



π

3.14159

265358979323
84626433832795
02884197169399375
1058209749445923078
164062862089986280
3482534211706798214808
651328230664709384460955058223
17253594081284811174502841027019385211055
59644622948954930381964428810975665933446128475648233786
7831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245
87006609315588174881520920965283254091715364367892500366011330530548820466521384146995194
15110094130572703657399919530921861171819528117913051185400744627996627495673510857527248912279381
8301194912983367136244056643086213949465952267171805212996094331277053921717629117675238485481846366
9482132000981271476264568277857713427878949517365775472349444810123495143414654905717567812756882509123420
09981127392279688463481159136257747713009647118207123490998127078409510997181728140961183951524465546080926
42522796233968653939118127399815179187320849752301134291777949171815192234966267199428416225779017218
9778100770071752394945081273961079961184621089769213949517949177494267199171815192234966267199428416225779017218

**Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός
(Μ.Εδ.), Επίκουρος Καθηγητής**

1

Ημερομηνία ανάθεσης: 06.05.2020

Ημερομηνία κατάθεσης: ... / 0... / 2020

Ημερομηνία εξέτασης: ... / 0... / 2020

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Ιδιαίτερα ικανοποιητική	
2	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
3	Φραγκιαδάκης Νικόλαος Δρ. Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Αναπληρωτής Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	4
1. Ξεκινώντας από την αρχή	4
2. Η πρώτη ευθυγράμμιση	5
3. Το μέγα πρόβλημα ανά τους αιώνες	6
4. Το ακτίνιο και το π	7
5. Η ιστορία του π , η ηρωική εποχή	8
6. Η ιστορία του π , Αρχιμήδης	9
7. Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (περίπου 287– περίπου 212 πΧ).....	10
8. Η ιστορία του π , μετά τον Αρχιμήδη	11
9. Francois Viete (1540–1603)	15
10. Οι πρωταίτιοι του σκανδάλου και της ανάλυσης.....	16
11. Sir Isaac Newton (1642–1727)	19
12. James Gregory (1638–1675).....	20
13. Μία ακαταμάχητη πρόκληση	20
14. Johann Heinrich Lambert (1728–1777)	21
15. Τι είναι ένας υπερβατικός αριθμός;	23
16. Παραστάσεις με το π	23
17. Μαθηματικοί τύποι που παρεμβαίνει το π	24
18. Βασικοί τύποι.....	24
19. Η μανία με το π	25
20. Ο κινηματογράφος, η λογοτεχνία και το π	27
21. Τα πρώτα ψηφία του π	29
22. Βιβλιογραφία	36

Εισαγωγή

«Στην περιφέρεια του κύκλου, η αρχή και το πέρας συμπίπτουν». Ηράκλειτος

Ο π είναι ο πιο γνωστός αριθμός στην ιστορία, ο διασημότερος, είναι ο αριθμός που μελετήθηκε, μνημονεύτηκε και υπολογίστηκε ξανά και ξανά περισσότερες φορές από οποιονδήποτε άλλον. Όλα όσα μπορούμε να πούμε για το π είναι λίγα. Η δεκαδική του παράσταση αρχίζει ως εξής **3,1415926535897932384626433832795028841971693 9937510...** Με αυτά τα 50 ψηφία μπορούμε να κινηθούμε πρακτικά, σε ολόκληρο σχεδόν τον απέραντο κόσμο των υπολογισμών, αν και σπάνια θα συναντήσουμε πρόβλημα της φυσικής ή των μαθηματικών, για το οποίο να απαιτείται η γνώση περισσότερων των 10 ψηφίων του αριθμού π . Σε γενικές γραμμές, για τους βασικούς υπολογισμούς αρκούν οι προσεγγίσεις 3,14 ή 3,1416. Ο Ισαάκ Ασίμωφ έγραψε κάποτε ότι:

«Αν το σύμπαν ήταν σφαιρικό, με διάμετρο ίση με 80.000 εκατομμύρια έτη φωτός, το λάθος που θα γινόταν κατά τον υπολογισμό του ουράνιου Ισημερινού χρησιμοποιώντας έναν αριθμό π με 35 δεκαδικά ψηφία, θα ήταν μικρότερο από ένα εκατομμυριοστό του εκατοστού».

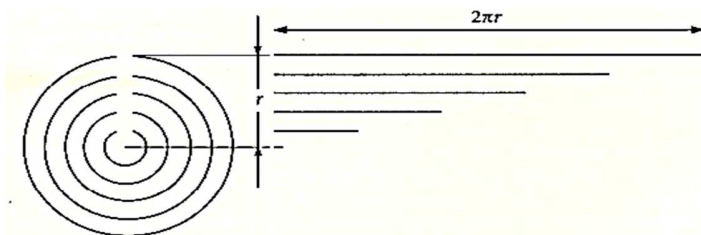
Αν στεκόμασταν σε ένα σημείο του Ισημερινού της Γης και γράφαμε τη δεκαδική παράσταση του π με ψηφία μεγέθους ίσου με αυτό των χαρακτήρων της σελίδας, το σύνολο όλων των δεκαδικών ψηφίων που έχουν υπολογιστεί ως σήμερα με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, θα έκανε περισσότερες από 500 φορές τον γύρο της Γης.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι η ακολουθία **0123456789** ενυπάρχει στον αριθμό π μετά το 17.387.594.880^ο δεκαδικό ψηφίο. Πόσο παρωχημένος είναι πλέον ο ισχυρισμός του σπουδαίου Ολλανδού μαθηματικού Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), ο οποίος θεωρούσε ότι η έρευνα μιας τέτοιας ακολουθίας ήταν παράλογη, αφού δεν θα μπορούσαμε ποτέ να ανακαλύψουμε έναν επαρκή αριθμό δεκαδικών ψηφίων του π !

Διαπιστώθηκε μία αδιαμφισβήτητη χρησιμότητα της δεκαδικής παράστασης του π . Προκειμένου να ελεγχθεί η λειτουργία ενός υπερυπολογιστή, του ζητείται να κάνει έναν δύσκολο υπολογισμό, το αποτέλεσμα του οποίου να είναι γνωστό, οπότε η εξεύρεση των δεκαδικών ψηφίων του π , αποτελεί την ιδανική άσκηση.

1. Ξεκινώντας από την αρχή

Ο αριθμός π δεν προέκυψε εκ του μηδενός, αλλά όπως είναι φυσικό, γεννήθηκε από την παρατήρηση. Ο λόγος του μήκους της περιφέρειας (p) ενός κύκλου προς την διάμετρό του (d), είναι μια σταθερά $\frac{p}{d} = \pi \Leftrightarrow p = d \cdot \pi = 2\pi r$. Η σχέση μεταξύ της περιφέρειας και της διαμέτρου είναι μια σταθερά, η οποία προέκυψε διαισθητικά μέσω απλής παρατήρησης. Η περιφέρεια (ή περίμετρος του κύκλου) αυξάνεται κατά την ίδια αναλογία που αυξάνεται και η διάμετρος, η οποία ισούται με το διπλάσιο της ακτίνας r .



Γράφημα 1: Μήκος περιφέρειας κύκλου

Η απλή παρατήρηση, δείχνει ότι η σχέση αυτή είναι ένας σταθερός αριθμός. Και όντως, όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος ενός τροχού, τόσο μεγαλύτερη αναλογικά είναι η απόσταση που διανύει από ένα σταθερό σημείο, ο τροχός κάνοντας έναν γύρο.

Δηλαδή, ισχύει ότι περιφέρεια/διάμετρο=σταθερά=3,14 ή με αλγεβρικούς όρους ισχύει ότι, αν το μήκος της περιφέρειας είναι 1 και r είναι η ακτίνα του κύκλου (η διάμετρος d ισούται με το διπλάσιο της ακτίνας r) τότε είναι $\ell = d \cdot \pi = 2\pi r \cong 2 \cdot 3,14 \cdot r$. Το σύμβολο $\cong$ διαβάζεται ως «περίπου ίσο» και αυτό που κυρίως απασχολεί όσον αφορά το π , είναι να γίνει όσο πιο ακριβής μπορεί αυτή η προσέγγιση, με την προσθήκη ψηφίων δεξιά του 3,14. Οι μαθηματικοί, έβαλαν όλα τα δυνατά τους για να μπορέσουν να υπολογίσουν το π με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, καταβάλλοντας, μεγάλο κόπο. Πίστευαν ότι αυτή η αέναη αναζήτηση θα ολοκληρωνόταν με επιτυχία, όμως το 1862, ο Γερμανός μαθηματικός **Ferdinand von Lindemann** (1852–1939), εξανέμισε αυτή την ελπίδα με ένα οριστικό «όχι». Δεν υπάρχει ούτε θα υπάρξει ποτέ πεπερασμένη μέθοδος με την οποία θα μπορεί να βρεθεί η «ακριβής» τιμή του π , χρησιμοποιώντας αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη. Ο αριθμός π δεν λεγόταν πάντα έτσι. Παρόλο που κάποιοι μαθηματικοί όπως ο **William Oughtred** (1574–1660), ο **Isaac Barrow** (1630–1677) και ο **David Gregory** (1659–1708) είχαν ήδη χρησιμοποιήσει το συγκεκριμένο σύμβολο, η ονομασία αυτή τελικώς επισημοποιήθηκε μόνο όταν ο **William Jones** (1675–1749) την χρησιμοποίησε σε μία από τις *Synopsis Palmariorum Matheseos* (μετ. Σύνοψη αξιονίκων μαθήσεως), δεδομένου ότι το π είναι το πρώτο γράμμα της ελληνικής λέξης «περιφέρεια». Πολύ αργότερα, ο **Leonhard Euler** (1707–1783), αφού αρχικά χρησιμοποίησε τα γράμματα «c» και «p», κατέληξε στην οριστική χρήση του συμβόλου π . Η γραφή αυτή, άρχισε να διαδίδεται αργά αλλά σταθερά σε όλο τον κόσμο, παρόλο που για παράδειγμα στην Αίγυπτο, ακόμη και κατά τον 20^ο αιώνα, για κάποιο διάστημα συνέχιζαν να συμβολίζουν τη σταθερά π με το αραβικό γράμμα «τα», για εθνικιστικούς, κυρίως λόγους. Σήμερα, το σύμβολο π χρησιμοποιείται στα μαθηματικά κυρίως για να συμβολίσει τον συγκεκριμένο αριθμό.

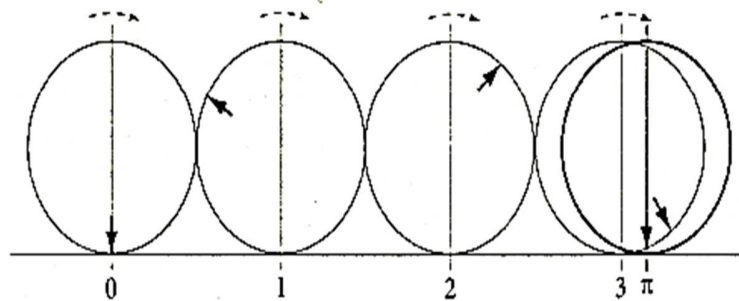
Φθάνοντας και στο άλλο άκρο, υπάρχουν άνθρωποι λιγότερο ή περισσότερο φανατικοί της αριθμολογίας, που βλέπουν το π παντού, ως ένα στοιχείο απλών ή πιο περίπλοκων αριθμολογικών συνδυασμών. Θα έλεγε κανείς ότι γύρω από τον αριθμό αυτό έχει υφανθεί μία θεωρία συνομοσίας. Ένα από τα αγαπημένα θύματα των θαυμαστών του π είναι ο αριθμός α, ο επονομαζόμενος και **σταθερά λεπτής υφής**.

Μεταξύ αυτών και ο κάτοχος Νόμπελ Φυσικής **Werner Heisenberg** (1901–1976), ο οποίος επί μακρόν υποστήριζε ότι $\frac{1}{a} = \frac{2^4 3^3}{\pi}$. Δίχως άλλο, ο Heisenberg δεν ήταν ο μοναδικός. Στα βιβλία της φυσικής συχνά, αναφέρονται πολύ αξιόλογες προσεγγίσεις με λιγότερη ή περισσότερη φαντασία, όπως $\frac{1}{a} = \left(\frac{16\pi^3}{9}\right)^4 \sqrt{\frac{5!}{\pi}}$, $\frac{1}{a} = 108 \cdot \pi \cdot \sqrt[6]{\frac{8}{1843}}$ όπου παρεμβαίνει το π και έχουν αρκετή αξία.

2. Η πρώτη ευθυγράμμιση

Ευθυγραμμίζω μια καμπύλη γραμμή, σημαίνει ότι βρίσκω το μήκος της. Η απλούστερη ευθυγράμμιση μήκους, είναι εκείνη της περιφέρειας. Όταν ένας κυκλικός δίσκος περιμέτρου p κυλά χωρίς να ολισθαίνει επάνω σε μία ευθεία γραμμή, τότε θα έχει κάνει ένα πλήρη κύκλο, αφού διανύσει p φορές τη διάμετρο του d . Αυτή η διαδικασία

μετατροπής της περιμέτρου σε ευθύγραμμο τμήμα, ονομάζεται **ευθυγράμμιση**. Το αποτέλεσμα της ευθυγράμμισης της περιφέρειας του κύκλου είναι $p/d=\pi$.

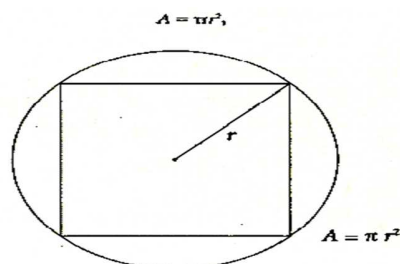


Γράφημα 2: Μήκος περιφέρειας περιστρεφόμενου κύκλου

3. Το μέγα πρόβλημα ανά τους αιώνες

Ο αριθμός π δεν είναι μόνο ο σταθερός λόγος μεταξύ του μήκους της περιφέρειας και της διαμέτρου του κύκλου, είναι επίσης το διπλάσιο του σταθερού λόγου μεταξύ της επιφάνειας ενός κύκλου και εκείνης του εγγεγραμμένου τετραγώνου της. Εφόσον η επιφάνεια του τετραγώνου ισούται με το τετράγωνο της πλευράς του, μία απλή εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος δίνει

$$\frac{A}{\text{επιφάνεια εγγεγραμμένου τετραγώνου}} = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot r^2} = \frac{\pi}{2}$$

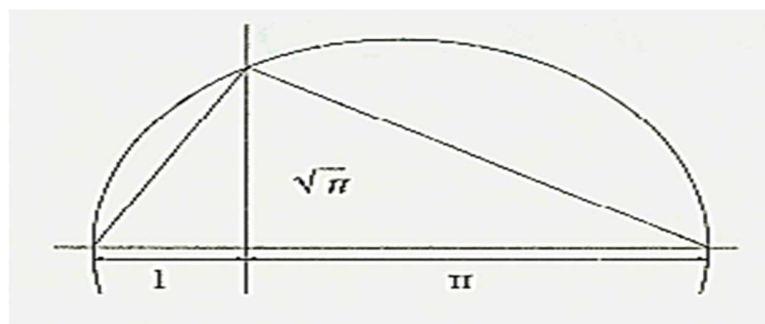


Γράφημα 3: Τετραγωνισμός του κύκλου

Ποιος, διαβεβαιώνει ότι αυτή η σταθερά, αυτό το π που προκύπτει από την επιφάνεια του κύκλου, είναι ίδιο με το π που εμφανίζεται μέσα στην περιφέρεια; Χρειάστηκε να περιμένουμε την ιδιοφυία του Αρχιμήδη για να βεβαιωθούμε.

Το σημαντικότερο πρόβλημα των μαθηματικών της αρχαιότητας, ήταν η κατασκευή μιας τετραγωνισμένης επιφάνειας, ίσης με μια κυκλική επιφάνεια. Ο λόγος ήταν καθαρά πρακτικός, η μέτρηση της επιφάνειας ενός τετραγώνου ήταν απλή και εύκολη, ενώ η μέτρηση της επιφάνειας ενός κύκλου ήταν εξαιρετικά δύσκολη και γινόταν κατά προσέγγιση. Κατά την εποχή της επικράτησης της ελληνικής σκέψης, στην ανάγκη για γνώση, προστέθηκε η φιλοδοξία να βρεθεί μια τέτοιου είδους ισοδυναμία με τρόπο θείο, καθαρό, όπως πρόσταζε η ελληνική φιλοσοφία. Για την κατασκευή ενός τετραγώνου ισοδύναμου με έναν κύκλο, δεν έπρεπε να χρησιμοποιηθεί τίποτα περισσότερο από κανόνες και διαβήτη. Σε αυτό ακριβώς συνίσταται ο τετραγωνισμός του κύκλου, στο να καταφέρουμε να κατασκευάσουμε μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων ένα τετράγωνο ισοδύναμο με έναν κύκλο, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά

κανόνα και διαβήτη. Στο πέρασμα των αιώνων, όλοι οι γεωμέτρες προσπάθησαν να επιτύχουν τον τετραγωνισμό του κύκλου, κάτι που ισοδυναμεί με την ακριβή κατασκευή του π με κανόνα και διαβήτη. Χάρη στο μεγάλο πείσμα τους, κατάφεραν να το προσεγγίσουν λίγο περισσότερο και να του προσθέσουν, το ένα μετά το άλλο, περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Μιλώντας με αλγεβρικούς όρους, ο «τετραγωνισμός» ενός κύκλου με επιφάνεια $\pi \cdot r^2$ σημαίνει ότι πρέπει να βρεθεί τετράγωνο με πλευρά 1, ώστε $\pi \cdot r^2 = \ell^2$ ή να βρεθεί ℓ ίση με $\ell = \sqrt{\pi \cdot r^2} = r\sqrt{\pi}$ που ισοδυναμεί με την κατασκευή του $\sqrt{\pi}$ με κανόνα και διαβήτη. Αν έχουμε $\sqrt{\pi}$, μια απλή κατασκευή με κανόνα και διαβήτη δίνει το παρακάτω σχήμα.



Γράφημα 4: Γεωμετρική κατασκευή του π

Έτσι, αν είχαμε ένα καθορισμένο αριθμό π , θα παίρναμε $\sqrt{\pi}$ και θα επιτυγχάναμε τον τετραγωνισμό του κύκλου. Όσα θα αναφέρουμε στη συνέχεια είναι, κατά βάθος, η ιστορία μιας απίθανης αναζήτησης, που σε κάθε της βήμα, φτάνει όλο και πιο κοντά στον στόχο. Κάθε φορά που ένας μεγαλοφυής γεωμέτρης προσέθετε με τη σειρά του, ένα ακόμη δεκαδικό ψηφίο στον αριθμό π , οι μαθηματικοί έκαναν ένα ακόμη βήμα προς τον σκοπό αυτό.

4. Το ακτίνιο και το π

Στα μαθηματικά, οι γωνίες δεν μετριοούνται σε εξηκονταδικές μοίρες, πρώτα και δεύτερα λεπτά, ούτε σε μοίρες βάσει του πολύ εξεζητημένου εκατονταδικού συστήματος. Η εμφάνιση της μαθηματικής ανάλυσης (μελέτη των ριζών, των ολοκληρωμάτων, κλπ.) καθιέρωσε ένα φυσικότερο μέτρο, αν και εκ πρώτης όψεως, περιπλοκότερο.



Γράφημα 5: Γεωμετρική αναπαράσταση του ακτίνιου (rad)

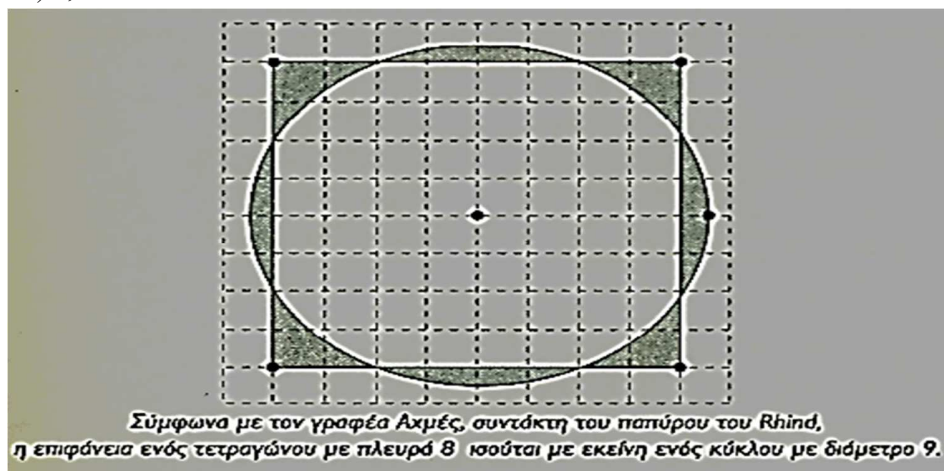
Ως ακτίνιο, θεωρείται μία επίκεντρη γωνία του κύκλου, που ορίζει ένα τόξο ίσο με

εκείνο της ακτίνας του κύκλου. Αφού το συνολικό μήκος της περιμέτρου είναι 2π , ολόκληρη η περιφέρεια είναι ένα τόξο με γωνία ίση με 2π ακτίνα. Έτσι,
 $1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$. Οι συχνότερες ισοδυναμίες είναι $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$,
 $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $180^\circ = \pi$, $360^\circ = 2\pi$.

5. Η ιστορία του π , η ηρωική εποχή

Από χωρία της βίβλου, μπορούμε να συμπεράνουμε μία τιμή για το π , που σύμφωνα με το ιερό βιβλίο ισούται με 3. Η βίβλος αναφέρει, στο βιβλίο Βασιλειών (I,7,23) «Και έφτιαξε τη θάλασσα 10 πήχεις από το ένα χείλος της ως το άλλο, στρογγυλή ολόγυρα. Το ύψος της ήταν 5 πήχεις. Και η περιφέρεια της ήταν 33 πήχεις».

Στον αιγυπτιακό **πάπυρο του Rhind**, μία από τις αρχαιότερες πηγές γνώσης γύρω από τα μαθηματικά, τον οποίο οι ειδικοί τοποθετούν περίπου στο 1650 π.Χ., γίνεται μια έμμεση αναφορά στο αριθμό π . Στο πρόβλημα με αριθμό 50, από τα 87 που περιλαμβάνει, αναφέρει «Πόση είναι η επιφάνεια κυκλικού αγρού με διάμετρο 9 khet; (1 khet ≈ 50 m)»;



Γράφημα 6: Αναφορά για το π στον πάπυρο του Rhind

Στη σύγχρονη γλώσσα, ο αγρός έχει επιφάνεια ίση με $\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81 \cdot \pi}{4}$. Στον πάπυρο,

δίνεται ο τύπος $\frac{64}{81} d^2$ για τον υπολογισμό αυτής της επιφάνειας, όπου d είναι η

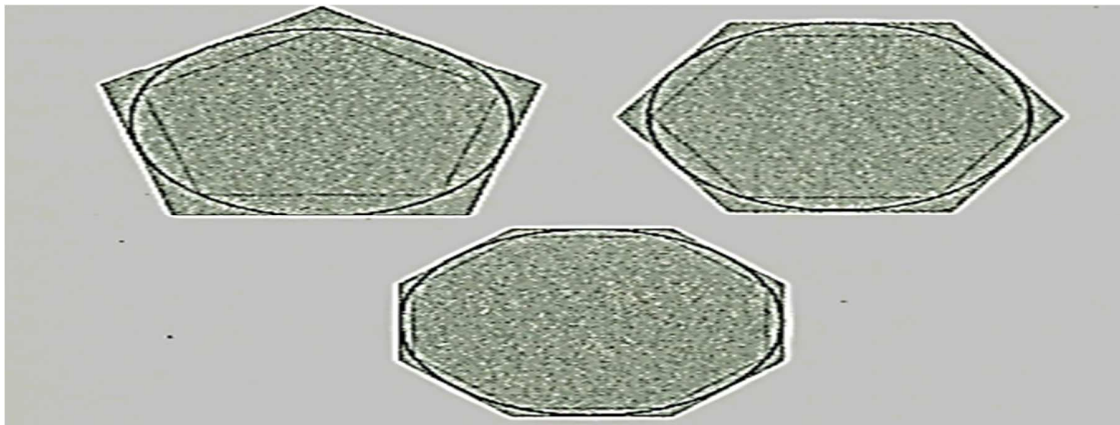
διάμετρος. Αν $d = 9$ είναι $\frac{81 \cdot \pi}{4} = \frac{64}{81} d^2 = \frac{64}{81} 9^2 = 64$ και $\pi = \frac{256}{81} = 3,160493827$. Η

προσέγγιση αυτή, δεν είναι τόσο καλή όσο αυτή που θεωρείται ότι χρησιμοποιούσαν στην Γκίζα οι Αιγύπτιοι περί το 2600 π.Χ. Ο λόγος της περιμέτρου των πυραμίδων προς το ύψος τους είναι $\frac{22}{7}$. Στην Βαβυλώνα, σε πλάκα που βρέθηκε στην αρχαία πόλη των

Σούσων και χρονολογείται πριν από το 2.000 π.Χ., η τιμή του π ήταν $\frac{25}{8} = 3,125$. Στην Ινδία, τα βεδικά κείμενα του 9^{ου} μ.Χ. αιώνα δίνουν για το π την τιμή $\pi = \frac{339}{108} = 3,13888...$ που χρησιμοποιούνταν για αστρονομικούς υπολογισμούς (Shatapatha Brahmana).

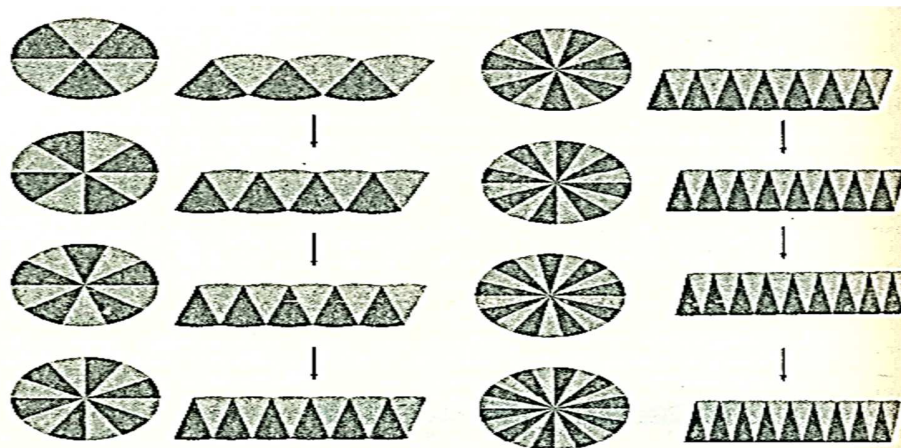
6. Η ιστορία του π , Αρχιμήδης

Ο Αρχιμήδης, αγνοούσε τους σύγχρονους ορισμούς ορίων και ολοκληρωμάτων. Χρησιμοποίησε τη «μέθοδο της εξάντλησης», που είχε εμπνευστεί ο Εύδοξος ο Κνίδιος (400–347 π.Χ.). Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τοποθέτησε τον κύκλο μεταξύ ενός περιγεγραμμένου και ενός εγγεγραμμένου πολύγωνου, δηλαδή μεταξύ ενός ανώτερου και ενός κατώτερου ορίου, μέσω των οποίων η επιφάνεια του κύκλου οριζόταν με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια. Μια σύγχρονη απεικόνιση της λειτουργίας της μετάβασης στο όριο, θα βοηθήσει να κατανοήσουμε για ποιο λόγο η επιφάνεια του κύκλου είναι πr^2 .



Γράφημα 7: Μέθοδος της εξάντλησης του Αρχιμήδη

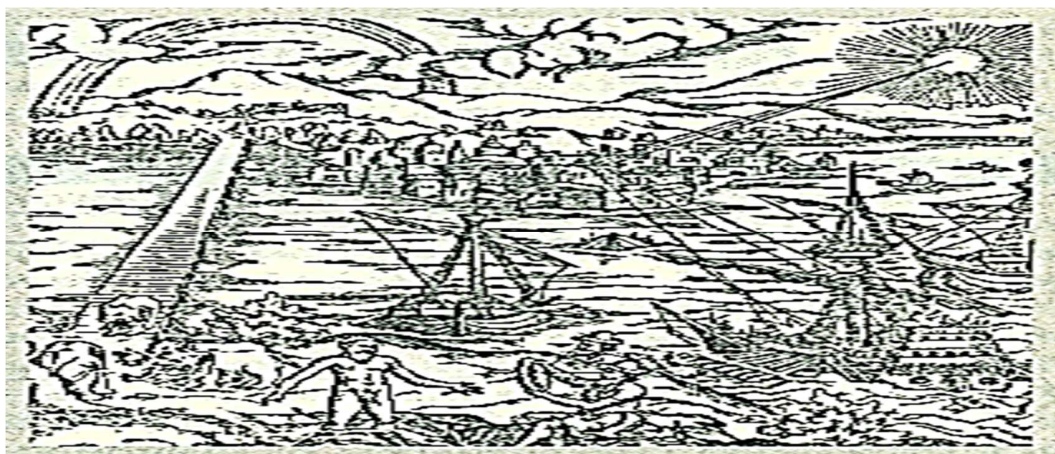
Βαθμιζόν, διαμορφώνεται ένα ρομβοειδές καμπυλόγραμμο, που γίνεται όλο και πιο επίπεδο. Η επιφάνεια ενός συνηθισμένου ρομβοειδούς, ισούται με τη βάση επί το ύψος. Η τιμή του ύψους κάθε φορά που προσεγγίζει όλο και περισσότερο εκείνη της ακτίνας r , η τιμή της βάσης τείνει προς την τιμή της ημιπεριμέτρου του κύκλου. Η επιφάνεια τείνει προς $r \frac{\ell}{2} = r \frac{2\pi \cdot r}{2} = \pi r^2$. Ο Αρχιμήδης, κατέληξε στον περιορισμό της τιμής του π ως: $\frac{223}{71} = 3,140845... < \pi < \frac{22}{7} = 3,142857...$, που μπορεί να αξιολογηθεί ως άριστος.



7. Αρχιμήδης ο Συρακούσιος

Έλληνας μηχανικός, φυσικός, αστρονόμος και μαθηματικός (287– 212 π.Χ.). Θεωρείται ο σημαντικότερος επιστήμονας της αρχαιότητας και ένα από τα σημαντικότερα πνεύματα στην ιστορία. Η ευφυΐα και οι ανακαλύψεις του, τον τοποθετούν σε ένα επίπεδο στον τομέα των μαθηματικών όπου μόνο οι Newton, Gauss, von Neumann κατάφεραν να φτάσουν. Ανυπολόγιστη είναι η προσφορά του στην επιστήμη. Ως μηχανικός και φυσικός, εφηύρε μεταξύ άλλων, τον ατέρμονα κοχλία, τα παραβολικά κάτοπτρα και πολλές εφαρμογές του πολύσπαστου (βαρούλκο). Η γνωστότερη παγκοσμίως συμβολή του είναι στον τομέα της υδροστατικής, μέσω της ονομαστής αρχής του Αρχιμήδη ή αρχής της πλευστότητας. Η εικόνα του Αρχιμήδη να βγαίνει γυμνός από το λουτρό του, φωνάζοντας «Εύρηκα!» αποτελεί για τους κύκλους της διανόησης το πρότυπο του εφευρέτη. Οι ανακαλύψεις του στον τομέα των μαθηματικών είναι αναρίθμητες. Εκτός από την προσέγγιση του, ασχολήθηκε επί μακρόν με τον υπολογισμό της περιμέτρου, της επιφάνειας, του όγκου και του κέντρου βάρους πολλών γεωμετρικών σωμάτων (σφαιρών, κυλίνδρων, παραβολών, σπειρών), μελέτησε τις διοφαντικές εξισώσεις, συνέβαλε στη σύλληψη και υπολογισμό των μεγάλων αριθμών. Πέθανε κατά την πολιορκία των Συρακουσών, τις οποίες υπερασπίστηκε από τους Ρωμαίους με τις μηχανές του, την ώρα που μελετούσε ένα σχήμα που είχε σχεδιάσει στην άμμο, χτυπημένος από το σπαθί στρατιώτη που εξαγριώθηκε επειδή, τη στιγμή που ετοιμαζόταν να τον συλλάβει, ο Αρχιμήδης του φώναζε «μη μου τους κύκλους τάραττε».

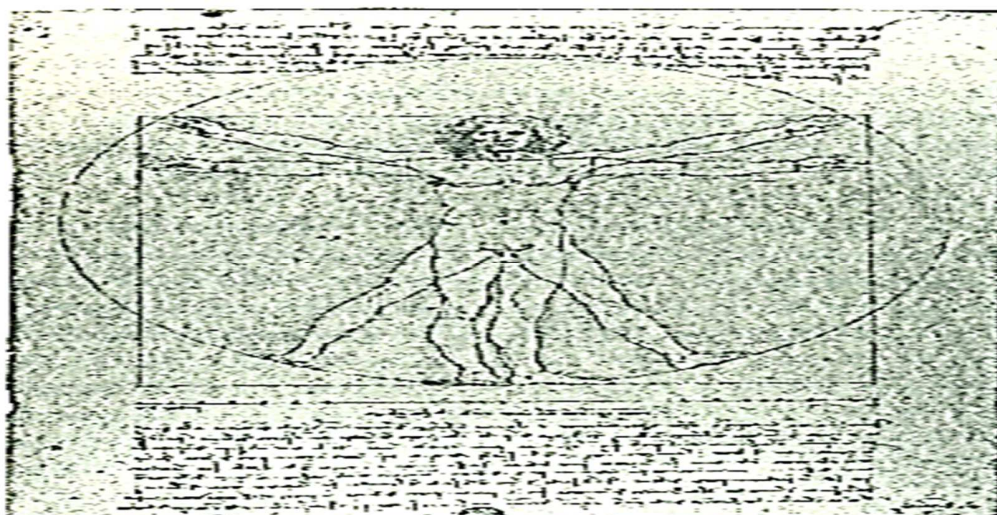
Ο Πλούταρχος, διηγείται ότι ο Ρωμαίος στρατηγός εξοργίστηκε με τον θάνατό του, διότι τον θεωρούσε ιδιαίτερα πολύτιμο λάφυρο. Πάνω στον τάφο του, **χάραξαν μία σφαίρα εγγεγραμμένη σε κύλινδρο**. Ο Αρχιμήδης, είχε βρει την αναλογία μεταξύ των όγκων και των επιφανειών τους και ένιωθε πολύ υπερήφανος για αυτή του την ανακάλυψη. Μία από τις εφευρέσεις που του αποδίδονται, είναι η χρήση κατόπτρων ώστε να αντανakλώνται οι ηλιακές ακτίνες προς την κατεύθυνση των ρωμαϊκών σκαφών και να τους βάζουν φωτιά, προκειμένου να προστατευτούν οι Συρακούσες. Η μέθοδος που χρησιμοποίησε, καθιερώθηκε στα χρόνια και στους αιώνες που ακολούθησαν. Είναι φυσική, προσιτή και άμεση, ένα πραγματικό θαύμα του γεωμετρικού πνεύματος. Στην ουσία, συνέλαβε έναν αλγόριθμο, κάποιες οδηγίες για τον υπολογισμό του π με την απαιτούμενη ακρίβεια. Για την εφαρμογή τέτοιου αλγορίθμου, χρειάζεται μόνο μια αριθμομηχανή ή ένας υπολογιστής και ένας επαναληπτικός τύπος.



8. Η ιστορία του π , μετά τον Αρχιμήδη

Γύρω στο 20 π.Χ., ο **Μάρκος Πολλίων Βιτρούβιος** (περίπου 85– περίπου 20 π.Χ.), διάσημος Ρωμαίος αρχιτέκτονας, στρατιωτικός μηχανικός και συγγραφέας, έγραψε μία δεκάτομη πραγματεία περί αρχιτεκτονικής με τίτλο *De Architectura*, όπου χρησιμοποιεί τη μεσοποτάμια ισοδυναμία $\pi = \frac{25}{8}$. Ο Βιτρούβιος επιχείρησε να

υπολογίσει εμπειρικά το π , χρησιμοποιώντας έναν διαβαθμισμένο τροχό. Ωστόσο, δεν πέρασε στην αιωνιότητα χάρη σε αυτόν τον υπολογισμό, αλλά χάρη στο σχέδιο του Leonardo Da Vinci «ο άνθρωπος του Βιτρούβιου», στο οποίο αποτυπώνονται οι αναλογίες του ανθρώπινου σώματος. Παρά την φήμη του, ο Βιτρούβιος δεν μπόρεσε να βελτιώσει την προσέγγιση του π στην οποία είχε καταλήξει ο Αρχιμήδης. Αυτό το κατάφερε ο γεννημένος στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου Έλληνας αστρονόμος, αστρολόγος και γεωγράφος **Κλαύδιος Πτολεμαίος** (περίπου 100–περίπου 170 μ.Χ.), με το κλάσμα $377/120=3,141666...$. Για να καταλήξει στην τιμή αυτή, χρησιμοποίησε ένα πολύγωνο 120 πλευρών και συμπέρανε ότι $\pi=3+17/20$, ένα πραγματικά εξαιρετικό αποτέλεσμα.

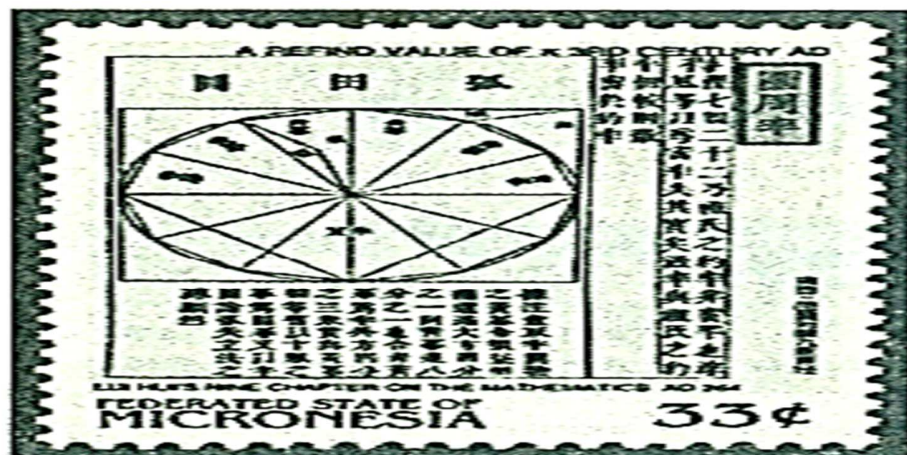


Η υστεροφημία του οφείλεται όχι σε αυτό το αποτέλεσμα αλλά σε ένα από τα έργα του, τη δεκατριάτομη *Μαθηματική Σύνταξη περί αστρονομίας*, για την οποία επικράτησε

ο τίτλος *Αλμαγέστη* (παραφθορά του επίσης στην αρχαιότητα χρησιμοποιημένου τίτλου Μεγίστη Μαθηματική Σύνταξη). Από την *Αλμαγέστη* γεννήθηκε η παράδοση των έργων που προσπαθούσαν να συγκεφαλαιώσουν τη γνώση ενός επιστημονικού πεδίου. Το βιβλίο αυτό θεωρήθηκε απαρχαιωμένο μετά την εποχή του Κοπέρνικου. Όταν η ματιά μας είναι επικεντρωμένη στον δυτικό κόσμο, συχνά δεν καταφέρνουμε να δούμε ότι κατά την αρχαιότητα, άνθισαν και άλλοι πολιτισμοί και λαοί εκτός από τους Βαβυλώνιους, τους Έλληνες, τους Ρωμαίους ή τους Αιγύπτιους. Την εποχή που η Δύση πρωτοσυστηνόταν, τι συνέβαινε άραγε στη μακρινή Ανατολή σχετικά με το π ;

Στην Κίνα, εκτός από τις απόπειρες του **Τσανγκ Τσανγκ** (περίπου 220 π.Χ.), ο οποίος καθόρισε το 3 ως τιμή του π , καθώς και κάποιων άλλων μαθηματικών, ο **Ζιανγκ Χενγκ** (78–139 μ.Χ.) κατάφερε να βρει τον χρόνο ανάμεσα στις τόσες άλλες δραστηριότητες του (ασχολούνταν με την αστρονομία, με τα μαθηματικά, είχε επινοήσει ένα μέσο πρόβλεψης των σεισμών), για να συγγράψει ένα βιβλίο με θέμα την προσέγγιση του $\pi=736/232=3,1724\dots$. Για τον υπολογισμό μίας σφαίρας εγγεγραμμένης σε κύβο, χρησιμοποίησε την προσέγγιση $\pi = \sqrt{10} = 3,162277\dots$

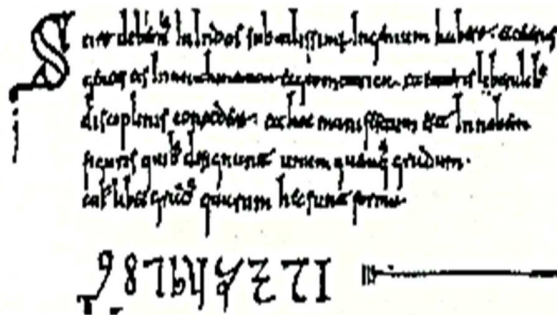
Ο **Γουάνγκ Φανγκ** ή Φαν (217–257 μ.Χ.) είναι σήμερα γνωστός από την ασθένεια που φέρει το όνομά του, μία συγγενή παραμόρφωση των ποδιών, που είναι γυρισμένα προς τα πίσω. Ο Γουάνγκ Φανγκ, του οποίου τα πόδια ήταν κανονικά, ενδιαφερόταν επίσης για τα μαθηματικά και υπολόγισε κάποια ψηφία του αριθμού $\pi = \sqrt{10} = 3,162277\dots$. Το 250 μ.Χ. έδωσε ως προσέγγιση για το π το κλάσμα $142/45=3,15555\dots$. Το 263 μ.Χ., ο μαθηματικός **Λιού Χούι** (περίπου 220–περίπου 280 μ.Χ.) δημοσίευσε σχόλια για το βιβλίο «9 κεφάλαια για την μαθηματική τέχνη», χάρη στα οποία είναι σήμερα γνωστές η ύπαρξη και κάποιες από τις ανακαλύψεις του. Σε αυτές, περιλαμβάνεται ένας επαναληπτικός τύπος για τον υπολογισμό των πλευρών ενός κανονικού πολύγωνου 3×2^k πλευρών, γνωρίζοντας τις πλευρές ενός πολυγώνου $3 \times 2^{k-1}$ πλευρών.



Γρομροτόσημο που κυκλοφόρησε το 1999 στην Μικρονησία, όπου απεικονίζεται η μέθοδος προσέγγισης του π κατά τον Κινέζο μαθηματικό Λιού Χούι.

Ο Λιού Χούι, συνέστησε τη χρήση της προσέγγισης $\pi \approx 3,14$, αν και προχώρησε ακόμη περισσότερο, μέχρι το $\pi=3,141592104\dots$, κάτι που προϋποθέτει τη χρήση

πολυγώνου με 3.072 πλευρές. Μερικούς αιώνες αργότερα, ο **Ζου Τσονγκ Ζι** (429–500 μ.Χ.), ένας μαθηματικός που δημιούργησε νέα ημερολόγια, πρότεινε για το π μια διπλή ανισότητα $3,1415926 < \pi < 3,1415927$. Επιπλέον, συνέστησε τη χρήση των κλασμάτων $22/7$ για τις απλές εφαρμογές και $355/113$ για τις πιο σύνθετες. Στην Ινδία, ο **Αρυαμπχάτα** (περίπου 476–550 μ.Χ.), μέγας πατριάρχης των Ινδών σοφών, κατέληξε στην τιμή 3,1416 για το π , με τη βοήθεια πολυγώνου 384 πλευρών. Ο **Μπραχμαγκούπτα** (598–665 μ.Χ.), αναμφισβήτητα ο πλέον χαρισματικός Ινδός μαθηματικός, συνέγραψε ένα μακροσκελέστατο έργο, τις *Brahmasphutasiddhanta*, όπου, με κάποια απογοήτευση, συναντάμε την τιμή του $\pi = \sqrt{10} = 3,162277...$. Έπρεπε να φθάσουμε στον 12^ο αιώνα για να βρεθεί μία καλύτερη προσέγγιση, επίτευγμα του **Μπασκάρα Β'**, «του διδασκάλου», στο έργο του *Lilavati*. Το βιβλίο αυτό, φέρει το όνομα της κόρης του, η οποία κρίνοντας από την αξία του έργου, θα πρέπει να ήταν μια πολύ όμορφη κοπέλα, όπως ακριβώς σημαίνει και το όνομά της.



Αραβικά ψηφία, όπως εμφανίζονται για πρώτη φορά στην Ισπανία (974-976), στο χρονικό της Αλμπέλντα, γνωστό και ως *Codex Vigilanus*, από το όνομα του μοναχού που το συνέγραψε.

Ο Μπασκάρα, δίνει ως προσέγγιση του $\pi = \frac{3917}{1250} = 3,1416$. Στο δικό μας

σύστημα αρίθμησης το οποίο είναι θεσιακό με βάση 10 και έχει προέλευση ινδοαραβική, χρησιμοποιούνται ως σύμβολα τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Στο γεγονός αυτό, στο οποίο δε δίνουμε συνήθως σημασία, οφείλεται η πρόοδος μας στο εμπόριο. Η διάδοση των αριθμητικών εργαλείων στην ανταγωνιστική Δύση, έδωσε τη δυνατότητα στους πάντες να μπορούν να κάνουν υπολογισμούς. Το βιβλίο αυτό, δεν είναι πλέον κατάλληλο για να αφηγηθεί τις μεταφορτώσεις των ινδοαραβικών ψηφίων, γνωρίζουμε όμως ότι ονομάστηκαν έτσι ακριβώς λόγω της προέλευσής τους. Το πιο εντυπωσιακό, είναι ότι τα ψηφία αυτά και το συγκεκριμένο σύστημα αρίθμησης εμφανίστηκαν στη Δύση από τον 10^ο αιώνα και έγιναν γνωστά χάρη στο βιβλίο *Liber abaci* (μετ. βιβλίο των υπολογισμών) του **Λεονάρδου εκ Πίζας** (περίπου 1150–1250 μ.Χ.), γνωστού με το όνομα **Fibonacci**.

Οι αριθμοί αυτοί, γνώρισαν μεγάλη δημοτικότητα και η χρήση τους εξαπλώθηκε πολύ γρήγορα, κυρίως μεταξύ των εμπόρων και των πιο μορφωμένων ανθρώπων. Με το νέο αυτό σύστημα, οι υπολογισμοί δεν αποτελούσαν πλέον εφιάλτη, όπως στο παρελθόν και απλουστεύτηκαν χάρη στους απλούς αλγόριθμους του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Αργά αλλά σταθερά, ο πολιτισμός έκανε οριστικά ένα μεγάλο βήμα προς τα εμπρός. Ακριβώς στο μέσο αυτού του χρονικού διαστήματος, κάνει την εμφάνισή του ο

Fibonacci, ο οποίος το 1220 σε ένα από τα έργα του, το *Practica geometricae* (μετ. Πρακτική γεωμετρία), εφαρμόζοντας κάπως ελεύθερα τη μέθοδο του Αρχιμήδη, έδωσε μία προσέγγιση του π ως 3,141818. Στον αραβικό κόσμο, υπήρξε μία προσωπικότητα με μεγάλη επιρροή, ο Αμπού Αμπντάλα Μουαμάντ ιμπν Μουσά-αλ-Κουαρίζμι (περίπου 780–850 μ.Χ.) ή **Αλ-Χουαρίσμι** ή με παρεμφερή τρόπο. Σε κάθε περίπτωση, από το όνομά του Πέρση μαθηματικού προέρχεται η λέξη **αλγόριθμος** και από το έργο του *Συνοπτικό βιβλίο των υπολογισμών* προέρχεται η λέξη **άλγεβρα**. Τα έργα του διαδόθηκαν στη Δύση και άσκησαν εξαιρετική επιρροή. Ο Αλ-Κουαρίζμι συνιστά και αυτός τη χρήση του 3,14 για τους εύκολους υπολογισμούς και του 3,1416 για τους δυσκολότερους, όπως για παράδειγμα, για τους αστρονομικούς υπολογισμούς.



Φανταστική και ηρωική αναπαράσταση του Αλ-Κουαρίζμι σε σοβιετικό γραμματόσημο του 1983. Σύμφωνα με την γεωγραφία της εποχής, είχε γεννηθεί στην πόλη που έφερε το όνομα Ουζμπεκιστάν.

Το 1424, ο Πέρσης **Τζαμσίντ Αλ-Κασί** (1380–1429 μ.Χ.), γνωστός με το όνομα «ο εκ Σαμαρκάνδης», δεν υπολόγισε το π αλλά το 2π , χρησιμοποιώντας το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης (στο οποίο πχ θα γράφαμε $\frac{1}{60} = 0,1$ και $\frac{1}{60^2} = 0,01$) και βρήκε 9 ψηφία, κάτι που, στο δεκαδικό σύστημα, αντιστοιχεί σε μία σωστή προσέγγιση 16ψηφίων του π . Ο Αλ-Κασί υπολόγισε

$$2\pi = 6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9} + \dots$$

χρησιμοποιώντας πολύγωνα 3×2^{28} πλευρών. Με τον υπολογισμό αυτό, ξεπεράστηκαν τα 13 δεκαδικά ψηφία στα οποία είχε καταλήξει ο **Μαντχάβα ντε Σανγκαμαγκράμα** (περίπου 1350–περίπου 1425), στην Ινδία, λίγα χρόνια νωρίτερα, το 1400 μ.Χ.

Οι υπολογισμοί του Μαντχάβα είχαν την εξής πρωτοτυπία, για 1^η φορά, για τον υπολογισμό του π χρησιμοποιήθηκε μία σειρά, δηλαδή, ένα εργαλείο άθροισης με άπειρο μήκος, ένας καθαρός αριθμητικός λογισμός. Ο τύπος αυτός του Μαντχάβα, δεν ήταν άλλος από εκείνον που θα περνούσε αργότερα στην ιστορία για τους δυτικούς με την ονομασία «τύπος του Leibniz», με τη διαφορά ότι ο Μαντχάβα τον είχε ανακαλύψει πολύ νωρίτερα $\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$. Η σύγκλιση αυτού του αθροίσματος, είναι

πολύ κακή και χρειάζεται να προστεθούν και αφαιρεθούν χιλιάδες όροι για να καταλήξουμε σε λογικά αποτελέσματα. Ο Μαντχάβα, την επεξεργάστηκε και την

τροποποίησε ως $\pi = \sqrt{12} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right)$ και έτσι μπόρεσε να υπολογίσει το π . Το 1573, ο Γερμανός **Valentin Otto** (περίπου 1550–1603 μ.Χ.), ένθερμος οπαδός του Κοπέρνικου, πρότεινε την χρήση του $\pi = \frac{355}{113} \approx 3,1415929\dots$ αλλά αυτό δεν

συγκρίνεται καθόλου με τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν αργότερα, όχι χάρη στην ακόλουθη προσέγγιση, αλλά χάρη στην ανεπτυγμένη ευφυΐα που απαιτήθηκε για την ευόδωση ενός τέτοιου σκοπού. Το 9^ο ψηφίο του π , το οποίο βρήκε ο Γάλλος **Francois Viète**, δεν είναι κάτι εξωπραγματικό και επιπλέον, για να καταλήξει στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα εφάρμοσε την αρχή του Αρχιμήδη και εργάστηκε με πολύγωνα $393.216 = 6 \times 2^{16}$ πλευρών. Το σημαντικό στην περίπτωση αυτή είναι ο τύπος στον οποίο κατέληξε, ο οποίος σχετίζεται με το π , παρόλο που δεν κατάφερε να τον χρησιμοποιήσει εξαιτίας της δυσκολίας υπολογισμού του, αφού απαιτείται η εξαγωγή της μιας τετραγωνικής ρίζας μετά την άλλη. Ο Viète, απέδειξε αυτό που στις μέρες θα αποτυπωνόταν ως

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \cdot \dots$$

9. Francois Viète (1540–1603)

Δεν μπορούμε να τον χαρακτηρίσουμε (εκλατινισμένη μορφή του ονόματός του, με το οποίο έγινε γνωστός στην Ευρώπη) ως επαγγελματία μαθηματικό με την αυστηρή έννοια του όρου. Στην πραγματικότητα ήταν δικηγόρος και όταν ο Ερρίκος Δ' ανέβηκε στο θρόνο, του δόθηκε ο βαθμός του αυλικού και έγινε μέλος του ιδιωτικού συμβουλίου του Βασιλιά. Η κάπως υπερτιμημένη φήμη του προέρχεται από το ότι **υπήρξε πρωτεργάτης της κρυπτογραφίας**, αφού αποκωδικοποιούσε τα μηνύματα του Φιλίππου Β', εχθρού του αφέντη του. Ο Ισπανός μονάρχης κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο Γάλλος βασιλιάς μάλλον είχε κάνει συμφωνία με τον διάβολο, αφού ο Ερρίκος Δ' φαινόταν να μαντεύει αμέσως τους διπλωματικούς χειρισμούς του απόλυτου υπερασπιστή της καθολικής πίστης Φιλίππου Β'. Ο Vieta υπήρξε πολύ καλός γεωμέτρης, αλλά ακόμη καλύτερος αλγεβριστής και εξέλιξε τους τομείς της τριγωνομετρίας και της επίλυσης των εξισώσεων. Το σημαντικότερο είναι ότι επινόησε τα σύγχρονα αλγεβρικά σύμβολα που προκάλεσαν επανάσταση στον προφορικό και γραπτό λόγο και ώθησαν την ανάπτυξη της επιστήμης. Υπήρξε αρχικώς μέγας αντίπαλος και κατόπιν φίλος του Adriaan van Roomen (1561–1615), στον οποίο έθεσε το πρόβλημα του Απολλώνιου, το γνωστό ως «*πρόβλημα των εφαπτόμενων κύκλων*».

Ο πρώην ανταγωνιστής και μετέπειτα φίλος του Vieta, ο Ολλανδός **Adriaan van Roomen** (1561–1615), γνωστός, επίσης, με το όνομα **Adrianus Romanus** λόγω του ότι έζησε σε μία κοινωνία όπου σχεδόν όλοι οι σημαντικοί άνθρωποι εκλατινίζαν το όνομά τους, αφοσιώθηκε πολύ περισσότερο από ότι ο Vieta στη μελέτη της μεθόδου των πολυγώνων του Αρχιμήδη και το 1593 υπολόγισε με επιτυχία 16 ακριβή ψηφία του π , χρησιμοποιώντας εντυπωσιακά πολύγωνα 2^{30} πλευρών. Αν το έργο του Van Roomen μας φαίνεται καταπληκτικό, τότε τι να πούμε για εκείνο του **Ludolph van Ceulen** (1540–1610); Το 1596, ο Γερμανός μαθηματικός, που είχε πραγματική εμμονή με τον αριθμό π , υπολόγισε αρχικά 20 δεκαδικά ψηφία και στη συνέχεια 35, τα οποία αξίζει να

παραθέσουμε $\pi=3,14159265358979323846264338327950288...$

Ο Van Ceulen απέκτησε τόση φήμη που, σε πολλές χώρες, το π ονομάστηκε λουντολφίνειος αριθμός. Η αγάπη του για τον αριθμό αυτό ήταν τόσο μεγάλη, που ζητούσε να τον σκαλίσουν στον τάφο του, στην πόλη Leyden της Ολλανδίας. Η μαρτυρία αυτής της μεγάλης λατρείας τελικά χάθηκε, αφού ο τάφος καταστράφηκε κατά την διάρκεια του 2^{ου} Παγκοσμίου Πολέμου. Ανακατασκευάστηκε το 2000.

Ο Willebrord van Roijen Snel (1580–1626), που επονομάστηκε Snell ή Snellius, μαθητής του Van Ceulen, είναι κυρίως γνωστός ως **ο άνθρωπος που ανακάλυψε στη Δύση τους νόμους της διάθλασης**. Με την ιδιότητα του μαθηματικού, ασχολήθηκε και αυτός με τον αριθμό π και υπολόγισε σωστά 35 δεκαδικά ψηφία, τα οποία δημοσιεύτηκαν, το 1621, στο έργο του *Cyclometricus* (μετ. Κυκλομετρικός). Η μέθοδος του προτείνει μια αισθητή βελτίωση σε σχέση με εκείνη του Αρχιμήδη. Οι λεπτομερείς βελτιώσεις στους υπολογισμούς του Snell αιτιολογήθηκαν αργότερα από τον διαπρεπή **Christiaan Huygens** (1629–1695). Το 1630, ο **Christoph Grienberger** (1561–1636), ένας Αυστριακός Ιησουίτης γνωστός με την ιδιότητα του αστρονόμου, κατέρριψε το ρεκόρ φθάνοντας στα 39 δεκαδικά ψηφία. Η μετά θάνατον τιμή να δοθεί το όνομά του σε ένα κρατήρα στην Σελήνη, του χάρισε την αιωνιότητα. Δεν θα μπορούσε να υπάρχει καλύτερος τρόπος για να τιμηθεί η μνήμη ενός ανθρώπου, του οποίου η ιερατική ιδιότητα δεν επέτρεπε να δεχθεί τις ανταμοιβές αυτού του κόσμου που είναι τόσο ταιριαστός τρόπος για ένα αστρονόμο.

10. Οι πρωταίτιοι του σκανδάλου και της ανάλυσης

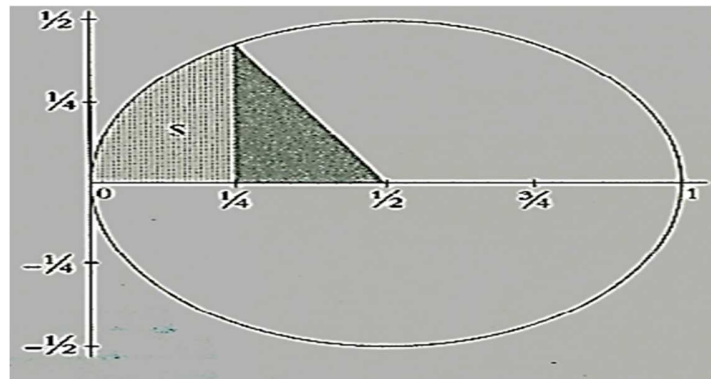
Οι **Gottfried Leibniz** και **Isaac Newton**, κέρδισαν την αθανασία στο επιστημονικό πεδίο ως δημιουργοί της απειροστικής ανάλυσης, ενός κυκεώνα παραγώγων και ολοκληρωμάτων. Οι Leibniz και Newton, απογείωσαν τα μαθηματικά καταφέροντας να δοκιμάσουν το άπειρο, ή ακόμη καλύτερα, καταφέροντας να περάσουν από το πεπερασμένο στο άπειρο και να επιστρέψουν, με τα χέρια γεμάτα αποτελέσματα. Πολλοί άνθρωποι έφτασαν κοντά στον δρόμο αυτό, όπως ο διορατικός και οραματιστής **Αρχιμήδης**, εκείνοι όμως που τον διάβηκαν πρώτοι ήταν οι Leibniz και Newton, δείχνοντας πως να μπούμε στον λαβύρινθο του αγνώστου και πως να βγούμε από αυτόν.

Τα άμεσα αποτελέσματα της εφαρμογής των τεχνικών της ανάλυσης στα μαθηματικά, είναι οι δυναμοσειρές και τα ολοκληρώματα. Ο υπολογισμός του π δεν είναι πλέον ένα απλό πρόβλημα μέτρησης πολυγώνων, αλλά ανάγεται σε πρόβλημα μαθηματικό, η επίλυση του οποίου απαιτεί κυρίως την παρέμβαση των «μικρών φαιών κυττάρων», όπως θα έλεγε και ο Ηρακλής Πουαρό. Από εδώ και στο εξής, θα αγνοήσουμε τις προσεγγίσεις του π που προέρχονται από την Ανατολή, εκτός και αν χρειαστεί να δικαιολογήσουμε ένα πλήθος δεκαδικών ψηφίων ή την εξέλιξη μίας πολύ καινοτόμου μεθόδου. Οι Newton και Leibniz, ενεπλάκησαν σε μία διαμάχη ελάχιστα εποικοδομητική γύρω από την προέλευση της ανάπτυξης του λογισμού και δεν θα ήταν λάθος να πούμε ότι αυτοί ήταν οι πρωταίτιοι του σκανδάλου. Γύρω στο 1665, κατά την μεγάλη πυρκαγιά που κατέστρεψε το Λονδίνο, το μυαλό του Sir Isaac ήταν μάλλον αργόσχολο. Μάλιστα, έναν χρόνο αργότερα, δικαιολογήθηκε για τον τόσο χρόνο που είχε αφιερώσει αποκλειστικά για τον υπολογισμό του π , λέγοντας ότι «δεν είχε τίποτα άλλο να κάνει την στιγμή εκείνη». Οι δικαιολογίες αυτές δεν έχουν καμία σημασία αφού ο Newton, έχοντας ως αφετηρία τον διωνυμικό τύπο, ανακάλυψε την επόμενη ακολουθία, με την οποία υπολόγισε με ακρίβεια 16 δεκαδικά ψηφία του π

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots\right),$$

Όπως και σε πολλές άλλες περιπτώσεις, ο Sir Isaac δεν έδωσε πολλή σημασία στον υπολογισμό αυτό, δεν τον μνημονεύει σε κανένα από τα βιβλία του και το αποτέλεσμα δημοσιεύτηκε μόνο μετά τον θάνατό του. Επειδή έχει πάντα ενδιαφέρον το να ακολουθήσουμε τα βήματα μιας διάνοιας, ας ακολουθήσουμε τα βήματα του Newton. Αν διαιρέσουμε την επιφάνεια του κύκλου δια του 6, η επιφάνεια του κυκλικού τομέα που στην εικόνα είναι σκιαγραφημένος, έχει τιμή $\pi/24$. Αν αφαιρέσουμε την γκριζα

τριγωνική επιφάνεια, η οποία έχει τιμή $\frac{\sqrt{3}}{32}$ μας μένει το τμήμα της επιφάνειας του κύκλου που ορίζεται ως S. Η εξίσωση της περιφέρειας στο σημείο αυτό είναι $x^2 + y^2 = x$ και μπορεί να γραφτεί $y^2 = x(1-x) \Leftrightarrow y = \sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x}\sqrt{1-x}$



Χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του ολοκληρωματικού λογισμού, που επινόησε ο Newton, είναι

$$S = \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}(1-x)dx = \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \dots\right)dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}}{128} - \dots\right)dx.$$

Από το σημείο αυτό, το μόνο που χρειάζεται κάποιος είναι να ολοκληρώσει κατά μέλη. Χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ισοδυναμία, την οποία οφείλομε στον αστρονόμο

Edmund Halley(1656–1742) $\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$ και που στις μέρες μας διδάσκεται στη

στοιχειώδη τριγωνομετρία, όπως και το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα του επίσης

Βρετανού **James Gregory** (1638–1675) $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ Ένας άλλος

συμπατριώτης τους ο **Abraham Sharp** (1651–1742), κατέληξε σε μία σειρά, την οποία

στις μέρες μας θα αποτυπώναμε ως $\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k 3^{\frac{1}{2-k}}}{2k+1}$. Χάρη σε αυτόν τον τύπο,

κατάφερε το 1699, να υπολογίσει το π με 71 σωστά δεκαδικά ψηφία. Η αλήθεια είναι

ότι τα ψηφία που είχε υπολογίσει ο Sharp ήταν 72, το τελευταίο όμως λανθασμένο.

Συγχωρητέο σφάλμα, αν σκεφτεί κανείς ότι ο Sharp θα πρέπει να είχε ήδη υπολογίσει τουλάχιστον 300 όρους της σειράς αυτής. Το 1667 ο James Gregory είχε θελήσει να αποδείξει, χωρίς όμως να καταλήξει σε επιτυχές αποτέλεσμα, ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου ήταν ανέφικτος. Μερικά χρόνια αργότερα, το 1706, ο **John Machin** (περίπου 1686–1751), ένας καθηγητής αστρονομίας που είχε καταφέρει να γίνει γραμματέας της Βασιλικής Εταιρίας, ανακάλυψε και έκανε γνωστό τον τύπο που φέρει

το όνομά του $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$. Για να καταλήξει στον τύπο αυτό,

ακολούθησε τα εξής βήματα

$$\tan a = \frac{1}{5}$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4a = \frac{2 \tan 2a}{1 - \tan^2 2a} = \frac{120}{119}$$

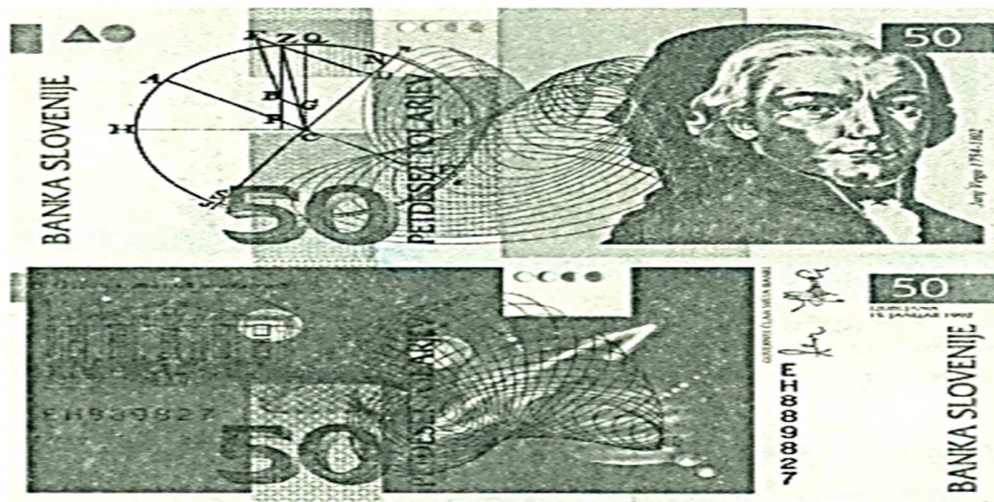
$$\tan\left(4a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4a - 1}{1 + \tan 4a} = \frac{1}{239}$$

Έτσι, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα για την επαλήθευση της αντίστροφης συνάρτησης $4a - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}$. Ξεκινώντας από τον συγκεκριμένο τύπο και

συνδυάζοντας τον με γνωστές παραστάσεις, όπως $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

μπορούν να συναχθούν σειρές ταχείας σύγκλισης με τις οποίες ο Machin υπολόγισε το π έως το εκατοστό δεκαδικό ψηφίο του. Το μεγάλο καύχημα του Machin αναμφίβολα ο τύπος του, που έχει μεν τριγωνομετρική μορφή αλλά επιτρέπει την ταχεία σύγκλιση των σειρών. Στις μέρες μας, οι τύποι του είδους Machin έχουν καθιερωθεί ως εργαλεία και έχουν αναπτυχθεί σημαντικά. Ο Machin ήταν εκείνος που άνοιξε τον δρόμο. Στον 9^ο τόμο της 1^{ης} έκδοσης της *Εγκυκλοπαίδειας*, του θαυμαστού έργου του **Diderot**, γίνεται αναφορά στον Γάλλο **Thomas Fantet de Lagny** (1660–1734), καθηγητή υδρογραφίας και μαθηματικό, ο οποίος το 1719, υπολόγισε όχι λιγότερα από 112 δεκαδικά ψηφία του π . Τον επικήδειο του έγραψε ο διάσημος **Fontenelle**. Ο de Lagny είχε χρησιμοποιήσει την ίδια δυναμοσειρά με τον Sharp. Στην πραγματικότητα, ο de Lagny είχε υπολογίσει 127 δεκαδικά ψηφία του π , αλλά μόνο τα 112 ήταν σωστά, σύμφωνα με την επαλήθευση του Σλοβένου μαθηματικού και στρατιωτικού **Jurij Vega** ή Veba (1754–1802). Στα γερμανικά είναι επίσης γνωστός ως βαρόνος Georg von Vega, επειδή προς το τέλος της ζωής του, η Αυστριακή Αυτοκρατορία του απένειμε ένα τίτλο ευγένειας. Αυτό όμως δεν τον προφύλαξε από έναν κλέφτη που του άρπαξε τα χρήματα και το ρολόι. Το 1794, ο Vega χρησιμοποίησε έναν τύπου του είδους Machin, τον οποίο είχε ήδη ανακαλύψει ο **Euler**, για να υπολογίσει τα 137 πρώτα δεκαδικά ψηφία του π , αυτή την φορά χωρίς κανένα λάθος. Ο τύπος που χρησιμοποιήθηκε είναι ο $\frac{\pi}{4} = 5 \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \arctan\left(\frac{3}{79}\right)$. Μεταξύ 1760 και 1800, πολλά γεγονότα συνέβησαν

ταυτοχρόνως και αξίζει να τα επισημάνουμε. Συγκεκριμένα ο **Johann Heinrich Lambert** (1728–1777) επινοητής της υπερβολικής γεωμετρίας, απέδειξε, το 1761 ή το 1769 (η ημερομηνία δεν έχει επιβεβαιωθεί), ότι το π είναι άρρητος αριθμός, ενώ ο **Adrien Marie Legendre** (1752–1833), κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το ίδιο συνέβαινε και με π^2 . Όμως μάλλον το σημαντικότερο όλων είναι ότι ο επιφανής Leonhard Euler (1707–1783), εκτός του ότι ανακάλυψε τη μία σειρά μετά την άλλη για να προσεγγίσει το π , ισχυρίστηκε ότι το π ήταν αριθμός υπερβατικός, πολύ πριν ο **Joseph Liouville** (1809–1882) αποδείξει το 1840, την ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών και ανακαλύψει τον πρώτο από αυτούς.



Χαρτονόμισμα των 50 σλοβενικών τάλαρ με προσωπογραφία του Jurij Vega στην μπροστινή όψη, με φόντο γεωμετρικά σχήματα και τις φάσεις της σεληνης. Στην πίσω όψη, στα αριστερά μιας αναπαράστασης του ηλιακού συστήματος, απεικονίζεται η πρόσοψη της Ακαδημίας Επιστημών της Λιουμπλιάνα.

11. Sir Isaac Newton (1642–1727)

Αν και γνωστός κυρίως ως μαθηματικός και φυσικός, ο Νεύτωνας ήταν μια πολύπλευρη προσωπικότητα, αλχημιστής, θεολόγος, πολιτικός, αστρονόμος, αλλά οπωσδήποτε μελέτησε και άλλες επιστήμες. Είναι ούτως η άλλως ένας από τους σπουδαιότερους επιστήμονες στην ιστορία. Το κυριότερο έργο του, με τίτλο *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Μαθηματικές αρχές της φυσικής φιλοσοφίας), δημοσιεύτηκε το 1687 μετά από την πίεση των κοντινών του προσώπων, γεγονός που αναδεικνύει τον συνεσταλμένο και αντικοινωνικό χαρακτήρα του. Οι 2 πιο γνωστές επιστημονικές συμβολές του είναι ο νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας (θρυλείται ότι τον ανακάλυψε βλέποντας ένα μήλο να πέφτει στο περιβόλι του) και ο απειροστικός λογισμός, που περιγράφεται στο βιβλίο αυτό.

Μεταξύ των όσων συνείσφερε στην φυσική, συγκαταλέγονται η θεωρία χρωμάτων και διάθλασης, το 1^ο λειτουργικό τηλεσκόπιο και η σωματιδιακή θεωρία του φωτός. Διατύπωσε τους νόμους διατήρησης της ροπής και των ροπών στρέψης. Στην αστρονομία, μελέτησε επιτυχώς την κίνηση των πλανητών και τη φύση των ουράνιων τροχιών. Στα καθαρά μαθηματικά, εκτός από την εισαγωγή του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, ανακάλυψε πολλά αναπτύγματα δυνάμεων, το θεώρημα του διωνύμου, τη θεωρία των τυπικών σφαλμάτων και μια προσεγγιστική μέθοδο για τα

μηδενικά συναρτήσεων. Κατά τα τελευταία χρόνια της ζωής του, είχε γίνει ένα μάλλον σιωπηλό μέλος του Κοινοβουλίου (όπου η πιο αξιοσημείωτη παρέμβασή του ήταν όταν ζήτησε να κλείσουν το παράθυρο για να μην υποστούν οι εξοχότητες του Σώματος την δυσάρεστη αίσθηση ενός ρεύματος αέρα), αφοσιώθηκε στις υποθέσεις του Βασιλικού Νομισματοκοπείου, κάτι που του έδωσε τη δυνατότητα να στείλει πολλούς παραχαράκτες στην αγγόνη. Είχε την πεποίθηση ότι οι αλχημιστικές και οι θεολογικές του ανακαλύψεις θα άντεχαν στο χρόνο (**υπήρξε κρυφός αιρετικός μονοφυσίτης**). Στη διάρκεια της ζωής του σχεδόν θεοποιήθηκε, αλλά μετά το θάνατό του και την ταφή του στον καθεδρικό ναό του Γουεστμίνστερ, αυτός ο υπερβολικός θαυμασμός καταλάγιασε, γεγονός μάλλον κατανοητό, λαμβάνοντας υπόψη τις μεθόδους που χρησιμοποιούσε.



12. James Gregory (1638–1675)

Δεν πρέπει να συγχέουμε τον James Gregory, με τον ανιψιό του, David Gregory (1659–1708), επίσης μαθηματικό, φίλο του Newton και έναν από εκείνους που καθιέρωσαν το σύμβολο π . Ο James, εμφανίζεται στην ιστορία της αστρονομίας ως εφευρέτης ενός αποτελεσματικού ανακλαστικού τηλεσκοπίου και για τη συμβολή του στη μαθηματική ανάλυση των δυναμοσειρών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ και των αντίστροφων συναρτήσεων τους $\arcsin x$, $\arccos x$ και $\arctan x$.

Η ανακάλυψη αυτή, την οποία 1^{ος} είχε κάνει ο Μαντχάβα ντε Σανγκαμαγκράμα, ονομάστηκε ακολουθία Gregory ή Gregory–Leibniz, μπορεί να γραφεί ως

$$\theta = \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta - \dots \text{ και συγκλίνει (δηλαδή η ισότητα ισχύει) μεταξύ } \pi/4$$

και $-\pi/4$. Ο Gregory ήταν ένας από τους πρώτους ειδικούς που σκέφτηκαν ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου ήταν αδύνατος.

13. Μία ακαταμάχητη πρόκληση

Ο μαθηματικός Thomas Fantet de Lagny (1660–1734), ο οποίος γεννήθηκε στην γαλλική πόλη Λυών, κέρδισε το δικό του μερίδιο αθανασίας χάρη σε 2 επιτεύγματα στον τομέα των μαθηματικών. Το 1^ο επίτευγμα, ήταν ο υπολογισμός 112 σωστών δεκαδικών ψηφίων του π , που για την εποχή εκείνη αποτελούσε παγκόσμιο ρεκόρ αυτού του ιδιαίτερου επιστημονικού παιχνιδιού. Το 2^ο επίτευγμα, λιγότερο σημαντικό και ίσως αποκρυφιστικό, συνέβη την στιγμή που εγκατέλειπε τον κόσμο αυτό λέγεται ότι

όταν ο συνάδελφος του Maupertuis τον επισκέφθηκε στην νεκρική του κλίνη, ο Maupertuis του ψιθύρισε κάτι στο αυτί «*ποιο είναι το τετράγωνο του 12;*», γνωρίζοντας ότι δεν υπήρχε άνθρωπος με τόση αγάπη για τους αριθμούς που θα μπορούσε να αντισταθεί σε μία τέτοια πρόκληση. Το υποτιθέμενο πτώμα σχεδόν αναπήδησε από το κρεβάτι του και αφού φώναξε με στεντόρεια φωνή «**144**» άφησε την τελευταία του πνοή.

14. Johann Heinrich Lambert (1728–1777)

Γερμανός μαθηματικός και ιατρός, ο οποίος εφηύρε τα πρώτα αποτελεσματικά υγρόμετρα και φωτόμετρα. Ήταν ο 1^{ος} που απέδειξε ότι το π είναι άρρητος αριθμός, χωρίς αυτή να είναι η μόνη του συμβολή στα μαθηματικά. Μελέτησε τις υπερβολικές συναρτήσεις και τις συσχέτισε με τη μη ευκλείδεια γεωμετρία. Εξίσου σημαντική είναι η συνεισφορά του στον τομέα της χαρτογραφίας, όπως η προβολή που φέρει το όνομά του. Λόγω της πολύ φτωχής καταγωγής του ήταν αυτοδίδακτος, χωρίς όμως να δείχνει την παραμικρή ταπεινοφροσύνη όποτε αναγνωρίζονταν οι ικανότητές του. Αφού τον έκανε μέλος της Ακαδημίας Επιστημών του Βερολίνου, ο Φρειδερίκος Β' τον ρώτησε ποια ήταν τα επιστημονικά πεδία των μελετών του. «*Όλα*», απάντησε εκείνος, χωρίς φυσικά να λείει ψέματα. Ο βασιλιάς, με ειρωνική διάθεση, συνέχισε «*Ω, γνωρίζετε λοιπόν από μαθηματικά;*» «*Φυσικά*». Ο Φρειδερίκος Β', κάπως εκνευρισμένος την φορά αυτή, ρώτησε «*Ποιος ήταν ο δάσκαλός σας;*», και ο Lambert απάντησε «*Εγώ ο ίδιος, Υψηλότητα*», κάτι που ήταν εντελώς αλήθεια. Δυσπιστώντας ο μονάρχης και πάλι τον ειρωνεύτηκε «*Έχουμε, μπροστά μας έναν νέο Pascal!*», για να εισπράξει την εξής αποστομωτική απάντηση από τον Lambert «*Το λιγότερο Υψηλότητα*».

Η απόδειξη, στην οποία κατέληξε για την ασυμμετρία του αριθμού π είναι πολύ έξυπνη και ευκολονόητη. Ο Lambert, απέδειξε, χρησιμοποιώντας συνεχή κλάσματα (και αυτό είναι το δύσκολο μέρος της απόδειξης), ότι εάν ο x είναι ρητός αριθμός διαφορετικός του μηδενός, τότε ο $\tan x$ είναι άρρητος. Επειδή $\tan \pi/4 = 1$ που είναι ρητός, τότε το $\pi/4$, άρα και το π , πρέπει να είναι άρρητοι. Εσκεμμένα δεν συσχέτισαμε τον Euler με τον αγώνα δρόμου για την εξεύρεση των δεκαδικών ψηφίων του π , αφενός επειδή ποτέ δεν έκανε κάποιο ρεκόρ. Και παρόλο που υποθέτουμε ότι δεν αφοσιώθηκε στην αναζήτησή τους, πρέπει να επισημάνουμε ότι, χρησιμοποιώντας τις γνώσεις του για τους τύπους Machin, ο Ελβετός μαθηματικός, κατάφερε κάποτε να υπολογίσει 20 δεκαδικά ψηφία του π σε μία μόνο ώρα!

Το 1841, ο **William Rutherford** (1798–1871), βασίστηκε σε ένα τύπο του Machin,
$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\tan \frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\tan \frac{1}{70}\right) + \arctan\left(\tan \frac{1}{99}\right)$$
 και κατέληξε σε 208 δεκαδικά ψηφία, από τα οποία σωστά ήταν τα 152. Το 1853 προσπάθησε ξανά, αυτή τη φορά με τον παραδοσιακό τύπο του Machin και σημείωσε το ρεκόρ των 440 δεκαδικών ψηφίων.

Ο **Johann Martin Zacharias Dase** ή Dahse (1824–1861) καταλαμβάνει μια ιδιαίτερη θέση στην ιστορία των μαθηματικών. Ένας από τους φίλους του, ο **L.K. Schulz von Strassnitzky** (1803–1852), του πρότεινε τον ακόλουθο τύπο του Machin
$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\tan \frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\tan \frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\tan \frac{1}{8}\right)$$
 και το 1844, ο Dase υπολόγισε 200 δεκαδικά ψηφία του π . Το εκπληκτικότερο είναι ότι το κατάφερε από μνήμης, σε 2 μόνο μήνες. Ήταν άνθρωπος προικισμένος με απίστευτες υπολογιστικές ικανότητες, ένας πραγματικός ανθρώπινος υπολογιστής. Ο Gauss, ο διασημότερος μαθηματικός της

εποχής του, συνέστησε στις αρχές να τον προσλάβουν και να τον πληρώνουν με την ώρα για να κάνει υπολογισμούς. Μάλιστα, υπήρχε μια σύμβαση για τον υπολογισμό των διαιρετών των αριθμών N , όπως $7.000.000 < N < 10.000.000$ και ο Dase αποδέχθηκε το συμβόλαιο, πέθανε όμως προτού προλάβει να σημειώσει ικανοποιητική πρόοδο. Ο άνθρωπος αυτός ήταν χαρακτηριστική περίπτωση αυτού που αποκαλούμε αυτιστικό σοφό (ή αλλιώς ηλίθιο σοφό), πρόκειται για ανθρώπους εξαιρετικά προικισμένους για τους αριθμούς, ικανούς για απίστευτες ασκήσεις απομνημόνευσης, ελάχιστα όμως, ευφυείς για οτιδήποτε άλλο. Κατάφερε, για παράδειγμα, να πολλαπλασιάζει 2 οκταψηφίους αριθμούς σε λιγότερο από 1 λεπτό. Χρειαζόταν λίγο περισσότερο χρόνο, γύρω στις 9 ώρες, για εκατονταψηφίους αριθμούς. Η μνήμη του ήταν σχεδόν φωτογραφική για να μετρά αντικείμενα, είτε αυτά ήταν πρόβατα, γράμματα ή πούλια του ντόμινο. Μάλλον έχοντας αυτό στο μυαλό του, ο συγγραφέας και επιστήμονας Arthur C. Clarke αναρωτιόταν σε μία επιστολή του προς τον παλαιοντολόγο Stephen Jay Gould, για το ποια θα μπορούσε να είναι η χρησιμότητα, για την εξέλιξη του είδους, της ικανότητας να μπορεί κάποιος να υπολογίζει με το μυαλό του 200 δεκαδικά ψηφία του αριθμού π . Η απάντηση δεν μας είναι γνωστή. Το 1847, ο αυτοδίδακτος Δανός αστρονόμος και μαθηματικός **Thomas Clausen** (1801–1885) κατάφερε να υπολογίσει 248 σωστά δεκαδικά ψηφία, χρησιμοποιώντας δύο τύπους του Machin, τους
$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}, \quad \frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Η αλήθεια είναι ότι είχε υπολογίσει 250 ψηφία και ευτυχώς έκανε λάθος μόνο προς το τέλος. Το 1853, ο Γερμανός συνάδελφός του **Jacob Heinrich Wilhelm Lehmann** (1800–1863) κατάφερε να βρει 261 σωστά δεκαδικά ψηφία. Το όνομά του δόθηκε σε έναν κρατήρα στην Σελήνη και κέρδισε και αυτός την αθανασία. Την επόμενη χρονιά, ο Γερμανός καθηγητής **Richter** κατάφερε να υπολογίσει αρχικώς 330, στην συνέχεια 400 και τελικώς 500 δεκαδικά ψηφία. Ο ερασιτέχνης μαθηματικός **William Shanks** (1812–1882) αφιέρωσε την ζωή του στους υπολογισμούς και εκτός του ότι κατάφερε να υπολογίσει και άλλες σταθερές, το 1875 κατάφερε να βρει 707 δεκαδικά ψηφία του π , επίτευγμα που αποτυπώθηκε σε ένα διάσημο διάζωμα, στο μέλαθρο των ανακαλύψεων, στο Παρίσι. Ωστόσο, η πρόθεση του μουσείου να αποδώσει (το 1937) ένα τέτοιου είδους φόρο τιμής, αποδείχθηκε πολύ δαπανηρή αφού, μετά την απόδειξη του D.F. Ferguson ότι μόνο τα 527 πρώτα δεκαδικά ψηφία ήταν σωστά και τη σχετική δημοσίευσή της, το 1946, στην επιθεώρηση *Nature*, αναγκάστηκε να το τροποποιήσει. Τις υποψίες προκάλεσε το γεγονός ότι ο αριθμός 7 έκανε πολύ συχνά την εμφάνισή του, όπως είχε ήδη επισημάνει και ο **Augustus de Morgan** (1806–1871). Όπως και πολλοί άλλοι που ήρθαν αντιμέτωποι με τόσο τερατώδες υπολογισμούς, ούτε ο ίδιος ο Shanks απέφυγε τα λάθη και ελλείψει αναφορών, πίστευε ότι τα δεκαδικά του ψηφία ήταν σωστά. Πρέπει να θυμόμαστε ότι στην εποχή του δεν υπήρχαν αριθμομηχανές ή υπολογιστές και ότι όλοι οι υπολογισμοί γίνονταν σε χαρτί, σε τεράστιες κόλλες χαρτιού που γέμιζαν αριθμούς. Στο μέλαθρο των ανακαλύψεων, μπορούμε πλέον να δούμε τα ψηφία διορθωμένα, γεγονός που δεν αποτελεί σε καμία περίπτωση ήττα, αλλά ένα πραγματικό φόρο τιμής σε λάθη απολύτως δικαιολογημένα. Γνωρίζουμε πλέον ότι ο Shanks έσφαλε επειδή δεν υπολόγισε το π σε μία μόνο προσπάθεια, αλλά σταδιακά. Δεν πρέπει να ξεχαστεί η προσφορά του **Ferguson**, ο οποίος το 1947 δημοσίευσε 808 δεκαδικά ψηφία του π , που υπολόγισε σε 1 έτος, με μηχανική αριθμομηχανή, πολλή υπομονή και τον ακόλουθο τύπο

$$\frac{\pi}{4} = 3 \arctan\left(\tan \frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\tan \frac{1}{20}\right) + \arctan\left(\tan \frac{1}{1985}\right)$$

Το 1882, ο Γερμανός Lindermann πάγωσε τον ενθουσιασμό όσων αναζητούσαν τα δεκαδικά ψηφία του π , αποδεικνύοντας ότι ο αριθμός αυτός δεν ήταν αλγεβρικός, άρα ούτε κατασκευάσιμος. Ο Lindermann, ήταν εκείνος που απέδειξε ότι ο π είναι αριθμός υπερβατικός και έχει ενδιαφέρον να επισημάνουμε ότι, στην απόδειξη του, που παρουσιάζεται αναλυτικά σε ένα ημερολόγιο με πολλές πυκνογραμμένες σελίδες, δεν χρησιμοποιεί καθόλου γεωμετρία. Με τον τρόπο αυτό, το π βγήκε από το γεωμετρικό του πλαίσιο και αυτό συνέβη την ημέρα που αποδείχθηκε η υπερβατικότητά του.

Η πρωτότυπη απόδειξη του Lindermann βασίζεται στα ίδια μοντέλα που είχε χρησιμοποιήσει μερικά χρόνια νωρίτερα ο **Charles Hermite** (1822–1901) για να αποδείξει την υπερβατικότητα του e , μιας άλλης διάσημης σταθεράς. Ακολούθησαν φυσικά και άλλες αποδείξεις όλο και λιγότερο περίπλοκες, αλλά αυτή η πρώτη ήταν από μόνη της αρκετή για να εκδιωχθεί το π από τον παράδεισο του αγνώστου. Πριν από τον Lindermann ήταν ήδη γνωστό ότι αν υποθέσουμε την υπερβατικότητα του π , ο τετραγωνισμός του κύκλου ήταν αδύνατος. Η απόδειξη του Lindermann, έβαλε οριστικό τέλος σε αυτό το θρυλικό πρόβλημα. Ο τετραγωνισμός του κύκλου ήταν αδύνατος.

15. Τι είναι ένας υπερβατικός αριθμός;

Ένας αριθμός ονομάζεται **αλγεβρικός** όταν αποτελεί λύση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ με συντελεστές $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ που όλοι είναι ρητοί αριθμοί. Αποδεικνύεται ότι, κάθε αριθμός που κατασκευάζεται (χρησιμοποιώντας, κανόνα και διαβήτη πεπερασμένες φορές), είναι αλγεβρικός. Ένας μη αλγεβρικός αριθμός ονομάζεται **υπερβατικός**. Άρα, ένας υπερβατικός αριθμός δεν είναι κατασκευάσιμος.

16. Παραστάσεις με το π

Κάποτε ο λόρδος **Kelvin** έγραψε στον πίνακα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ και απευθυνόμενος

στους ακροατές του, δήλωσε «*Μαθηματικός είναι εκείνος για τον οποίο η εξίσωση αυτή είναι εξίσου προφανής με το $2+2=4$* ». Ο νόμος του Coulomb, ορίζει την ηλεκτρική δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο φορτίων q_1, q_2 που απέχουν απόσταση r και είναι

$F = \frac{|q_1 \cdot q_2|}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$, με ϵ_0 τη σταθερά της διαπερατότητας του κενού. Ο 3^{ος} νόμος του

Kepler, είναι $p^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}$, όπου p είναι η περίοδος, m_1, m_2 οι μάζες, a ο

μεγάλος ημιάξονας και G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας. Η αρχή αβεβαιότητας

(ή απροσδιοριστίας) του Heisenberg $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$ αναφέρεται στη μέση θέση x ενός

σωματιδίου με ορμή p , όπου η τιμή του h είναι μια σταθερά, που ονομάζεται κβάντο δράσης (δράση=ενέργεια x χρόνο) και την ανακάλυψε ο Planck. Η κοσμολογική σταθερά

είναι $\Lambda = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 \cdot c^2} \rho$, όπου G η σταθερά της βαρύτητας, c η ταχύτητα του φωτός και ρ η πυκνότητα ύλης και ακτινοβολίας.

17. Μαθηματικοί τύποι που παρεμβαίνει το π

Οι βασικοί τύποι, αφορούν κυρίως ένα τύπο καμπυλών που ονομάζονται κωνικές τομές, επειδή προκύπτουν από την τομή ενός κώνου και ενός επιπέδου. Σε όσα αναφέρονται στη συνέχεια, ως r εννοείται η ακτίνα.

- Μήκος περιφέρειας: $2\pi r$,
- Επιφάνεια κύκλου: πr^2 ,
- Επιφάνεια σφαίρας $4\pi \cdot r^2$
- Επιφάνειας έλλειψης με ημιάξονες a, b : $\pi \cdot a \cdot b$
- Επιφάνεια κανονικού n -γώνου, με ημιπερίμετρο s : $A = \frac{n \cdot s^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$
- Συνολική επιφάνεια κώνου εκ περιστροφής με γενέτειρα g : $\pi \cdot r(r + g)$
- Όγκος σφαίρας $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$,
- Όγκος έλλειψοειδούς με ημιάξονες a, b, c : $\frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot b \cdot c$
- Όγκος ευθύ κυλίνδρου ύψους h : $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
- Όγκος ευθύ κώνου ύψους h : $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

18. Βασικοί τύποι

Βασικός, ονομάζεται κάθε τύπος που η ανακάλυψη του είχε προηγηθεί της εποχής των υπολογιστών. Στο παρελθόν, οι μαθηματικοί επικεντρώνονταν κυρίως στις μεθόδους που τους επέτρεπαν να βρουν τα ψηφία του π με όσο πιο αποτελεσματικό τρόπο.

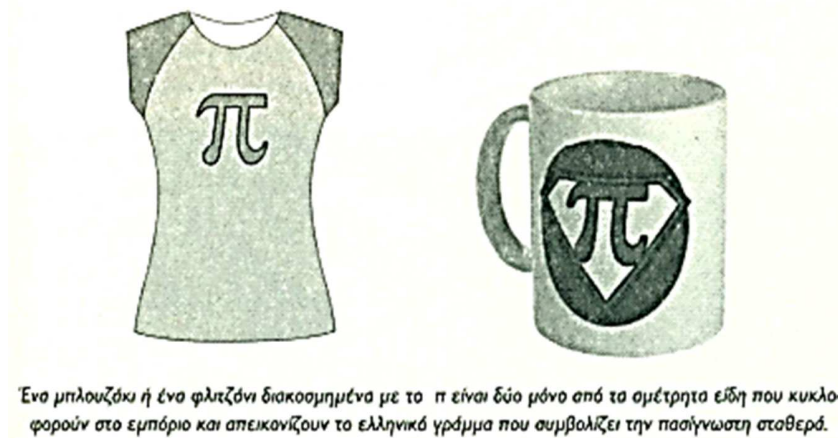
Ο τελευταίος τύπος, είναι ένα μιγαδικό ολοκλήρωμα που ο δρόμος ολοκλήρωσης είναι μία κλειστή καμπύλη που περιελίσσεται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, γύρω από το σημείο $z=0$. Εξίσου σημαντική θέση στον κόσμο του π κατέχουν οι σειρές:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} &= \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}\end{aligned}$$

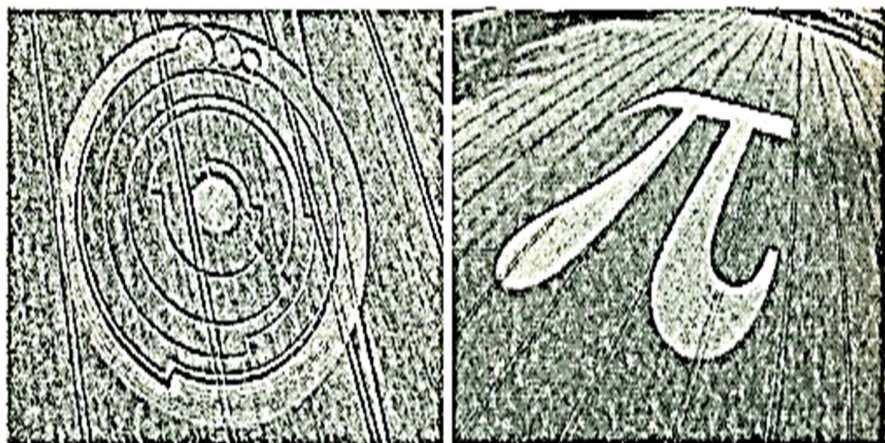
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{\pi}{2} \\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \pi \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x^2} &= \pi \\ \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx &= \frac{22}{7} - \pi \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{\pi}{2} \\ \Phi \frac{dz}{z} &= 2\pi i\end{aligned}$$

19. Η μανία με το π

Το π είναι όντως ένας πολύ ιδιαίτερος αριθμός. Εξαιτίας του ενθουσιασμού, του πάθους, του πραγματικού φανατισμού για το π και τα δεκαδικά του ψηφία δημιουργήθηκε ο όρος «πι-μανία», για να περιγραφεί η εμμονή με τον αριθμό αυτό. Μια περιήγηση στον κόσμο αυτό, είναι διασκεδαστική και ενδιαφέρουσα.



Γύρω από το π έχει αναπτυχθεί και ο τομέας του μάρκετινγκ. Το σύμβολο του π βρίσκεται σε ρούχα (ακόμη και για τα ζώακια συντροφιάς), κουμπιά, μανικετόκουμπα, φλιτζάνια, πιάτα, τσαγιέρες, ρολόγια, mouse pads, ποδιές, λούτρινα αρκουδάκια, μαξιλαράκια, κουτάκια, κεραμικά πλακάκια, εσάρπες, αφίσες, διακοσμητικά αυτοκινήτου. Τα αγρογλυφικά σε χωράφια με καλαμπόκι, έργα υποτίθεται των εξωγήινων, βρέθηκαν έντονα στο προσκήνιο πριν από μερικά χρόνια. Από τη σχετική ανάλυση προέκυψε ότι ο κύκλος της φωτογραφίας αριστερά βασιζόταν στα δεκαδικά ψηφία του π . Υπάρχουν όμως και εκείνα που δεν αφήνουν περιθώρια για αμφιβολίες, όπως φαίνεται στη δεξιά φωτογραφία.

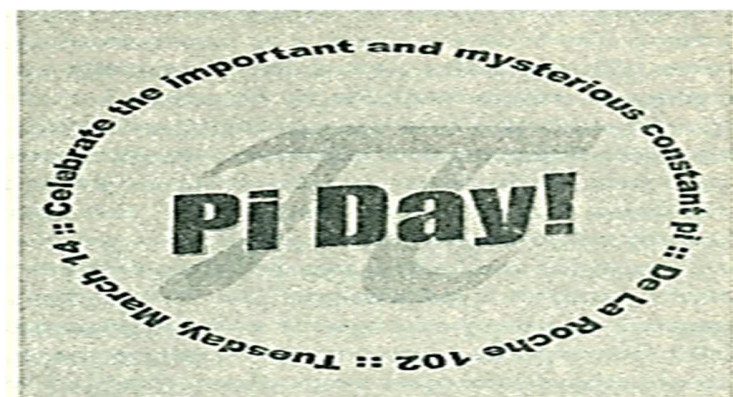


Η ημέρα του π ή όπως την αποκαλούν στα αγγλικά, η **Pi-Day**, είναι η 14^η Μαρτίου, όπως διαβεβαιώνει ο εμπνευστής της, ο Αμερικανός Larry Shaw. Στις ΗΠΑ, η ημερομηνία αυτή γράφεται ως 3/14 ή 3-14 όπως δηλαδή τα πρώτα ψηφία του π .

Μπορεί η κίνηση αυτή να φαίνεται ανόητη, αλλά γνωρίζει ήδη μεγάλη επιτυχία και μοιάζει να εξαπλώνεται σε χιλιάδες πανεπιστήμια.



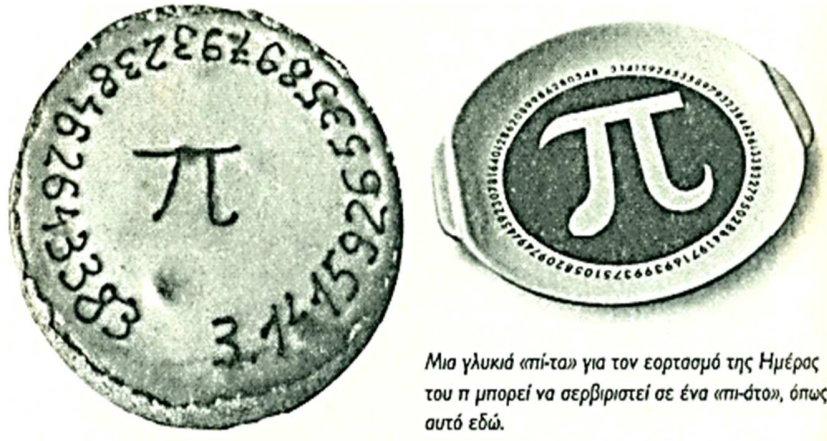
Το αγαπημένο πιάτο των συμμετεχόντων στην ημέρα του π είναι η πίτσα επειδή στο στρογγυλό της σχήμα βρίσκονται τα μυστικά του π . Από αυτούς τους εορτασμούς προέκυψαν πολλών ειδών πρωτοβουλίες. Τυπώθηκαν μέχρι και αφίσες που διαφήμιζαν τις ιδιότητες της πίτσας. Η ημέρα του π συμπίπτει με την ημερομηνία γέννησης του Albert Einstein, γεγονός που αναμφίβολα συμβάλλει στην επιτυχία της γιορτής. Ο αριθμός π συνδέεται και με άλλα γαστριμαργικά προϊόντα, όπως το τυρί, το κρασί και ένα άρωμα.



Η φήμη του συμβόλου π ξεκινά από πολύ παλιά. Το 1915, ήταν το έμβλημα της μοίρας 22 της RAF. Όταν η Google εξέδωσε μετοχές, εκείνες της σειράς A έφθαναν μέχρι τον αριθμό 14.159.265 (ας θυμηθούμε ότι $\pi=3,14159265\dots$). Η μαθηματική κατάρτιση των ιδιοκτητών της Google έφθασε μέχρι το χρηματιστήριο της Wall Street.

Το 1988, η εταιρία Automata UK δημιούργησε ένα παιχνίδι σχετικό με το π , που

λεγόταν Pimania και πρωταγωνιστής του ήταν ο ήρωας Pi-Man. Σήμερα το παιχνίδι αυτό θεωρείται παρωχημένο, αλλά δεν θα ήταν καθόλου παράξενο αν κάποιος αποφάσιζε να το ξαναβγάλει στην αγορά.



Το εντυπωσιακότερο ίσως γεγονός αυτής της λατρείας για το π είναι η μη εμπορική χρήση μίας μηχανής αναζήτησης των ψηφίων του, με στόχο τον εντοπισμό μιας δεδομένης ακολουθίας ψηφίων, μεταξύ των περίπου οκτώ εκατομμυρίων πρώτων δεκαδικών ψηφίων του. Αν κάποιος επιθυμεί να μάθει σε ποιο σημείο αυτής της άπειρης ακολουθίας των ψηφίων βρίσκεται εκείνη που σχηματίζεται από την ημέρα, το μήνα και το έτος της γέννησης του, αρκεί να μπει στο διαδίκτυο, στην μηχανή αναζήτησης *The π -searcher*, να γράψει τον αριθμό αυτό και αν βρίσκεται ανάμεσα στα πρώτα εκατομμύρια ψηφία (αρχικά οκτώ εκατομμύρια, κατόπιν 200 εκατομμύρια και αυξάνονται συνεχώς), ένα μήνυμα θα τον πληροφορήσει σε ποιο σημείο μπορεί να το βρει. Αν δεν υπάρχει, επίσης θα υπάρξει ενημέρωση.

20. Ο κινηματογράφος, η λογοτεχνία και το π

Οι εμφανίσεις του π στην 7^η τέχνη μετριούνται σε χιλιάδες. Σε γενικές γραμμές, πρόκειται απλώς για ανέκδοτα που σκοπό έχουν να προσθέσουν μια αχλή μυστηρίου στις συγκεκριμένες καταστάσεις. Είναι η περίπτωση της ταινίας *Torn Curtain* (*Το σχισμένο παραπέτασμα*) του Άλφρεντ Χίτσκοκ, όπου π είναι το κωδικό όνομα της οργάνωσης διαφυγής προς το ελεύθερο κόσμο. Στο πλαίσιο αυτό, σπανίως εξερευνάται η μαθηματική φύση του αριθμού π , ή γίνεται με τρόπο επιφανειακό, με σκοπό τη δημιουργία των έντονων εντυπώσεων. Αυτό συμβαίνει και στην ταινία π που σκηνοθέτησε το 1998 ο Αμερικάνος Ντάρεν Αρονόφσκι. Η ταινία πραγματεύεται την περιπέτεια της μαθηματικής μεγαλοφυΐας **Max Cohen**, ο οποίος σταδιακά τρελαίνεται λόγω της εμμονής του με κάποια ψηφία. Η ταινία παίζει με την αποκρυφιστική σημασία των αριθμών, μία ιδέα που πλησιάζει την εβραϊκή Καμπάλα, δίνοντας μεγαλύτερη έμφαση στο δραματικό στοιχείο εις βάρος της μαθηματικής ακρίβειας. Μία ακόμη ταινία στην οποία ο αριθμός π έπαιξε βασικό ρόλο είναι η σκηνοθετημένη το 1997 από τον Ρόμπερτ Ζεμέκχ *Contact* (*Επαφή*), με την Τζόντι Φόστερ στο ρόλο της αστρονόμου Eleanor Arroway όπου οι εξωγήινοι υποστηρίζουν ότι στα δεκαδικά ψηφία του π υπάρχει κρυμμένο ένα μήνυμα. Το εγχείρημα θα μπορούσε να είναι μια εξαιρετική ταινία για το

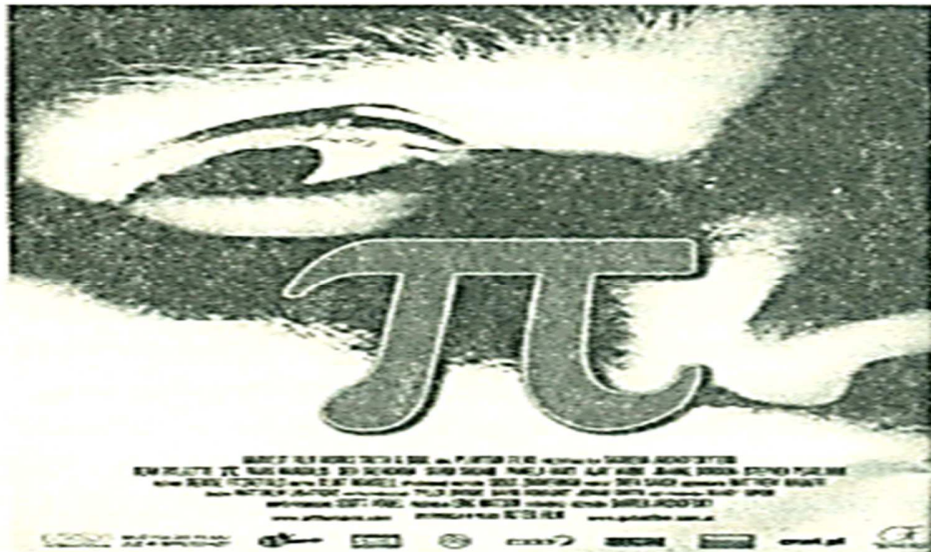
π , αλλά το σενάριο που επιλέχθηκε δεν επικεντρωνόταν τελικά στον αριθμό. Στο πρωτότυπο μυθιστόρημα *Contact*, που συνέγραψε ο διάσημος κοσμολόγος Καρλ Σαγκάν 1985, στο οποίο βασίστηκε η ταινία, ο π παίζει ένα πραγματικά εξαιρετικό ρόλο και προκάλεσε διαμάχες σε επιστημονικό επίπεδο. Ας δούμε με ποιον τρόπο.



Η επαφή είναι μία ταινία με θέμα την πιθανή επαφή με εξωγήινους πολιτισμούς και τα κυρίως θεολογικά προβλήματα, που θα μπορούσαν να ανακύψουν μεταξύ των Γήινων λόγω μίας τέτοιας συνάντησης. Αφηγείται την ιστορία της κοσμολόγου Agnew, δουλεία της οποίας είναι να αφογκράζεται το διάστημα με τη βοήθεια πολλών ραδιοτηλεσκοπίων. Αρχικά, εντοπίζει ένα σήμα που προέρχεται από το μακρινό διάστημα και στη συνέχεια κατασκευάζει ένα μηχάνημα για να δημιουργήσει μία «σκουληκότρυπα» στη δομή του σύμπαντος και να έρθει σε επαφή με τους εξωγήινους.

Αυτοί υποβάλλουν στην Agnew την ιδέα ότι στα δεκαδικά ψηφία του π μπορεί να κρύβεται ένα μυστικό μήνυμα μπερδεμένο με την πραγματικότητα, κάτι που οι εξωγήινοι, δεν θα ήταν σε θέση να παραπονήσουν, αφού μοναδικός δημιουργός του είναι ο Θεός, ο πλάστης του σύμπαντος. Το μήνυμα αυτό, σύμφωνα με τους εξωγήινους, είναι γραμμένο στη δεκαδική παράσταση του π . Μεγάλο μέρος των ψηφίων του αποτελείται από μηδενικά και μονάδες, που μπορούν να διαταχθούν γύρω από ένα τετράγωνο και να σχηματίσουν ένα τέλειο κύκλο. Είναι γραμμένο στη φύση από την αρχή των αιώνων, μέσα στο π . Άραγε το έφτιαξε έτσι ο Θεός; Σε ένα κλασσικό έργο της σύγχρονης χιουμοριστικής λογοτεχνίας, στο διήγημα του Βρετανού Douglas Adams *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy* (Γυρνώντας το γαλαξία με ωτοστόπ), ένας γιγάντιος υπολογιστής μεταφέρει στους ανθρώπους την απάντηση στα ερωτήματα γύρω από τη ζωή, την ύπαρξη, απαντά σχεδόν στα πάντα. Η κάπως αναπάντεχη απάντηση είναι «42». Για κάποιους λάτρεις του π , η απάντηση αυτή υπερέβαινε τα όρια του χιούμορ, την εξέλαβαν ως πρόκληση και στρώθηκαν στη δουλεία. Δεν ασχολήθηκαν με το 42 επειδή του φάνηκε πολύ απλό, αλλά με τη βοήθεια της μηχανής *The π searcher*, έψαξαν για πιο σύνθετους συνδυασμούς όπως 424242, ο οποίος έκανε τελικά την εμφάνισή του στην

θέση 242.423. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η έρευνα αυτή θα συνεχιστεί.



21. Τα πρώτα ψηφία του π

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307
816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231
725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975
665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213
393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892
590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186
117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227938183011949
129833673362440656643086021394946395224737190702179860943702770539217176
293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757789609173
637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129
021960864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059731
732816096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171010003
137838752886587533208381420617177669147303598253490428755468731159562863
882353787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198938
095257201065485863278865936153381827968230301952035301852968995773622599
413891249721775283479131515574857242454150695950829533116861727855889075
098381754637464939319255060400927701671139009848824012858361603563707660
104710181942955596198946767837449448255379774726847104047534646208046684
259069491293313677028989152104752162056966024058038150193511253382430035
587640247496473263914199272604269922796782354781636009341721641219924586
315030286182974555706749838505494588586926995690927210797509302955321165
344987202755960236480665499119881834797753566369807426542527862551818417
574672890977772793800081647060016145249192173217214772350141441973568548
161361157352552133475741849468438523323907394143334547762416862518983569
485562099219222184272550254256887671790494601653466804988627232791786085
784383827967976681454100953883786360950680064225125205117392984896084128

488626945604241965285022210661186306744278622039194945047123713786960956
364371917287467764657573962413890865832645995813390478027590099465764078
951269468398352595709825822620522489407726719478268482601476990902640136
394437455305068203496252451749399651431429809190659250937221696461515709
858387410597885959772975498930161753928468138268683868942774155991855925
245953959431049972524680845987273644695848653836736222626099124608051243
884390451244136549762780797715691435997700129616089441694868555848406353
422072225828488648158456028506016842739452267467678895252138522549954666
727823986456596116354886230577456498035593634568174324112515076069479451
096596094025228879710893145669136867228748940560101503308617928680920874
760917824938589009714909675985261365549781893129784821682998948722658804
857564014270477555132379641451523746234364542858444795265867821051141354
735739523113427166102135969536231442952484937187110145765403590279934403
742007310578539062198387447808478489683321445713868751943506430218453191
048481005370614680674919278191197939952061419663428754440643745123718192
179998391015919561814675142691239748940907186494231961567945208095146550
225231603881930142093762137855956638937787083039069792077346722182562599
661501421503068038447734549202605414665925201497442850732518666002132434
088190710486331734649651453905796268561005508106658796998163574736384052
571459102897064140110971206280439039759515677157700420337869936007230558
763176359421873125147120532928191826186125867321579198414848829164470609
575270695722091756711672291098169091528017350671274858322287183520935396
572512108357915136988209144421006751033467110314126711136990865851639831
501970165151168517143765761835155650884909989859982387345528331635507647
918535893226185489632132933089857064204675259070915481416549859461637180
270981994309924488957571282890592323326097299712084433573265489382391193
259746366730583604142813883032038249037589852437441702913276561809377344
403070746921120191302033038019762110110044929321516084244485963766983895
228684783123552658213144957685726243344189303968642624341077322697802807
318915441101044682325271620105265227211166039666557309254711055785376346
682065310989652691862056476931257058635662018558100729360659876486117910
453348850346113657686753249441668039626579787718556084552965412665408530
614344431858676975145661406800700237877659134401712749470420562230538994
561314071127000407854733269939081454664645880797270826683063432858785698
305235808933065757406795457163775254202114955761581400250126228594130216
471550979259230990796547376125517656751357517829666454779174501129961489
030463994713296210734043751895735961458901938971311179042978285647503203
198691514028708085990480109412147221317947647772622414254854540332157185
306142288137585043063321751829798662237172159160771669254748738986654949
450114654062843366393790039769265672146385306736096571209180763832716641
627488880078692560290228472104031721186082041900042296617119637792133757
511495950156604963186294726547364252308177036751590673502350728354056704
038674351362222477158915049530984448933309634087807693259939780541934144
737744184263129860809988868741326047215695162396586457302163159819319516
735381297416772947867242292465436680098067692823828068996400482435403701
416314965897940924323789690706977942236250822168895738379862300159377647

165122893578601588161755782973523344604281512627203734314653197777416031
990665541876397929334419521541341899485444734567383162499341913181480927
777103863877343177207545654532207770921201905166096280490926360197598828
161332316663652861932668633606273567630354477628035045077723554710585954
870279081435624014517180624643626794561275318134078330336254232783944975
382437205835311477119926063813346776879695970309833913077109870408591337
464144282277263465947047458784778720192771528073176790770715721344473060
570073349243693113835049316312840425121925651798069411352801314701304781
643788518529092854520116583934196562134914341595625865865570552690496520
98580338507224264829397285847831630577756068887644624824685792603953527
734803048029005876075825104747091643961362676044925627420420832085661190
625454337213153595845068772460290161876679524061634252257719542916299193
064553779914037340432875262888963995879475729174642635745525407909145135
711136941091193932519107602082520261879853188770584297259167781314969900
901921169717372784768472686084900337702424291651300500516832336435038951
702989392233451722013812806965011784408745196012122859937162313017114448
464090389064495444006198690754851602632750529834918740786680881833851022
833450850486082503930213321971551843063545500766828294930413776552793975
175461395398468339363830474611996653858153842056853386218672523340283087
112328278921250771262946322956398989893582116745627010218356462201349671
518819097303811980049734072396103685406643193950979019069963955245300545
058068550195673022921913933918568034490398205955100226353536192041994745
538593810234395544959778377902374216172711172364343543947822181852862408
514006660443325888569867054315470696574745855033232334210730154594051655
379068662733379958511562578432298827372319898757141595781119635833005940
873068121602876496286744604774649159950549737425626901049037781986835938
146574126804925648798556145372347867330390468838343634655379498641927056
387293174872332083760112302991136793862708943879936201629515413371424892
830722012690147546684765357616477379467520049075715552781965362132392640
616013635815590742202020318727760527721900556148425551879253034351398442
532234157623361064250639049750086562710953591946589751413103482276930624
743536325691607815478181152843667957061108615331504452127473924544945423
682886061340841486377670096120715124914043027253860764823634143346235189
757664521641376796903149501910857598442391986291642193994907236234646844
117394032659184044378051333894525742399508296591228508555821572503107125
701266830240292952522011872676756220415420516184163484756516999811614101
002996078386909291603028840026910414079288621507842451670908700069928212
066041837180653556725253256753286129104248776182582976515795984703562226
293486003415872298053498965022629174878820273420922224533985626476691490
556284250391275771028402799806636582548892648802545661017296702664076559
042909945681506526530537182941270336931378517860904070866711496558343434
769338578171138645587367812301458768712660348913909562009939361031029161
615288138437909904231747336394804575931493140529763475748119356709110137
751721008031559024853090669203767192203322909433467685142214477379393751
703443661991040337511173547191855046449026365512816228824462575916333039
107225383742182140883508657391771509682887478265699599574490661758344137

522397096834080053559849175417381883999446974867626551658276584835884531
427756879002909517028352971634456212964043523117600665101241200659755851
276178583829204197484423608007193045761893234922927965019875187212726750
798125547095890455635792122103334669749923563025494780249011419521238281
530911407907386025152274299581807247162591668545133312394804947079119153
267343028244186041426363954800044800267049624820179289647669758318327131
425170296923488962766844032326092752496035799646925650493681836090032380
929345958897069536534940603402166544375589004563288225054525564056448246
515187547119621844396582533754388569094113031509526179378002974120766514
793942590298969594699556576121865619673378623625612521632086286922210327
488921865436480229678070576561514463204692790682120738837781423356282360
896320806822246801224826117718589638140918390367367222088832151375560037
279839400415297002878307667094447456013455641725437090697939612257142989
467154357846878861444581231459357198492252847160504922124247014121478057
345510500801908699603302763478708108175450119307141223390866393833952942
578690507643100638351983438934159613185434754649556978103829309716465143
840700707360411237359984345225161050702705623526601276484830840761183013
052793205427462865403603674532865105706587488225698157936789766974220575
059683440869735020141020672358502007245225632651341055924019027421624843
914035998953539459094407046912091409387001264560016237428802109276457931
065792295524988727584610126483699989225695968815920560010165525637567856
672279661988578279484885583439751874454551296563443480396642055798293680
435220277098429423253302257634180703947699415979159453006975214829336655
566156787364005366656416547321704390352132954352916941459904160875320186
837937023488868947915107163785290234529244077365949563051007421087142613
497459561513849871375704710178795731042296906667021449863746459528082436
944578977233004876476524133907592043401963403911473202338071509522201068
256342747164602433544005152126693249341967397704159568375355516673027390
074972973635496453328886984406119649616277344951827369558822075735517665
158985519098666539354948106887320685990754079234240230092590070173196036
225475647894064754834664776041146323390565134330684495397907090302346046
147096169688688501408347040546074295869913829668246818571031887906528703
665083243197440477185567893482308943106828702722809736248093996270607472
645539925399442808113736943388729406307926159599546262462970706259484556
903471197299640908941805953439325123623550813494900436427852713831591256
898929519642728757394691427253436694153236100453730488198551706594121735
246258954873016760029886592578662856124966552353382942878542534048308330
701653722856355915253478445981831341129001999205981352205117336585640782
648494276441137639386692480311836445369858917544264739988228462184490087
776977631279572267265556259628254276531830013407092233436577916012809317
940171859859993384923549564005709955856113498025249906698423301735035804
408116855265311709957089942732870925848789443646005041089226691783525870
785951298344172953519537885534573742608590290817651557803905946408735061
232261120093731080485485263572282576820341605048466277504500312620080079
980492548534694146977516493270950493463938243222718851597405470214828971
117779237612257887347718819682546298126868581705074027255026332904497627

789442362167411918626943965067151577958675648239939176042601763387045499
017614364120469218237076488783419689686118155815873606293860381017121585
527266830082383404656475880405138080163363887421637140643549556186896411
228214075330265510042410489678352858829024367090488711819090949453314421
828766181031007354770549815968077200947469613436092861484941785017180779
306810854690009445899527942439813921350558642219648349151263901280383200
109773868066287792397180146134324457264009737425700735921003154150893679
300816998053652027600727749674584002836240534603726341655425902760183484
030681138185510597970566400750942608788573579603732451414678670368809880
609716425849759513806930944940151542222194329130217391253835591503100333
032511174915696917450271494331515588540392216409722910112903552181576282
328318234254832611191280092825256190205263016391147724733148573910777587
442538761174657867116941477642144111126358355387136101102326798775641024
682403226483464176636980663785768134920453022408197278564719839630878154
322116691224641591177673225326433568614618654522268126887268445968442416
107854016768142080885028005414361314623082102594173756238994207571362751
674573189189456283525704413354375857534269869947254703165661399199968262
824727064133622217892390317608542894373393561889165125042440400895271983
787386480584726895462438823437517885201439560057104811949884239060613695
734231559079670346149143447886360410318235073650277859089757827273130504
889398900992391350337325085598265586708924261242947367019390772713070686
917092646254842324074855036608013604668951184009366860954632500214585293
095000090715105823626729326453738210493872499669933942468551648326113414
611068026744663733437534076429402668297386522093570162638464852851490362
932019919968828517183953669134522244470804592396602817156551565666111359
823112250628905854914509715755390024393153519090210711945730024388017661
503527086260253788179751947806101371500448991721002220133501310601639154
158957803711779277522597874289191791552241718958536168059474123419339842
021874564925644346239253195313510331147639491199507285843065836193536932
969928983791494193940608572486396883690326556436421664425760791471086998
431573374964883529276932822076294728238153740996154559879825989109371712
621828302584811238901196822142945766758071865380650648702613389282299497
257453033283896381843944770779402284359883410035838542389735424395647555
684095224844554139239410001620769363684677641301781965937997155746854194
633489374843912974239143365936041003523437770658886778113949861647874714
079326385873862473288964564359877466763847946650407411182565837887845485
814896296127399841344272608606187245545236064315371011274680977870446409
475828034876975894832824123929296058294861919667091895808983320121031843
034012849511620353428014412761728583024355983003204202451207287253558119
584014918096925339507577840006746552603144616705082768277222353419110263
416315714740612385042584598841990761128725805911393568960143166828317632
356732541707342081733223046298799280490851409479036887868789493054695570
307261900950207643349335910602454508645362893545686295853131533718386826
561786227363716975774183023986006591481616404944965011732131389574706208
847480236537103115089842799275442685327797431139514357417221975979935968
525228574526379628961269157235798662057340837576687388426640599099350500

081337543245463596750484423528487470144354541957625847356421619813407346
854111766883118654489377697956651727966232671481033864391375186594673002
443450054499539974237232871249483470604406347160632583064982979551010954
183623503030945309733583446283947630477564501500850757894954893139394489
921612552559770143685894358587752637962559708167764380012543650237141278
346792610199558522471722017772370041780841942394872540680155603599839054
898572354674564239058585021671903139526294455439131663134530893906204678
438778505423939052473136201294769187497519101147231528932677253391814660
730008902776896311481090220972452075916729700785058071718638105496797310
016787085069420709223290807038326345345203802786099055690013413718236837
099194951648960075504934126787643674638490206396401976668559233565463913
836318574569814719621084108096188460545603903845534372914144651347494078
488442377217515433426030669883176833100113310869042193903108014378433415
137092435301367763108491351615642269847507430329716746964066653152703532
546711266752246055119958183196376370761799191920357958200759560530234626
775794393630746305690108011494271410093913691381072581378135789400559950
018354251184172136055727522103526803735726527922417373605751127887218190
844900617801388971077082293100279766593583875890939568814856026322439372
656247277603789081445883785501970284377936240782505270487581647032458129
087839523245323789602984166922548964971560698119218658492677040395648127
810217991321741630581055459880130048456299765112124153637451500563507012
781592671424134210330156616535602473380784302865525722275304999883701534
879300806260180962381516136690334111138653851091936739383522934588832255
088706450753947395204396807906708680644509698654880168287434378612645381
583428075306184548590379821799459968115441974253634439960290251001588827
216474500682070419376158454712318346007262933955054823955713725684023226
821301247679452264482091023564775272308208106351889915269288910845557112
660396503439789627825001611015323516051965590421184494990778999200732947
690586857787872098290135295661397888486050978608595701773129815531495168
146717695976099421003618355913877781769845875810446628399880600616229848
616935337386578773598336161338413385368421197893890018529569196780455448
285848370117096721253533875862158231013310387766827211572694951817958975
469399264219791552338576623167627547570354699414892904130186386119439196
283887054367774322427680913236544948536676800000106526248547305586159899
914017076983854831887501429389089950685453076511680333732226517566220752
695179144225280816517166776672793035485154204023817460892328391703275425
750867655117859395002793389592057668278967764453184040418554010435134838
953120132637836928358082719378312654961745997056745071833206503455664403
449045362756001125018433560736122276594927839370647842645676338818807565
612168960504161139039063960162022153684941092605387688714837989559999112
099164646441191856827700457424343402167227644558933012778158686952506949
936461017568506016714535431581480105458860564550133203758645485840324029
871709348091055621167154684847780394475697980426318099175642280987399876
697323769573701580806822904599212366168902596273043067931653114940176473
769387351409336183321614280214976339918983548487562529875242387307755955
595546519639440182184099841248982623673771467226061633643296406335728107

078875816404381485018841143188598827694490119321296827158884133869434682
859006664080631407775772570563072940049294030242049841656547973670548558
044586572022763784046682337985282710578431975354179501134727362577408021
347682604502285157979579764746702284099956160156910890384582450267926594
205550395879229818526480070683765041836562094555434613513415257006597488
191634135955671964965403218727160264859304903978748958906612725079482827
693895352175362185079629778514618843271922322381015874445052866523802253
284389137527384589238442253547265309817157844783421582232702069028723233
005386216347988509469547200479523112015043293226628272763217790884008786
148022147537657810581970222630971749507212724847947816957296142365859578
209083073323356034846531873029302665964501371837542889755797144992465403
868179921389346924474198509733462679332107268687076806263991936196504409
954216762784091466985692571507431574079380532392523947755744159184582156
251819215523370960748332923492103451462643744980559610330799414534778457
469999212859999939961228161521931488876938802228108300198601654941654261
696858678837260958774567618250727599295089318052187292461086763995891614
585505839727420980909781729323930106766386824040111304024700735085782872
462713494636853181546969046696869392547251941399291465242385776255004748
529547681
479546700705034799958886769501612497228204030399546327883069597624936151
010243655535223069061294938859901573466102371223547891129254769617600504
797492806072126803922691102777226102544149221576504508120677173571202718
024296810620377657883716690910941807448781404907551782038565390991047759
414132154328440625030180275716965082096427348414695726397884256008453121
406593580904127113592004197598513625479616063228873618136737324450607924
411763997597461938358457491598809766744709300654634242346063423747466608
043170126005205592849369594143408146852981505394717890045183575515412522
359059068726487863575254191128887737176637486027660634960353679470269232
297186832771739323619200777452212624751869833495151019864269887847171939
664976907082521742336566272592844062043021411371992278526998469884770232
382384005565551788908766136013047709843861168705231055314916251728373272
867600724817298763756981633541507460883866364069347043720668865127568826
614973078865701568501691864748854167915459650723428773069985371390430026
653078398776385032381821553559732353068604301067576083890862704984188859
513809103042359578249514398859011318583584066747237029714978508414585308
578133915627076035639076394731145549583226694570249413983163433237897595
568085683629725386791327505554252449194358912840504522695381217913191451
350099384631177401797151228378546011603595540286440590249646693070776905
548102885020808580087811577381719174177601733073855475800605601433774329
901272867725304318251975791679296996504146070664571258883469797964293162
296552016879730003564630457930884032748077181155533090988702550520768046
303460865816539487695196004408482065967379473168086415645650530049881616
490578831154345485052660069823093157776500378070466126470602145750579327
096204782561524714591896522360839664562410519551052235723973951288181640
597859142791481654263289200428160913693777372229998332708208296995573772
737566761552711392258805520189887620114168005468736558063347160373429170

390798639652296131280178267971728982293607028806908776866059325274637840
539769184808204102194471971386925608416245112398062011318454124478205011
079876071715568315407886543904121087303240201068534194723047666672174986
986854707678120512473679247919315085644477537985379973223445612278584329
684664751333657369238720146472367942787004250325558992688434959287612400
755875694641370562514001179713316620715371543600687647731867558714878398
908107429530941060596944315847753970094398839491443235366853920994687964
506653398573888786614762944341401049888993160051207678103588611660202961
193639682134960750111649832785635316145168457695687109002999769841263266
502347716728657378579085746646077228341540311441529418804782543876177079
043000156698677679576090996693607559496515273634981189641304331166277471
233881740603731743970540670310967676574869535878967003192586625941051053
358438465602339179674926784476370847497833365557900738419147319886271352
595462518160434225372996286326749682405806029642114638643686422472488728
343417044157348248183330164056695966886676956349141632842641497453334999
948000266998758881593507357815195889900539512085351035726137364034367534
714104836017546488300407846416745216737190483109676711344349481926268111
073994825060739495073503169019731852119552635632584339099822498624067031
076831844660729124874754031617969941139738776589986855417031884778867592
902607004321266617919223520938227878880988633599116081923535557046463491
132085918979613279131975649097600013996234445535014346426860464495862476
909434704829329414041114654092398834443515913320107739441118407410768498
106634724104823935827401944935665161088463125678529776973468430306146241
803585293315973458303845541033701091676776374276210213701354854450926307
190114731848574923318167207213727935567952844392548156091372812840633303
937356242001604566455741458816605216660873874804724339121295587776390696
903707...

22. Βιβλιογραφία

- Navaro, J. (2011). «Τα μυστικά του αριθμού π», Αθήνα, Εκδόσεις 4π