



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Εφαρμογές του απειροστικού λογισμού στην ιατρική



Σπουδαστής: **Σιγάλας Νικόλαος** (ΑΜ 8257)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς**, Μαθηματικός (Μ.Εδ.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: **2021–2022**

Ημερομηνία ανάθεσης: 24.05.2021

Ημερομηνία κατάθεσης: 17.06.2022

Ημερομηνία εξέτασης:06.2022

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Ένταση της ακτινοβολίας	4
2. Νόμος του Weiss.....	4
3. Χρωμοσώματα του φύλου	4
4. Αναπαραγωγή πληθυσμού	5
5. Δηλητηρίαση πληθυσμού	6
6. Ισότοπο καισίου	7
7. Συχνότητα εμφάνισης παιδικού καρκίνου	7
8. Αριθμός σφυγμών	8
9. Ρυθμός μεταβολής πληθυσμού	9
10. Ακτινοθεραπεία σιγμοειδούς	9
11. Διαστολή κόρης οφθαλμού	10
12. Νόμος Poiseuille I.....	10
13. Πίεση τέλειου αερίου	10
14. Διατομή δισκίων φαρμάκου.....	10
15. Υπερβολική δόση.....	11
16. Συγκέντρωση οξωνίου (PH) I.....	11
17. Συγκέντρωση οξωνίου II.....	12
18. Συγκέντρωση οξωνίου III	12
19. Συγκέντρωση οξωνίου IV	13
20. Ανάπτυξη πληθυσμού βακτηρίων I	13
21. Κίνηση μικροοργανισμού στο αίμα I.....	13
22. Αντίδραση οργανισμού σε φάρμακο	14
23. Μέγιστο κέρδος II.....	14
24. Συγκέντρωση ρυπαντή I.....	15
25. Παράκαμψη αρτηρίας (bypass).....	15
26. Διαστάσεις μεμβράνης II	16
27. Σύγκριση φαρμάκων υπότασης	17
28. Ελάχιστη επιφάνεια σύριγγας.....	17
29. Βέλτιστη παραγωγή φαρμάκου.....	18
30. Ελάχιστο κόστος φαρμάκου	18
31. Κίνηση μικροοργανισμού στο αίμα II	19
32. Συγκέντρωση οξωνίου V	20
33. Χορήγηση δύο φαρμάκων	20
34. Ανάπτυξη του ρυθμού μεταβολής βακτηρίων	21
35. Θνησιμότητα πληθυσμού.....	21
36. Ελάχιστη συγκέντρωση φαρμάκου.....	22
37. Κίνηση σπερματοζωαρίου I.....	22
38. Σύσπαση μυός.....	23
39. Συγκέντρωση αναβολικού	23
40. Ενδοφλέβια ένεση γλυκόζης.....	24
41. Αλκοτέστ.....	24
42. Αντίδραση και ταχύτητα αντίδρασης σε φάρμακο	25

1. Ένταση της ακτινοβολίας

Στη βιοφυσική εμφανίζονται διάφοροι πηγές «ακτινοβολίας»: ηλεκτρομαγνητικά κύματα, ηχητικά κύματα, πυρηνική ακτινοβολία κ.λπ. Υποθέτουμε ότι η πηγή S είναι «σημειακή» και ότι εκπέμπει ενέργεια ομοιόμορφα προς κάθε κατεύθυνσή στο χώρο. Αν E είναι η ενέργεια που εκπέμπεται ανά δευτερόλεπτο, να βρεθεί το όριο στο οποίο τείνει η ένταση της πηγής I, όταν η απόσταση r από την πηγή τείνει στο άπειρο και όταν η r τείνει στο μηδέν.

Η ένταση I της πηγής, είναι εξορισμού ίση με την ενέργεια αν δευτερόλεπτο και ανά μονάδα επιφάνειας, Σημεία του χώρου με ίση ένταση, βρίσκονται στην επιφάνεια σφαίρας με κέντρο την σημειακή πηγή S. Επειδή η επιφάνεια σφαίρας είναι $4\pi r^2$, όπου r η ακτίνα της σφαίρας, έχουμε: $I = \frac{E}{4\pi r^2}$. Άρα

$$\lim_{r \rightarrow 0} I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E}{4\pi r^2} = \frac{E}{4\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} = \infty \text{ και } \lim_{r \rightarrow \infty} I = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{E}{4\pi r^2} = \frac{E}{4\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} = 0.$$

2. Νόμος του Weiss

Ζωντανοί ιστοί ερεθίζονται από ηλεκτρικό ρεύμα, μόνο όταν το ρεύμα φθάσει ή υπερβεί ένα ορισμένο κατώφλι ε , το οποίο εξαρτάται από την διάρκεια t που το ρεύμα διαρρέει τον ιστό. Ο νόμος του Weiss λέει ότι $\varepsilon = \frac{\alpha}{t} + \beta$, $\alpha, \beta > 0$ σταθερές.

Να βρεθεί το όριο του ε όταν το t τείνει στο 0 και όταν το t τείνει στο ∞ .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{t} + \beta \right) = \beta \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha}{t} = \beta + \infty = \infty.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{t} + \beta \right) = \beta \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{t} = \beta + 0 = \beta.$$

3. Χρωμοσώματα του φύλου

Στον άνθρωπο και σε ορισμένο είδος εντόμων, υπάρχουν δύο είδη χρωμοσωμάτων καθορισμού του φύλου, τα X και Y. Τα XX άτομα είναι αρρενα και τα XY άτομα θήλεα. Έστω A και a και α δύο αλληλόμορφα γονίδια. Υποθέτουμε ότι ενώ τα θήλεα άτομα μπορεί να είναι των τριών γονοτύπων AA, Aa ή αα, τα αρρενα άτομα δεν μπορεί να είναι παρά γονότυπου Aa. Αποδεικνύεται ότι κάτω από συνθήκες τυχαίου ζευγαρώματος, οι συχνότητες εμφάνισης των A και α παρουσιάζουν ταλάντωση γύρω από μία τιμή, από γενιά σε γενιά και για την ακρίβεια ότι, αν q_n , είναι η συχνότητα εμφάνισης του αρρενος γονότυπου a στη n-οστή γενιά, τότε $q_n = 0,40 + 0,20(-\frac{1}{2})^{n-1}$. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας q_n , των συχνοτήτων.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \left[40 + 0,20(-\frac{1}{2})^{n-1} \right] = 0,40 + 0,20 \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{2})^{n-1} = 0,40 + 0,20 \cdot 0 = 0,40$$

Παρατήρηση: Παράδειγμα ακολουθίας από την καθημερινή ζωή είναι οι μουσικές κλίμακες και η θύρα 1, θύρα 2, κ.λπ. των γηπέδων, ενώ η σειρά στην οποία περιμένουμε μέχρι να ανοίξει ένα ταμείο και στην οποία προστίθεται και ένα νέο άτομο, ως ακολουθία μερικών αθροισμάτων, είναι σειρά με τη μαθηματική έννοια του όρου.

4. Αναπααραγωγή πληθυσμού

Σε ένα πληθυσμό που πολλαπλασιάζεται γρήγορα, υποθέτουμε ότι τα άτομα γίνονται ενήλικα και ικανά για αναπααραγωγή σε δύο μήνες, ενώ η κύηση διαρκεί έναν μήνα. Υποθέτουμε ακόμη ότι κάθε ζεύγος ενήλικων ατόμων γεννά ένα ζεύγος. Ξεκινώντας από ένα ζεύγος ενήλικων ατόμων να βρεθεί ο αριθμός α_n των ενήλικων

ζευγών στο τέλος του n -οστού μήνα. Ναδειχθεί ότι ή ακολουθία $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

συγκλίνει, όταν $n \rightarrow \infty$ και να βρεθεί το όριο τις.

Στο τέλος του 1^{ου} μήνα υπάρχει 1 ζεύγος ενήλικων (το αρχικό) που έχει γεννήσει ένα νεαρό ζεύγος, έστω Z_1 . Άθροισμα 2 ζεύγη.

Στο τέλος του 2^{ου} μήνα υπάρχει 1 ζεύγος ενήλικων (το αρχικό) που έχει γεννήσει και δεύτερο νεαρό ζεύγος, έστω Z_2 . Άθροισμα 3 ζεύγη.

Στο τέλος του 3^{ου} μήνα υπάρχει 1 ζεύγος ενήλικων (το αρχικό) και ένα 2^ο ζεύγος ενήλικων το Z_1 που έχει τώρα ενηλικιωθεί και το οποίο γεννά και αυτό ένα νεαρό ζεύγος Z_4 , εκτός από τα νεαρά ζεύγη Z_3 που γεννά το αρχικό ζεύγος ενήλικων και το Z_2 που υπάρχει. Άθροισμα 5 ζεύγη.

Στο τέλος του 4^{ου} μήνα υπάρχουν 3 ζεύγη ενήλικων: το αρχικό, το Z_1 που έχει ενηλικιωθεί τον προηγούμενο μήνα και το Z_2 που τώρα ενηλικιώνεται, ενώ έχουν γεννηθεί δύο ακόμη νεαρά ζεύγη, έστω Z_5 και Z_6 από το αρχικό και από το Z_1 . Άθροισμα 8 ζεύγη.

Στο τέλος του 5^{ου} μήνα υπάρχουν 5 ζεύγη ενήλικων: το αρχικό, το Z_1 , Z_2 , το Z_3 , και το Z_4 , που τώρα ενηλικιώνεται, και 8 νεαρά ζεύγη. Άθροισμα 13 ζεύγη κ.λπ. Παρατηρούμε λοιπόν ότι είναι $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=2$, $\alpha_4=3$, $\alpha_5=5$ κ.λπ. Κ.λπ. και ότι ισχύει

$$\alpha_3 = 2 = 1 + 1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\alpha_4 = 3 = 1 + 2 = \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\alpha_5 = 5 = 2 + 3 = \alpha_3 + \alpha_4$$

οπότε γενικά θα είναι $\alpha_{n+1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n$, δηλ. ο κάθε ορός είναι το άθροισμα των 2 προηγούμενων του. Η ακολουθία αυτή λέγεται ακολουθία αριθμών του **Fibonacci** και εκτός από τη γενετική, βρίσκει εφαρμογή στη φυλλοταξινόμηση, όπου μελετώνται τα φυτά σε σχέση με τη διάταξη των φύλλων τους, την απόσταση και τη γωνία στροφής των φύλλων τους.

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία b_n , των λόγων 2 διαδοχικών όρων τις ακολουθίας Fibonacci. Αν η ακολουθία b_n , συγκλίνει σε ένα όριο b , το όριο αυτό τις πληροφορεί ότι η εξέλιξη του πληθυσμού (αύξηση αν $b > 1$, μείωση αν $b < 1$) τείνει να γίνει σταθερή. Υποθέτοντας την ύπαρξη του $\lim_{n \rightarrow \infty} b$ προχωρούμε να υπολογίσουμε την

τιμή του. Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} b = b$, η ακολουθία $c_n = b_n - b$ είναι μηδενική, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Από τη σχέση $\alpha_{n+1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n$, διαιρώντας με a_n , παίρνουμε: $\frac{\alpha_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha_{n-1}}{a_n} + 1$ και

$$\text{επειδή } b_n := \frac{\alpha_{n+1}}{a_n}, \text{ οπότε } b_{n-1} = \frac{\alpha_n}{a_{n-1}}, \text{ έχουμε } b_n = \frac{1}{b_{n-1}} + 1, \text{ ή } c_n + b = \frac{1}{c_{n-1} + b} - 1.$$

Οπότε η τιμή του b είναι η θετική ριζά τις δευτεροβάθμιας τις εξίσωσης, δηλαδή $b = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Ο αριθμός τις είναι γνωστός από το πρόβλημα τις χρυσής τομής στην

ευκλείδεια γεωμετρία. Τη χρυσή τομή ή θεία αναλογία κατά τον **Luca Pacioli** δηλαδή τη διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος AC, με ένα σημείο B μεταξύ A και C, σε μέσο

και άκρο λόγο, δηλαδή σε δύο ευθύγραμμα τμήματα έτσι ώστε $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}$ ή

$(AB)^2 = (AC) \cdot (BC)$ (οπότε ή (3) προκύπτει για $BC=1$), ξανακαλύπτει κανείς να έχει χρησιμοποιηθεί στην αρχιτεκτονική, τις εικαστικές τέχνες, τη μουσική, στο γερμανικό σύστημα DIN, στη θεωρία βελτιστοποίησης, στο χρηματιστήριο, στη θεωρία πληροφοριών. Μένει να αποδειχθεί ότι ή ακολουθία (b_n) συγκλίνει στο b .

Καταρχήν θα δείξουμε επαγωγικά ότι $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(b^n - c^n)$ όπου $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ είναι οι ρίζες του τριωνόμου (3).

- Για $n=1$ είναι $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(b-c) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1$

- Για $n=2$ είναι $a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(b^2 - c^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(b-c)(b+c) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$

- Για $n=3$ είναι $a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(b^3 - c^3) = \frac{1}{\sqrt{5}}(b-c)(b^2 + bc + c^2) = b^2 + c - 1 =$

$$\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} + \frac{1+5-2\sqrt{5}}{4} - 1 = 2 \text{ αφού το γινόμενο των ριζών του (3) είναι } bc=-1,$$

κ.λπ. Δεχόμαστε ότι ή σχέση (4) ισχύει μέχρι $n-1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει και για n :

Ισχύει $a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(b^{n-1} - c^{n-1})$, $a_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(b^{n-2} - c^{n-2})$ και επειδή $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$,

έχουμε ότι $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(b^{n-1} + b^{n-2} - c^{n-1} - c^{n-2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}[b^{n-2}(b+1) - c^{n-2}(c+1)]$. Επειδή τα

a_n και b_n είναι οι ρίζες του (3), έχουμε $b^2 - b - 1 = 0$, δηλαδή $b^2 = b + 1$ και $c^2 = c + 1$

Τότε $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(b^{n-2} + b^2 - c^{n-2} - c^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(b^n - c^n)$

Επειδή $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, θα είναι $b_n = \frac{b^{n+1} - c^{n+1}}{b^n - c^n}$ και επειδή $bc = -1$ έπεται $c = -\frac{1}{b}$. Τότε:

$$b_n = \frac{b^{n+1} - \left(-\frac{1}{b}\right)^{n+1}}{b^n - \left(-\frac{1}{b}\right)^n} = \frac{1}{b} \cdot \frac{b^{2n+2} - (-1)^{n+1}}{b^{2n} - (-1)^n} = \frac{1}{b} \cdot \frac{b^2 + \frac{(-1)^n}{b^{2n}}}{1 - \frac{(-1)^n}{b^{2n}}}$$

Αρά $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{b} \cdot \frac{b^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{b^{2n}}}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{b^{2n}}} = \frac{1}{b} \cdot b^2 = b$, αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{b^{2n}} = 0$

5. Δηλητηρίαση πληθυσμού

Οι κάτοικοι μιας περιοχής υφίστανται δηλητηρίαση, εξαιτίας μιας δηλητηριώδους ουσίας που αναμιγνύεται κατά την παρασκευή του ψωμιού. Τα συμπτώματα εμφανίζονται μετά από εβδομάδες, Υποθέτουμε ότι κάθε άτομο παίρνει,

στη διάρκεια μιας ημέρας μία σταθερή δόση δηλητηρίου δ και ότι ένα ποσοστό $p\%$ δηλητηρίου αποβάλλεται από τον οργανισμό κάθε ατόμου, την επομένη το πρωί. Να βρεθεί η ποσότητα P_n δηλητηρίου στον οργανισμό κάθε ατόμου, μετά από n ημέρες και το όριο που τείνει η ποσότητα αυτή, όταν το $n \rightarrow \infty$.

Η ποσότητα δηλητηρίου P_k στο τέλος τις τυχούσας ημέρας k , είναι ίση με την ποσότητα δηλητηρίου που πήρε το άτομο την προηγούμενη $k-1$ ημέρα, μειωμένη κατά το ποσοστό της που αποβλήθηκε και αυξημένη κατά δ , που είναι η ημερήσια δόση. Δηλαδή είναι $P_k = P_{k-1} - P_{k-1} \cdot \frac{p}{100} + \delta$. Έτσι, επειδή $P_0 = 0$, την 1^η ημέρα η

ποσότητα είναι $P_1 = \delta$, τη 2^η ημέρα η ποσότητα είναι

$$P_2 = P_1 - P_1 \cdot \frac{p}{100} + \delta = \delta + \delta \left(1 - \frac{p}{100}\right) = \delta + \delta q, \text{ όπου } q = 1 - \frac{p}{100}.$$

$$\begin{aligned} \text{Την 3^η ημέρα η ποσότητα είναι } P_3 &= \delta + \delta q - (\delta + \delta q)(1 - q) + \delta \\ &= \delta + \delta q - (\delta + \delta q)(1 - q) + \delta = \delta + \delta q + \delta q^2, \text{ κ.ο.κ.} \end{aligned}$$

Την n -οστή ημέρα η ποσότητα είναι $P_n = \delta + \delta q + \delta q^2 + \dots + \delta q^{n-1}$. Δηλαδή $P_n = \delta(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$, όπου η παρένθεση είναι ο γενικός όρος γεωμετρικής

σειράς με λόγο q . Επειδή είναι $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$, έχουμε $P_n = \delta \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Αρά $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \delta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \delta \cdot \frac{1}{1 - q}$, διότι για $n \rightarrow \infty$ το $q^n \rightarrow 0$, αφού $0 < q < 1$.

6. Ισότοπο καισίου

Το ισότοπο του καισίου ^{137}Cs χάνει το 2,3% της μάζας του ετήσια, λόγω ραδιενεργού διάσπασης. Έστω ότι κάθε χρόνο, η ίδια μάζα M του ^{137}Cs απελευθερώνεται στο περιβάλλον μετά από πυρηνική έκρηξη. Να βρεθεί η ολική μάζα M_n , που θα υπάρχει στο περιβάλλον μετά από n έτη καθώς και η τιμή ισορροπίας. Με ανάλογους συλλογισμούς όπως στην προηγούμενη εφαρμογή, βρίσκουμε ότι στην αρχή του k έτους η μάζα θα είναι. Οπότε στο τέλος του n -οστού

$$\text{έτους } M_n = M \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \text{ όπου } q = 1 - p/100 \text{ και } p = 2,3. \quad M_n = M \frac{1 - (0,977)^{n+1}}{0,023}.$$

Η τιμή ισορροπίας είναι το $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$, δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M \frac{1 - (0,977)^{n+1}}{0,023} = \lim_{n \rightarrow \infty} M \frac{1 - (0,977)^{n+1}}{0,023} = M \frac{1}{0,023} = 43,47M.$$

7. Συχνότητα εμφάνισης παιδικού καρκίνου

Ένα είδος παιδικού καρκίνου, πιστεύεται ότι οφείλεται σε ένα και μόνο κυρίαρχο γονίδιο, έστω A και ότι αν a είναι το φυσιολογικό γονίδιο, μεταλλαγή του a σε A , συμβαίνει σε ποσοστό $m = 0,002\%$ σε κάθε γενεά. Αν υποθεθεί ότι μεταλλαγές του A σε a δεν συμβαίνουν, ότι με ιατρική φροντίδα περίπου το 70% των προσβληθέντων ατόμων επιζούν και ότι τα επιζώντα άτομα αναπαράγονται με συχνότητα ίση με το μισό τις κανονικής, τότε η καθαρή αναλογία αναπαραγωγής προσβληθέντων ατόμων είναι $p = 35\%$. Επειδή το A είναι εξαιρετικά σπάνιο,

δεχόμαστε ότι όλα τα προσβληθέντα άτομα είναι γονοτύπου Αα, αγνοώντας τα άτομα γονοτύπου ΑΑ. Έτσι, μόνο το $\frac{1}{2}$ των παιδιών των προσβληθέντων ατόμων αναμένεται να φέρουν το αλληλόμορφο παθολογικό γονίδιο Α πράγμα το οποίο αντισταθμίζεται από το γεγονός, ότι κάθε άτομο που έχει προσβληθεί, συμμετέχει στην αναπαραγωγική διαδικασία με το ταίρι του που δεν έχει προσβληθεί. Αν υποθεθεί ότι σε κάποια προηγούμενη γενιά δεν υπήρξε καμία περίπτωση ατόμου που να έχει προσβληθεί, να βρεθεί ή συχνότητα σ_n , εμφάνισης ατόμων που έχουν προσβληθεί, μετά από n διαδοχικές γενιές, καθώς και το $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$.

Οι μεταλλαγές κατά τη n γενεά θα είναι σε ποσοστό m .

Οι μεταλλαγές κατά τη $n-1$ γενεά θα είναι σε ποσοστό mp .

Οι μεταλλαγές κατά την $n-2$ γενεά θα είναι σε ποσοστό mp^2 , κ.ο.κ.

Οι μεταλλαγές κατά την αρχική (0) γενεά θα είναι σε ποσοστό mp^n .

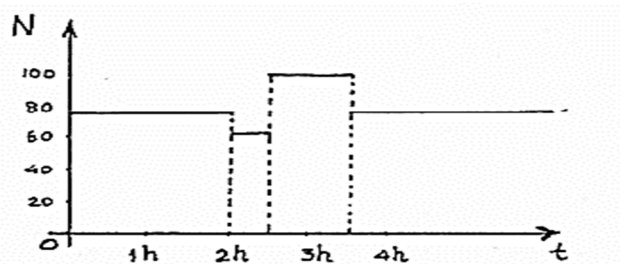
Έτσι έχουμε $\sigma_n = m + mp + mp^2 + mp^n = m \frac{1-p^{n+1}}{1-p}$, οπότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m \frac{1-p^{n+1}}{1-p} = m \frac{1}{1-p} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{1-0,35} = 3,08 \cdot 10^{-5}$$

8. Αριθμός σφυγμών

Έστω $N = f(t)$ ο αριθμός των σφυγμών ενός ατόμου ανά min ως συνάρτηση του χρόνου. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής. Κάτω από κανονικές συνθήκες, ο αριθμός των σφυγμών του ατόμου ανά min είναι σταθερός π.χ. $N=75/\text{min}$. Από διάφορες αίτιες, ο αριθμός των σφυγμών ανά min μπορεί να μειωθεί, ή να αυξηθεί παραμένοντας πάλι σταθερός στη μειωμένη, η αυξημένη τιμή για κάποια χρονικά διαστήματα π.χ., ενώ για 2h ήταν 75/min, την επόμενη μισή ώρα πέφτει στο 62/min και για την επόμενη 1h, ανεβαίνει στο 90/min, για να γίνει και πάλι από εκεί και πέρα 75/min. Το παρακάτω σχήμα δίνει τη γραφική παράσταση τις συνάρτησης του παραδείγματος. Η

συνάρτηση $N = f(t)$ είναι μία κλιμακωτή συνάρτηση και άρα δεν είναι συνεχής. Κλιμακωτές και επομένως ασυνεχείς συναρτήσεις του χρόνου, είναι και ο αριθμός των σπινθηρισμών/min, ο αριθμός



των ατόμων του πληθυσμού στον οποίο συμβαίνουν γεννήσεις και θάνατοι, το περιεχόμενο σε H_2O του οργανισμού των ζώων κ.λπ.

Παρατηρήσεις

1) Σχετικά αναφέρουμε ότι τραύμα καλείται η λύση τις συνέχειας του δέρματος.

2) Η συνάρτηση των σφυγμών του νεκρού (ίση με τη μηδενική), ως σταθερά συνάρτηση είναι συνεχής.

3) Θεωρητικά, ο αριθμός των κατοίκων του πλανήτη είναι μία κλιμακωτή συνάρτηση του χρόνου. Επειδή γεννήσεις και θάνατοι σημειώνονται πολύ συχνά, π.χ. ανά sec, ο αριθμός των κατοίκων της Γης πρακτικά μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχής συνάρτηση του χρόνου. Το ίδιο μπορεί να θεωρηθεί και ο αριθμός των ατόμων ενός πληθυσμού βακτηρίων τα οποία πολλαπλασιάζονται και πεθαίνουν με μεγάλη

ταχύτητα. Πρακτικά λοιπόν, η γραφική παράσταση τέτοιων συναρτήσεων είναι μία καμπύλη που δεν διακόπτεται η χάραξή της.

9. Ρυθμός μεταβολής πληθυσμού

Πληθυσμός βακτηρίων $p(t)$ μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε ημέρες) σύμφωνα με τη σχέση $p(t) = 10^4 - 9 \cdot 10^3 (1+t)^{-1}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού τη χρονική στιγμή $t=8$ ημέρες. Για τη συνάρτησή $y = p(t)$, να βρεθεί το $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} - y' \right)$. Ο (στιγμιαίος) ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι

$$p'(t) = 9 \cdot 10^3 - (1+t)^{-2} \text{ για } t = 8 \text{ έχουμε } p'(8) = \frac{9 \cdot 10^3}{(1+8)^2} = \frac{9 \cdot 10^3}{9^2} = \frac{10^3}{9}$$

$$\text{Έξαλλου έχουμε ότι } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} - y' \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} y' = y' - y' = 0$$

10. Ακτινοθεραπεία σιγμοειδούς

Υποθέτουμε ότι η τομή του σιγμοειδούς τμήματος του εντέρου με κατακόρυφο επίπεδο, αποτελείται από δύο καμπύλες όπως στο σχήμα, από τις οποίες η k_1 έχει εξίσωση $z = ae^{-be^{\lambda y}}$, $a, b, \lambda > 0$ σταθερές. Προκειμένου να γίνει ακτινοθεραπεία, να βρεθεί η κλίση της δέσμης των ακτίνων, αν αυτή πρέπει να προσπέσει κάθετα στο σημείο M της k_1 με $y = \frac{1}{\lambda}$ και το βάθος h εντός του έντερου, στο οποίο η ακτινοβολία διατηρεί τα $2/3$ τις έντασης I_0 που έχει στο σημείο M . Ποιο σφάλμα γίνεται στον υπολογισμό του z , όταν στον υπολογισμό του $y = \frac{1}{\lambda}$ γίνεται σφάλμα ίσο e^{-1} ;

Η κλίση θ_k , της δέσμης είναι η κλίση της καθέτου της καμπύλης k_1 στο σημείο M τις. Επειδή $\theta_k \cdot \theta_\varepsilon = -1$, όπου θ_ε , η κλίση της εφαπτομένης της k_1 στο ίδιο σημείο, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη θ_ε . Η θ_ε είναι η τιμή της παραγώγου της εξίσωσης της k_1 , στο σημείο M . Έτσι έχουμε

$$z' = ae^{-be^{\lambda y}} (-be^{\lambda y})' = ae^{-be^{\lambda y}} (-b\lambda e^{\lambda y}) = -ab\lambda e^{-be^{\lambda y}} e^{\lambda y} = -ab\lambda e^{\lambda y - be^{\lambda y}}. \text{ Οπότε για}$$

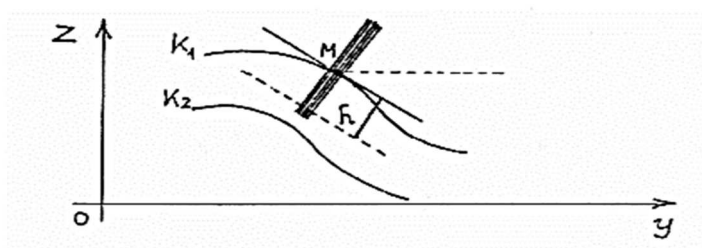
$$y = \frac{1}{\lambda}, \text{ έχουμε } \theta_\varepsilon = ab\lambda e^{1-be}, \text{ άρα } \theta_k = \frac{(ab\lambda)}{e^{1-be}}. \text{ Για να υπολογίσουμε το βάθος } h$$

όπου η ακτινοβολία έχει ένταση $I = \frac{2}{3} I_0$ υποθέτουμε ότι ισχύει ο νόμος των Bouguer

$$\text{– Lambert: } I = I_0 e^{-\mu h}. \text{ Τότε } \frac{I}{I_0} = e^{-\mu h} \text{ και } \ln \frac{I}{I_0} = -\mu h. \text{ Άρα } h = -\frac{1}{\mu} \ln \frac{I}{I_0}.$$

$$\text{Για } I = \frac{2}{3} I_0 \text{ έχουμε τότε } h = -\frac{1}{\mu} \ln \frac{2I_0/3}{I_0} = -\frac{1}{\mu} \ln \frac{2}{3} = -\frac{1}{\mu} (\ln 2 - \ln 3)$$

$$= -\frac{1}{\mu} (0,6931 - 1,0986) = \frac{0,4055}{\mu}. \text{ Για το σφάλμα θα έχουμε}$$



$$\Delta z \cong z' \cdot \delta y = -ab\lambda e^{1-be} e^{-1} = ab\lambda e^{1-be-1} = -ab\lambda e^{-be}$$

11. Διαστολή κόρης οφθαλμού

Η ένταση του φωτός I , είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ακτίνας ρ της κόρης του οφθαλμού. Να βρεθεί πόσο μεταβάλλεται η ένταση I , όταν η κόρη διαστέλλεται, έτσι ώστε η ακτίνα της να μεταβάλλεται κατά $\delta\rho=0,1\text{cm}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε ότι $I=\lambda\rho^2$. Η ζητούμενη μεταβολή είναι $\Delta \cong dI = I'd\rho$. Άρα

$$\Delta I \cong (\lambda\rho^2)' \delta\rho = 2\lambda\rho\delta\rho = 2\lambda\rho \cdot 0,1 = 0,2\lambda\rho.$$

12. Νόμος Poiseuille I

Η αντίσταση R που συναντά το αίμα κατά την κυκλοφορία του στα αιμοφόρα αγγεία, δίνεται κατά το νόμο του Poiseuille, από τον τύπο $R = k \frac{\mu}{\rho^4}$ όπου k σταθερά,

ρ η ακτίνα του αγγείου που θεωρείται κυλινδρικό και μ το μήκος του. Να βρεθεί η μεταβολή που υφίσταται η αντίσταση R για δύο αγγεία του ίδιου μήκους και των οποίων οι ακτίνες διαφέρουν κατά $\delta\rho=0,003\text{ m}$, καθώς και για δύο αγγεία ίδιας ακτίνας, που τα μήκη τους διαφέρουν κατά $\delta\mu=0,003\text{m}$. Η ζητούμενη μεταβολή είναι

$$\Delta\rho \cong R' \cdot \delta\rho = \left(k \frac{\mu}{\rho^4} \right)' \cdot \delta\rho = -4k\mu\rho^{-5} \cdot 0,003 = -0,012k\mu\rho^{-5} \text{ για αγγεία του ίδιου}$$

μήκους μ . Για αγγεία ίδιας ακτίνας, η μεταβολή τις αντίστασης είναι

$$\Delta R \cong R' \cdot \delta\mu = \left(k \frac{\mu}{\rho^4} \right)' \cdot \delta\mu = k\rho^{-4} \cdot \delta\mu = 0,003k\rho^{-4}. \text{ Παρατηρούμε ότι στη δεύτερη}$$

περίπτωση, επειδή η R είναι γραμμική συνάρτηση του μ , έχουμε

$$\Delta R = R_2 - R_1 = k \frac{\mu_1}{\rho^4} - k \frac{\mu_2}{\rho^4} = \frac{k}{\rho^4} (\mu_2 - \mu_1) = \frac{k}{\rho^4} \delta\mu = R' \delta\mu, \quad \text{όπου } R_1, \quad R_2 \text{ οι}$$

αντιστάσεις για μήκη μ_1 και μ_2 αντίστοιχα.

13. Πίεση τέλειου αερίου

Η πίεση τέλειου αερίου δίνεται από τον τύπο $P = \frac{nRT}{V}$, όπου n το μοριακό

βάρος, R σταθερά, T η θερμοκρασία και V ο όγκος του αερίου. Αν $n=1,22$ γραμμομόρια, $T=300^\circ\text{ K}$ και $R=0,8205$, ποιο σφάλμα ΔP γίνεται στη μέτρηση της πίεσης του αερίου, όταν ο όγκος του είναι $V=2\text{ litres}$, μετρημένος με σφάλμα ΔV

$$=0,01\text{ litres}; \text{ Το σφάλμα είναι } \Delta P \cong P' \cdot \Delta V = \left(\frac{nRT}{V} \right)' \cdot \Delta V = -nRTV^{-2} \cdot \Delta V$$

$$= \frac{-1,22 \cdot 0,8205 \cdot 300 \cdot 0,01}{4} = -0,0751.$$

14. Διατομή δισκίων φαρμάκου

Τα δισκία φαρμάκου έχουν κυκλική διατομή ακτίνας ρ και αποφασίζεται η αλλαγή του σχήματός τους. Να βρεθεί το σφάλμα στον υπολογισμό τις πλευράς y του τετραγώνου που τετραγωνίζει τον κύκλο ακτίνας ρ , όταν αντί για $\pi=3,14$ πάρουμε το π ίσο με 4. Το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας ρ είναι $E=\pi\rho^2$ και θέλουμε το εμβαδόν

αυτό να είναι ίσο με το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς y . Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς y είναι ίσο με y^2 . Άρα, πρέπει $y^2 = \pi r^2$, απ' όπου έχουμε $y = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$.

Αν, επειδή η $\sqrt{3,14}$ δεν βγαίνει ακριβώς, πάρουμε $\pi=4$ αντί 3,14 κάνουμε σφάλμα $4-3,14=0,86$. Τότε, το σφάλμα στον υπολογισμό της πλευράς y θα είναι

$$\Delta y \cong y' \cdot 0,86 = \left(r\sqrt{\pi} \right)' \cdot 0,86 = \frac{1}{2} r \pi^{-1/2} \cdot 0,86 = \frac{\rho}{2} \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot 0,86 = 0,215\rho$$

15. Υπερβολική δόση

Ένα φάρμακο χορηγείται με ένεση. Η σύριγγα είναι κυλινδρική με ακτίνα βάσης $r=0,7$ cm. Αν από σφάλμα χορηγηθούν $0,3 \text{ cm}^3$ παραπάνω, τότε επέρχεται ο θάνατος. Θα προκαλέσει ή όχι το θάνατο, η αύξηση του ύψους h του φαρμάκου στη σύριγγα κατά $0,2$ cm; Ο όγκος του φαρμάκου στην κυλινδρική σύριγγα είναι $V = \pi r^2 h$. Πρέπει να βρούμε αν η αύξηση του ύψους του φαρμάκου κατά $\delta h = 0,2$, επιφέρει αύξηση του όγκου του ΔV , μεγαλύτερη ή μικρότερη από $0,3$ cm, για να δούμε αν θα επέλθει ο θάνατος, ή όχι. Είναι

$$\Delta V \cong V' \cdot \delta h = \left(\pi r^2 h \right)' \cdot \delta h = \pi r^2 \cdot \delta h = 3,14 \cdot 0,7^2 \cdot 0,2 = 0,30772 > 0,3 \text{ Άρα, η δόση είναι θανατηφόρα.}$$

16. Συγκέντρωση οξωνίου (PH) I

Είναι γνωστό, ότι η συγκέντρωση υδρωνίου ($[\text{H}_3\text{O}^+]$) αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα για τους ζωντανούς ιστούς. Για την μέτρησή του (επειδή αυτή είναι τις τάξης του 10^{-2} ως 10^{-12} mol/l περίπου), αντί να υπολογίζουμε την ίδια τη συγκέντρωση, υπολογίζουμε τον αρνητικό δεκαδικό λογάριθμό της, που συμβολίζεται με pH. Υποθέτουμε ότι σε κάποια μέτρηση, η $[\text{H}_3\text{O}^+]$, ως συνάρτηση του χρόνου, δίνεται από τη σχέση $c(t) = e^{t^2-4t-1}$. Να βρεθεί το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του pH όταν ως τιμή του χρόνου t πάρουμε το 1, αντί για την ακριβή 1,002. Από τον ορισμό είναι $pH = -\log c(t)$.

Τότε, λόγω τις σχέσης που συνδέει φυσικούς και δεκαδικούς λογαρίθμους ($\ln x = \ln 10 \cdot \log x$), έχουμε ότι $pH = \frac{1}{\ln 10} PH$, από την οποία υπολογίζοντας το σφάλμα για τη συνάρτηση PH μπορούμε μετά να βρούμε το σφάλμα για το pH, αφού $\Delta pH \cong dpH = \frac{1}{\ln 10} dPH$ και $\Delta PH \cong dPH$. Έτσι

$$\begin{aligned} \Delta PH &\cong (PH)'_1 \cdot \delta t = \left(-\ln c(t) \right)'_1 \cdot \delta t = \left(-\ln e^{t^2-4t-1} \right)'_1 = \left(-t^2 + 4t + 1 \right)'_1 \cdot \delta t \\ &= (-2t + 4)_1 \cdot \delta t = (-2 \cdot 1 + 4) 0,002 = 0,004, \text{ οπου πήραμε } \delta t = 1,002 - 1 = 0,002 \end{aligned}$$

Άρα, το σφάλμα στο pH θα είναι $\Delta pH \cong \frac{1}{\ln 10} 0,004 = \frac{0,004}{2,3026} = 0,0017$. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν υπολογίσουμε το ΔpH απευθείας από τη σχέση $pH = \log c(t)$ (οπότε η παραγωγή είναι δυσκολότερη):

$$\Delta pH \cong (pH)'_1 \cdot \delta t = \left(-\log c(t) \right)'_1 \cdot \delta t = \left(-\log e^{t^2-4t-1} \right)'_1 \cdot \delta t$$

$$= \left[-\frac{\log e}{e^{t^2-4t-1}} \cdot e^{t^2-4t-1} \cdot (t^2-4t-1)' \right]_1 \delta t = -(2t-4)_1 \log e \cdot 0,002$$

$$= (4-2 \cdot 1) \cdot \log e \cdot 0,002 = 0,004 \log e, \text{ όπου } \log e = \frac{1}{\ln 10}.$$

17. Συγκέντρωση οξυνίου II

Στην προηγούμενη εφαρμογή, υποθέσαμε ότι $c(t)=(1+t)^{-4}$ προσεγγισθεί το PH με πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού στην περιοχή του μηδέν. Να ελεγχθεί αν για $t=0,3$ και για $t=0,45$ η διάλυση είναι όξινη ή βασική. Ποιά χρονική στιγμή η διάλυση είναι ουδέτερη; Έχουμε ότι $PH = -\ln c(t) = -\ln(1+t)^{-4} = 4\ln(1+t)$. Έξαλλου για τη

συνάρτηση $f(t) = \ln(1+t)$ έχουμε $f(t) \cong f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2$. Επειδή

$$f(0) = \ln(1+0) = 0, f'(0) = \left[\ln(1+t)' \right]_0 = \left[\ln(1+t)' \right]_0 = \left[(1+t)^{-1} \right]_0 = (1+0)^{-1} = 1$$

$$f''(0) = \left\{ \left[(1+t)^{-1} \right]' \right\}_0 = \left[-(1+t)^{-2} \right]_0 = -(1+0)^{-2} = -1, \text{ έχουμε ότι } f(t) \cong t - \frac{t^2}{2},$$

$$\text{οπότε } PH \cong 4t - \frac{4t^2}{2} = 4t - 2t^2.$$

• Για $t=0,3$ βρίσκουμε ότι $PH \cong 4 \cdot 0,3 - 2 \cdot 0,09 = 1,2 - 0,18 = 1,02$. Τότε $PH = \frac{1}{\ln 10} PH \cong \frac{1,02}{2,3026}$ Επειδή $PH < 7$, η διάλυση είναι όξινη.

• Για $t=0,45$ βρίσκουμε ότι $PH \cong 4 \cdot 0,45 - 2(0,45)^2 = 1,8 - 2 \cdot 0,2025 = 1,8 - 0,405 = 1,395$. Τότε $PH = \frac{1,395}{2,3026}$ και η διάλυση είναι πάλι όξινη αφού $PH < 7$. Η διάλυση είναι ουδέτερη όταν $PH=7$, Τότε $PH = 7 \cdot \ln 10 = 7 \cdot 2,3026 = 16,12$ δηλαδή πρέπει $PH \cong 4t - 2t^2 = 16,12$ από όπου λύνοντας ως προς t βρίσκουμε ότι δεν υπάρχει χρονική στιγμή που η διάλυση να περνά από την ουδέτερη κατάσταση.

18. Συγκέντρωση οξυνίου III

Το $PH = -\ln c(t)$. Αν το PH μεταβάλλεται γραμμικά συναρτήσει του χρόνου και είναι $PH = 1-t$, να βρεθεί πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού που να προσεγγίζει την $c(t)$ σε μία περιοχή γύρω από το μηδέν. Έχουμε ότι $1-t = \ln c(t)$, οπότε $c(t) = e^{t-1} = \frac{1}{e} e^t$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t) = e^t$. Επειδή

$$e^t = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \dots, \forall t \text{ (ανάπτυγμα σε σειρά Maclaurin) και}$$

$$f'(t) = f''(t) = \dots = f^{(n)}(t) \quad \forall n \in N \text{ με } f(0) = f^{(n)}(0) = 1 \text{ έχουμε } \forall n \in N \text{ τελικά}$$

$$\text{ότι } e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots, \forall t. \quad \text{Άρα, } e^t \cong 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}, \text{ οπότε}$$

$$c(t) \cong \frac{1}{e} + \frac{t}{e} + \frac{t^2}{2e} + \frac{t^3}{6e} \text{ είναι το ζητούμενο πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού.}$$

19. Συγκέντρωση οξονίου IV

Στην προηγούμενη εφαρμογή να βρεθεί πότε το pH παρουσιάζει στασιμότητα και ποια η τιμή του τότε. Μία συνάρτηση παρουσιάζει στασιμότητα (είναι στάσιμη) στα κρίσιμα σημεία της, δηλαδή εκεί που η πρώτη παράγωγός της μηδενίζεται. Άρα, επειδή $(PH)' = [-\ln c(t)]' = [-\ln e^{t^2-4t-1}]' = (-t^2 + 4t + 1)' = -2t + 4$ η σχέση $(PH)' = 0$ συνεπάγεται $2t = 4$, ή $t = 2$. Άρα, τη χρονική στιγμή $t = 2$ (κρίσιμη τιμή) το PH παρουσιάζει στασιμότητα και είναι τότε $PH = (-t^2 + 4t + 1)_{t=2} = -4 + 8 + 1 = 5$. Επειδή $pH = \frac{1}{\ln 10} PH$, οπότε $(pH)' = \frac{1}{\ln 10} (PH)'$ και το pH θα παρουσιάζει στασιμότητα, εκεί όπου είναι στασιμότητα και η συνάρτηση PH, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 2$. Η αντίστοιχη τιμή του pH είναι τότε $pH = \frac{1}{\ln 10} \cdot 5 = \frac{5}{2,3026} = 2,17$.

20. Ανάπτυξη πληθυσμού βακτηρίων I

Πληθυσμός βακτηρίων μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες, σύμφωνα με τη σχέση $p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2}$. Να βρεθεί α) ο αρχικός πληθυσμός β) πότε και πόσος είναι ο μέγιστος πληθυσμός.

A) Ο αρχικός πληθυσμός, δηλαδή ο πληθυσμός τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $p(0) = 1000$ βακτήρια.

B) Για να βρούμε το μέγιστο, έχουμε

$$p'(t) = \frac{1000(100 + t^2) - 1000t(2t)}{(100 + t^2)^2} = 10^3 \frac{10^2 - t^2}{(10^2 - t^2)^2}. \text{ Άρα}$$

$p'(t) = 0 \Rightarrow 10^2 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 100$ και $t = \pm 10$. Απορρίπτοντας την τιμή $t = -10$, αφού πρόκειται περί χρόνου και παραγωγίζοντας πάλι, έχουμε

$$p''(t) = 10^3 \frac{-2t(10^2 - t^2)^2 - 2(10^2 - t^2)(10^2 - t^2)2t}{(10^2 - t^2)^4} = 10^3 \frac{2t^3 - 6 \cdot 10^2 t}{(10^2 - t^2)^3} \\ = \frac{2 \cdot 10^3 t (t^2 - 3 \cdot 10^2)}{(10^2 - t^2)^3}$$

$$\text{Για } t=10 \text{ είναι } p''(10) = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10 (10^2 - 3 \cdot 10^2)}{(10^2 + 10^2)^3} = \frac{-4 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^6} = -\frac{1}{2} < 0$$

Άρα, για $t = 10$ ώρες, ο πληθυσμός πράγματι γίνεται μέγιστος και ίσος με

$$p(10) = 10^3 + \frac{10^3 \cdot 10}{10^2 + 10^2} = 10^3 + \frac{10^4}{2 \cdot 10^2} = 10^3 + \frac{10^2}{2} = 1050 \text{ βακτήρια.}$$

21. Κίνηση μικροοργανισμού στο αίμα I

Η ενέργεια που καταναλώνει ένας μικροοργανισμός, κινούμενος στο αίμα ασθενούς με ταχύτητα v , είναι $E = \frac{1}{v} [2(v - 35)^2 + 750]$. Με ποια ταχύτητα πρέπει

να κινηθεί για να καταναλώσει την μικρότερη ενέργεια; Για την εύρεση του

$$\begin{aligned} \text{ελαχίστου, έχουμε } E'(v) &= \frac{\left[2(v-35)^2 + 750\right]' v - \left[2(v-35)^2 + 750\right]}{v^2} \\ &= \frac{4(v-35)v - 2v^2 - 35^2 \cdot 2 + 22 \cdot 35 - 750}{v^2} \\ &= \frac{4v^2 - 4 \cdot 35v - 2v^2 + 4 \cdot 35v - 3200}{v^2} = \frac{2v^2 - 3200}{v^2}. \quad \text{Θέτοντας } v^2 = 1600 \quad \text{και} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \pm \sqrt{1600} = \pm 40. \quad \text{Εξάλλου} \quad E''(v) = \frac{(2v^2 - 3200)' v^2 - 2v(2v^2 - 3200)}{v^4} \\ &= \frac{4v^3 - 4v^3 + 6400v}{v^4} = \frac{6400}{v^3}. \quad \text{Τότε } E''(40) = \frac{6400}{40^3} > 0, \text{ δηλαδή έχουμε τοπικό min.} \end{aligned}$$

$$E_{\min} = E(40) = \frac{2(40-35)^2 + 750}{40} = \frac{50 + 750}{40} = 20 \text{ μονάδες ενέργειας.}$$

Για $v = -40$ προκύπτει τοπικό max, διότι $E''(-40) < 0$.

22. Αντίδραση οργανισμού σε φάρμακο

Η αντίδραση τις οργανισμού σ' ένα φάρμακο είναι $R(x) = x^2(\alpha - x)$, όπου $\alpha > 0$ σταθερά και x η ποσότητα του χορηγούμενου φαρμάκου. Να βρεθεί για ποια ποσότητα x η αντίδραση γίνεται μέγιστη. Έχουμε $R'(x) = 2x(\alpha - x) - x^2 = x(2\alpha - 2x - x) = x(2\alpha - 3x)$.

$$R'(x) = 0 \Rightarrow x(2\alpha - 3x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ και } x = \frac{2\alpha}{3}.$$

Είναι $R''(x) = 2\alpha - 3x - 3x = 2\alpha - 6x$ οποία, αν απορρίψουμε $x = 0$,

γίνεται, για $x = \frac{2\alpha}{3}$, ίση με $R''\left(\frac{2\alpha}{3}\right) = 2\alpha - \frac{12\alpha}{3} - \frac{12\alpha}{3} = 2\alpha - 4\alpha = -2\alpha < 0$. Άρα

$$\text{έχουμε τ. max } R\left(\frac{2\alpha}{3}\right) = \frac{4\alpha^2}{9} \left(a - \frac{2\alpha}{3}\right) = \frac{4\alpha^3}{27}, \text{ για } x = \frac{2\alpha}{3}.$$

23. Μέγιστο κέρδος II

Η τιμή πώλησης τις φαρμάκου έχει καθορισθεί σε 100 €. Το κόστος του συναρτήσει του χρόνου, δίνεται από την σχέση $y = t^2 + 250t^{-1}$. Πότε πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος και κάποιο ήταν αυτό; Το κέρδος συναρτήσει του χρόνου είναι $x = 100 - t^2 - 250t^{-1}$. Για την εύρεση του μέγιστου κέρδους, προχωρούμε ως εξής $x' = -2t - 250t^{-2}$. Θέτουμε $x' = 0$, οπότε $-2t + \frac{250}{t^2} = 0$.

Δηλαδή $\frac{-2t^3 + 250t}{t^2} = 0$, από όπου $2t^3 = 250$ και $t^3 = 125$. Άρα, $t = \sqrt[3]{125} = 5$ είναι η

κρίσιμη τιμή. Επειδή $x'' = -2 - 500t^{-3}$ και για $t = 5$ έχουμε $x'' = -2 - \frac{500}{125} = -6 < 0$,

έπεται ότι πράγματι, για $t = 5$, το κέρδος x γίνεται μέγιστο. Η μέγιστη αυτή τιμή του κέρδους είναι $x = 100 - 5^2 - 250 \cdot 5^{-1} = 100 - 25 - 50 = 100 - 75 = 25$ €.

24. Συγκέντρωση ρυπαντή I

Η συγκέντρωση τις ατμοσφαιρικού ρυπαντή είναι $c(t) = e^{-3t} (6,6 \sin 5t + 3,96 \eta \mu 5t)$, όπου t ο χρόνος σε ώρες. Σήμα συναγερμού για τη διακοπή της κυκλοφορίας, δίνεται όταν $c(t) > 6 \mu \text{gr} / \text{m}^3$. Να βρεθεί πότε και πόσο η μέγιστη συγκέντρωση που παρατηρήθηκε στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 1,2$ ξεπέρασε το επιτρεπόμενο όριο.

Για την εύρεση της μέγιστης συγκέντρωσης προχωρούμε ως εξής

$$\begin{aligned} c'(t) &= (e^{-3t})' (6,6 \sin 5t + 3,96 \eta \mu 5t) + e^{-3t} (6,6 \sin 5t + 3,96 \eta \mu 5t)' \\ &= -3e^{-3t} (6,6 \sin 5t + 3,96 \eta \mu 5t) + e^{-3t} (-5 \cdot 6,6 \eta \mu 5t + 5 \cdot 3,96 \sin 5t) \\ &= e^{-3t} (-19,8 \sin 5t - 11,88 \eta \mu 5t - 33 \eta \mu 5t + 19,8 \sin 5t) = -44,88 e^{-3t} \eta \mu 5t \end{aligned}$$

Θέτοντας $c'(t) = 0$, έχουμε $-44,88 e^{-3t} \eta \mu 5t = 0$, η οποία, επειδή $e^{-3t} \neq 0, \forall t$ μηδενίζεται όταν $\eta \mu 5t = 0 = \eta \mu 0$, δηλαδή όταν $5t = 2k\pi$, ή $5t = (2k+1)\pi$. Από τις

τιμές αυτές του t είναι δεκτές οι τιμές $t=0$ και $t = \frac{\pi}{5}$, αφού από την υπόθεση έχουμε $0 \leq t \leq 1,2$. Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο

$$c''(t) = -44,88 \left[(e^{-3t})' \eta \mu 5t + e^{-3t} \cdot (\eta \mu 5t)' \right] = -44,88 (-3e^{-3t} \eta \mu 5t + 5e^{-3t} \sin 5t).$$

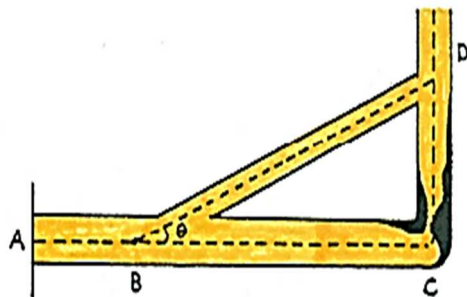
• Για $t = 0$, έχουμε τότε $c''(0) = -44,88 \cdot 5 = -224,4 < 0$

• Για $t = \frac{\pi}{5}$, έχουμε $c''\left(\frac{\pi}{5}\right) = -44,88 \cdot 5 \cdot e^{-\frac{3\pi}{5}} \cdot (-1) = 224,4 e^{-\frac{3\pi}{5}} > 0$.

Άρα, για $t = \frac{\pi}{5}$ η $c(t)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, ενώ για $t=0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το οποίο και ζητείται. Για $t=0$ έχουμε $c(0)=6,6$ ως μέγιστη τιμή τις συγκέντρωσης, Άρα η μέγιστη συγκέντρωση σημειώθηκε με την έναρξη των μετρήσεων ($t=0$) και ήταν κατά $6,6-6=0,6 \mu \text{gr}/\text{m}^3$ μεγαλύτερη από το επιτρεπόμενο όριο.

25. Παράκαμψη αρτηρίας (bypass)

Μία κυλινδρική αρτηρία ABCD ακτίνας ρ_1 έχει υποστεί βλάβη στην περιοχή του C. Η περιοχή αυτή πρόκειται να παρακαμφθεί (να γίνει bypass) με την τοποθέτηση τις κυλινδρικού, τις, αγγείου BD ακτίνας ρ_2 . Υποθέτουμε ότι $\hat{BCD} = 90^\circ$ και θέτουμε $\hat{DBC} = \theta$. Να βρεθεί η γωνία θ για την οποία η αντίσταση που συναντά το αίμα κατά μήκος του δρόμου ABD, γίνεται ελάχιστη (οπότε και η κόπωση τις καρδιάς είναι



μικρότερη). Σύμφωνα με το νομό του Poiseuille, η αντίσταση $R = k \frac{l}{r^4}$, όπου $k > 0$

σταθερά, l το μήκος του αγωγού και r η ακτίνα του. Επομένως, εδώ η ολική αντίσταση θα είναι $R = R_1 + R_2 = k \frac{AB}{\rho_1^4} + k \frac{BD}{\rho_2^4}$. Επειδή $BD = \frac{DC}{\eta \mu \theta}$ και

$AB = AC - BC = AC - DC \sigma\phi\theta$, έχουμε, αν θέσουμε $DC=c$ και $AC=\mu$, ότι $R(\theta) = k \left(\frac{\mu - c\sigma\phi\theta}{\rho_1^4} + \frac{c}{\rho_2^4 \eta\mu\theta} \right)$ όπου μ και c θεωρούνται σταθερά. Παραγωγίζοντας

έχουμε $R'(\theta) = k \left(\frac{c}{\rho_1^4 \eta\mu^2\theta} - \frac{c\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho_2^4 \eta\mu^2\theta} \right) = \frac{kc}{\eta\mu^2\theta} \left(\frac{1}{\rho_1^4} - \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho_2^4} \right)$ από όπου $R'(\theta) = 0$

όταν $\frac{1}{\rho_1^4} - \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho_2^4} = 0$ ή όταν $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\rho_2^4}{\rho_1^4}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$R''(\theta) = \frac{-2kc\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^3\theta} \left(\frac{1}{\rho_1^4} - \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho_2^4} \right) + \frac{kc}{\eta\mu^2\theta} \cdot \frac{\eta\mu\theta}{\rho_2^4}, \text{ ή}$$

$$R''(\theta) = \frac{kc}{\rho_2^4 \eta\mu\theta} - \frac{2kc\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^3\theta} \left(\frac{1}{\rho_1^4} - \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho_2^4} \right) = \frac{kc}{\rho_2^4 \eta\mu\theta} - \frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} R'(\theta).$$

Άρα για $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\rho_2^4}{\rho_1^4}$, η παρένθεση στην προηγούμενη σχέση μηδενίζεται και επειδή

$$\eta\mu\theta = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\rho_2^4}{\rho_1^4} \right)^2} = \frac{\sqrt{\rho_1^8 - \rho_2^8}}{\rho_1^4}. \text{ Παίρνουμε τελικά ότι η τιμή τις}$$

δεύτερης παραγωγού είναι ίση με $\frac{kc\rho_1^4}{\rho_2^4 \sqrt{\rho_1^8 - \rho_2^8}}$, το οποίο είναι > 0 αν $\rho_1 > \rho_2$.

Άρα, έχουμε πράγματι ελάχιστο, όταν $\theta = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu \frac{\rho_2^4}{\rho_1^4}$ (όπου τοξσυν είναι η αντίστροφη συνάρτηση τις συν) και χρησιμοποιούμε αγγείο ΒΔ με ακτίνα $\rho_1 < \rho_2$

Σημείωση. Το $\rho_1 < \rho_2$ απαιτείται και γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta < 1$.

26. Διαστάσεις μεμβράνης II

Οι εξισώσεις των καμπύλων που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης, ως τις το σταυρόνημα μικροσκοπίου, είναι $y = 3 + 2x - x^2$, $y = -2x + x^2/2 + x^3/3$ και $x=2$. Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο, τις στο σχήμα. Ποιες είναι οι ελάχιστες διαστάσεις του πλακιδίου;

Το πλάτος του πλακιδίου θα είναι 2 και το ύψος του ίσο με το άθροισμα τις μέγιστης τις μιας και τις ελάχιστης τιμής της καμπύλης στο διάστημα $[0,2]$. Έτσι για την καμπύλη $y = 3 + 2x - x^2$ έχουμε

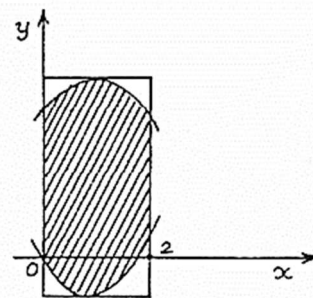
$$y' = 2 - 2x = 2(1-x) \quad y' = 0 \text{ όταν } x=1. \text{ Επειδή } y'' = -2 < 0, \text{ η}$$

καμπύλη αυτή $x=1$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $y_{\max} = 4$.

Για την καμπύλη $y = -2x + x^2/2 + x^3/3$, έχουμε $y' = x^2 + x - 2$, οπότε $y' = 0$ όταν

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = x_1, x_2 = -2, 1. \text{ Επειδή } y'' = 2x+1, \text{ για } x=-2 \text{ η } y'' \text{ έχει την τιμή}$$

$-3 < 0$, οπότε η καμπύλη παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, ενώ για $x=1$ η y'' έχει την



τιμή $3 > 0$, οπότε η καμπύλη παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο: $y_{\min} = -\frac{7}{6}$. Άρα, το ύψος του πλακιδίου είναι $4 + \frac{7}{6} = \frac{31}{6}$.

27. Σύγκριση φαρμάκων υπότασης

Ένα φάρμακο για την υπόταση, υπάρχει σε δισκία και υπόθετα. Η μεταβολή της πίεσης συναρτήσει του χρόνου t , με τη χορήγηση δισκίων είναι $\pi_1(t) = te^{-t}$. Έστω ότι $\pi_2(t) = t^2e^{-t}$. Ποια από τις δύο μορφές του φαρμάκου δίνει μεγαλύτερη μέγιστη πίεση και ποια φέρνει το αποτέλεσμα αυτό πιο γρήγορα;

- Για την $\pi_1(t)$ έχουμε: $\pi_1(t) = (te^{-t})' = e^{-t} - te^{-t} = e^{-t}(1-t)$. Επειδή $e^{-t} \neq 0, \forall t$, παίρνουμε ότι $\pi_1'(t) = 0$ όταν $t_1 = 0$ και $t_2 = 2$. Έτσι $\pi_1''(t) = -e^{-t} - (-e^{-t} - te^{-t}) = -2e^{-t} + te^{-t}$. Άρα $\pi_1''(1) = -2e^{-1}e^{-1} = -e^{-1} < 0$ και η $\pi_1(t)$ παρουσιάζει πράγματι τοπικό μέγιστο για $t = 1$, το οποίο είναι ίσα με $\pi_1(1) = e^{-1}$.
- Για την $\pi_2(t)$ έχουμε: $\pi_2'(t) = 2te^{-t} - t^2e^{-t} = te^{-t}(2-t)$. Επειδή $e^{-t} \neq 0, \forall t$, παίρνουμε ότι $\pi_2'(t) = 0$ όταν $t_1 = 0$ και $t_2 = 2$. Έτσι $\pi_2''(t) = 2e^{-t} + 2te^{-t} + t^2e^{-t} = e^{-t}(t^2 - 4t + 2)$. Άρα $\pi_2''(0) = 2 > 0$ και έχουμε τοπικό ελάχιστο, ενώ $\pi_2''(2) = -2e^{-2} < 0$ και έχουμε τοπικό μέγιστο, ίσο με $\pi_2'(2) = -4e^{-2}$.

28. Ελάχιστη επιφάνεια σύριγγας

Στην προηγούμενη εφαρμογή υποθέτουμε ότι ο όγκος της σύριγγας είναι 64 κυβικές μονάδες και η ακτίνα ρ ακτίνα ύψος της h είναι άγνωστα. Να βρεθεί για ποια ρ και h η σύριγγα έχει ελάχιστη επιφάνεια. Ο όγκος V της κυλινδρικής σύριγγας είναι $V = 64 = \pi\rho^2h$, απ' όπου $h = \frac{64}{\pi\rho^2}$. Η επιφάνεια E της σύριγγας που θεωρείται ανοικτή κατά το ένα άκρο της, είναι $E = \pi\rho^2 + 2\pi\rho h$, όπου $\pi\rho^2$ είναι το εμβαδόν της μιας κυκλικής βάσης και $2\pi\rho h$ είναι το εμβαδόν του σωλήνα της σύριγγας, του οποίου το ανάπτυγμα είναι ορθογώνιο, με βάση το μήκος της περιφέρειας του κύκλου της βάσης και ύψος, το ύψος h της σύριγγας.

Τότε $E(\rho) = \pi\rho^2 + 2\pi\rho \frac{64}{\pi\rho^2} = \pi\rho^2 + \frac{128}{\rho}$. Για ελάχιστη E , θέτουμε $E'(\rho) = 0$, δηλαδή $2\pi\rho - 128\rho^{-2} = 0$, ή $\frac{2\pi\rho^3 - 128}{\rho^2} = 0$ ή $2\pi\rho^3 = 128$ ή $\rho^3 = \frac{128}{2\pi}$ άρα $\rho = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Εξάλλου $E''(\rho) = 256\rho^{-3} + 2\pi$, οπότε για $\rho = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$, παίρνουμε

$E''\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 4\pi + 2\pi = 6\pi > 0$ και συνεπώς πρόκειται πράγματι για τοπικό ελάχιστο.

Είναι τότε
$$E\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = \frac{128}{4} + \pi \left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 = 32\sqrt[3]{\pi} + 16\sqrt[3]{\pi} = 48\sqrt[3]{\pi} \quad \text{τετ. μονάδες η}$$

ελάχιστη τιμή τής επιφάνειας, Για το ύψος $h = \frac{64}{\pi \left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{64}{16\sqrt[3]{\pi}} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$, άρα $h = \rho$.

29. Βέλτιστη παραγωγή φαρμάκου

Πόσα φιαλίδια φαρμάκου πρέπει να παράγει την ημέρα μία φαρμακοβιομηχανία για να έχει μέγιστο κέρδος, αν η παραγωγή x φιαλιδίων φαρμάκου την ημέρα έχει υπολογισθεί ότι της κοστίζει $(25 + 35x + x^2/4)$ €, η δε τιμή πώλησης του φιαλιδίου είναι $(50 - x/2)$ €;

Η είσπραξη από την πώληση x φιαλιδίων είναι $x(50 - x/2)$ δρχ. την ημέρα. Αφού το κόστος των x φιαλιδίων είναι $(25 + 35x + x^2/4)$ €, την ημέρα, το ημερήσιο κέρδος

θα είναι $K(x) = x\left(50 - \frac{x}{2}\right) - \left(\frac{x^2}{4} + 35x + 25\right) = 15x - \frac{3x^2}{4} - 25$.

Τότε $K'(x) = 15x - \frac{6x}{4}$ και $K'(x) = 0 \Rightarrow 60 - 6x = 0$, δηλαδή $x = 10$.

Εξάλλου, έχουμε ότι για $x > 10$, είναι $\frac{60 - 6x}{4} < 0$, δηλαδή, $K'(x) < 0$ ενώ για $x < 10$, είναι $\frac{60 - 6x}{4} > 0$, δηλαδή $K'(x) > 0$.

Συνεπώς, αριστερά του $x = 10$ η συνάρτηση $K(x)$ είναι αύξουσα, ενώ δεξιά του $x = 10$ η $K(x)$ είναι φθίνουσα.

Άρα, για $x = 10$ όπου είναι στάσιμη, έχουμε πράγματι τοπικό μέγιστο $K(10) = 150 - \frac{3 \cdot 10^2}{4} - 25 = 50$ €, μέγιστο ημερήσιο κέρδος, με την παραγωγή 10 φιαλιδίων.

30. Ελάχιστο κόστος φαρμάκου

Έστω x, y , αντίστοιχα, το κόστος δύο φαρμάκων A, B. Αν $y = 3x^2 - 10x + 16$ και το κόστος x συναρτήσει του χρόνου (σε έτη) είναι $x = \frac{t^2 + 1}{t + 1}$, να βρεθεί το ελάχιστο κόστος του φαρμάκου B μετά το πρώτο έτος. Η συνάρτηση κόστους y της οποίας ζητείται το ελάχιστο, είναι σύνθετη συνάρτηση του χρόνου $t: y = y(x)$, όπου

$x = x(t)$. Άρα: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (6x - 10)x'(t) = (6x - 10) \frac{2t(t+1) - (t^2 + 1)}{(t^2 + 1)}$

$$= (6x-10) \frac{2t^2 + 2t - t^2 - 1}{(t+1)^2} = (6x-10) \frac{t^2 + 2t - 1}{(t+1)^2}$$

$$= \left(6 \frac{t^2 + 1}{t+1} - 10 \right) \frac{t^2 + 2t - 1}{(t^2 + 1)^2} = \frac{(6t^2 - 10t - 4)(t^2 + 2t - 1)}{(t+1)^3}. \text{ Η παράγωγος αυτή μηδενίζεται}$$

στις ρίζες των 2 τριωνύμων του αριθμητή της $t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{3}$ και $t_3 = -1 + \sqrt{2}, t_4 = -1 - \sqrt{2}$. Απορρίπτοντας τις αρνητικές τιμές του t , καθώς και την τιμή t_3 (επειδή $t_3 < 1$ και μας ενδιαφέρει πότε το κόστος y γίνεται ελάχιστο μετά τον πρώτο χρόνο), έχουμε να ελέγξουμε μόνον αν η τιμή t_1 καθιστά τη δεύτερη

$$\text{παράγωγο θετική } y''(t) = [(6x-10)x'(t)]' = (6x-10)'x'(t) + (6x-10)x''(t)$$

$$= 6x'(t) \cdot x'(t) + (6x-10)x''(t).$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή $t=2$, ως ρίζα του τριωνύμου $6t^2 - 10t - 4$ μηδενίζει τον παράγοντα $6x-10$ στην προηγούμενη σχέση και άρα

$$y''(2) = 6x'(2) \cdot x'(2) = 6 \left[\frac{2^2 + 2 \cdot 2^{-1}}{(2+1)^2} \right] > 0.$$

Δηλαδή πρόκειται πράγματι για $t_{\min}$. Το $\min$ αυτό κόστος που έχουμε το 2° έτος, είναι

$$y(2) = 3 \left(\frac{2^2 + 1}{2+1} \right)^2 - 10 \frac{2^2 + 1}{2+1} + 16 = \frac{23}{3}$$

31. Κίνηση μικροοργανισμού στο αίμα II

Ένας μικροοργανισμός κινείται μέσα στο αίμα με ταχύτητα v αντίθετα προς τη ροή του αίματος, του οποίου η ταχύτητα είναι σταθερή v_0 . Η ενέργεια που καταναλώνει είναι $E = cv^k t$, όπου $c > 0, k > 2$ σταθερές και t ο χρόνος. Να βρεθεί με ποιά ταχύτητα πρέπει να κινηθεί διατρέχοντας διάστημα s , έτσι ώστε να καταναλώσει την ελάχιστη ενέργεια. Σύμφωνα με τα δεδομένα η κίνηση γίνεται με ταχύτητα $v - v_0$

και κατά αυτή διανύεται διάστημα s . Άρα έχουμε $s(v - v_0)t$, οπότε $t = \frac{s}{v - v_0}$. Τότε

η ενέργεια E , που είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών γίνεται $E = cv^k \frac{s}{v - v_0} = cs v^k (v - v_0)^{-1} = E(v)$.

$$\text{Είναι } E'(v) = cs \left[kv^{k-1} (v - v_0)^{-1} - (v - v_0)^{-2} v^k \right], \text{ ή } E'(v) = cs \frac{v^{k-1} [(k-1)v - kv_0]}{(v - v_0)^2}$$

Άρα $E'(v) = 0$, συνεπάγεται $(k-1)v - kv_0$, οπότε $v = \frac{kv_0}{k-1}$. Παρατηρούμε ότι επειδή $c > 0, s > 0$ και $k > 1$, η $E'(v)$ έχει το πρόσημο του $(k-1)v - kv_0$

$$\text{Αν } v < \frac{kv_0}{k-1} \Rightarrow (k-1)v < kv_0, \text{ δηλαδή } E'(v) < 0 \text{ και η } E(v) \text{ είναι φθίνουσα.}$$

Αν $v > \frac{kv_0}{k-1} \Rightarrow (k-1)v > kv_0$, δηλαδή $E'(v) > 0$ και η $E(v)$ είναι αύξουσα.

Συνεπώς, για $v = \frac{kv_0}{k-1}$ όπου είναι στάσιμη, έχουμε πράγματι $\tau_{\min}$

$$E_{\min} = E\left(\frac{kv_0}{k-1}\right) = cs \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} v_0^{k-1} \text{ που σημειώνεται τη χρονική στιγμή}$$

$$t = \frac{s}{v-v_0} = \frac{s(k-1)}{v_0}.$$

32. Συγκέντρωση οξονίου V

Στο νερό και σε διάλυση, το γινόμενο των συγκεντρώσεων ιόντων υδρωνίου H_3O^+ και ιόντων υδροξυλίου OH^- είναι 10^{-14} . Να βρεθεί για ποια τιμή της συγκέντρωσης ιόντων υδρωνίου, το άθροισμα των παραπάνω συγκεντρώσεων γίνεται ελάχιστο. Καλούμε x τη συγκέντρωση ιόντων υδρωνίου H_3O^+ και y τη συγκέντρωση ιόντων υδροξυλίου OH^- . Τότε $xy = 10^{-14}$. Ζητούμε το ελάχιστο της συνάρτησης έστω $\Sigma = x + y$. Επειδή $y = 10^{-14}$ είναι $\Sigma(x) = x + 10^{-14} \cdot x^{-1}$.

Τότε $\Sigma'(x) = -1 + 10^{-14} \cdot x^{-2}$ και $\Sigma'(x) = 0$, ή $1 - 10^{-14} \cdot x^{-2} = 0$, ή $\frac{x^2 - 10^{-14}}{x^2} = 0$ ή $x \pm 10^{-7}$. Αλλά $\Sigma''(x) = 2 \cdot 10^{-14} x^{-3}$

Άρα $\Sigma''\left(\frac{1}{10^7}\right) = 2 \cdot 10^{-14} \cdot 10^{21} = 2 \cdot 10^7 > 0$ που συνεπάγεται $\tau_{\min}$ για συγκέντρωση ιόντων υδρωνίου ίση με 10^{-7} . (Η άλλη τιμή απορρίπτεται. Δίνει άλλωστε $\tau_{\max}$).

33. Χορήγηση δύο φαρμάκων

Δύο φάρμακα Φ_1 , Φ_2 , χρησιμοποιούνται συγχρόνως για τη θεραπεία ασθένειας. Η αντίδραση R σε χ μονάδες του Φ_1 , και y του Φ_2 , είναι $R(x, y) = x^2 y^2 (a-x)(b-y)$. Για ποια δόση y του Φ_2 η αντίδραση γίνεται μέγιστη, όταν η δόση χ του Φ_1 , παραμένει σταθερή; Επειδή το χ παραμένει σταθερό, η αντίδραση $R(x, y)$, είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής y , οπότε για να βρούμε το μέγιστο παραγωγίζουμε ως προς y (βρίσκουμε δηλ. τη μερική παράγωγο της $R(x, y)$

ως προς y) $\frac{\partial R}{\partial y} = x^2 (a-x) [2y(b-y) - y^2] = x^2 (a-x)(2b-3y)y$, η οποία μηδενίζεται για $y = 0$ και $y = \frac{2b}{3}$, υποθέτοντας ότι $x \neq 0, a$.

Η δεύτερη (μερική) παράγωγος είναι $\frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = x^2 (a-x) [(2b-3y) - 3y] = x^2 (a-x)(2b-6y)$ η οποία, απορρίπτοντας το $y = 0$, για $y = \frac{2b}{3}$, δίνει $-2bx^2(a-x)$. Η παράσταση αυτή, για $a, b > 0$ και $x < a$

είναι αρνητική, οπότε και έχουμε τ μέγιστο ίσο προς $\frac{4x^2(a-x)b^2}{27}$, για την αντίδραση.

34. Ανάπτυξη του ρυθμού μεταβολής βακτηρίων

Ένας πληθυσμός βακτηρίων μεταβάλλεται ως εξής $p(t) = \frac{10^4 e^t}{e^t + 9}$. Να βρεθεί πότε ο ρυθμός μεταβολής του γίνεται μέγιστος και τι είναι τα κρίσιμα σημεία του $p'(t)$, για την $p(t)$. Ζητείται το μέγιστο της συνάρτησης $p'(t)$. Έχουμε

$$p'(t) = \frac{10^4 e^t (e^t + 9)^2 - e^t \cdot 10^4 e^t}{(e^t + 9)^3} = 9 \cdot 10^4 \frac{e^t}{(e^t + 9)^3}.$$

Η παράγωγος αυτής της συνάρτησης

$$\text{είναι} \quad p''(t) = 9 \cdot 10^4 \frac{e^t (e^t + 9)^2 - 2e^{2t} \cdot (e^t + 9)}{(e^t + 9)^4} = 9 \cdot 10^4 \frac{9e^t - e^{2t}}{(e^t + 9)^3}.$$

Τότε

$p''(t) = 0 \Rightarrow 9e^t - 2e^{2t} = 0$, ή $e^t (9 - e^t) = 0$. Επειδή $e^t \neq 0, \forall t \Rightarrow 9 - e^t = 0$, δηλ. $e^t = 9$,
 , οπότε $t = \ln 9$. Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $p'(t)$, δηλαδή η

$$p'''(t) = 9 \cdot 10^4 \frac{(9e^t + 2e^{2t})(e^t + 9)^3 - 3(e^t + 9)^2 (9e^t + 2e^{2t})e^t}{(e^t + 9)^6}$$

$$= 9 \cdot 10^4 \frac{(9e^t + 2e^{2t})(e^t + 9) - 3e^t (9e^t + 2e^{2t})}{(e^t + 9)^4}$$

η οποία για $t = \ln 9$, δηλαδή $e^t = 9$,

γίνεται $p'''(\ln 9) = -2 \cdot 5^4 < 0$. Άρα, πραγματική $p'(t)$ παρουσιάζει τοπικό maximum:
 $p'_{\max}(t) = p'(\ln 9) = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$. Παρατηρούμε ότι τα κρίσιμα σημεία της $p'(t)$
 δηλ. εκείνα για τα οποία $p''(t) = 0$, είναι σημεία καμπής της $p(t)$, αφού τότε η $p'''(t)$ δεν μηδενίζεται.

35. Ονησιμότητα πληθυσμού

Ο αριθμός N των επιζώντων ατόμων ενός πληθυσμού πειραματόζωων, λόγω θνησιμότητας από φυσικές αιτίες, μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t σύμφωνα με τη σχέση $N = ae^{-be^{kt}}$ όπου $a, b, k > 0$ σταθερές. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της συνάρτησης αυτής. Τί παρουσιάζει N' στα σημεία αυτά; Σημεία καμπής έχουμε εκεί όπου $N'' = 0$, ενώ συγχρόνως $N''' \neq 0$. Είναι

$$N' = ae^{-be^{kt}} (-be^{kt})' = -abke^{kt} \cdot e^{-be^{kt}} = abke^{kt-be^{kt}}$$

$$N'' = abke^{kt-be^{kt}} (kt - be^{kt})' = abke^{kt-be^{kt}} (k - bke^{kt}) = abk^2 e^{kt} \cdot e^{kt-be^{kt}} (1 - be^{kt}).$$

Άρα, επειδή $a, b, k > 0$ και $e^{kt-be^{kt}} \neq 0$ θα είναι $N'' = 0$ όταν $1 - be^{kt} = 0$ δηλαδή όταν $e^{kt} = \frac{1}{b}$, ή ακόμη όταν $kt = \ln \frac{1}{b}$, οπότε $t = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{b}$. Η τρίτη παράγωγος είναι:

$$N''' = -abk^2 (1 - be^{kt}) (e^{kt-be^{kt}})' - abk^2 e^{kt-be^{kt}} (1 - be^{kt})'$$

$$= abk^3 e^{kt-be^{kt}} (1 - be^{kt})^2 ab^2 k^3 e^{2kt-be^{kt}}$$

παρατηρούμε ότι για $t = \frac{\ln b^{-1}}{k}$, η παράσταση

$$e^{kt} = e^{k \ln b^{-1}/k} = e^{\ln b^{-1}} = b^{-1} \text{ οπότε } 1 - be^{kt} = 0 \text{ και } e^{2kt-be^{kt}} = b^{-2} e^{-1}.$$

Άρα, για $t = \frac{1nb^{-1}}{k}$, η τιμή της N''' είναι: $\frac{ab^2k^3}{b^2e} = \frac{ak^3}{e} \neq 0$ και μάλιστα > 0 . Συνεπώς, το σημείο $\left(\frac{1nb^{-1}}{k}, \frac{a}{e}\right)$ είναι πράγματι σημείο καμπής της N . Επειδή για $t = k^{-1}1nb^{-1}$, είναι $N'' = 0$, ενώ για την τιμή αυτή του t η N''' είναι θετική, έχουμε τοπικό ελάχιστο για τη συνάρτηση N' , που είναι ίσο με $-\frac{ak}{e}$.

36. Ελάχιστη συγκέντρωση φαρμάκου

Ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης ενός φαρμάκου είναι $4t^3 - 12t - 8$. Να βρεθεί πόση είναι και πότε παρουσιάζεται η ελάχιστη συγκέντρωση $c(t)$, αν η αρχική συγκέντρωση είναι 30 μονάδες. Έχουμε ότι ο $c(t)' = 4t^3 - 12t - 8$. Τότε $c(t)' = 0 \Rightarrow 4t^3 - 12t - 8 = 0$, ή $t^3 - 3t - 2 = 0$, ή $t(t^2 - 1) - 2(t + 1) = 0$, ή $t(t - 1)(t + 1) - 2(t + 1) = 0$, ή $(t - 1)[t(t - 2) - 2] = 0$, ή $(t + 1)(t^2 - t - 2) = 0$. Οι ρίζες είναι $t_1 = -1, t_2 = 2, t_3 = -1$.

Εξάλλου $c''(t) = 12t^2 - 12$. Απορρίπτοντας την τιμή $t = -1$ για $t = 2$ έχουμε $c''(2) = 12 \cdot 2^2 - 12 = 36 > 0$ και άρα πραγματικό τοπικό minimum (Επειδή $c''(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 12 = 0 \Rightarrow 12(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$ και $c'''(t) = 24t$ για $t = -1$ είναι $c'''(-1) = -24 \neq 0$. Άρα, έχουμε σημείο καμπής). Για να βρούμε πόση είναι η ελάχιστη συγκέντρωση, παρατηρούμε ότι $\frac{dc(t)}{dt} = 4t^3 - 12t - 8$, οπότε $dc(t) = (4t^3 - 12t - 8)dt$ και συνεπώς $c(t) = \int (4t^3 - 12t - 8)dt = 4 \int t^3 dt - 12 \int t dt - 8 \int dt$

$$= \frac{4t^4}{4} - 12 \frac{t^2}{2} - 8t + k = t^4 - 6t^2 - 8t + k$$
. Επειδή $c(0) = 30 \Rightarrow k = 30$. Άρα, η συγκέντρωση είναι $c(t) = t^4 - 6t^2 - 8t - 30$ η οποία για $t = 2$ δίνει $c_{\min} = c(2) = 2^4 - 6 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 30 = 6$.

37. Κίνηση σπερματοζωαρίου I

Ένα σπερματοζωάριο κινείται ευθύγραμμα με αρχική ταχύτητα 20 mm/min και επιτάχυνση 32 mm/min², για να γονιμοποιήσει ένα ωάριο. Η ενεργεία που καταναλώνει είναι $E = 3,2v^3t$. Για ποια ταχύτητα v η ενέργεια γίνεται μέγιστη, πόση είναι και πότε γίνεται μέγιστη; Ποια είναι η απόσταση που έχει διατρέξει τότε; Επειδή $\frac{dv}{dt} = \gamma = -32 \Rightarrow dv = -32dt$. Άρα, $v = -32 \int dt = -32t + c$. Επειδή $v_0 = 20 \Rightarrow c = 20$, δηλαδή $v = -32t + 20$, οπότε $t = \frac{20 - v}{32}$. Η ενέργεια γίνεται τότε συνάρτηση μόνον της ταχύτητας v , δηλαδή $E(v) = 3,2v^3 \frac{20 - v}{32} = 0,1v^3(20 - v) = 2v^3 - 0,1v^4$. Παραγωγίζοντας έχουμε

$E'(v) = 6v^2 = 0,4v^3 = v^2(6-0,4v)$, απ' όπου θέτοντας $E'(v) = 0$ παίρνουμε $v^2(6-0,4v) = 0$, δηλαδή $v = 0$ και $v \frac{6}{0,4} = 15$.

Εξάλλου $E''(v) = 12v - 1,2v$, οπότε $E''(15) = 12 \cdot 15 - 1,2 \cdot 15^2 = -90 < 0$.

Άρα, πρόκειται για $t_{\max}$ που συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = \frac{20-15}{32} = \frac{5}{32}$ και δίνει

$E_{\max} = E(15) = 1687,5$ μονάδες ενέργειας.

Για να βρούμε το διάστημα που έχει διανύσει μέχρι τότε, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = \frac{5}{32}$, όπου παρατηρείται η μέγιστη ενέργεια, έχουμε $\frac{ds}{dt} = v = -32t + 20$, οπότε

$$ds = (-32t + 20) dt \text{ και } s = \int (-32t + 20) dt = 20 \int dt - 32 \int t dt = 20t - 16t^2 + k.$$

Για $t=0$ είναι $s=0$, οπότε $k=0$. Άρα, $s = 20t - 16t^2 = t(20 - 16t)$. Συνεπώς για $t = \frac{5}{32}$

έχουμε $s = \frac{5}{32} \left(20 - \frac{16 \cdot 5}{32} \right) = \frac{5}{32} \cdot \frac{35}{2} = \frac{175}{64} \text{ mm}$.

38. Σύσπαση μυός

Η ταχύτητα v με την οποία συσπάτε ένας μυς όταν επιδρά σε αυτόν μία δύναμη F , είναι συνάρτηση της F . Αν γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v είναι ίσος προς $-\frac{c}{(F+a)^2} < 0$ όπου a μία σταθερά, τι συνάρτηση είναι η v ; Να

βρεθεί η v καθώς και ποια μεταβολή υφίσταται η v , όταν η δύναμη F μεταβάλλεται κατά δF ;

α) Έχουμε ότι $v = v(F)$ και $\frac{dv}{dF} - \frac{c}{(F+a)^2} < 0$ είναι φθίνουσα συνάρτηση της F .

β) Από τη σχέση $\frac{dv}{dF} = -\frac{c}{(F+a)^2}$, έχουμε $dv = -\frac{c}{(F+a)^2} dF$, οπότε

$$v = -c \int \frac{dF}{(F+a)^2} = -c \int \frac{d(F+a)}{(F+a)^2} = c(F+a)^{-1} + k$$

Έτσι $v - k = \frac{c}{F+a}$, οπότε $(F+a)(v+b) = c$, όπου θέτουμε $-k = b$. (Η συνάρτηση αυτή παριστάνει μία υπερβολή).

γ) $\Delta v \cong v' \cdot dF = -\frac{c}{(F+a)^2} \delta F$

39. Συγκέντρωση αναβολικού

Ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης αναβολικού στα ούρα ενός αθλητή είναι $c'(t) = -(t^2 - 1)e^t$. Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο ο αθλητής δεν θα βρεθεί ντοπαρισμένος, αν το επιτρεπόμενο όριο για τη $c(t)$ είναι 2 μονάδες και η αρχική συγκέντρωση ήταν ίση με 1 μονάδα. Αφού γνωρίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης, η συνάρτηση θα βρεθεί με ολοκλήρωση. Δηλαδή, επειδή

$$\begin{aligned}\frac{dc(t)}{dt} &= -(t^2 - 1)e^t, \text{ έπεται } dc(t) = -(t^2 - 1)e^t, \text{ οπότε} \\ c(t) &= -\int (t^2 - 1)e^t dt = -\int (t^2 - 1)de^t = -(t^2 - 1)e^t + \int e^t d(t^2 - 1) \\ &= -(t^2 - 1)e^t + 2\int te^t dt = -(t^2 - 1)e^t + 2\int tde^t \\ &= -(t^2 - 1)e^t + 2te^t - 2\int e^t dt = e^t(-t^2 + 2t - 1) + k\end{aligned}$$

Επειδή $c(0)=1$, έχουμε $e^0(-1)+k=1$, ή $k-1=1$ και $k=2$.

Η συγκέντρωση $c(t)=-e^t(t-1)^2+2$ θα φθάσει το επιτρεπόμενο όριο των 2 μονάδων, όταν $-e^t(t-1)^2+2=2$, ή $-e^t(t-1)^2=0$.

Επειδή $e^t \neq 0$, $\forall t \Rightarrow (t-1)^2=0$, οπότε $t=1$.

Άρα, τη χρονική στιγμή $t=1$, η συγκέντρωση του αναβολικού φθάνει το επιτρεπόμενο όριο. Συνεπώς, αν μετά από 1 χρονική μονάδα γίνει ο έλεγχος, ο αθλητής δεν θα θεωρηθεί ντοπαρισμένος. (Πράγματι η συνάρτηση $c(t)$ για $t > 1$ είναι φθίνουσα, για $t=1$ είναι στάσιμη και για $t < 1$ είναι αύξουσα. Άρα το επιτρεπόμενο όριο είναι το μέγιστο της $c(t)$).

40. Ενδοφλέβια ένεση γλυκόζης

Στο αίμα ασθενούς εισάγεται, με ενδοφλέβια ένεση, γλυκόζη με ταχύτητα $-e^{-2t}$ (t ο χρόνος σε s). Ποια ποσότητα γλυκόζης υπάρχει στο αίμα του ασθενούς μετά από χρόνο 30 s, αν αρχικά υπάρχουν στο αίμα του ασθενούς 3/2 μονάδες γλυκόζης; Πού τείνει να σταθεροποιηθεί η ποσότητα γλυκόζης όταν $t \rightarrow \infty$; Αν $Q(t)$ είναι η ποσότητα γλυκόζης που εισάγεται στο αίμα, τότε έχουμε ως δεδομένο ότι $\frac{dQ(t)}{dt} = -e^{-2t}$. Άρα $dQ(t) = -e^{-2t}$, οπότε

$$Q(t) = -\int -e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \int -e^{-2t} d(-2t) = \frac{1}{2} - e^{-2t} + c. \text{ Επειδή } Q(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}e^0 + c = \frac{3}{2}.$$

Άρα $c=1$ Συνεπώς

$$Q(t) = \frac{e^{-2t}}{2} + 1 = \frac{e^{-2t} + 2}{2} = \frac{1 + 2e^{2t}}{2e^{2t}}. \text{ Για } t = 30 \text{ sec} \Rightarrow Q(30) = \frac{1 + 2e^{60}}{2e^{60}}$$

Η τιμή ισορροπίας της $Q(t)$, δηλαδή το $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ είναι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2e^{2t}} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2t}} = 1 + \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2t}} = 1, \text{ αφού}$$

$$e^{2t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty, \text{ οπότε } \frac{1}{2e^{2t}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

41. Αλκοτέστ

Υποθέτουμε ότι η ποσότητα $Q(t)$ του αλκοόλ στο αίμα ενός οδηγού, πριν το αλκοόλ αρχίσει να αποβάλλεται από τον οργανισμό του, μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{1}{t-2}$ όπου t ο χρόνος σε ώρες. Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή > 2 η $Q(t)$ ξεπερνάει τη 1 μονάδα, αν γνωρίζουμε ότι σε 3 ώρες είναι 4 μονάδες.

Επειδή $\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{t-2} \Rightarrow dQ(t) = (t-2)^{-1} dt$, οπότε

$$Q(t) = \int (t-2)^{-1} dt = \int \frac{d(t-2)}{t-2} = \ln|t-2| + c. \quad \text{Επειδή } Q(3) = 4 \Rightarrow \ln|3-2| + c = 4,$$

δηλαδή $\ln 1 + c = 4$. Άρα $c = 4$ και $Q(t) = \ln|t-2| + 4$

Έστω ότι η $Q(t)$ παίρνει την τιμή 1, δηλαδή $\ln|t-2| + 4 = 1$, ή $\ln|t-2| = -3$, ή $-\ln|t-2| = 3$. Πρέπει $t-2 > 0$, δηλαδή $t > 2$. Σε αυτήν την περίπτωση, η σχέση

$$-\ln(t-2) = 3 \text{ δίνει } \ln(t-2)^{-1} = 3, \text{ δηλαδή } e^3 = (t-2)^{-1}, \text{ ή ακόμη } e^3 = \frac{1}{t-2} \text{ και άρα}$$

$$e^3 t - 2e^3 = 1, \text{ ή } t = \frac{1}{e^3} + 2. \text{ Άρα σε } 2 + \frac{1}{e^3} \text{ ώρες φθάνει τη 1 μονάδα.}$$

42. Αντίδραση και ταχύτητα αντίδρασης σε φάρμακο

Η αντίδραση ενός οργανισμού σε ένα φάρμακο δίνεται από τη σχέση $R(t) = 1000 - \int \frac{e^t dt}{e^{2t} + 1}$. Να βρεθεί η τιμή της αντίδρασης και της ταχύτητάς της τη χρονική στιγμή $t = 1$, αν η αρχική αντίδραση είναι μηδέν.

$$R(t) = 1000 - \int \frac{e^t dt}{e^{2t} + 1} = 1000 - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\text{τοξεφ} x + c = -\text{τοξεφ} e^t + c$$

όπου θέσαμε $e^t = x$, οπότε $dx = de^t = e^t dt = x dt$, δηλαδή $dt = \frac{dx}{x}$ και $e^{2t} = x^2$

$$\text{Επειδή } R(0) = 0 \Rightarrow -\text{τοξεφ} e^0 + c = 0, \text{ ή } -\text{τοξεφ} 1 + c = 0, \text{ δηλαδή } c = \text{τοξεφ} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Άρα $R(t) = -\text{τοξεφ} e^t + \frac{\pi}{4}$ Και $R(1) = -\text{τοξεφ} e + \frac{\pi}{4}$. Η ταχύτητα της αντίδρασης

$$\text{είναι } \frac{dR(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(1000 - \int \frac{e^t dt}{e^{2t} + 1} \right) = -\frac{d}{dt} \int \frac{e^t dt}{e^{2t} + 1} = -\frac{e^t}{e^{2t} + 1} \text{ (αφού η παράγωγος του}$$

ολοκληρώματος είναι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση) την οποία, επομένως, βρίσκουμε χωρίς να χρειάζεται να προηγηθεί η ολοκλήρωση. Φυσικά, την $R(t)$ βρίσκουμε και μετά από την ολοκλήρωση, παραγωγίζοντας την (1)

$$R'(t) = \left(-\text{τοξεφ} e^t + \frac{\pi}{4} \right)' = \left(-\text{τοξεφ} e^t \right)' = \frac{-1}{(e^t)^2 + 1} (e^t)' = \frac{-e^t}{e^{2t} + 1}.$$

$$\text{Τέλος } R'(1) = -\frac{e}{e^2 + 1}.$$