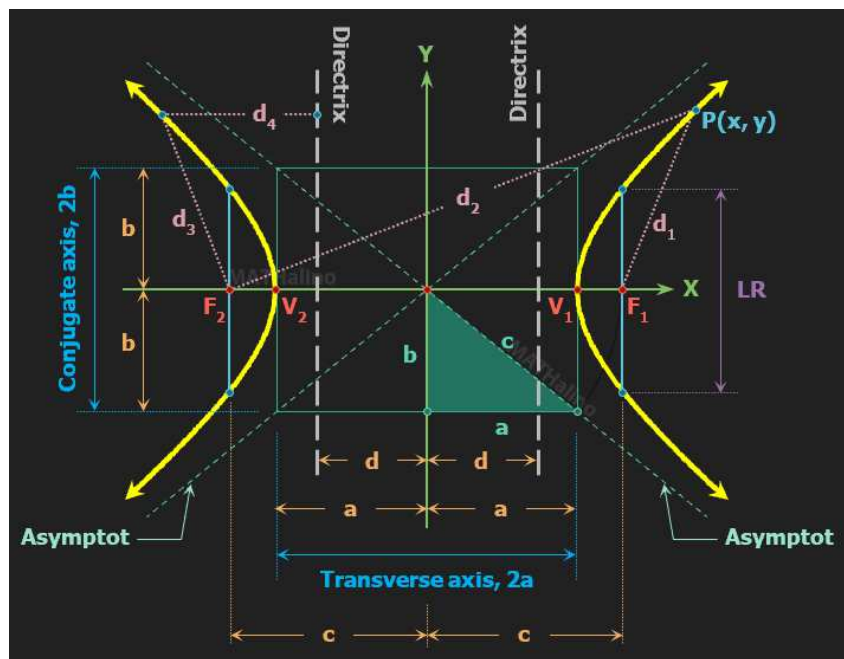




Πτυχιακή εργασία
Η υπερβολή και οι ιδιότητες της



Σπουδαστής: Φρυδάς Σιγάλας Αθανάσιος (AM 6231)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2020–2021

Ημερομηνία ανάθεσης: **01.06. 2021**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **... / 09/ 2021**
 Ημερομηνία εξέτασης: **... / 09 / 2021**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Ιδιαίτερα ικανοποιητική	
2	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	4
1. Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΩΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ	4
2. ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ	5
3. Ιδιότητες της υπερβολής	6
4. Στοιχεία της υπερβολής	7
5. Παραδείγματα	8
7. Συζυγείς υπερβολές	10
8. Ισοσκελής υπερβολή	10
9. Παρατηρήσεις	10
10. Διευθετούσες της υπερβολής $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	12
11. Σχετικές θέσεις ευθείας $\varepsilon: y = \lambda x + k$ και υπερβολής $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	13
12. Εφαπτομένη υπερβολής $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ σε ένα σημείο της P_0	15
13. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	16
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	19

Εισαγωγή

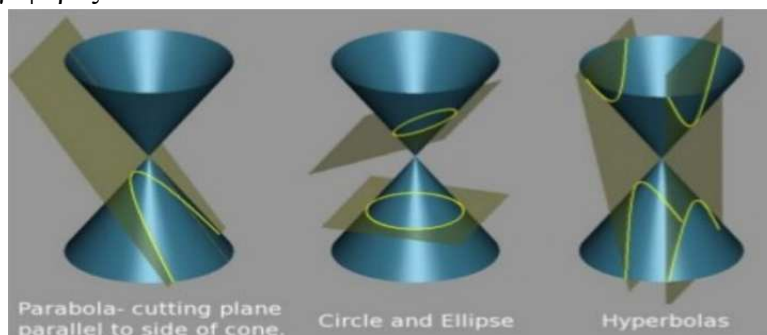
Οι κωνικές τομές που μελετήθηκαν αρχικά στην ελληνική γεωμετρία, περιγράφονται σήμερα από δευτεροβάθμιες εξισώσεις σαν καμπύλες του επιπέδου των συντεταγμένων. Οι Έλληνες της εποχής του Πλάτωνα τις περιέγραψαν σαν τις καμπύλες στις οποίες ένα επίπεδο μπορεί να τμήσει ένα κώνο, για αυτό και το όνομα «κωνική τομή». Ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή λέγονται **κωνικές τομές**, γιατί μπορούν να προκύψουν από την τομή μιας ορθής κωνικής επιφάνειας με ένα επίπεδο, το οποίο δε διέρχεται από την κορυφή της.

Η σημασία αυτών των καμπύλων φαίνεται ότι αρχικά σχετίζονταν με ορισμένα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, όπως για παράδειγμα το περίφημο πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου. Δηλαδή, δοθέντος ενός κύβου, να κατασκευαστεί ένας άλλος με διπλάσιο όγκο. Με αλγεβρικό συμβολισμό, αυτό σημαίνει ότι αν a είναι η πλευρά του αρχικού κύβου, να κατασκευαστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα x που θα είναι η πλευρά του κύβου με όγκο $2a^3$ δηλ. $x^3 = 2a^3$.

Η μελέτη των κωνικών τομών συνεχίστηκε από τους Άραβες και ιδιαίτερα τους Ευρωπαίους μαθηματικούς της Αναγέννησης. Από καθαρά μαθηματική άποψη, η πλέον ουσιαστική εξέλιξη υπήρξε η εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων που οδήγησε βαθμιαία στην αποδέσμευση αυτών των καμπύλων από τον κώνο και στον ορισμό τους ως γεωμετρικών τόπων σημείων, οι συντεταγμένες των οποίων ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων ικανοποιούν μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με 2 μεταβλητές.

Εκείνο όμως που χαρακτηρίζει ιδιαίτερα τη νεώτερη εποχή είναι οι πολλές εφαρμογές των κωνικών τομών σε διάφορους κλάδους της επιστήμης, της τέχνης και της τεχνολογίας. Στην αστρονομία ο Kepler, με το έργο του «Astronomia nova» (1609), έδωσε μια απλή ερμηνεία της κίνησης των πλανητών, αντικαθιστώντας το πολύπλοκο σύστημα των κυκλικών κινήσεων με ελλειπτικές τροχιές.

Συγκεκριμένα, ο 1^{ος} νόμος του Kepler αναφέρει ότι: «Οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις, στη μία εστία των οποίων βρίσκεται ο ήλιος». Η έλλειψη χρησιμοποιήθηκε επίσης στη ζωγραφική για την προοπτική αναπαράσταση του κύκλου, γεγονός που οδήγησε στην επινόηση νέων μεθόδων κατασκευής της από ζωγράφους της Αναγέννησης. Σημαντικές επίσης υπήρξαν οι εφαρμογές των κωνικών τομών στον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό μεγάλων έργων, όπως θόλους εκκλησιών, γέφυρες κ.λπ.



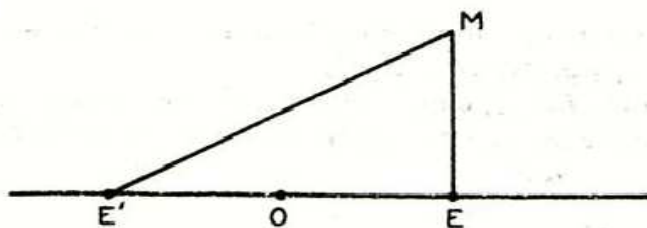
Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε την υπερβολή και τις ιδιότητές της.

1. Η υπερβολή ως γεωμετρικός τόπος

Ορισμός: Υπερβολή λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου IR^2 , για καθένα από τα οποία η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του από δύο σταθερά σημεία είναι σταθερή. Τα δύο σταθερά σημεία λέγονται **εστίες** της υπερβολής και η μεταξύ τους απόσταση λέγεται **εστιακή απόσταση**.

Αν E και E' είναι οι εστίες μιας υπερβολής c , τότε έχουμε τις σχέσεις (σχήμα 1):

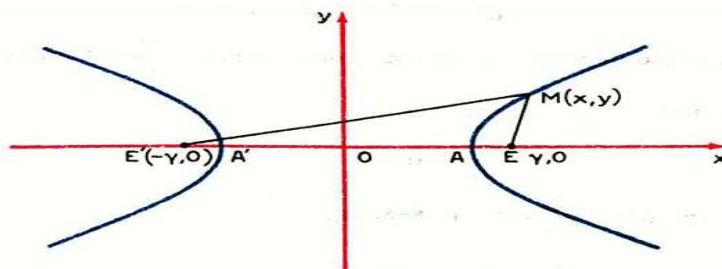
$$|EE'| = 2\gamma \quad \left| |E'M| - |EM| \right| = 2\alpha, \alpha = \text{σταθερό.}$$



Σχήμα 1

2. Εξίσωση της υπερβολής

Για να βρούμε την εξίσωση της υπερβολής, εκλέγουμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy με άξονα των x την ευθεία $E'E$ και άξονα των y τη μεσοκάθετο του $E'E$. Στο σύστημα αυτό οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$. Για το τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της υπερβολής, από το τρίγωνο MEE' , είναι $|ME - ME'| < EE' \Leftrightarrow 2\alpha < 2\gamma \Leftrightarrow \alpha < \gamma$. (σχήμα 2)



Σχήμα 2

$$|d(M, E) - d(M, E')| = 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\left| \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} \right| = 2\alpha \Leftrightarrow \left| \sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2 - 2\gamma x} - \sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2 + 2\gamma x} \right| = 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + y^2 + \gamma^2 - 2\gamma x) + (x^2 + y^2 + \gamma^2 + 2\gamma x) - 2\sqrt{((x^2 + y^2 + \gamma^2) - 2\gamma x)((x^2 + y^2 + \gamma^2) + 2\gamma x)} = 4\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$2(x^2 + y^2 + \gamma^2) - 4\alpha^2 = 2\sqrt{(x^2 + y^2 + \gamma^2) - 4\gamma^2 x^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2 x^2} = (x^2 + y^2 + \gamma^2) - 2\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2 + \gamma^2) - 2\alpha^2 \geq 0 \\ (x^2 + y^2 + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2 x^2 = (x^2 + y^2 + \gamma^2)^2 + 4\alpha^4 - 4\alpha^2(x^2 + y^2 + \gamma^2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 - a^2) + y^2 + (\gamma^2 + a^2) \geq 0 \\ (\gamma^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(\gamma^2 - a^2) \end{array} \right\}$$

Επειδή είναι $\gamma > a$ συνάγουμε ότι μπορούμε να θέσουμε $\gamma^2 - a^2 = \beta^2$. Έτσι έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 - a^2) + y^2 + \beta^2 \geq 0 \\ \beta^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 \beta^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x^2 - a^2) + y^2 + \beta^2 \geq 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{array} \right\}$$

Από τη $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ παρατηρούμε ότι:

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow x^2 - a^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - a^2 + y^2 + \beta^2 \geq 0$$

Ωστε αν $M(x,y)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου τότε $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Άρα η εξίσωση της υπερβολής ως προς το σύστημα αξόνων που επιλέξαμε είναι η $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\beta^2 = \gamma^2 - a^2$

Αποδεικνύεται και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν $M(x,y)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου που επαληθεύει την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\beta^2 = \gamma^2 - a^2$, τότε ισχύει:

$|(ME') - (ME)| = 2a$ που σημαίνει ότι το M είναι το σημείο της παραπάνω υπερβολής. Άρα η εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και

σταθερή διαφορά $2a$, είναι η $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\beta^2 = \gamma^2 - a^2$ (σχήμα 3).

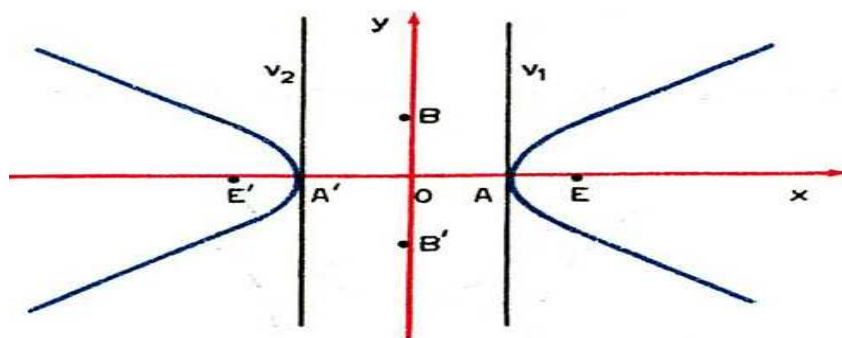
3. Ιδιότητες της υπερβολής

- Η εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ δεν μεταβάλλεται όταν θέσουμε όπου x το $-x$ και $y=y$

ή $x=x$ και το y το $-y$ ή το x το $-x$ και το y το $-y$. Άρα, η υπερβολή έχει τους άξονες συντεταγμένων Ox και Oy ως άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων O ως κέντρο συμμετρίας. Επομένως, η ευθεία $E'E$ είναι ο άξονας συμμετρίας της υπερβολής και το μέσο του $E'E$ είναι το κέντρο συμμετρίας της (σχ. 2).

- Η εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ δίνει: $\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{\beta^2}$. Άρα, έχουμε $\frac{x^2}{a^2} - 1 \geq 0$, δηλαδή

όλα τα σημεία της υπερβολής ικανοποιούν τη σχέση $|x| \geq a$ δηλαδή βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών v_1 και v_2 οι οποίες ορίζονται από τις εξισώσεις $x=a$ και $x=-a$ αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους. (σχήμα 3)



Σχήμα 3

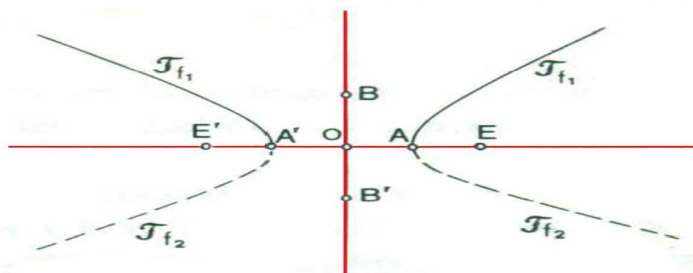
4. Στοιχεία της υπερβολής

Δίνεται η υπερβολή C (σχήμα 3) η οποία ορίζεται από την εξίσωση: $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Για $y=0$ ο άξονας Ox τέμνει την υπερβολή στα σημεία $A'(-a, 0)$ και $A(a, 0)$ και λέγεται **πρωτεύων άξονας**.
- Για $x=0$ ο άξονας Oy δεν τέμνει την υπερβολή και λέγεται **δευτερεύων άξονας**. Η αρχή O λέγεται **κέντρο** της υπερβολής. Επάνω στο δευτερεύοντα άξονα λαμβάνουμε τα σημεία $B(0, b)$ και $B'(0, -b)$. Το μήκος (B, B') λέγεται **μήκος του δευτερεύοντα άξονα**. Το μήκος (A, A') λέγεται **μήκος του πρωτεύοντα άξονα**. Τα A', A λέγονται **κορυφές** της υπερβολής και είναι $(A'A) = 2a$.
- **Εκκεντρότητα** ε της υπερβολής ονομάζουμε το λόγο $\frac{\gamma}{a}$, δηλαδή:

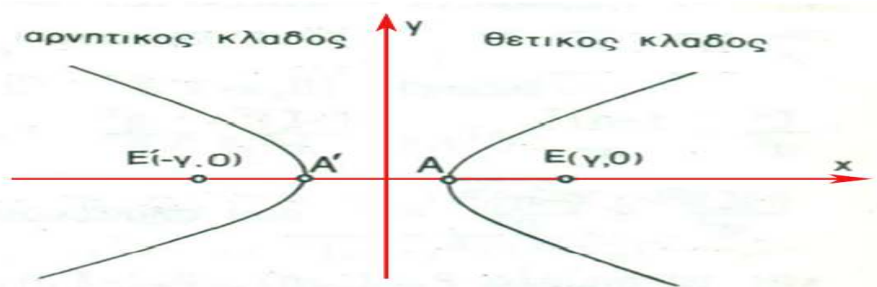
$$\boxed{\varepsilon = \frac{\gamma}{a}} \quad \text{για } \gamma > a \Rightarrow \varepsilon > 1.$$

- Η καμπύλη C της υπερβολής είναι η ένωση των γραφημάτων των συναρτήσεων $f_1(x) = \frac{\beta}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, $f_2(x) = \frac{-\beta}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ με $D(f_1) = D(f_2) = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ που προκύπτουν αν η εξίσωση της υπερβολής λυθεί ως προς y (σχήμα 4). Παρατηρούμε ότι $R(f_1) = [0, +\infty)$ και $R(f_2) = (-\infty, 0]$.



Σχήμα 4

- Ονομάζουμε **θετικό κλάδο** της υπερβολής εκείνον που τα σημεία του έχουν θετικές τετμημένες. **Αρνητικό κλάδο** της υπερβολής ονομάζουμε εκείνον που τα σημεία του έχουν αρνητικές τετμημένες. (σχήμα 5)



Σχήμα 5

5. Παραδείγματα

1. Η υπερβολή C: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ έχει: $\alpha^2 = 25$, $\beta^2 = 9$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 34 \Rightarrow \gamma = \sqrt{34} \text{ οπότε } E(\sqrt{34}, 0), E'(-\sqrt{34}, 0).$$

Κορυφές $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$. Κύριος άξονας: $\|\overline{AA'}\| = 2\alpha = 10$. Δευτερεύονταξ άξονας:

$$\|\overline{BB'}\| = 2\beta = 6. \text{ Εκκεντρότητα: } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

2. Η υπερβολή C: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ έχει: $\alpha^2 = 9$, $\beta^2 = 4$ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 13 \Rightarrow \gamma = \sqrt{13}$
οπότε $E(0, \sqrt{13})$, $E'(0, -\sqrt{13})$.

Κορυφές $A(0, 3)$, $A'(0, -3)$. Κύριος άξονας: $\|\overline{AA'}\| = 2\alpha = 6$. Δευτερεύονταξ άξονας:

$$\|\overline{BB'}\| = 2\beta = 4. \text{ Εκκεντρότητα: } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

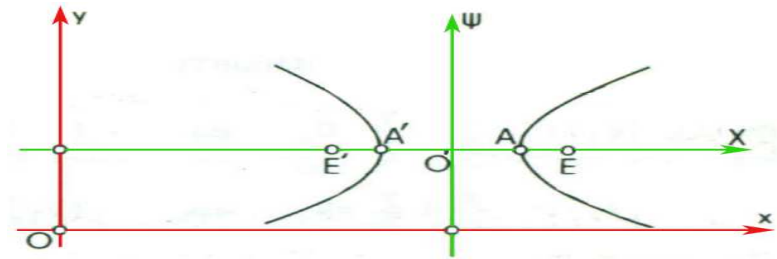
- Θεωρούμε την υπερβολή C του επιπέδου των αξόνων Oxy που ο κήριος άξονάς της είναι παράλληλος προς τον άξονα $x'x$ και το κέντρο της $O'(x_0, y_0)$ είναι διάφορο του O. Κάνουμε παράλληλη μεταφορά του συστήματος Oxy στο $O'X\Psi$. Αν M είναι το σημείο της υπερβολής C με συντεταγμένες (x,y) ως προς το Oxy και (X,Ψ) ως προς το $O'X\Psi$ ξέρουμε ότι είναι: $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + \Psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - x_0 \\ \Psi = y - y_0 \end{cases}$ (1). Όμως

η υπερβολή ως προς το $O'X\Psi$ έχει εξίσωση $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{\Psi^2}{\beta^2} = 1$ και άρα λόγω των (1) θα

έχει εξίσωση $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1$ ως προς το αρχικό σύστημα Oxy. Επιπλέον οι εστίες θα είναι $E(x_0 + \gamma, y_0)$, $E'(x_0 - \gamma, y_0)$ και οι κορυφές $A(x_0 + \alpha, y_0)$, $A'(x_0 - \alpha, y_0)$.

Άρα η εξίσωση $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1$ είναι εξίσωση υπερβολής με κέντρο $O'(x_0, y_0)$ και κύριο άξονα παράλληλο ως προς τον $x'x$. Ομοίως βρίσκουμε ότι η

εξίσωση $\frac{(y-y_o)^2}{a^2} - \frac{(x-x_o)^2}{\beta^2} = 1$ είναι εξίσωση υπερβολής με κέντρο $O'(x_o, y_o)$ και κύριο άξονα παράλληλο ως προς τον $y'y$. (σχήμα 6)



Σχήμα 6

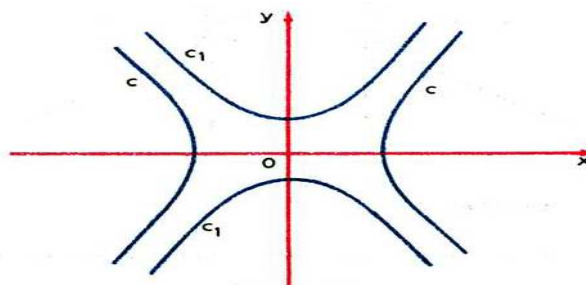
Παράδειγμα 3. Η εξίσωση $x^2 - 2y^2 - 2x - 8y - 11 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 2(y^2 + 4y + 4) - 11 - 1 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 2(y+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{2} = 1$ και συνεπώς είναι εξίσωση υπερβολής με κέντρο $O'(1, -2)$ και άξονα παράλληλο ως προς $x'x$.

- Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\begin{cases} x = \frac{a}{\sin t} \\ y = \beta \cos t \end{cases}$ όπου $t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Αυτές

αντικαθιστώμενες στην εξίσωση της υπερβολής δίνουν $\frac{1}{\sin^2 t} - \varepsilon \varphi^2 t = 1$, που είναι ταυτότητα ως προς t . Άρα είναι **παραμετρικές εξισώσεις** της υπερβολής.

6. Ασύμπτωτες υπερβολής

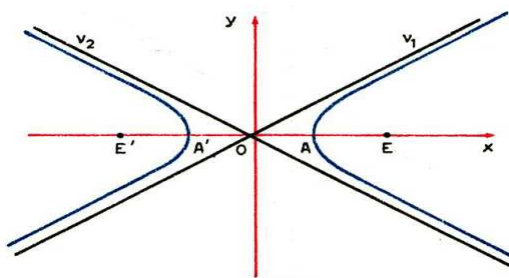
Δίνεται η υπερβολή C η οποία ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Οι ευθείες v_1, v_2 οι οποίες ορίζονται από τις εξισώσεις $v_1: \frac{x}{a} - \frac{y}{\beta} = 0 \Leftrightarrow v_1: y = \frac{\beta}{a}x$ και $v_2: \frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} = 0 \Leftrightarrow v_2: -\frac{\beta}{a}x$ λέγονται **ασύμπτωτες** της υπερβολής (σχήμα 7).



Σχήμα 7

7. Συζυγείς υπερβολές

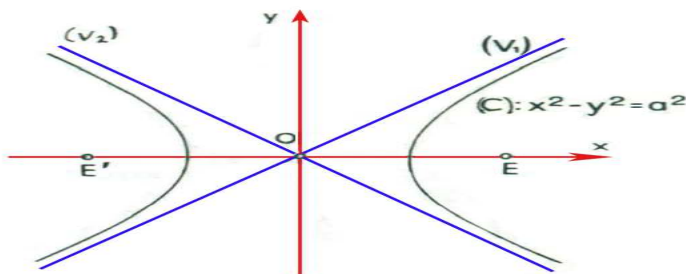
Έστω η υπερβολή C η οποία ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Από αυτή την εξίσωση λαμβάνω μία άλλη υπερβολή C_1 η οποία ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$ για την οποία ο άξονας Oy είναι πρωτεύοντας άξονας και ο άξονας Ox είναι δευτερεύοντας άξονας (σχήμα 8). Οι υπερβολές C και C_1 , που ορίζονται από τις παραπάνω εξισώσεις λέγονται **συζυγείς**. Ο πρωτεύων άξονας της υπερβολής C είναι δευτερεύων άξονας της C_1 και αντίστροφα ο πρωτεύων άξονας της C_1 είναι δευτερεύων της C .



Σχήμα 8

8. Ισοσκελής υπερβολή

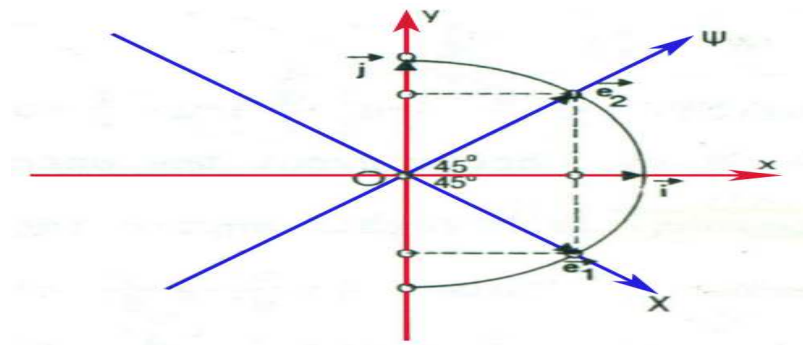
Ορισμός: Η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όταν $\alpha = \beta$, λέγεται **ισοσκελής υπερβολή** και ορίζεται από την εξίσωση $C: x^2 - y^2 = a^2$ (σχήμα 9).



Σχήμα 9

9. Παρατηρήσεις

- Επειδή $\beta^2 = y^2 - a^2$ και $\alpha = \beta \Rightarrow 2a^2 = y^2 \Leftrightarrow \frac{y}{a} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \varepsilon = \sqrt{2}$, δηλαδή η ισοσκελής υπερβολή έχει εκκεντρότητα: $\varepsilon = \sqrt{2}$.
- Οι ασύμπτωτες της ισοσκελούς υπερβολής είναι οι ευθείες με εξισώσεις $V_1: y = x$ και $V_2: y = -x$, δηλαδή οι ευθείες των διχοτόμων των γωνιών των αξόνων και οι οποίες φυσικά, τέμνονται κάθετα.
- Είναι χρήσιμο να δούμε τη μορφή που παίρνει η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής $C: x^2 - y^2 = a^2$ στο σύστημα αξόνων που συνιστούν οι κάθετες ασύμπτωτές της. Θεωρούμε λοιπόν τις ασύμπτωτες ως άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα 10, με μοναδιαία τα διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.



Σχήμα 10

Τότε προκύπτει:

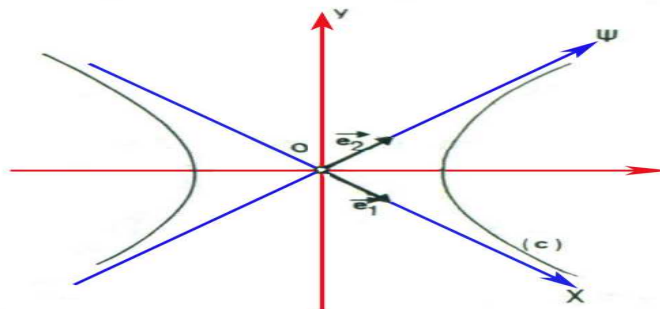
$$\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \Leftrightarrow \vec{e}_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ και } \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \Leftrightarrow \vec{e}_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Αν Μ είναι τυχαίο σημείο της ισοσκελούς υπερβολής με συντεταγμένες (x, y) ως προς το Oxy και (X, Ψ) ως προς το $OX\Psi$, από τους τύπους αλλαγής του

συστήματος των αξόνων έχουμε:

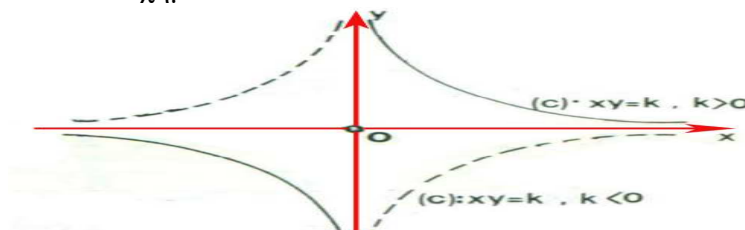
$$\begin{cases} x = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}\Psi \\ y = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}\Psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + \Psi) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - \Psi) \end{cases}$$

Η εξίσωση $x^2 - y^2 = \alpha^2$ της C στο Oxy , γίνεται τότε $\frac{1}{2}(X + \Psi)^2 - \frac{1}{2}(X - \Psi)^2 = \alpha^2$ στο $OX\Psi$ (σχήμα 11).



Σχήμα 11

Γενικότερα: Η ισοσκελής υπερβολή στο σύστημα αξόνων που συνιστούν οι ασύμπτωτές της, έχει εξίσωση $xy = k$ με $k = \text{σταθερό}$. Αν $k > 0$ τότε η C βρίσκεται στα τεταρτημόρια I και III, ενώ αν $k < 0$ τότε η C βρίσκεται στα τεταρτημόρια II και IV όπως φαίνεται και στο σχήμα 12 που ακολουθεί.



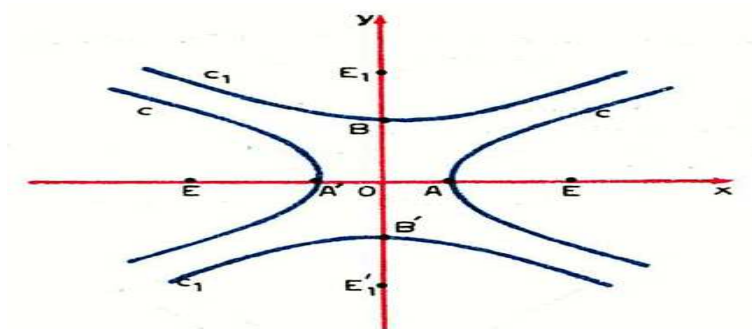
Σχήμα 12

Εφαρμογή. Στο σχήμα 13 εμφανίζονται δύο συζυγείς υπερβολές, c και c_1 . Να αποδειχθεί ότι οι εστίες τους απέχουν εξ ίσου από το κοινό κέντρο τους.

Λύση. Έστω ότι η υπερβολή c ορίζεται από την εξίσωση: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Συνεπώς η συζυγής της, c_1 , ορίζεται από την εξίσωση: $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$

Από τον ορισμό έχουμε: $|OE| = |OE'| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |OE_1| = |OE'_1|$ που είναι και το ζητούμενο.



Σχήμα 13

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

10. Διευθετούσες της υπερβολής

Ορισμός: Διευθετούσα της C αντίστοιχη στην εστία $E(\gamma, 0)$ ονομάζουμε την ευθεία

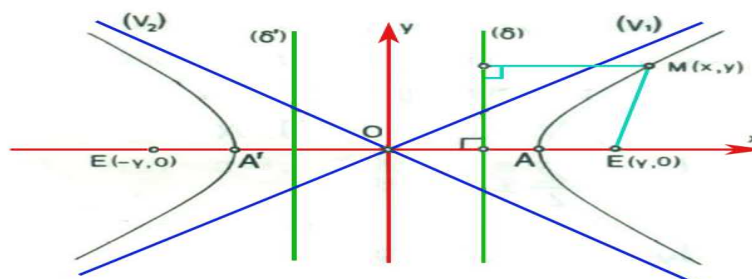
$\delta: x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$. Διευθετούσα της C αντίστοιχη στην εστία $E'(-\gamma, 0)$ ονομάζουμε την

ευθεία $\delta': x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}$. Επειδή $\left| \pm \frac{\alpha^2}{\gamma} \right| = \left| \frac{\alpha}{\gamma} \right| = \alpha \cdot \frac{1}{2} < \alpha$ έπεται ότι οι διευθετούσες δ, δ' της υπερβολής, δεν τέμνουν την υπερβολή.

Πρόταση: Αν M τυχαίο σημείο της υπερβολής, τότε ισχύει: $\frac{d(M, E)}{d(M, \delta)} = e$

Απόδειξη: Έστω $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $E(\gamma, 0)$, $\delta: x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ ή $\delta: x - \frac{\alpha^2}{\gamma} = 0$ και

$M(x_0, y_0)$ τυχαίο σημείο της C (σχήμα 14).



Σχήμα 14

$$\text{Αφού } M \in C \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{\alpha^2} - \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1$$

$$\beta^2 x_0^2 - \alpha^2 y_0^2 = \alpha^2 \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\gamma^2 - \alpha^2) x_0^2 - \alpha^2 y_0^2 = \alpha^2 (\gamma^2 - \alpha^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 x_0^2 + \alpha^2 y_0^2 + \alpha^2 \gamma^2 = \alpha^4 + \gamma^2 x_0^2 \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} d(M, E) &= \sqrt{(x_0 - \gamma)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \gamma^2 - 2\gamma x_0} \\ \text{και } d(M, \delta) &= \frac{\left| x_0 - \frac{\alpha^2}{\gamma} \right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \left| x_0 - \frac{\alpha^2}{\gamma} \right| = \frac{|\gamma x_0 - \alpha^2|}{\gamma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d(M, E)}{d(M, \delta)} &= \frac{\gamma^2 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \gamma^2 - 2\gamma x_0}}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \gamma^2 - 2\gamma x_0}}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} = \\ &= \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 x_0^2 + \alpha^2 y_0^2 + \alpha^2 \gamma^2 - 2\alpha^2 \gamma x_0}}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} \stackrel{(1)}{=} \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{\alpha^4 + \gamma^2 x_0^2 - 2\alpha^2 \gamma x_0}}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} = \end{aligned}$$

$$= \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma x_0)^2}}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} = \varepsilon \cdot \frac{|\alpha^2 - \gamma x_0|}{|\gamma x_0 - \alpha^2|} = \varepsilon$$

$$11. \text{ Σχετικές θέσεις ευθείας } \varepsilon: y = \lambda x + k \text{ και υπερβολής } C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

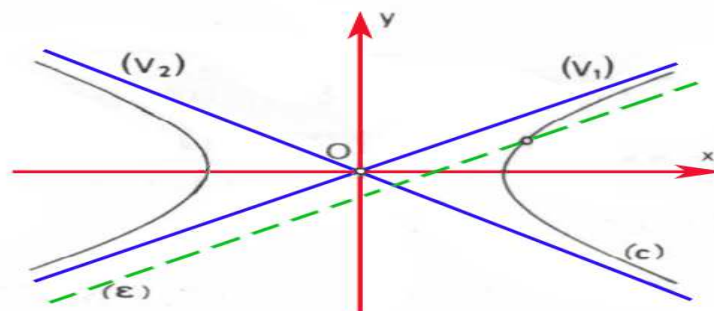
Θεωρούμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \lambda x + k \\ \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 &= \alpha^2 \beta^2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} y &= \lambda x + k \\ (\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2) x^2 - 2\alpha^2 \lambda k x - \alpha^2 (k^2 + \beta^2) &= 0 \quad (1) \end{aligned} \right\} \quad (\Sigma)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\alpha) \text{ Αν } \beta^2 - \alpha^2 \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{\beta}{\alpha} \text{ η (1) είναι πρωτοβάθμια ως προς το } x \text{ και εφόσον}$$

$\lambda k \neq 0$ η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, το σύστημα (Σ) έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}^2$ και άρα η ευθεία ε , που είναι παράλληλη προς μία από τις ασύμπτωτες της υπερβολής, έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την υπερβολή C (σχήμα 15).



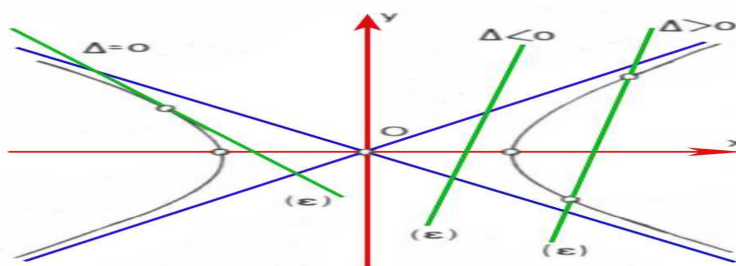
Σχήμα 15

β) Αν $\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm \frac{\beta}{\alpha}$ η ε δεν είναι παράλληλη προς τις ασύμπτωτες V_1, V_2 και τότε :

β1) Αν η (1) έχει δύο ρίζες διακεκριμένες στο $\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι $\Delta > 0$, το σύστημα (Σ) έχει δύο λύσεις στο $\mathbb{R}^2$ που είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας ε και της υπερβολής C (σχ. 16).

β2) Αν η (1) δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι $\Delta < 0$, η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την υπερβολή C (σχ. 16).

β3) Αν η (1) έχει διπλή ρίζα στο $\mathbb{R}$, άρα $\Delta = 0$ και $4\alpha^4 + \lambda^2 k^2 + 4\alpha^2(k^2 + \beta^2)(\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow k^2 = \alpha^2 \lambda^2 - \beta^2$. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία ε και η υπερβολή C έχουν δύο κοινά σημεία που ταυτίζονται ή ένα διπλό κοινό σημείο. Συνεπώς η ευθεία ε **ορίζεται** ως εφαπτομένη της υπερβολής C (σχήμα 16).



Σχήμα 16

Στην περίπτωση που δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) , δηλαδή αν $(\varepsilon) // y'y$ που σημαίνει ότι $(\varepsilon): x = k$, έχουμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = k \\ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = k \\ y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (k^2 - \alpha^2) \end{array} \right\} \text{ από το οποίο συμπεραίνουμε ότι:}$$

Αν $-\alpha < k < \alpha$ τότε η ευθεία ε και η υπερβολή C δεν έχουν κοινά σημεία.

Αν $-\alpha < k < \alpha$ τότε η ευθεία ε εφάπτεται στην υπερβολή C στις κορυφές A, A'.

Αν $k \in (-\infty, -\alpha) \cup (\alpha, +\infty)$ τότε η ευθεία ε τέμνει την υπερβολή C σε δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x', x .

Άρα: Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + k$ εφάπτεται στην υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ αν και μόνο ισχύει $\alpha^2 \lambda^2 - \beta^2 = k^2$. Κατακόρυφες εφαπτόμενες της C είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: x = \alpha$, $\varepsilon_2: x = -\alpha$.

12. Εφαπτομένη υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σε ένα σημείο της P_0

Πρόταση: Δίνεται η υπερβολή C στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, που ορίζεται από την εξίσωση:

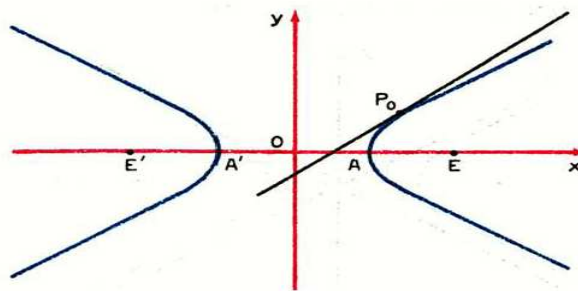
$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Ναδειχθεί ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ είναι :

$$\frac{xx_0}{\alpha^2} - \frac{yy_0}{\beta^2} = 1$$

Απόδειξη: Αν $P_0(x_0, y_0)$ είναι ένα σημείο της υπερβολής C , η εξίσωση κάθε ευθείας v που διέρχεται από το σημείο αυτό και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ (σχήμα 17), είναι :

$$v: y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$



Σχήμα 17

Τα κοινά σημεία της C και της v έχουν συντεταγμένες που είναι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους. Έτσι η εξίσωση υπερβολής C με τη βοήθεια της εξίσωσης της ευθείας v γίνεται :

$$x^2 \beta^2 - \alpha^2 [y_0 + \lambda(x - x_0)]^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2) x^2 - 2\alpha^2 \lambda (y_0 - \lambda x_0) x - \alpha^2 (y_0 - \lambda x_0)^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0$$

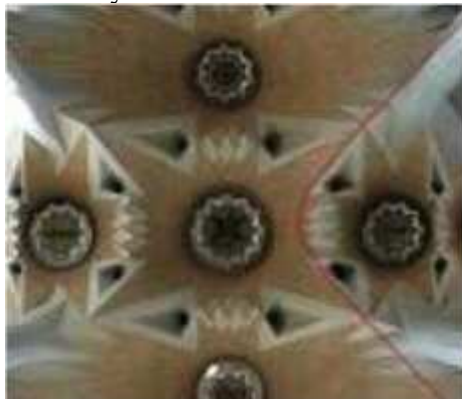
Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής ως προς το x είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της v και της C . Επειδή η v πρέπει να εφάπτεται στη C , έπεται ότι η παραπάνω εξίσωση έχει διπλή ρίζα ίση με x_0 . Από όλα τα παραπάνω καταλήγουμε:

$$x_0 = \frac{\alpha^2 \lambda (y_0 - \lambda x_0)^2}{\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2} \Rightarrow \beta^2 x_0 = \lambda \alpha^2 y_0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\beta^2 x_0}{\alpha^2 y_0}$$

Η εξίσωση της ν με τη βοήθεια της εξίσωσης που μόλις σχηματίσαμε και επειδή έχουμε $\frac{x_0^2}{\alpha^2} - \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1$, γιατί το P_0 ανήκει στην υπερβολή, δίνει την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο P_0 η οποία είναι το ζητούμενο : $\frac{xx_0}{\alpha^2} - \frac{yy_0}{\beta^2} = 1$

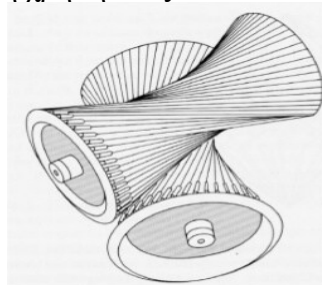
13. Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε μερικές χαρακτηριστικές εφαρμογές της υπερβολής. Το σχήμα της υπερβολής έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά στην αρχιτεκτονική και εν γένει στην κατασκευή κτιρίων. Ενδεικτικά, στην εικόνα 1 που ακολουθεί, βλέπουμε στην αριστερή πλευρά τμήμα του πολύ γνωστού ναού της Sagrada Familia του Antonio Gaudí στη Βαρκελώνη, ενώ στη δεξιά πλευρά το αεροδρόμιο του Ντάλλας.



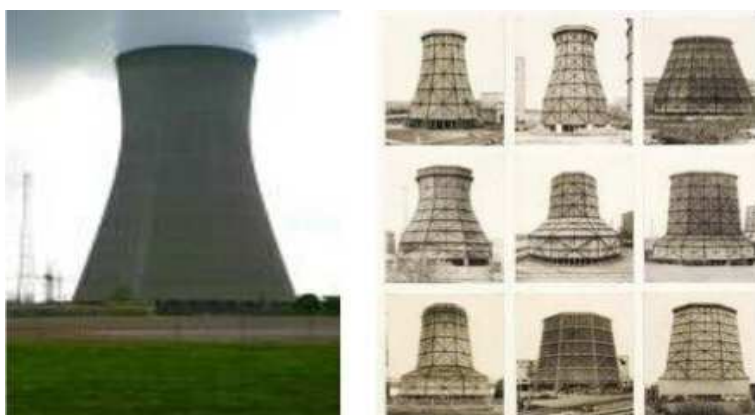
Εικόνα 1

Στην εικόνα 2 βλέπουμε γρανάζια λοξού άξονα που τους έχει εφαρμοστεί η υπερβολή και μία πολύ γνωστή χρήση τους είναι στα διαφορικά των οχημάτων.



Εικόνα 2

Μια άλλη περίπτωση που συναντάμε το σχήμα της υπερβολής σε κτηριακή κατασκευή, είναι ο πύργος ψύξης ενός πυρηνικού αντιδραστήρα. Εκεί η επιλογή αυτή γίνεται γιατί προκύπτει μία πολύ δυνατή κατασκευή με ίσιους ατσάλινους δοκούς χρησιμοποιώντας τα ελάχιστα δυνατόν υλικά (εικόνα 3).

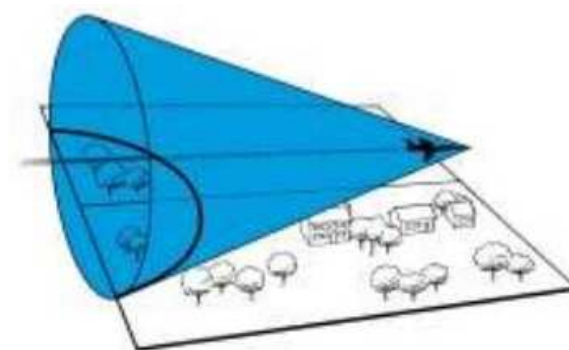


Εικόνα 3

Αξίζει να αναφέρουμε ένα φυσικό φαινόμενο που αφορά το φράγμα του ήχου όταν αυτό σπάει από ένα αεροπλάνο. Τότε δημιουργούνται ηχητικά κύματα που έχουν σχήμα κώνου (εικόνα 4), ενώ ακούγεται ένας ήχος σαν έκρηξη. Όταν αυτά τα ηχητικά κύματα αγγίζουν το έδαφος δημιουργούν υπερβολές και κατά συνέπεια οι επιπτώσεις εμφανίζονται ταυτόχρονα σε όλα τα σημεία κάθε υπερβολής (εικόνα 5).

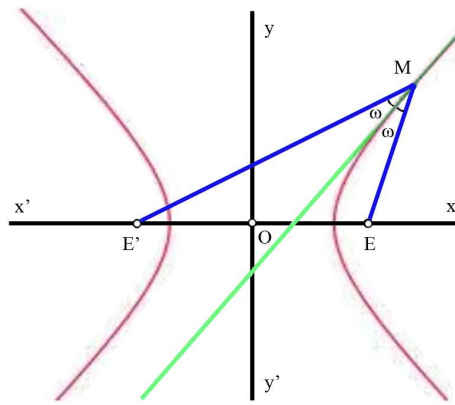


Εικόνα 4



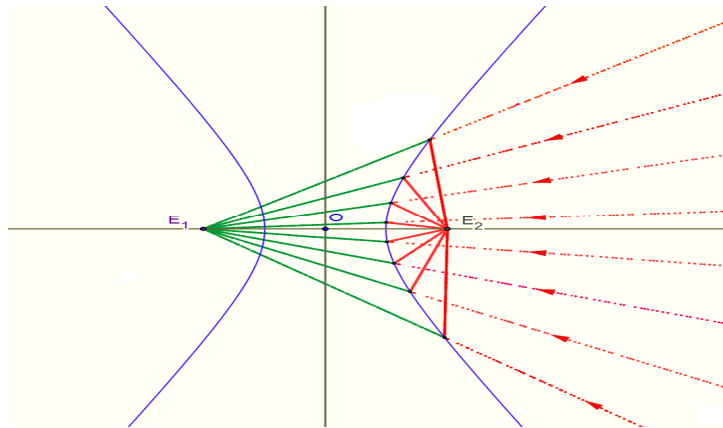
Εικόνα 5

Τέλος θα αναφερθούμε σε σημαντικές εφαρμογές που χρησιμοποιούν την αντανάκλαστική ιδιότητα της υπερβολής. Εδώ έχουμε πως η εφαπτομένη μίας υπερβολής σε ένα σημείο M διχοτομεί την $E'ME$, όπου οι E', E είναι οι εστίες της (υπερβολής) (σχήμα 18).



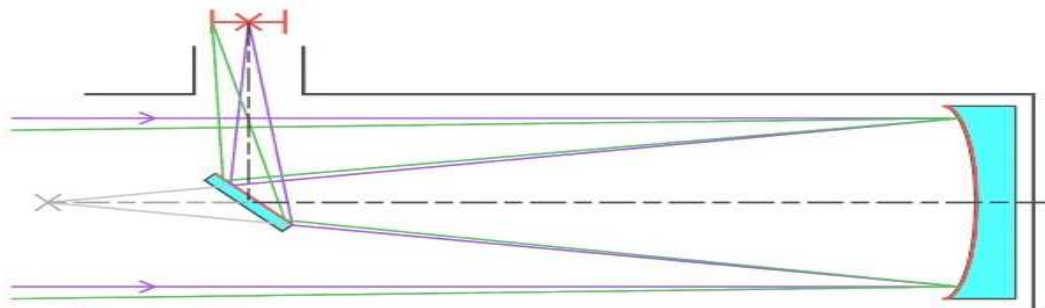
Σχήμα 18

Επομένως, μια φωτεινή ακτίνα, κατευθυνόμενη προς τη μία εστία (E_1) της υπερβολής, όταν ανακλάται στην επιφάνεια αυτής, διέρχεται από την άλλη εστία (E_2), όπως φαίνεται στο σχήμα 19.



Σχήμα 19

Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται στην κατασκευή καθρεπτών για τα κατοπτρικά τηλεσκόπια. Όπως φαίνεται στην εικόνα 6, το φως χτυπάει πάνω στον καθρέπτη που έχει σχήμα υπερβολής και ανακλάται πάνω στην εστία της υπερβολής, στην οποία έχουμε τοποθετήσει έναν καθρέπτη που οδηγεί την εικόνα στον προσοφθαλμικό φακό.



Σχήμα 20

Η ίδια ιδιότητα χρησιμοποιείται και στον μεγαλύτερο κλάδο της **ραδιοναυτιλίας** που είναι η **υπερβολική ναυτιλία**. Χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό πλοίων και το

όνομα προκύπτει από το γεγονός ότι οι αναζητούμενες και χρησιμοποιούμενες γραμμές θέσης προσδιορισμού γεωγραφικού στίγματος είναι υπερβολικές καμπύλες. Κυριότερες συσκευές ραδιοναυτιλίας που λειτουργούν επί των αρχών της υπερβολικής ναυτιλίας είναι οι συσκευές loran, deka, Κόνσολ.

Βιβλιογραφία

- Τσάγκα Γ. «Στοιχεία αναλυτικής γεωμετρίας», Αθήνα, εκδόσεις ιδρύματος Ευγενίδη.
- Tomas, G.B. & Finney, R.L. «Απειροστικός Λογισμός»,
- Ανδρεαδάκης Σ. & Κουσεράς Ν. & Μέτης Σ. & Παπασταυρίδης Σ. & Πολύζος Γ. & Σβέρκος Α., «Μαθηματικά Γ' Λυκείου», Αθήνα, ΟΕΔΒ
- Κυριαζής Χ. & Πρωτοπαπάς Ε. «Οι κωνικές τομές ως κίνητρο μάθησης στα μαθηματικά»,