενικές γραμμές, διερευνά τη συνέπεια ενός μαθηματικού συστήματος όπως η αριθμητική που για τον ίδιο ήταν προφανής αν και αναπόδευκτη. Αυτό που απέδειξε ο Godel, στο επονομαζόμενο θεώρημα της μη πληρότητας το 1933, είναι λίγο αναπάντεχο. Απέδειξε ότι ένα αξιωματικό σύστημα όπως η βασική

αριθμητική, το οποίο δεχόμαστε ως συνεπές είναι αναγκαστικά μη πλήρες. Με άλλα λόγια, έχοντας στη διάθεσή μας τα εργαλεία που μας δίνει το σύστημα, θα υπάρχουν πάντα αληθείς προτάσεις οι οποίες δεν θα μπορούν να αποδειχτούν. Μπορούν πάντα να δειχτούν διευρύνοντας το σύστημα (μια προφανής διαδικασία είναι να δεχτούμε αυτές τις προτάσεις ως αξιώματα), αλλά βρισκόμαστε με δεμένα τα χέρια αν περιοριστούμε μέσα σε αυτό. Πάντα θα υπάρχουν αναπόδεικτες προτάσεις. Αυτή είναι η απάντηση στο 2^ο πρόβλημα του Hilbert. Με το 2^ο πρόβλημα ζητούσε να απαλειφθεί κάθε ενδεχόμενο μίας αντίφασης στα μαθηματικά. Έτσι, έθεσε το παρακάτω πρόβλημα:

«Να αποδειχθεί ότι τα αξιώματα της αριθμητικής δεν είναι αντιφατικά, δηλαδή ότι ένα πεπερασμένο πλήθος λογικών βημάτων που βασίζεται πάνω σε αυτά δεν θα οδηγήσει ποτέ σε αντιφατικά αποτελέσματα.»

Ενώ ζητούσε την απόδειξη ότι τα αξιώματα της αριθμητικής έχουν συνέπεια, το 1933, με το 2^ο θεώρημα της μη πληρότητας έδειξε ότι καμία θεωρία δεν είναι αρκετά ισχυρή ώστε να αποδείξει τη συνέπεια της.

ΜΙΑ ΠΕΡΙΠΛΟΚΗ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΤΗΤΑ

Ο Gödel υπήρξε ένας ιδιόρρυθμος χαρακτήρας, οξυδερκής και ακριβής στους επιστημονικούς συλλογισμούς του, αλλά και παρανοϊκός στην καθημερινή του ζωή, ιδιαίτερα στα τελευταία του χρόνια. Γεννήθηκε στην Τσεχοσλοβακία και κυνηγήθηκε από τους ναζί ώστε να καταλήξει να πολιτογραφηθεί Αμερικανός –με πολλές δυσκολίες, αφού βρέθηκε να προσπαθεί να πείσει με επιχειρήματα το δικαστήριο ότι έπρεπε να πολιτογραφηθεί ως λογική συνέπεια της Διακήρυξης της Ανεξαρτησίας. Ο τρόπος που πέθανε μας δίνει μια ιδέα για την πολυπλοκότητα του χαρακτήρα του: φοβούμενος ότι θα τον δηλητηριάσουν και όντας μακριά από τη γυναίκα του, το μόνο άνθρωπο στον κόσμο που μπορούσε να εμπιστευτεί τυφλά, αφέθηκε να πεθάνει από την πείνα όταν εκείνη αναγκάστηκε να μπει στο νοσοκομείο.

Ο Kurt Gödel απέκτησε γρήγορα μεγάλη φήμη χάρη στη δουλειά του πάνω στη λογική και τα σύνολα.



10.3 Η ισότητα των όγκων δύο τετράεδρων με ίσες βάσεις και ίσα ύψη

Ήταν από τα πιο εύκολα σε σχέση με τα υπόλοιπα και το πρώτο που λύθηκε. Ο Hilbert αναφέρθηκε στο θεώρημα του Ευκλείδη που λέει «*Δύο τριγωνικές πυραμίδες με ίσα ύψη, έχουν η μία προς την άλλη ίσους λόγους με τους λόγους των βάσεων τους*». Ο Gerling απέδειξε την ισότητα των όγκων δύο συμμετρικών πολύεδρων, διαμερίζοντας τα σε ίσα μέρη. Ο Hilbert και ο Gauss, πίστευαν ότι δεν γίνεται να λυθεί η γενική πρόταση του Ευκλείδη με αυτήν τη μέθοδο. Ο Hilbert, υποστήριζε ότι για τη λύση θα ήταν απαραίτητη η χρήση του απειροστικού λογισμού.

Για να διευκρινιστεί το πρόβλημα αυτό, ο Hilbert ζητούσε μία αυστηρή απόδειξη της αδυναμίας να λυθεί έτσι το πρόβλημα, δηλαδή να καθοριστούν δύο τετράεδρα με ίσες βάσεις και ίσα ύψη, που δεν θα μπορούσαν να διαμεριστούν σε ίσα ανά δύο τετράεδρα και ούτε θα μπορούσαν με την πρόσθεση ίσων τετραέδρων να μετασχηματιστούν σε πολύεδρα που αυτά να μπορούν να αναλυθούν σε ίσα τετράεδρα. Η αρνητική απάντηση, δόθηκε από τον Max Dehn το 1900 και το 1903 ο Kagan κατέληξε ανεξάρτητα στα ίδια αποτελέσματα.

10.4 Το πρόβλημα της ευθείας γραμμής ως η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Εναλλακτικές γεωμετρίες

Το πρόβλημα αυτό κατηγορήθηκε ότι δεν ήταν σαφώς διατυπωμένο και ότι δεν γίνεται να πάρει μία σαφή απάντηση. Το αρχικό ζητούμενο του προβλήματος, ήταν να καταγραφούν όλες οι μετρικές στις οποίες οι ευθείες γραμμές είναι γεωδαισιακές. Το ζητούμενο αυτό, είναι υπερβολικά αόριστο. Για την ακρίβεια, δεν υπάρχει σαφής απάντηση σε ένα πρόβλημα που διατυπώνεται με αυτόν τον τρόπο.

10.5 Η αρχή του Lie για συνεχείς ομάδες μετασχηματισμών χωρίς την υπόθεση της διαφορισιμότητας των συναρτήσεων που ορίζουν τις ομάδες

Μέχρι ποιο σημείο είναι απαραίτητη η διαφορισιμότητα στην έννοια των ομάδων συνεχών μετασχηματισμών, γνωστών με το όνομα ομάδες του Lie; Ο Hilbert θέτει το ερώτημα, αν μπορεί να αποφευχθεί η υπόθεση της διαφορισιμότητας των συναρτήσεων που ορίζουν τις συνεχείς ομάδες μετασχηματισμών. Το πρόβλημα αυτό δεν έχει αόριστη διατύπωση όπως το προηγούμενο, όμως ούτε αυτό αποτελεί ένα στοιχειώδες πρόβλημα. Λύθηκε με τη συμβολή των John von Neumann (1903–1957), Andrew Gleason (1921–2008), Deane Montgomery (1909–1992), Leo Zippin (1905–1995) και Hidehiko Yamabe (1923–1960). Ο Lie, ύστερα από πολύχρονη μελέτη γεωμετρικών μετασχηματισμών, θεμελίωσε μία νέα θεωρία, υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις που ορίζουν τις ομάδες του, ότι είναι διαφορίσιμες.

10.6 Αξιοματικοποίηση της μαθηματικής φυσικής

Αφορά την αξιωματική θεμελίωση της φυσικής η οποία έχει επιτευχθεί εν μέρει. Ωστόσο, η ξαφνική εισβολή των νέων θεωριών όπως η κβαντική φυσική ή η θεωρία της σχετικότητας έχει περιπλέξει το πρόβλημα, κάτι που δεν ήταν αναμενόμενο την εποχή του Hilbert. Το ενδιαφέρον για μια τέτοια θεμελίωση δεν είναι σήμερα πρώτης προτεραιότητας καθώς υπάρχουν άλλα πολύ πιο ενδιαφέροντα προβλήματα που περιμένουν λύση. Ως προς αυτή την κατεύθυνση υπάρχει η εξής πρόοδος: Η κλασική μηχανική, αξιωματικοποιήθηκε από τον Hamel (1877–1954) το 1903, η θερμοδυναμική αξιωματικοποιήθηκε από τον K. Καραθεοδωρή (1873–1950) το 1909, η ειδική σχετικότητα από τον Robb το 1914 και ανεξάρτητα από τον Καραθεοδωρή το 1924, η θεωρία πιθανοτήτων από τον A.N. Kolmogorov (1903–1987) το 1930, η κβαντική θεωρία πεδίου από τον Whiteman στα τέλη της δεκαετίας του 1950.

10.7 Η αρρητότητα και η υπερβατικότητα κάποιων συγκεκριμένων αριθμών

Ας θεωρήσουμε την αριθμητική έκφραση a^b , όπου ο a είναι αλγεβρικός ($a \neq 0$ ή 1 για προφανείς λόγους) και ο b άρρητος. Είναι ο a^b υπερβατικός; Η απάντηση ήρθε από δύο μαθηματικούς, τους Alexander Gelfond (1906–1968) και Theodor Schneider (1911–1988) οι οποίοι απέδειξαν ανεξάρτητα αλλά σχεδόν την ίδια χρονική στιγμή, το 1934 και το 1935 αντιστοίχως, την πρόταση, γνωστή σήμερα ως θεώρημα Gelfond – Schneider. Η διατύπωση έχει ως εξής:

«Αν οι a και b είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπου ο a αλγεβρικός και ο b άρρητος, τότε κάθε τιμή του a^b είναι υπερβατικός».

Η φράση «κάθε τιμή» σημαίνει ότι καθώς οι a και b είναι μιγαδικοί, το a^b είναι δύναμη μιγαδικών και ως τέτοια, μπορεί να λαμβάνει πάνω από μια τιμή. Το θεώρημα αυτό λύνει το πρόβλημα της υπερβατικότητας που τέθηκε από τον Hilbert. Συγκεκριμένα, το θεώρημα Gelfond – Schneider δίνει ως πόρισμα την πολυπόθητη υπερβατικότητα που έψαχνε ο Hilbert.

10.8 Προβλήματα πρώτων αριθμών (Η κατανομή των πρώτων και η υπόθεση του Riemann)

Είναι η υπόθεση Riemann, το μοναδικό από τα 23 προβλήματα που συμπεριελήφθη από το ινστιτούτο Clay ανάμεσα στα λεγόμενα προβλήματα της χιλιετίας. Αυτό είναι ένα από τα πιο γνωστά προβλήματα το οποίο παραμένει άλυτο μέχρι και σήμερα. Η υπόθεση αυτή εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε μία εργασία του Riemann (1826–1866) το 1859 με τίτλο Ueber die Anzahl der Primzahlen unter eine gegebener Grösse. Ο Riemann υπέθεσε ότι θα μπορούσε να περιγράψει επακριβώς

την κατανομή των πρώτων αριθμών, αν κατάφερνε να αποδείξει την ύπαρξη μίας συγκεκριμένης ιδιότητας για τις ρίζες της συνάρτησης ζήτα $\zeta(s)$, η οποία ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς που είναι διαφορετικοί από το 1. Οι τετριμμένες λύσεις της συνάρτησης, είναι όλοι οι άρτιοι αρνητικοί αριθμοί. Ο Riemann, διατύπωσε την εικασία ότι οι μη τετριμμένες λύσεις της είναι μιγαδικοί αριθμοί με πραγματικό μέρος ίσο με $1/2$. Η υπόθεση αυτή έχει επαληθευτεί για περίπου 1,5 δισεκατομμύρια ρίζες, παρ' όλα αυτά η τελική αυστηρή απόδειξη δεν έχει δοθεί ακόμα. Αν μπορούσε να βρεθεί η κατανομή των πρώτων αριθμών, συμπληρώνει ο Hilbert, ίσως να ήμασταν σε θέση να αποδείξουμε αυστηρά ένα σωρό προβλήματα.

Ένα από αυτά είναι η **εικασία του Goldbach**, κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Καθώς επίσης και το πρόβλημα του αν η γραμμική διοφαντική εξίσωση $ax+by+c=0$, με ακέραιους συντελεστές πρώτους μεταξύ τους, έχει πάντα λύση (x,y) , όπου x,y πρώτοι αριθμοί.

10.9 Η απόδειξη του γενικότερου νόμου της αντιστροφής σε κάθε αριθμητικό σώμα

Το πρόβλημα αυτό, λύθηκε μερικώς από τον Emil Artin το 1923. Συνίσταται στην απόδειξη του νόμου της γενικής αντιστρεψιμότητας σε ένα σώμα αλγεβρικών αριθμών. Ο νόμος της αντιστρεψιμότητας που είχε τεράστιες επιπτώσεις τον 19^ο αιώνα, διέπετε από το σύμβολο του Legendre, $\left(\frac{n}{p}\right)$ που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{cases} \left(\frac{n}{p}\right) = 0, \text{ αν } n \equiv 0 \pmod{p} \\ \left(\frac{n}{p}\right) = 1, \text{ αν } n \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ και } \exists x \text{ τέτοιο ώστε } x^2 \equiv n \pmod{p} \\ \left(\frac{n}{p}\right) = -1, \text{ σε όλες τις άλλες περιπτώσεις} \end{cases}$$

Και από εκεί προκύπτει ένας ολόκληρος λογισμός, που δίνει μια πληθώρα χρήσιμων τύπων από τους οποίους ξεχωρίζουμε τον ακόλουθο. Αν p, q είναι περιττοί πρώτοι αριθμοί, τότε $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$ έκφραση η οποία πήρε το όνομα «**χρυσό**

θεώρημα» από την εποχή του Gauss, ο οποίος υπήρξε ένας ένθερμος οπαδός τέτοιου είδους εκφράσεων. Ο Gauss τελικά απέδειξε ότι:

- «Για δύο οποιουσδήποτε περιττούς πρώτους p, y, q ισχύει,
- $o \ q \text{ είναι τετράγωνο } (mod \ p) \Leftrightarrow o \ p \text{ είναι τετράγωνο } (mod \ q)$ εκτός από την περίπτωση όπου και οι δύο αριθμοί ισούνται με $4\eta-1$, οπότε και ισχύει,
- $o \ q \text{ είναι τετράγωνο } (mod \ p) \Leftrightarrow o \ p \text{ δεν είναι τετράγωνο } (mod \ q)$ ».

Η τετραγωνική αντιστρεψιμότητα που πρότεινε ο Hilbert, εξελίχτηκε από τον Emil Artin (1898–1962) την περίοδο 1924–1930 και είναι μια κομψότατη θεωρία, όπως και ότι άλλο οφείλεται στον Artin, όπου οι ιδανικοί αριθμοί αντικαθιστούν τους απλούς.

10.10 Καθορισμός της επιλυσιμότητας μίας διοφαντικής εξίσωσης

Συνίσταται στην εύρεση μιας διαδικασίας ή αλγορίθμου, για να καθορίσουμε αν μια διοφαντική εξίσωση είναι επιλύσιμη ή όχι. Πρόκειται για ένα πρόβλημα

επιλυσιμότητας, που εμπίπτει στην κατηγορία των προβλημάτων που επικράτησε να λέγονται «**προβλήματα γενίκευσης**», δεδομένου ότι η ενδεχόμενη επιλυσιμότητά του επηρεάζει πολλές διαφορετικές (άπειρες) περιπτώσεις και όχι κάποιες καθορισμένες.

Είναι προφανές ότι, υπάρχουν κάποιες διοφαντικές εξισώσεις για τις οποίες έχουμε αλγόριθμο που να δίνει τη λύση, όμως το ερώτημα είναι αν υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος να λειτουργεί για όλες. Τα ονόματα που εργάστηκαν πάνω στο πρόβλημα και είχαν μεγάλη συνεισφορά ήταν οι Martin Davis (γεν. 1928), Julia Robinson (1919–1985) και Hilary Putnam (γεν. 1926), οι οποίοι απέδειξαν το τελευταίο αλλά σημαντικό βήμα του τότε νεαρού (1970) αλλά ιδιοφυούς Ρώσου Yuri Matiyasevich (γεν. 1947). Σαν αξιοπερίεργο αναφέρουμε ότι, στο συλλογισμό του χρησιμοποίησε μια διοφαντική εξίσωση που προκύπτει από τους αριθμούς Fibonacci.

Επίσης, είναι αξιοσημείωτο ότι το συμπέρασμα του Matiyasevich (που αναφέρει ότι «*Κάθε αναδρομικό αριθμίσμο σύνολο είναι διοφαντικό*») αντιστοιχεί στο θεώρημα μη πληρότητας του Godel. Το 10^ο πρόβλημα, ζητούσε αν για κάθε διοφαντική εξίσωση με ρητούς συντελεστές υπάρχει διαδικασία σύμφωνα με την οποία καθορίζεται με πεπερασμένο πλήθος βημάτων, κατά πόσο η εξίσωση αυτή έχει ακέραιες λύσεις. Το 1970, αποδείχθηκε από τον Yuri Matiyasevich ότι δεν υπάρχει τέτοια μέθοδος.

10.11 Τετραγωνικές μορφές με τυχαίους αλγεβρικούς συντελεστές

Με δεδομένη μία τετραγωνική εξίσωση με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών και με αλγεβρικούς συντελεστές, να βρεθούν οι ακέραιες ή οι κλασματικές της λύσεις που ανήκουν στο αλγεβρικό σύνολο που καθορίζουν οι συντελεστές της.

Επικεντρώνεται στη μελέτη των τετραγωνικών μορφών με αλγεβρικούς συντελεστές. Παρόλο που οι εν λόγω μορφές είχαν διερευνηθεί εξονυχιστικά επί των σωμάτων M και C , απέμενε να γίνει το ίδιο και για το Q και για τα σώματα Q_p . Ο H. Hasse, έλυσε το 1923–24 το πρόβλημα για τους ρητούς αριθμούς και ο Siegel, τη δεκαετία του 1930, έλυσε το πρόβλημα για τους ακεραίους. Ο Hasse, ο οποίος ήταν εβραϊκής καταγωγής, αιτήθηκε το 1937 την είσοδό του στο ναζιστικό κόμμα, κάτι που δείχνει ότι επειδή κάποιος είναι μαθηματικός δεν σημαίνει ότι έχει και μυαλό. Ο Siegel ήταν ορκισμένος αντιναζί.

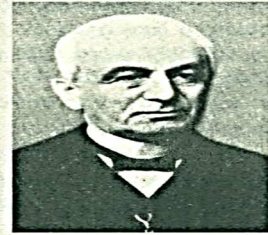
10.12 Επέκταση του θεωρήματος του Kronecker για τα αβελιανά σώματα σε οποιοδήποτε ρητό αλγεβρικό σύνολο

Το θεώρημα του Kronecker είναι το εξής: «*Κάθε αβελιανό αριθμητικό σώμα που προκύπτει από το σύνολο των ρητών αριθμών, παράγεται από μία σύνθεση σωμάτων ριζών της μονάδας*». Ο Hilbert, τόνισε τη μεγάλη σημασία της επέκτασης αυτού του θεωρήματος του Kronecker στην περίπτωση που, αντί για το σύνολο των ρητών αριθμών πάρουμε ως βάση ένα οποιοδήποτε σώμα αλγεβρικών αριθμών. Η λύση του προβλήματος ήρθε το 1920 με τη δημιουργία της **θεωρίας των αβελιανών σωμάτων** από τον Takagi. Ο Leopold Kronecker (1823–1891) είχε ως νέος ένα όραμα που αφορούσε τις αβελιανές επεκτάσεις, τα φανταστικά τετραγωνικά σώματα, τους αλγεβρικούς αριθμούς, τις επεκτάσεις σωμάτων, τις κυκλοτομικές ρίζες και άλλα αλγεβρικά τέρατα που απείχαν αρκετά από την πραγματικότητα. Ο Hilbert, παρότι το έκανε με τρόπο που προκαλεί κάποια σύγχυση, ενοποίησε αυτά τα αντικείμενα, τα γενίκευσε και τα έκανε πρωταγωνιστές του 12^{ου} προβλήματος του. Το θεώρημα Kronecker –Weber του 1886, αναφέρεται στις αβελιανές επεκτάσεις του σώματος Q των ρητών αριθμών, ως υποσώματα ενός κυκλοτομικού σώματος (δηλαδή ως ρίζες τις μονάδας). Το πρόβλημα σήμερα είναι ελάχιστονος σημασίας και εξακολουθεί να μην έχει βρεθεί ακόμα μια κατάλληλη θεωρία που να το εκπροσωπεί.

ΕΝΑΣ ΓΝΗΣΙΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ο Leopold Kronecker ήταν ένας γνήσιος μαθηματικός για τα δεδομένα μας. Η ιστορία τον θυμάται ως έναν άριστο επιστήμονα με μεγάλη συμβολή στην επιστήμη καθώς επίσης και ως υπερβολικά σχολαστικό και ακλόνητο στις κονστρουκτιβιστικές του πεποιθήσεις και πρόθυμο να δεχτεί την ύπαρξη νοητικών αντικειμένων τα οποία πηγάζουν από την αρχέγονη διαίσθηση. Έχει μείνει διάσημη η φράση του: «Ο Θεός δημιούργησε τους ακέραιους αριθμούς. Όλα τα υπόλοιπα είναι δικά μας δημιουργήματα» Με ανάλογες απόψεις, δεν είναι να απορεί κανείς που ο Kronecker ερχόταν σε αντιπαράθεση (και όχι πάντα με τον κομψότερο τρόπο) με τις αρκετά προοδευτικές ιδέες του Cantor και των οπαδών του.

Σήμερα, το όνομα του Leopold Kronecker είναι συνδεδεμένο με διάφορες μαθηματικές προτάσεις, ανάμεσα στις οποίες ξεχωρίζει το θεώρημα Kronecker-Weber.



10.13 Αδυναμία λύσης της γενικής εξίσωσης 7ου βαθμού θεωρώντας συναρτήσεις δύο μόνο μεταβλητών

Είναι γνωστό ότι οι εξισώσεις βαθμού ίσου ή μεγαλύτερου του πέντε δεν δέχονται λύσεις με ριζικά. Ο Hilbert αναρωτιόταν αν, ανατρέχοντας στις πιο γενικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών, μπορούσε να βρεθεί κάποια λύση εξισώσεων που να ισχυε για όλες τις εξισώσεις 7^{ου} βαθμού. Ο Hilbert θέτει το εξής ερώτημα: Είναι πιθανό οι λύσεις των εξισώσεων 7^{ου} βαθμού να είναι συναρτήσεις των συντελεστών τους που να μη μπορούν να κατασκευαστούν από μία πεπερασμένη διαδοχή συναρτήσεων με δύο μόνο μεταβλητές; Για να αποδειχθεί αυτό, όπως τονίζει ο Hilbert, αρκεί ναδειχθεί ότι η εξίσωση του 7^{ου} βαθμού $x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$ δεν είναι επιλύσιμη μέσω οποιωνδήποτε συνεχών συναρτήσεων με δύο μόνο μεταβλητές.

Το πρόβλημα αυτόλύθηκε αρνητικά από τους Andrei Kolmogorov και Vladimir Arnold το 1957. Στην πραγματικότητα, απέδειξαν και κάτι παραπάνω: κάθε συνεχής συνάρτηση πολλών μεταβλητών μπορεί να αναλυθεί πεπερασμένα σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Πολλοί υποστηρίζουν ότι ο Hilbert δεν αναφερόταν σε συνεχείς, αλλά σε αλγεβρικές συναρτήσεις (δηλαδή, πολυώνυμα με πολυωνυμικούς συντελεστές) και ως εκ τούτου, το πρόβλημα δεν έχει λυθεί ακόμα. Αν ο Hilbert αναφερόταν σε τέτοιες συναρτήσεις, τότε όντως το πρόβλημα περιμένει ακόμα τη λύση του.

10.14 Απόδειξη ότι ορισμένα πλήρη συστήματα συναρτήσεων είναι πεπερασμένα

Αποτελεί ένα αρκετά περίπλοκο αλγεβρικό πρόβλημα σχετικό με τη θεωρία των αναλλοίωτων. Σύμφωνα με τη γεωμετρική θεώρηση του προβλήματος, αυτό αφορά πολλαπλότητες και υποσύνολα αυτών, που παράγονται από τομές με άλλες πολλαπλότητες, οι οποίες αναπαριστούν μια καθορισμένη πεπερασμένα παραγόμενη δομή (πολυωνυμική) και τη «μεταφέρουν» στην αρχική μεταβλητή. Το πρόβλημα, έχει μεγάλη σημασία για όσους ασχολούνται με τον κλάδο και λύθηκε όταν ο Ιάπωνας μαθηματικός Masayoshi Nagata (1927–2008) βρήκε ένα αντιπαράδειγμα και ξεμπέρδωσε οριστικά με το πρόβλημα το 1958.

10.15 Αυστηρή θεμελίωση της απαριθμητικής γεωμετρίας του Schubert

Είναι το εξής: Να γίνει αυστηρός προσδιορισμός των αριθμών της απαριθμητικής γεωμετρίας, με ακριβέστερο προκαθορισμό των ορίων της ισχύος τους και ιδιαίτερα των αριθμών που βρήκε ο Cesar Hannibal Schubert (1848–1911) βασισμένος στην αρχή του απαριθμητικού λογισμού του, την αρχή της ειδικής θέσης ή της διατήρησης του αριθμού. Μία αυστηρή μαθηματική θεωρία οφείλεται στον Van Der Waerden, στα τέλη της δεκαετίας του 1930. Ο λεγόμενος **λογισμός του Schubert** είναι ένα πεδίο ανάμεσα στη συνδυαστική και στην αλγεβρική γεωμετρία το οποίο

είναι αρκετά στρυφνό. Η θεωρία πάνω στην οποία στηριζόταν ο περίπλοκος αυτός λογισμός, δεν ήταν ακόμα αρκετά ώριμη και μόνο μετά τα μισά του 20^{ου} αιώνα τέθηκαν οι αυστηρές βάσεις που ευνόησαν τη συστηματική καλλιέργεια του εν λόγω πεδίου. Αυτό που ήθελε να κάνει ο Hilbert ήταν να θεμελιώσει το λογισμό του Schubert και για αυτό, το πρόβλημα δεν μπορεί παρά να θεωρηθεί εν μέρει λυμένο.

Σε ότι αφορά τον λογισμό αυτόν καθ' αυτόν, τα πράγματα είναι ξεκάθαρα, αν και αρκετά περίπλοκα. Η **απαριθμητική γεωμετρία**, που είναι ο κλάδος που περιλαμβάνει τον λογισμό είναι ένας τομέας που χρειάζεται ακόμα πολλή έρευνα.

10.16 Πρόβλημα στην τοπολογία των αλγεβρικών καμπυλών και επιφανειών

Το πρόβλημα αυτό, χωρίζεται σε δύο επιμέρους προβλήματα. Το 1^ο ζητά να ερευνηθούν οι σχετικές θέσεις των κλάδων των αλγεβρικών καμπυλών βαθμού n και των αλγεβρικών επιφανειών. Το 2^ο ζητά να καθοριστεί το άνω φράγμα για τον αριθμό των οριακών κύκλων, σε πολυωνυμικά διανυσματικά σώματα βαθμού n και να μελετηθούν οι σχετικές θέσεις τους. Σχετικά με την τοπολογία των καμπυλών, τα καλύτερα αποτελέσματα οφείλονται στους Ilya Itenberg και Oleg Viro το 1996.

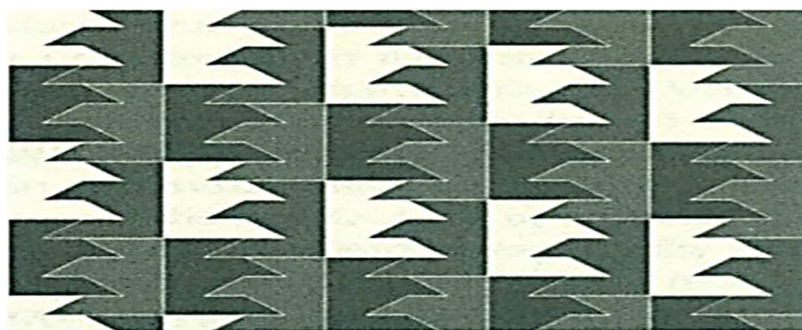
Σχετικά με τους οριακούς κύκλους των ροών που δίνονται από πολυώνυμα, τα καλύτερα μερικά αποτελέσματα οφείλονται στον Yuri Ilyashenko στις αρχές του 1990. Και τα δύο μέρη του προβλήματος 16, θεωρούνται ότι βρίσκονται σε προχωρημένο ερευνητικό στάδιο και οι επιστήμονες πλησιάζουν όλο και περισσότερο στη λύση.

10.17 Παράσταση ορισμένων μορφών ως αθροίσματα τετραγώνων

Θέτει το ερώτημα: Αν κάθε πολυώνυμο πολλών μεταβλητών το οποίο παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές στους πραγματικούς, μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα τετραγώνων ρητών συναρτήσεων. Λύθηκε για πραγματικά κλειστά σώματα από τον Emil Artin το 1927, μέσα σε 15 σελίδες. Το άνω φράγμα του αριθμού των μορφών που απαιτούνται, οφείλεται στον A. Pfister το 1967. Η αρνητική λύση στη γενική περίπτωση, οφείλεται στον D.W. Dubois. Ακόμα και τώρα που διαθέτομε έναν αλγόριθμο, δεν μπορούμε να πούμε πόσα τετράγωνα ρητών συναρτήσεων χρειάζονται. Ξέρουμε μόνο ότι το πλήθος τους είναι μικρότερο από 2^n όπου n είναι το πλήθος των μεταβλητών.

10.18 Διαμέριση του χώρου σε ίσα πολύεδρα

Είναι χωρισμένο σε τρία ερωτήματα. Το 1910, ο Ludwig Bieberbach απέδειξε ότι μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ομάδων πλακοστρώνουν τον χώρο των n διαστάσεων. Το 1928, ο Karl Reinhardt έλυσε το πρόβλημα των θεμελιωδών περιοχών στις τρεις διαστάσεις και το 1935, ο Kurt Hensel το έλυσε στις δύο διαστάσεις. Το 3^ο ερώτημα, αφορούσε το πρόβλημα της στοίβαξης των σφαιρών ή άλλων συγκεκριμένων σχημάτων. Λύθηκε στο τέλος του 20^{ου} αιώνα, με τη βοήθεια υπολογιστών.



10.19 Είναι πάντα οι λύσεις των κανονικών προβλημάτων του λογισμού μεταβολών αναγκαστικά αναλυτικές;

Το πρόβλημα 19 λύθηκε για 1^η φορά από τον Serge Bernstein, το 1904. Ο Hilbert, αναρωτιόταν αν οι λύσεις των λαγκρανζιανών είναι πάντα αναλυτικές συναρτήσεις. Το πρόβλημα, είναι αρκετά τεχνικό και αποτελεί αγαπημένο θέμα όσων ασχολούνται με το συγκεκριμένο πεδίο. Το 1904, ο Ρώσος Sergei Natanovic Bernstein (1880–1968) το έλυσε με άμεσο τρόπο εφαρμόζοντας κάποιες αρχικές προϋποθέσεις που δεν φαίνονταν ιδιαίτερα σημαντικές, αλλά τελικά ήταν. Έπρεπε να περιμένουμε μέχρι το 1956 για να δοθεί μια λύση χωρίς περιορισμούς, από τον Ιταλό Ennio de Giorgi (1928–1996).

10.20 Το γενικό πρόβλημα των οριακών τιμών

Από την εποχή του προβλήματος της βραχυστόχρονης, έχουν αλλάξει πολλά στο πεδίο της μαθηματικής ανάλυσης και ο λογισμός των μεταβολών έχει κάνει τεράστια βήματα. Όταν ο Hilbert διατύπωσε το πρόβλημα 20, υπήρχε μεγάλο ενδιαφέρον για αυτό. Το πρόβλημα που έθεσε, αφορούσε μια συγκεκριμένη πλευρά του λογισμού των μεταβολών, αυτή των συνοριακών συνθηκών. Όταν απαιτούμε η συνάρτηση να περάσει από μια καθορισμένη επιφάνεια, ή το διάνυσμα της παραγώγου της να διατρέξει μια συγκεκριμένη διαδρομή, μιλάμε για συνθήκες μεταβολής ή για την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών. Οι λεγόμενες συνθήκες του Dirichlet, του Neumann και του Robin, είναι πολύ γνωστές στους ειδικούς της ανάλυσης. Όταν τηρούνται οι παραπάνω συνθήκες, τότε υπάρχει λύση και η ζητούμενη συνάρτηση είναι αναλυτική. Ο Hilbert, ζητούσε να βρει αν αυτό ίσχυε πάντα, δηλαδή αν υπήρχε πάντα λύση, δεδομένων κάποιων λογικών συνοριακών συνθηκών. Καθώς το πεδίο του λογισμού των μεταβολών υπήρξε ένα από τα πιο ενεργά κατά τη διάρκεια του 20^{ου} αιώνα, μπορούμε μετά βεβαιότητας να πούμε ότι η απάντηση έχει βρεθεί, είναι θετική και υπάρχουν τόσο ονόματα που εμπλέκονται στο εγχείρημα της εύρεσής της που είναι αδύνατον να τα αναφέρομε όλα. Όλα τα κανονικά προβλήματα μεταβολής έχουν λύση, με την προϋπόθεση της ικανοποίησης κάποιων υποθέσεων που σχετίζονται με τις οριακές συνθήκες (π.χ. ότι οι συναρτήσεις που υπεισέρχονται σε αυτές τις συνθήκες είναι συνεχείς και έχουν κατά τμήματα μία ή περισσότερες παραγώγους) και με την προϋπόθεση ακόμα ότι αν χρειαστεί, θα επεκταθεί κατάλληλα η έννοια της λύσης.

10.21 Απόδειξη της ύπαρξης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που να έχουν προκαθορισμένη μονοδρομική ομάδα

Θεωρείται μονόδρομος η διερεύνηση, με μεθόδους ανάλυσης, του τρόπου που κάποιες καμπύλες «περικυκλώνουν» τα σημεία ανωμαλίας μιας ρητής συνάρτησης, δηλαδή τα σημεία όπου η τιμή της γίνεται άπειρη. Οι καμπύλες αυτές, περιέχουν κωδικοποιημένες πληροφορίες για τη συμπεριφορά των σημείων αυτών. Το ερώτημα που θέτει ο Hilbert, εμπνευσμένο από το έργο του Riemann, είναι αν κάθε ομάδα μονοδρομίας αντιστοιχεί με κάποια διαφορική εξίσωση ή με κάποιο σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Θεωρητικά, το πρόβλημα λύθηκε γύρω στα 1907 από τον Σλοβένο μαθηματικό Josip Plemelj (1873–1967) όμως στην απόδειξή του υπήρχε ένα σφάλμα (αφού ο Hilbert δεν είχε διατυπώσει το πρόβλημα με την απαιτούμενη σαφήνεια) και τη δεκαετία του 1980, η απόδειξη αναθεωρήθηκε. Έτσι, το 1989 ο Ρώσος Andrei Bolibruch (1950–2003) βρήκε ένα αντιπαράδειγμα, στη γενική περίπτωση και αναδιατύπωσε τη θεωρία. Το πρόβλημα, μπορεί να θεωρηθεί λυμένο αλλά η απάντηση, εξαρτάται από τις θεωρούμενες περιπτώσεις. Στο πρόβλημα αυτό

εμπλέκονται και οι **συναρτήσεις του Fuchs** προς τιμήν του Lazarus Fuchs (1833–1902), μαθητή του Klein.

10.22 Ομογενοποίηση των αναλυτικών σχέσεων μέσω αυτομορφικών συναρτήσεων

Αναφέρεται στην κανονικοποίηση, μια διαδικασία που ανήκει στην ανάλυση. Λύθηκε από τον Paul Koebe (1882–1945) το 1907 και ανεξάρτητα από τον Henri Poincare το 1907.

10.23 Περαιτέρω ανάπτυξη των μεθόδων του λογισμού μεταβολών

Είναι μία παρότρυνση στη μαθηματική κοινότητα να ασχοληθεί με τον λογισμό των μεταβολών, έναν κλάδο των μαθηματικών που μέχρι εκείνη τη στιγμή, όπως δήλωνε ο Hilbert, δεν είχε τύχει γενικής εκτίμησης. Είχε τόσο αόριστη διατύπωση (ή τόσο φιλόδοξη) που δεν θεωρείται γνήσιο πρόβλημα. Ο Hilbert του έδωσε μια μακροσκελέστατη διατύπωση στην οποία αναρωτιόταν ποιες μπορεί να ήταν οι μελλοντικές εξελίξεις που περίμεναν τον λογισμό των μεταβολών. Καθώς το ερώτημα ανήκει περισσότερο στη σφαίρα της μαντείας παρά σε αυτή της επιστήμης, δεν το λαμβάνουμε υπόψη μας. Αν περιμέναμε μια λαμπρή απάντηση από κάποιον, αυτός ήταν σίγουρα ο Hilbert που τότε θεωρείτο πραγματική μετενσάρκωση του Ευκλείδη, αφοτου εγκατέλειψε τη μελέτη της θεωρίας των αριθμών για να δημοσιεύσει το 1899 μια αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας, που θεμελιώνει τη σημερινή καθεστηκυία άποψη. Ωστόσο, ο Hilbert δεν μπόρεσε να βρει μια απάντηση που θα έμενε στην ιστορία, όπως αυτές των Whitehead, Frege και Poincare: δεν ήταν απαραίτητο όταν ήξερε κάποιος πώς να εξαλείψει τα παράδοξα από τα μαθηματικά.

11. Το φορμαλιστικό πρόγραμμα

Η λύση που προτάθηκε από τον Hilbert, περιλάμβανε δύο στάδια. Πρώτα έπρεπε να τυποποιηθεί πλήρως η αριθμητική, δηλαδή να μεταφραστεί όλο το περιεχόμενό της σε ένα τυπικό σύστημα. Αυτό ήταν κάτι που έπρεπε να γίνει με την πλέον μεγαλύτερη ακρίβεια, αλλά οι λογικιστές δεν μπορούσαν να συμφωνήσουν.

Αυτό το στάδιο έπρεπε να ακολουθηθεί από ένα δεύτερο όπου να αποδεικνύεται έμπρακτα η συνοχή αυτής της τυποποίησης. Δεν έφτανε τα μαθηματικά να φαίνονται ότι έχουν συνοχή, έπρεπε να έχουν πραγματικά συνοχή και για να το αποδείξει, ο Hilbert, πρότεινε ένα σύνολο τεχνικών τις οποίες ονόμασε **μεταμαθηματικά**. Αυτό που αξίωνε να κάνει χάρη στην αντιστοιχία που θεμελίωσε και σύμφωνα με την οποία, παραδείγματος χάρι, η γεωμετρία δεν αλλάζει αν αντί για «σημείο», «ευθεία» και «επίπεδο» γράψουμε «γάτα», «σκύλος» και «τίγρης». Κατά συνέπεια, για έναν φορμαλιστή, το «κεφάλαιο τρία» και το «κεφάλαιο 3» είναι δυο διαφορετικές εκφράσεις, των οποίων η μόνη σχέση είναι συντακτική, καθότι ξεκινούν με την ίδια λέξη. Η βάση ενός τυπικού συστήματος για τον Hilbert, είναι ένα σύνολο L από πρωτογενή σύμβολα, που αντιπροσωπεύουν το αλφάβητο της γλώσσας.

Ξεκινώντας από αυτά, μπορούμε να δημιουργήσουμε τύπους που δεν είναι τίποτε άλλο από επερασμένες ακολουθίες συμβόλων που κατασκευάζονται βάσει μιας σειράς γραμματικών κανόνων. Αν για παράδειγμα, η γλώσσα περιέχει παρενθέσεις που ανοίγουν και κλείνουν, ένας από αυτούς τους κανόνες θα μπορούσε να είναι πως για κάθε παρένθεση που ανοίγει, πρέπει να βρούμε πιο δεξιά μια παρένθεση που κλείνει. Εκτός από το αλφάβητο, χρειάζονται αξιώματα και κανόνες συνεπαγωγής για τον προσδιορισμό ενός τυπικού συστήματος. Τα αξιώματα είναι τύποι όπως οι άλλοι, με τη μόνη διαφορά ότι τους αποδίδουμε προνομιακό ρόλο.

Η επιλογή των αξιωμάτων είναι μια από τις πιο δύσκολες εργασίες στη θεμελίωση ενός τυπικού συστήματος. Αν επιλέξουμε πολλά, διατρέχουμε τον κίνδυνο να μπερδευτούν με τους υπόλοιπους τύπους και να μην μπορούμε να τους διαχωρίσουμε. Αν πάλι υπάρχουν πολύ λίγα, ορισμένοι τύποι της θεωρίας δεν θα μπορούν ούτε να αποδειχτούν ούτε να διαψευστούν. Όσο για τους κανόνες συνεπαγωγής, αυτοί είναι διαδικασίες που μας επιτρέπουν να καταλήξουμε σε καινούργιους τύπους, βάσει αυτών που υπάρχουν. Τα αξιώματα και οι κανόνες συνεπαγωγής, αποκαλούμενοι και **κανόνες συμπερασμού**, συνδυάζονται μεταξύ τους και δίνουν τυπικές αποδείξεις, αλυσίδες τύπων όπου καθένας είναι είτε αξίωμα, είτε το αποτέλεσμα των προηγούμενων μετά από εφαρμογή των κανόνων συνεπαγωγής.

Όπως συνήθως, ο τελευταίος τύπος μιας απόδειξης ονομάζεται θεώρημα. Να γιατί η 1^η προϋπόθεση που απαιτούσε το πρόγραμμα Hilbert ήταν ο καθορισμός ενός αλφάβητου, τυπικών αξιωμάτων και τυπικών κανόνων συνεπαγωγής για την αριθμητική. Σε όλα αυτά αφιέρωσαν ο Bertrand Russell και ο Alfred North Whitehead τους τρεις ογκώδεις τόμους των *Principia mathematica* που δημοσιεύτηκαν μεταξύ 1910 και 1913. Στην πραγματικότητα, η πρόταση των Russell και Whitehead, που στη συνέχεια ονομάστηκε λογισμός, πήγαινε ακόμα πιο μακριά από το φορμαλιστικό πρόγραμμα. Οι δυο μαθηματικοί δεν αρκούσαν στην τυποποίηση της αριθμητικής, αλλά ήθελαν να την περιορίσουν στη λογική, δηλαδή να ορίσουν όλες τις έννοιες της θεωρίας των ακεραίων, ξεκινώντας από καθαρά λογικές έννοιες και στη συνέχεια να καταλήξουν σε όλα τα θεωρήματα της αριθμητικής αυτών των αρχών. Μια από τις μεγάλες επιτυχίες των μαθηματικών του 19^{ου} αιώνα, ήταν η δημιουργία όλων των τάξεων αριθμών ξεκινώντας από τους φυσικούς ακέραιους. Έτσι, αν οι Russell και Whitehead επιτύγχαναν το στόχο τους, τα μαθηματικά και η λογική θα όδευαν δίπλα δίπλα σε έναν δρόμο πλήρως απαλλαγμένο από αντιφάσεις. Αυτό ακριβώς ήλπιζαν σε κάθε περίπτωση. Μια απλουστευμένη εκδοχή του τυπικού συστήματος που πρότειναν οι Russell και Whitehead για την αριθμητική στο *Principia Mathematica* αποτελείται από τα πρωτογενή σύμβολα

0 (ο αριθμός 0),

s (η συνάρτηση του επόμενου),

-> (η άρνηση)

^ (η διάζευξη «ή»),

∃ (η ύπαρξη),

= (η ισότητα) και η ανοιχτή και κλειστή παρένθεση καθώς και οι μεταβλητές

x, y, z τύπου 0, που αντιπροσωπεύουν τους φυσικούς ακέραιους, και οι μεταβλητές A, B, C τύπου 1, που αντιπροσωπεύουν τα σύνολα των φυσικών ακεραίων και ούτω καθεξής, σε συνάρτηση με τις μεταβλητές ανώτερου επιπέδου που χρειάζονταν κάθε φορά. Λείπουν σύμβολα από αυτή τη γλώσσα, π.χ. με τον ίδιο τρόπο που ορίσαμε έναν ποσοδείκτη ύπαρξης, ∃, χάρη στον οποίο μπορούμε να τυποποιήσουμε εκφράσεις όπως «Υπάρχει ένας φυσικός ακέραιος που επαληθεύει την ιδιότητα P», θα έπρεπε να προστεθεί ένα σύμβολο που να σημαίνει «για κάθε» και να χρησιμοποιείται σε εκφράσεις όπως «Για κάθε φυσικό ακέραιο, η πρόταση P είναι αληθής». Αυτός ο ποσοδείκτης υπάρχει στην πραγματικότητα και χρήσιμο ποιεΐται ευρέως στα μαθηματικά: το «για κάθε» γράφεται ∇. Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε αυτό το σύμβολο ∇ στη γλώσσα, αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι απαραίτητο, καθότι η φράση «Για κάθε φυσικό ακέραιο, η πρόταση P είναι αληθής» είναι πανομοιότυπη με τη φράση «Δεν υπάρχει κανένας φυσικός ακέραιος για τον οποίο η πρόταση P να είναι ψευδής». Κατά συνέπεια, το ∇ μπορεί να κατασκευαστεί απ' αυτά της άρνησης και της ύπαρξης. Το ίδιο συμβαίνει με τη σύζευξη «και»:

αντιπροσωπεύεται από το σύμβολο Λ . Η μεγάλη ομοιότητα που υπάρχει αφενός ανάμεσα στο σύμβολο $\cap$ που αντιπροσωπεύει την τομή και σε εκείνο που αντιπροσωπεύει τη σύζευξη $\wedge$ και αφετέρου ανάμεσα στο σύμβολο που αναπαριστά την ένωση $\cup$ και σ' εκείνο που αναπαριστά τη διάζευξη $\vee$ δεν είναι απόλυτα τυχαία. Αν συσχετίσουμε τις ιδιότητες P , Q με τα σύνολα X , Y των στοιχείων που τις επαληθεύουν, τότε τα στοιχεία της τομής $X \cap Y$ είναι εκείνα που ικανοποιούν την P και την Q ταυτόχρονα και τα στοιχεία που επαληθεύουν το P ή το Q , δηλαδή τουλάχιστον μία από τις δύο ιδιότητες, αποτελούν την ένωση $X \cup Y$.

Το συμπλήρωμα ενός συνόλου, αντιστοιχεί στην άρνηση μιας διατύπωσης. Τα διαγράμματα που έφτιαξε ο Βρετανός μαθηματικός και φιλόσοφος John Venn το 1880, για να αναπαραστήσει το συμπλήρωμα, την ένωση και την τομή δύο συνόλων είναι κάτι παραπάνω από χρήσιμα. Χρησιμοποιώντας τα, μπορούμε να αποδείξουμε πως η σύζευξη των ιδιοτήτων P , Q αντιστοιχεί στην άρνηση της διάζευξης των αρνήσεων του P και του Q , δηλαδή: $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$, κάτι που συμβάλλει στην ανεύρεση του λ από το $\vee$. –

Ας πάρουμε το 2^ο αξίωμα του **Peano** «Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο». Πρώτα από όλα, πρέπει να επισημάνουμε ότι σε αυτό το αξίωμα παρεμβαίνουν δύο μεταβλητές, ο εν λόγω φυσικός ακέραιος τον οποίο θα αναπαραστήσουμε με το x και ο επόμενός του, τον οποίο θα ονομάσουμε y . Γνωρίζοντας πως ο επόμενος ενός αριθμού γράφεται βάζοντας το γράμμα s μπροστά από τον αριθμό, η σχέση ανάμεσα στο x και στο y εκφράζεται με τον τύπο $y = sx$ που διαβάζεται «το y είναι ο επόμενος του x ». Το επόμενο στάδιο, συνίσταται στο να καταλάβουμε ότι η έκφραση «κάθε φυσικός ακέραιος» είναι ισοδύναμη με το «για κάθε φυσικό ακέραιο» και ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση το «έχει» σημαίνει «υπάρχει». Το αξίωμα γίνεται «για κάθε φυσικό ακέραιο x , υπάρχει ένας φυσικός ακέραιος y ώστε $y = sx$ ».

12. Το 4ο αξίωμα του Peano

Ας μεταφράσουμε το 4^ο αξίωμα του Peano στο τυπικό σύστημα της αριθμητικής όπως το ορίσαμε. Λέει ότι «δύο αριθμοί διαφορετικοί έχουν διαφορετικούς επόμενους». Όπως προηγουμένως, πρώτα πρέπει να εντοπίσουμε τις μεταβλητές που παρεμβαίνουν. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχουν δυο φυσικοί ακέραιοι x , y . Το αξίωμα λέει πως δεν γίνεται να έχουμε ταυτόχρονα τους x , y διαφορετικούς και τους επόμενούς τους ίσους, επομένως «δεν υπάρχουν αριθμοί x , y ώστε:

- το x να είναι διάφορο του y ,
- ο επόμενος του x να είναι ίσος με τον επόμενο του y ».

Αν το σύμβολο σύζευξης περιλαμβανόταν στη γλώσσα, το αξίωμα θα διατυπωνόταν με τον εξής τρόπο: $\neg \exists x, y (\neg (x = y) \wedge (sx = sy))$

Επειδή όμως αυτό δεν ισχύει, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την άρνηση και τη διάζευξη. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός πως η διπλή άρνηση ισούται με κατάφαση, το τέταρτο αξίωμα του Peano γίνεται: $\neg \exists x, y (\neg ((x = y) \vee (\neg (sx = sy))))$

13. Από τη γλώσσα στη μεταγλώσσα

Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε, κατάφερε να αδειάσει την αριθμητική όσπου να την περιορίσει σε έναν τυπικό σκελετό. Τα αξιώματα δεν περιγράφουν πια τίποτε, δεν είναι παρά μια σειρά αφηρημένων συμβόλων και οι αποδείξεις είναι τώρα ασκήσεις συνδυαστικής. Μια ουσιαστικής συνεισφορά του Hilbert, ήταν ότι κατέδειξε με σαφήνεια τη διαφορά ανάμεσα στα γλωσσολογικά επίπεδα, στα οποία ανήκουν οι διάφορες διατυπώσεις. Ας φανταστούμε ένα μάθημα αγγλικών όπου ο καθηγητής

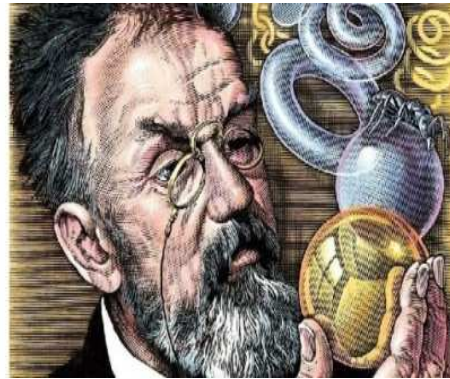
εξηγεί στα γαλλικά τις διαφορές της σημασίας μιας λέξης του λεξιλογίου. Παρεμβαίνουν λοιπόν δυο γλώσσες τα αγγλικά, η γλώσσα που θέλουν να μάθουν οι μαθητές και τα γαλλικά που τους χρησιμεύουν ως εργαλείο. Αυτό ακριβώς συμβαίνει και σε μια φράση του τύπου «ο τύπος $\exists x \sim (\exists y (y=sx))$ είναι πιο μακροσκελής από τον τύπο $\neg \exists x (sx=0)$ », που συνδυάζει αλυσίδες συμβόλων της γλώσσας L και τις εκφράσεις «τύπος» και «είναι πιο μακροσκελής» που δεν ανήκουν στην L , αλλά σε μια μεταγλώσσα που χρησιμοποιείται για να γίνει αναφορά στο τυπικό σύστημα αλλά, πρέπει να τονίσουμε, εκ των έξω. Οι όροι «μηδέν», «επόμενος» ή «ίσος» επιτρέπονται στη γλώσσα L όπου γράφονται 0 , s και $=$ αντίστοιχα, αλλά οι λέξεις «τύπος», «απόδειξη» ή «αληθής» ανήκουν σε μια μεταγλώσσα που η L δεν ξέρει να ερμηνεύσει. Άρα, στη φράση τυποποίησης της αριθμητικής, αυτές οι εκφράσεις δεν έχουν πια έννοια. Αλλά πώς αυτό αφορά τα παράδοξα; Ας μην ξεχνάμε πως πρώτος στόχος του Hilbert ήταν να τα εξαλείψει εντελώς από τα μαθηματικά. Στην περίπτωση του **παράδοξου του ψεύτη**, τα πράγματα είναι ακόμα χειρότερα με την πρόταση «αυτή η φράση είναι ψευδής». Για να την πάρουμε στα σοβαρά, θα έπρεπε όχι μόνο να γίνει αποδεκτή η αυτοαναφορά, αλλά και η ιδιότητα «είναι αληθής» να μπορεί να εκφραστεί στη γλώσσα και όχι μόνο στη μεταγλώσσα. Ο Hilbert, έτρεφε την ελπίδα πως αυτές οι δύο καταστάσεις δεν θα λάμβαναν χώρα ποτέ ταυτόχρονα, αν η αριθμητική τυποποιούταν ορθά.

Αλλά μόνο και μόνο η ελπίδα δεν ήταν αρκετή και εκεί παρέμβαινε η 2^η φάση του προγράμματος Hilbert. Αυτός πρότεινε να δοθεί ένα τέλος στην κρίση των βάσεων των μαθηματικών, αποδεικνύοντας με μεταμαθηματικό τρόπο τη συνοχή της τυπικής αριθμητικής. Μόνο τότε θα μπορούσαμε να είμαστε σίγουροι ότι δεν θα συναντούσαμε ποτέ ξανά στο μέλλον αντιφάσεις στα μαθηματικά. Εκτός από αυτό δεν θα ήταν εφικτό να χρησιμοποιηθούν όλες οι μέθοδοι σε αυτή την απόδειξη. Στην ουσία, έπρεπε να χρησιμοποιηθούν μόνο οι πιο σίγουρες, εκείνες που ο Hilbert βάφτισε, χωρίς ποτέ να εξηγήσει σε τι αναφερόταν, με τη γερμανική λέξη *finit* που εν συνεχεία θα μετατρεπόταν σε περιορισμένες (*finitaires*). Αυτές οι περιορισμένες μέθοδοι, έπρεπε να εξαλείψουν κάθε μη κατανοητό συλλογισμό. Δεν ήταν αποδεκτές, επί παραδείγματι, οι εις άτοπον απαγωγές, συλλογιστική που ο Ευκλείδης είχε χρησιμοποιήσει ήδη για να αποδείξει ότι υπήρχαν άπειροι πρώτοι αριθμοί ή ακόμα ότι η τετραγωνική ρίζα του 2 μπορεί να προκύψει από τη διαίρεση 2 φυσικών ακέραιων. Το 1^ο στάδιο μιας εις άτοπο απαγωγής, συνίσταται στην άρνηση της διατύπωσης που πρέπει να αποδειχτεί. Αν έχει να κάνει με την απόδειξη πως υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί, τότε η υπόθεση αφετηρίας θα είναι ότι δεν υπάρχει παρά μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός. Από αυτή την υπόθεση, κάνουμε ορθές συνεπαγωγές ώσπου να φτάσουμε σε μια εις άτοπον κατάφαση όπως, π.χ., πως ένα ήδη ανεξαρτήτως αποδεδειγμένο θεώρημα της αριθμητικής δεν είναι επαληθευμένο.

Όλη η ενδιάμεση συλλογιστική είναι έγκυρη και η μόνη πιθανή εξήγηση αυτού του άτοπου είναι πως η υπόθεση αφετηρίας είναι ψευδής, κάτι που αποδεικνύει αυτό που ισχυριζόμασταν. Πολύ συχνά όταν θέλουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός μαθηματικού αντικειμένου, όπως τη λύση μιας εξίσωσης, είναι ευκολότερο να αποδείξουμε ότι θα καταλήγαμε σε άτοπο αν δεν υπήρχε, παρά να την κατασκευάσουμε και να την επιδείξουμε ως έχει. Το ίδιο ισχύει και με τα μαθηματικά, δεν θα μπορούσαμε ενδεχομένως να αποδείξουμε μια διατύπωση όπως «ο τύπος P μπορεί ν' αποδειχτεί» βρίσκοντας μια σαφή απόδειξη του P , ενώ σκεπτόμενοι σαν να μην υπήρχε, θα βρίσκαμε μια αντίφαση και ο P θα ήταν αληθής. Ωστόσο, ο Hilbert εκτιμούσε πως αυτές οι διαδικασίες δεν ήταν αρκετά ασφαλείς.

14. Poincare εναντίον Hilbert

Ο Henri Poincare (1854–1912) απεχθανόταν εκείνους που ήθελαν να περιορίσουν τα μαθηματικά σε τυπικές σχέσεις μεταξύ συμβόλων. Όταν το 1899 ο Hilbert δημοσίευσε το *La geometrie*, ο Poincare έγραψε άρθρο όπου τον κατέκρινε διότι ισχυριζόταν πως τα μαθηματικά λειτουργούσαν ως μηχανικό πιάνο. Δύο χρόνια αργότερα, ενώ η διάκριση ανάμεσα στη γλώσσα και στη μεταγλώσσα δεν ήταν ακόμα αρκετά ξεκάθαρη στο μυαλό του, ο Hilbert θα επιχειρήσει να αποδείξει τη συνοχή της αριθμητικής, χρησιμοποιώντας την αρχή της επαγωγής, ήτοι το 5^ο αξίωμα του Peano.



Ο Poincare, θα επισημάνει τον φαύλο κύκλο στον οποίο είχε πέσει ο Hilbert, ενώ προσπαθούσε να αποδείξει τη συνοχή της αριθμητικής χρησιμοποιώντας το πιο σημαντικό αξίωμά της. Όμως, όσο και αν ο Hilbert προσπάθησε να υπερασπιστεί τον εαυτό του λέγοντας ότι η μέθοδος δεν ήταν της επαγωγής αλλά της μεταεπαγωγής, ο Poincare είχε δίκιο και ο Γερμανός μαθηματικός κατέληξε να το παραδεχτεί με τη βοήθεια του μαθητή του, Hermann Weyl (1885–1955). Ο Hilbert, δεν ήταν ο μόνος που απέρριψε τις μη δημιουργικές μεθόδους. Παράλληλα με τον λογικισμό και τον φορμαλισμό, είχε αναπτυχθεί μια άλλη απάντηση στα παράδοξα της θεωρίας συνόλων, που συνίστατο στην εκ θεμελίων εξαφάνιση της χρήσης του άπειρου.

Για τους διαισθητιστές, όλα τα μαθηματικά αντικείμενα ήταν προϊόν του ανθρώπινου νου, των οποίων η ύπαρξη ισοδυναμούσε με την πιθανότητα δημιουργίας τους. Οι οπαδοί αυτού του ρεύματος σκέψης, έκαναν τη διάκριση ανάμεσα στο τρέχον άπειρο και το πιθανό άπειρο, που αντιστοιχεί στα σύνολα που μπορούν να μεγαλώσουν όσο θέλουν. Παραδέχονταν ότι οι φυσικοί ακέραιοι ήταν πιθανώς άπειρου αριθμού, καθότι σε κάθε σύνολο της μορφής $\{0,1,2,\dots, n\}$ μπορούσαν να προστεθούν νέοι αριθμοί, αλλά αντιτίθενται στο να ισχύει αυτό για όλους τους φυσικούς ακέραιους ταυτόχρονα. Οι διαισθητιστές, δεν δέχονταν επίσης το αξίωμα του τρίτου αποκλεισμένου, σύμφωνα με το οποίο αν μια διατύπωση είναι ψευδής, τότε η άρνησή της είναι αληθής. Αρνούμενοι αυτή την αρχή, έπρεπε να αρνηθούν ομοίως όλα τα θεωρήματα για την απόδειξη των οποίων είχε χρησιμοποιηθεί αυτή.

Στην πραγματικότητα, ο ιδρυτής αυτής της θεωρίας, ο Δανός μαθηματικός Brouer (1881–1966), αναγκάστηκε να απορρίψει πολλά από τα αξιολογα αποτελέσματα στα οποία είχε ο ίδιος καταλήξει, χρησιμοποιώντας το αξίωμα του τρίτου αποκλεισμένου. Ένα άλλο παράδειγμα διαδικασιών που οι διαισθητιστές ήθελαν να εξαφανίσουν από τα μαθηματικά είναι το αξίωμα της επιλογής που ο Ernst Zermelo είχε προτείνει για τη θεωρία συνόλων. Δεδομένης μιας οικογένειας συνόλων, πεπερασμένης ή άπειρης, αυτή η αρχή επέτρεπε την επιλογή ενός στοιχείου από καθένα από αυτά, σχηματίζοντας έτσι ένα νέο σύνολο. Αυτή η μέθοδος επιλογής στοιχείων, που άπτεται της μαγείας καθώς δεν επικαλείται κανέναν αδιαμφισβήτητο κανόνα, δύσκολα θα άρεσε σε όσους δεν δέχονταν το τρέχον άπειρο. Σε μια σειρά άρθρων που δημοσιεύτηκαν ανάμεσα στο 1904 και στο 1927, ο Hilbert συνέχισε να

διευκρινίζει τις λεπτομέρειες της στρατηγικής του, η οποία σκόπευε να αντικαταστήσει όλες τις μαθηματικές αποδείξεις με αποδείξεις που έκαναν χρήση των περιορισμένων (finitaires) μεθόδων, για να καταλήξει τελικά να αποδείξει τη συνοχή της αριθμητικής με τον πλέον αδιάσειστο και σίγουρο τρόπο.

15. Επίλογος

Ο Hilbert, ένας από τους κορυφαίους μαθηματικούς της εποχής του, επωφελήθηκε από την ευκαιρία στα διάφορα συνέδρια για να θέσει τα 23 προβλήματα που αναδείκνυαν τις απόψεις του σχετικά με το μέλλον των μαθηματικών και να παρουσιάσει τις θεωρίες του σχετικά με τη θεωρία αριθμών και τις σχέσεις των μαθηματικών με τη φυσική. Ποια προβλήματα ήταν σημαντικότερο να λυθούν; Ποια ήταν η καλύτερη θεμελίωση των μαθηματικών; Ποια ήταν η ενδεχόμενη σχέση των μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες; Σκοπός του δεν ήταν απλώς να ανασηκώσει το πέπλο που καλύπτει το μέλλον, αλλά να συμβάλει στη διαμόρφωση και στην καθοδήγηση του μέλλοντος. Με το κύρος του και αυτό του πανεπιστημίου στο οποίο ανήκε, τα προβλήματα που έθεσε είχαν όλες τις προοπτικές να βρεθούν στο προσκήνιο της μαθηματικής έρευνας και πράγματι έτσι έγινε.

Ο Jean Piaget είχε δηλώσει: «*Μπορεί κάποιος, μαζί με τον Hilbert, να συλλάβει τις λογικές σχέσεις ως μια υποκατηγορία των μαθηματικών όντων, συνεπώς τα τελευταία, δεν μπορούν να αναχθούν όλα στις λογικές δομές, αλλά περιλαμβάνουν αυτές τις τελευταίες, ως ιδιαίτερες περιπτώσεις.*»

Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1920, το ενδιαφέρον του στράφηκε έντονα προς τη θεμελίωση των μαθηματικών. Το 1900, είχε ισχυριστεί ότι στα μαθηματικά το κάθε πρόβλημα έχει τη λύση του, ότι δεν υπάρχει τίποτα που δεν μπορούμε να μάθουμε. Η αισιοδοξία του συμβάδιζε με το κλίμα αυτοπεποίθησης που κυριάρχησε το 1900. Αντίθετα, το 1920 συγκρούστηκε με την απαισιοδοξία που κυριαρχούσε στον πνευματικό κλάδο. Το 1920, είχε ανταγωνιστές που προσπάθησε να κατατροπώσει αποδεικνύοντας κάτι αληθινά εκπληκτικό, ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα είναι κατά βάση επιλύσιμο και ότι η επιλυσιμότητά του μπορεί ναδειχθεί με ένα πεπερασμένο πλήθος λογικών βημάτων. Ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για τη σωστή σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά και την φυσική. Δεν αρκέστηκε στην καταγραφή μιας σειράς από εν δυνάμει θεωρήματα. Πρότεινε την αξιωματική μέθοδο των μαθηματικών ως βασική οργανωτική αρχή που θα επέβαλε μια σαφή λογική δομή σε κάθε κλάδο της φυσικής. Χωρίς αμφιβολία ήταν ένας θεωρητικός μαθηματικός.

Ένας από τους κλάδους που αγαπούσε περισσότερο ήταν η **θεωρία αριθμών** που τον προμήθευσε σε γενικές γραμμές με το 1/4 των προβλημάτων που πρότεινε. Ένα από τα κλειδιά της επιτυχίας των προβλημάτων, στα χρόνια που ακολούθησαν, ήταν ότι τα παρουσίασε ενταγμένα μέσα σε ένα γενικότερο πλαίσιο που αναδείκνυε τη σημασία τους και έδινε στους άλλους μαθηματικούς κίνητρα για να ασχοληθούν με αυτά. Η ιστορία των προβλημάτων του, είναι ακόμα μια ιστορία κύρους. Πως λειτουργούν οι προτεραιότητες στα μαθηματικά; Ποιος τις καθορίζει, ποιος διαφωνεί; Πως αντιμετωπίζονται οι διαφωνίες; Πως κερδίζεται η φήμη και τι την κρατά ζωντανή; Το κύρος στα μαθηματικά, δεν αναφέρεται μόνο σε πρόσωπα και πανεπιστήμια αλλά σε κλάδους και συγκεκριμένα προβλήματα. Το γεγονός αυτό, μπορεί να θεωρηθεί σωστό και δίκαιο, μπορεί όμως να χαρακτηριστεί επιπόλαιο και ιδιόρρυθμο. Οι πνευματικές και οι κοινωνικές τάσεις είναι αλληλένδετες.

Τα μαθηματικά, μπορούν να μελετηθούν σε διάφορα επίπεδα και όπως είναι λογικό, μερικά είναι προσита μόνο στους ειδικούς. Μπορούμε όμως να ρωτάμε: Τι είναι ενδιαφέρον; Τι είναι σημαντικό με αυτό το θέμα; Η απάντηση είναι ότι τότε θα δούμε ότι ούτε οι ειδικοί αρκούνται σε μια μακροσκελή τεχνική επιχειρηματολογία.

Μια εννοιολογική προσέγγιση που να εξηγεί γιατί κάποιο θεώρημα είναι αληθές, είναι προτιμότερη από έναν υπολογισμό που μπορεί μόνο να ελεγχθεί γραμμή προς γραμμή. Σε αυτό το θέμα ήταν απόλυτα σαφής και με τα λεγόμενά του απηχούσε τις απόψεις πολλών συγχρόνων του μαθηματικών. Η αξία του έγκειται στην ικανότητά του να συλλάβει, ή να δημιουργήσει το κατάλληλο γενικό πλαίσιο που έκανε τα παλιά δύσκολα προβλήματα να μοιάζουν εύκολα αλλά συνάμα δημιούργησε αποτελεσματικές θεωρίες. Μπορεί να παρήγαγε το σημαντικότερο έργο του σε μερικούς από τους πιο θεωρητικούς κλάδους των μαθηματικών, αξίζει όμως να θυμόμαστε ότι σε όλη του τη ζωή ενδιαφερόταν και για την φυσική.

Ο Hilbert ήταν, όπως τον περιέγραψε ο Μπλούμενταλ, άνθρωπος των προβλημάτων. Ο Ρίχαρντ Κουράντ έγραψε τα εξής για το έργο του Hilbert και τη σημασία του για τα μαθηματικά: «Μολονότι τα μαθηματικά έχουν διαδραματίσει σημαντικό ρόλο για περισσότερα από 2.000 χρόνια, υπόκειται ακόμη σε αλλαγές του συρμού και πάνω από όλα, σε αποκλίσεις από την παράδοση.»

Στη σύγχρονη εποχή της υπερδραστήριας βιομηχανοποίησης της επιστήμης, της προπαγάνδας, και της εκρηκτικής χειραγώγησης της κοινωνικής και της προσωπικής βάσης της επιστήμης, βρισκόμαστε σε μια τέτοια επικίνδυνη περίοδο.

Στην εποχή μας τα ΜΜΕ, το κάλεσμα για μεταρρύθμιση, εξαιτίας της προπαγάνδας, μπορεί εξίσου εύκολα να οδηγήσει τόσο σε περιορισμό και στραγγαλισμό, όσο και σε μια απελευθέρωση της μαθηματικής γνώσης. Ο κίνδυνος έγκειται στο ότι οι συνδυασμένες δυνάμεις πιέζουν τόσο πολύ προς την κατεύθυνση της αφαίρεσης, ώστε μόνο αυτή η πλευρά της μεγάλης παράδοσης του Hilbert συνεχίζεται. Τα ζωντανά μαθηματικά, βασίζονται στη διακύμανση ανάμεσα στις αντιθετικές δυνάμεις της ενόρασης και της λογικής, της ατομικότητας των «προσγειωμένων» προβλημάτων και της γεννητικότητας των εκτενών αφαιρέσεων.

Τα μαθηματικά πρέπει να καλλιεργηθούν και να ενισχυθούν ως ένας ενοποιημένος, ζωτικός κλάδος του μεγάλου ποταμού της επιστήμης. Δεν μπορούν να κυλήσουν σαν ένα ρυάκι στην άμμο. Ο Hilbert με το εντυπωσιακό παράδειγμά του, βοήθησε να καταλάβουμε ότι τέτοιοι κίνδυνοι μπορούν να αποφευχθούν εύκολα, ότι δεν υπάρχει χάσμα ανάμεσα στα θεωρητικά και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και ότι μια γόνιμη σχέση μπορεί να εδραιωθεί ανάμεσα στα μαθηματικά και στην επιστήμη ως όλον. Για αυτό, η μεταδοτική αισιοδοξία του Hilbert διατηρεί ακόμη και σήμερα τη ζωτική σημασία της στα μαθηματικά που θα επιτύχουν μόνο με το πνεύμα του Hilbert. Είναι αυτή η αισιοδοξία που θα ηχεί, όσο επιβιώνει μια πέτρα, από τη στήλη που τοποθετήθηκε μετά τον θάνατο του Hilbert στον τάφο του στο Γκέτινγκεν, **Wir müssen wissen. Wir werden wissen.** (Εμείς πρέπει να γνωρίζουμε. Εμείς θα γνωρίζουμε.)

16. Βιβλιογραφία

- Αναπολιτάνος Α. Δ., (2009). «Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών», 7^η έκδοση, Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα
- Χριστοδουλίδης, Π. (1980). «Η φιλοσοφία των μαθηματικών: από τον Frege ως τον Kreisel 1884–1979», Επιλογή άρθρων, 2 τόμοι, Εκδόσεις Εγνατία, Θεσσαλονίκη
- Reid C., (2007). «Ο προκλητικός κος Hilbert, το παρελθόν και το μέλλον των μαθηματικών», Μετάφραση: Γ. Κυριακόπουλος, 1^η έκδοση, Τραυλός, Αθήνα
- Ewald W. (1996). “From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics”, volume II, pp.1012–1052, Oxford University Press
- Hilbert D., (1998). «Για το άπειρο», 1^η έκδοση, μετάφραση: Μ. Κωνσταντινίδης, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα

- Hilbert, D. (1888). “Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten”, *Mathematische Annalen*, N° 32, pp. 342–350, στο *Gesammelte Abhandlungen* 2, pp. 154–161
- Hilbert, D. (1909). “Hermann Minkowski”, *Gottingen Nachrichten*, pp. 72–101 ανατύπωση στο *Mathematische Annalen*, N° 68 (1910), pp. 445–471, ανατύπωση στο *Gesammelte Abhandlungen* 3, pp. 339–364
- Hilbert, D. (1917). “Axiomatisches Denken”, *Mathematische Annalen*, N° 78, pp. 405–415, στο *Gesammelte Abhandlungen*, N° 3, pp. 146–156
- Hilbert, D. (1922). “Neubegründung der Mathematik, Erste Mitteilung, *Abhandlungen Mathematisches Seminar*”, Hamburg I, pp. 157–177, στο *Gesammelte Abhandlungen* 3
- Hilbert, D. (1926). “Über das Unendliche”, *Mathematische Annalen*, N° 95, pp. 161–190, στο *Grundlagen der Geometrie*, 7^η έκδοση, Παράρτημα VIII, pp. 262–288
- Hilbert, D. (1935). “*Gesammelte Abhandlungen*”, 3 τόμοι, Springer Verlag, Βερολίνο
- Hilbert, D. (1993). “*Theory of Algebraic Invariants*”, μετάφραση Reinhard C. Laubenbacher, επιμέλεια Bernd Sturmfels, Cambridge University Press, Cambridge
- Kreisel, G., “Hilbert’s program” στο P. Benacerraf–H. Putnam (eds) *Philosophy of mathematics: Selected readings*, pp. 157–180

