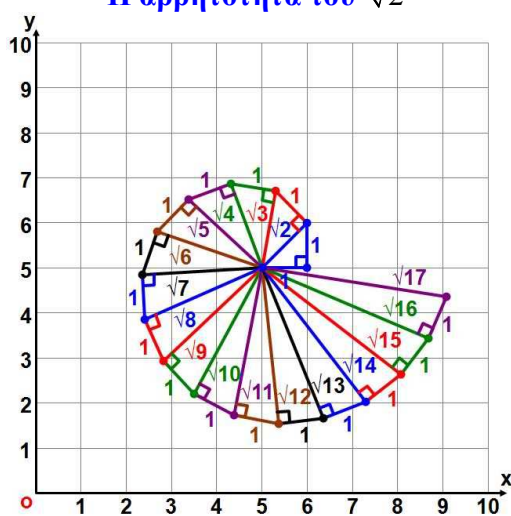




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Η αρρητότητα του $\sqrt{2}$



Σπουδαστής: **Νικολάου Ιωάννης Άγγελος** (AM 7361)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),**
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: **2019 – 2020**

Ημερομηνία ανάθεσης: **10.09.2019**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **....02.2020**
 Ημερομηνία εξέτασης: **....02.2020**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Ιδιαίτερα ικανοποιητική	
2	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
3	Φραγκιαδάκης Νικόλαος Δρ. Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Αναπληρωτής Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

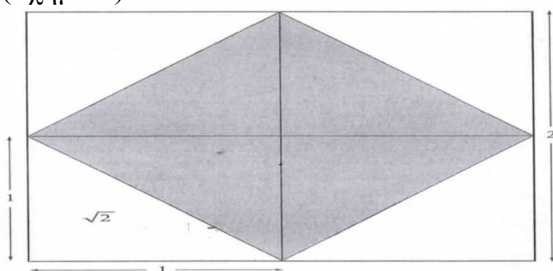
Περιεχόμενα

Πρόσκληση στη $\sqrt{2}$	4
Η ιστορία της $\sqrt{2}$ (από το 1800 π.Χ. ως σήμερα)	4
Η γέννηση των εξισώσεων 2ου βαθμού	5
Κλασματικές προσεγγίσεις στη $\sqrt{2}$	5
Αναπαραστάσεις του $\sqrt{2}$	6
Ρεκόρ στον υπολογισμό του $\sqrt{2}$	6
Η αρρητότητα του $\sqrt{2}$	7
Η αναλογία της Κόρδοβα.....	8
Η πρώτη απόδειξη για το ότι η $\sqrt{2}$ είναι άρρητη	9
Η ιδιότητα του άρρητου με τις περισσότερες αποδείξεις	9
Γιατί δεν υπάρχουν καταρόλες τετράγωνης διατομής;.....	9
Μία γεωμετρική απόδειξη	10
Μία απόδειξη με παράγοντες.....	10
Μία απόδειξη με υπολογισμό (Miklos Lasckovich).....	10
Μια ευφυής γραφική απόδειξη (Alexander J. Hahn).....	11
Μια απόδειξη με σχέδιο (Tom Apostol).....	11
Το πρόβλημα του $2^{\sqrt{2}}$	11
Γεωμετρικά σχέδια της $\sqrt{2}$	11
Μορφότυπα DIN χαρτιού και φωτογραφιών.....	13
Από το διπλασιασμό του τετραγώνου στο διπλασιασμό του κύβου.....	16
Οι αριθμοί f στη φωτογραφία.....	16
Η $\sqrt{2}$ στο πάρκο Γκουέλ (Βαρκελώνη) του Antoni Gaudi	17
Ταξίδι στη σπείρα του Θεόδωρου.....	18
Οι δυναμικές αναλογίες n	20
Η ομορφιά και ο χρυσός αριθμός.....	22
Πολύγωνα, πολύεδρα και ρίζες.....	23
Η $\sqrt{3}$ στο ισόπλευρο τρίγωνο και στο κανονικό εξάγωνο	23
Η $\sqrt{2}$ στο τετράγωνο και στο κανονικό οκτάγωνο.....	23
Η $\sqrt{5}$ στην κατασκευή του κανονικού πενταγώνου	24
Πυθαγόρεια κοσμογονία με πολύεδρα.....	25
Τετραγωνικές ρίζες, τέχνη και σχέδιο	26
Ο Πυθαγόρας και η σιδερώστρα.....	27
Βιβλιογραφία	29

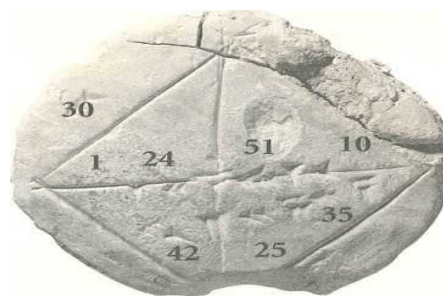
Πρόσκληση στη $\sqrt{2}$

Ο αριθμός είναι ο κανόνας των σχημάτων και των ιδεών. Πυθαγόρας

Ο αριθμός $\sqrt{2}$ ήταν ο 1^{ος} άρρητος αριθμός που ανακαλύφθηκε, μια επιστημονική επιτυχία υψίστης σπουδαιότητας, που σηματοδότησε για αιώνες τη μαθηματική πρόκληση της δημιουργίας των πραγματικών αριθμών (αριθμών που επιτρέπουν τον προσδιορισμό όλων των σημείων μιας καθέτου). Ο $\sqrt{2}$ μπορεί να υπάρχει ακόμη και στο απλό σχήμα ενός τετραγώνου σε ένα χαρτί. Παίρνουμε 4 τετράγωνα μοναδιαίας πλευράς και τραβάμε τις 4 διαγώνιους τους (σχήμα 1).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Έτσι, προκύπτει ένα εσωτερικό τετράγωνο εμβαδού ίσου με 2, που καταλαμβάνει το μισό τετράγωνο της πλευράς 2 (η σκιερή περιοχή στο σχήμα). Η πλευρά αυτού του εσωτερικού τετραγώνου πολλαπλασιασμένη επί τον εαυτό της πρέπει να είναι 2 έτσι, έχει ήδη προκύψει η τετραγωνική ρίζα του 2 (που γράφεται $\sqrt{2}$). Τίποτα δεν προμήνυε τις λογικές και τις υπολογιστικές επιπλοκές, που θα συνεπαγόταν η ανακάλυψη αυτού του τόσο απλού και όμορφου αριθμού.

Η ιστορία της $\sqrt{2}$ (από το 1800 π.Χ. ως σήμερα)

Στη συλλογή από βαβυλωνιακές πινακίδες, που φυλάσσεται στο πανεπιστήμιο Yale, ξεχωρίζει η πινακίδα με αριθμό YBC 7289 διότι, πέρα από τις συνήθεις σφηνοειδείς εγχοπές, η ματιά οποιουδήποτε παρατηρητή θα αναγνώριζε το σχήμα 2. Το κομμάτι, χρονολογείται από την περίοδο μεταξύ 1.800–1.600 π.Χ. και απεικονίζει ένα τετράγωνο με τις 2 διαγώνιους του και μια μεγάλη σειρά αριθμών χαραγμένων με σμίλη σύμφωνα με τη βαβυλωνιακή αρίθμηση, στη βάση του 60. Οι ερευνητές, βεβαιώνουν πως τα αριθμητικά αυτά δεδομένα ανταποκρίνονται σε μία προσέγγιση της $\sqrt{2}$ με τα 6 πρώτα δεκαδικά της. $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421296$.

Αργότερα, σε αρχαία ινδουιστικά βιβλία με τίτλο *Sullasutras* (800–200 π.Χ.) συναντάμε διατυπωμένη την ακόλουθη προσέγγιση της $\sqrt{2}$ «αυξάνεται το μήκος της πλευράς κατά $\frac{1}{3}$ και το τρίτο αυτό κατά το τέταρτο μέρος του και αφαιρείται το 34^ο μέρος αυτού του τετάρτου», που αριθμητικά εκφράζεται ως $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \cong 1,414215686$. Όπως φαίνεται, οι Βαβυλώνιοι, οι Ινδοί, και φυσικά οι Αιγύπτιοι, γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα. Εντούτοις, ο τρόπος χρήσης τους ήταν κατ' εξοχήν πρακτικός. Μόνο μετά την εξέλιξη των

ελληνικών μαθηματικών, άρχισαν να λαμβάνουν υπόψη την πιο θεωρητική (και φιλοσοφική) πλευρά του αριθμού. Η ανακάλυψη του $\sqrt{2}$ ως άρρητου αριθμού, οφείλεται στην πυθαγόρεια σχολή και για αυτό ο εν λόγω αριθμός είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την εγκυρότητα του πυθαγορείου θεωρήματος. Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που συνιστά το απαύγασμα της ελληνικής γεωμετρικής γνώσης, δίνεται μεγάλη προσοχή στα άρρητα μεγέθη. Από τότε, έγιναν πολλές απόπειρες προσέγγισης του $\sqrt{2}$ μέσω κλασμάτων. Δεν έλειψαν και προσπάθειες με αναλυτικές εκφράσεις, τολμηρό άλμα από τον κόσμο της γεωμετρίας σε αυτόν του λογισμού. Το $\sqrt{2}$ είναι στενά συνδεδεμένο με την τριγωνομετρία, αφού για 45° ή $\frac{\pi}{4}$ ακτίνια προκύπτει

$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Έτσι, από τη γνώση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων του ημιτόνου και του συνημίτονου, προέρχονται πολύ αποτελεσματικές μέθοδοι υπολογισμού των δεκαδικών του $\sqrt{2}$. Η $\sqrt{2}$ δεν είναι αλγεβρική, μόνο επειδή αποτελεί τη θετική λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$ και επειδή, όπως όλες οι τετραγωνικές ρίζες, μπορεί να συμμετάσχει στην επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού $ax^2 + bx + c = 0$ με τις 2 λύσεις τις $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ και έτσι εμφανίζονται οι τετραγωνικές ρίζες στα σημεία τομής της παραβολής $y = ax^2 + bx + c$ με τον άξονα της τετμημένης (x).

Η γέννηση των εξισώσεων 2ου βαθμού

Τα γεωμετρικά προβλήματα με τετράγωνα, ορθογώνια, τρίγωνα και άλλα βασικά σχήματα, συνδέθηκαν απολύτως φυσιολογικά με την ανάπτυξη των εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Ήδη στη Βαβυλωνία, γύρω στο 2.000 π.Χ., είχαν δοθεί λύσεις σε συμπαγείς εξισώσεις όπως (πινακίδα BM 13901). Απαντώνται επίσης και προϋποθέσεις που οδηγούν μέσω χειρισμών σε μια τέτοια μορφή εξίσωσης «αν το εμβαδόν ορθογωνίου είναι $xy = 1$ και η περίμετρος είναι 4, άρα $2x + 2y = 4$, τότε οι τιμές των x, y είναι...». Σε πινακίδες στα Σούσα, έχουμε σύγκριση των εμβαδών και των τετραγώνων των πλευρών κανονικών πολυγώνων πλευρών 3, 4, 5, 6 και 7. Περί το 628 μ.Χ., ο Ινδός Brahmagupta έλυσε το $x^2 - 10x = -9$, προτείνοντας επιπρόσθετα μια περιγραφή της μεθόδου για την επίλυση τέτοιου τύπου εξισώσεων. Αργότερα, τον 9ο αιώνα, συναντάμε τον Άραβα μαθηματικό Musa-al-Khwarizmi ο οποίος λύνει την εξίσωση $x^2 + 10x = 39$. Στη χαρηνγή της άλγεβρας, οι αριθμήσεις ήταν ρητορικές και περιλάμβαναν μακροσκελείς λεκτικές περιγραφές σχετικά με τρόπους υπολογισμού. Μόνο τον καιρό του Διόφαντου, στην αρχαία Ελλάδα, άρχισαν να χρησιμοποιούνται βραχυγραφίες. Παρά ταύτα, στη δύση, ως τον 15ο αιώνα, δεν αναπτύχθηκε η αλγεβρική αρίθμηση με σύμβολα όπως είναι γνωστή σήμερα.

Κλασματικές προσεγγίσεις στη $\sqrt{2}$

Το τετράγωνο πλευράς 5, έχει διαγώνιο μήκους $5\sqrt{2}$ και εφόσον $(5\sqrt{2})^2 = 50$ είναι αριθμός κοντινός στο τέλειο τετράγωνο $49 = 7^2$, προκύπτει ότι $5\sqrt{2} \cong 7$, δηλαδή, $\sqrt{2} \cong \frac{7}{5}$.

Άρα, $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = \frac{50-1}{25} = 2 - \frac{1}{25} = 2 - 0,04$. Έτσι φαίνεται ότι υπάρχει μια πολύ μικρή διαφορά ανάμεσα στο τετράγωνο της πλευράς $\sqrt{2}$ και στο τετράγωνο πλευράς $\frac{7}{5}$. Το κλάσμα $\frac{7}{5}$ ανήκει στην ακολουθία $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \dots$ που δίνει καλές κλασματικές προσεγγίσεις της $\sqrt{2}$. Μπορούμε να δούμε πως κάποιοι παράγοντες προσεγγίζουν λιγότερο και κάποιοι περισσότερο $\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$.

Ενδεικτικά, το $\frac{99}{70}$ είναι η εγγύτερη προσέγγιση $\frac{99}{70} - \sqrt{2} < 0,00025$ και $\left(\frac{99}{70}\right)^2 = \frac{9.801}{4.900} = \frac{9.800}{4.900} + \frac{1}{4.900} = 2 + \frac{1}{70^2}$. Προφανώς, υπάρχουν κλάσματα με μεγάλους αριθμητές και παρονομαστές που επίσης προσεγγίζουν τη $\sqrt{2}$,
 3515043237929985687829131076921717644468626388911
 2485510909704211897294695733728148710290930026296

Αναπαράστάσεις του $\sqrt{2}$

Η $\sqrt{2}$ μπορεί να υπολογιστεί με συνεχή κλάσματα $\sqrt{2} = 1 + [1 / \{2 + (1 / (2 + \dots))\}]$ ως άπειρο γινόμενο $\sqrt{2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{38}\right)\left(1 - \frac{1}{100}\right)\dots$, $\sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \frac{14 \cdot 14}{13 \cdot 15}$,

$$\sqrt{2} = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\dots$$

Από τους τύπους του **Taylor** για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις προκύπτει

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$$

Με τις μεθόδους του **Euler** εδραιώνεται η σειρά $\sqrt{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{15}{64} + \frac{35}{256} + \frac{315}{4.096} + \frac{693}{16.384} + \dots$

Ρεκόρ στον υπολογισμό του $\sqrt{2}$

Ένας από τους πιο δημοφιλείς αλγορίθμους για τον υπολογισμό προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$, είναι η αποκαλούμενη βαβυλωνιακή μέθοδος, σύμφωνα με την οποία παίρνουμε έναν ακέραιο θετικό αριθμό F_n και εφαρμόζουμε τον αναδρομικό τύπο $F_{n+1} = \frac{F_n + 2}{2 \cdot F_n}$. Με αυτή τη μέθοδο, η

ομάδα του Yasumasa Kanada κατάφερε το 1997 να υπολογίσει 137.438.953.444 δεκαδικούς του $\sqrt{2}$. Τον Φεβρουάριο του 2006, ο Shigeru Kondo έβαλε τον υπολογιστή του (PC 3.6 GHz, με μνήμη 16 GB) να δουλέψει για 13 μέρες και 14 h ώσπου να προκύψουν 200.000.000 δεκαδικοί του $\sqrt{2}$. Ο μοναδικός άλλος αριθμός που έχει προσελκύσει τέτοια προσοχή, είναι ο αριθμός π. Ήταν η ηλεκτρονική εποχή, που βοήθησε στην εμφάνιση αυτών των αποτελεσμάτων, διότι υπολογίστηκαν και αποθηκεύτηκαν σε εικονικό χώρο. Αν εκτύπωναν τους δεκαδικούς του

Kondo σε κανονικά φύλλα χαρτιού, με 30 γραμμές και 70 κενά η καθεμία (2.100 χαρακτήρες περίπου), θα χρειαζόνταν περίπου 100.000.000 φύλλα.

ΟΙ ΠΡΩΤΟΙ ΧΙΛΙΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΤΗΣ $\sqrt{2}$	
$\sqrt{2} = 1,$	
4142135623 7309504880 1688724209 6980785696 7187537694 8073176679 7379907324	
7846210703 8850387534 3276415727 3501384623 0912297024 9248360558 5073721264	
4121497099 9358314132 2266592750 5592755799 9505011527 8206057147 0109559971	
6059702745 3459686201 4728517418 6408891986 0955232923 0484308714 3214508397	
6260362799 5251407989 6872533965 4633180882 9640620615 2583523950 5474575028	
7759961729 8355752203 3753185701 1354374603 4084988471 6038689997 0699004815	
0305440277 9031645424 7823068492 9369186215 8057846311 1596668713 0130156185	
6898723723 5288509264 8612494977 1542183342 0428568606 0146824720 7714358548	
7415565706 9677653720 2264854470 1585880162 0758474922 6572260020 8558446652	
1458398893 9443709265 9180031138 8246468157 0826301005 9485870400 3186480342	
1948972782 9064104507 2636881313 7398552561 1732204024 5091227700 2269411275	
7362728049 5738108967 5040183698 6836845072 5799364729 0607629969 4138047565	
4823728997 1803268024 7442062926 9124859052 1810044598 4215059112 0249441341	
7285314781 0580360337 1077309182 8693147101 7111168391 6581726889 4197587165	
8215212822 9518488472.	

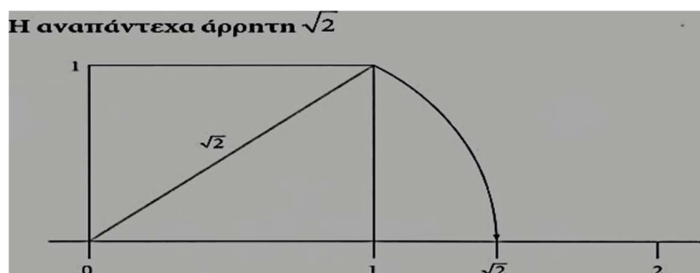
Πίνακας 1

Η αρρητότητα του $\sqrt{2}$

Οι πυθαγόρειοι, εντόπισαν ισχυρότατες αντιστοιχίες ανάμεσα στη φύση και στα μαθηματικά. Ανακάλυψαν πως οι αρμονικές σχέσεις μεταξύ των μουσικών νοτών, αντιστοιχούν σε λόγους ακέραιους αριθμών. Με εφελτήριο αυτή τη βεβαιότητα, άρχισαν να αναζητούν αριθμητικές αναλογίες σε όλες τις φυσικές παραστάσεις, πεπεισμένοι πως η πραγματικότητα στο σύνολό της μπορούσε να εξηγηθεί μέσω των αριθμών. «Τα πάντα είναι αριθμοί», δήλωναν.

Τα πυθαγόρεια μαθηματικά, θεωρούν πως δύο μεγέθη είναι σύμμετρα αν μπορούν να είναι πολλαπλάσια ενός τρίτου, αν υπάρχει κοινή μονάδα που επιτρέπει στα δύο μεγέθη να έχουν ακέραιο μέτρο. Με άλλα λόγια, οι πυθαγόρειοι υποστήριζαν την ακλόνητη αρχή πως όλοι αριθμοί είναι λόγοι ακέραιων για να δηλώσουν πως δύο οποιαδήποτε μεγέθη πρέπει να είναι σύμμετρα. Ολόκληρο το πυθαγόρειο οικοδόμημα, είχε χτιστεί πάνω σε αυτές τις βάσεις και επεδίωκε να προεκταθεί ως το σύμπαν (για να το εξηγήσει αριθμητικά).

Κάποια μέρα, ο Ίππασος ο Μεταπόντιος, διακεκριμένο μέλος της πυθαγόρειας σέκτας, βάλθηκε να παίζει με το θεώρημα του δασκάλου του για να υπολογίσει τη διαγώνιο ενός τετραγώνου. Κίνητρό του η συνήθης ανησυχία η δίψα για μάθηση. Τα τετράγωνα ήταν πολύ απλά σχήματα και κατά περίεργο τρόπο, ο Ίππασος δεν γνώριζε κάποιον να έχει ασχοληθεί με τον υπολογισμό της διαγωνίου του και να έχει προσπαθήσει να δει αν το αποτέλεσμα του θα συνιστούσε σημαντική συνεισφορά στο μεγαλειώδες οικοδόμημα των μαθηματικών.



Σχήμα 3

Ως πιστός οπαδός του Πυθαγόρα, ο Ίππασος αναζητούσε καθολικές αποδείξεις και για να

διευκολύνει το πρόβλημα με το τετράγωνο, αποφάσισε πως η πλευρά του ήταν απλά μοναδιαία. Ο υπολογισμός ήταν εύκολος, θα «έσπαγε» το τετράγωνο σε δύο τρίγωνα και θα εφάρμοζε το θεώρημα του δασκάλου του στον υπολογισμό της υποτεινουσας (σχήμα 3). Το αποτέλεσμα ήταν $\sqrt{2}$, λύση που ισοπέδωσε τις βασικές αρχές του πυθαγορισμού αφού δεν ήταν κλάσμα.

Κατ' αρχήν, αποδείκνυε πως η υποτεινουσα ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου δεν είναι σύμμετρη με τις καθέτους. Όπως θα λέγαμε σήμερα, ένα ορθογώνιο τρίγωνο των οποίων οι κάθετες είναι μονάδες, έχει υποτεινουσα ίση με $\sqrt{2}$ και είναι άρρητη. Στη συνέχεια, απομάκρυνε σημαντικά τα γεωμετρικά μεγέθη από τις αριθμητικές ποσότητες, που στο εξής θα έπρεπε να δουλεύονται χωριστά. Άρα, η ανακάλυψη του Ίππασου γκρέμισε την υπέροχη ιδέα της αριθμητικής ενότητας των πυθαγορείων. Αναφέρει ο θρύλος πως το εύρημα του Ίππασου δεν δημιούργησε αμέσως πρόβλημα στους πυθαγόρειους, αφού τον ξεφορτώθηκαν με συνοπτικές διαδικασίες πετώντας τον στη θάλασσα, από ένα καράβι. Σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα, τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς, έχει εμβαδό ίσο με 2 επομένως, το μήκος d της διαγώνιου πρέπει να είναι αριθμός ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, θα δώσει 2 ($d^2 = 2$).

Έτσι, η $\sqrt{2}$ έρχεται στο προσκήνιο. Η $\sqrt{2}$, ήταν το μήκος τμήματος που εύκολα μπορούσε να σχεδιαστεί με βάση ένα τετράγωνο, με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη. Άρα, δεν ήταν λογικό να σκεφτεί κανείς πως αν καθοριζόταν ένα οποιοδήποτε μέτρο u ($u < 1$), θα μπορούσε να μετρηθεί ταυτόχρονα και η πλευρά (1) και η διαγώνιος ($\sqrt{2}$) του τετραγώνου;

Ήταν λογικό η πλευρά και η διαγώνιος ενός σταθερού τετραγώνου να είναι σύμμετρες; Η πλευρά και η διαγώνιος ενός τριγώνου όμως, δεν είναι σύμμετρες. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, το πρόβλημα οδήγησε στην ανάγκη μέτρησης της πλευράς, με την επανάληψη του κοινού μέτρου u , κατά ακέραιο αριθμό n επαναλήψεων και εύρεσης της $1 = n \cdot u$, κατά άλλο ακέραιο αριθμό m επαναλήψεων ($\sqrt{2}$) $= m \cdot u$. Άρα, αυτό σε διαίρεση έπρεπε να είναι

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}. \text{ Έτσι, κατά την ιδιότητα των σύμμετρων μεγεθών το } \sqrt{2} \text{ θα ήταν}$$

κλάσμα $\frac{m}{n}$ ακέραιων θετικών όρων. Σύμφωνα με ιστορικούς, μεταξύ των 800 και 500 π.Χ., στο ινδικό βιβλίο *Sulba Sutras* απαντάται η παρατήρηση ότι η πλευρά τετραγώνου με μοναδιαία πλευρά και η διαγώνιός του δεν μπορούν να είναι σύμμετρες. Δεν γνωρίζουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες έφθασαν σε αυτό το συμπέρασμα στην Ινδία.

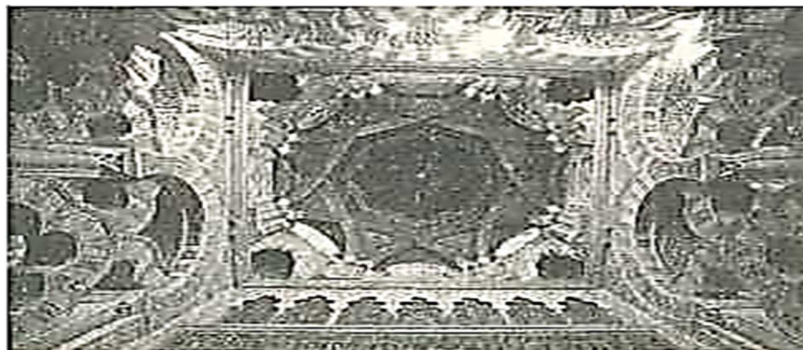
Η αναλογία της Κόρδοβα

Όταν ο αρχιτέκτονας Rafael de La Hoz (1924–2000) ξεκίνησε να μελετά τη σχέση των αναλογιών της Μεσκίτα στην Κόρδοβα, καθώς και άλλων αραβικών σχημάτων στην πόλη αυτή της Ανδαλουσίας, ανακάλυψε προς μεγάλη του έκπληξη τη σαρωτική παρουσία του αριθμού

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} \text{ (δηλαδή του 1,3065) ο οποίος εμφανίζεται ως λόγος της ακτίνας μιας περιφέρειας}$$

προς την πλευρά ενός κανονικού οκταγώνου εγγεγραμμένου σ' αυτή και τον ονόμασε ως «αναλογία της Κόρδοβα». Το Ισλάμ είναι θρησκεία εικονοκλαστική, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι απορρίπτει εντελώς τις αναπαραστάσεις. **Στη μουσουλμανική θρησκεία το θείο απεικονίζεται με ένα τετράγωνο.** Για αυτό και το κανονικό οκτάγωνο, που προκύπτει ως τομή δύο τετραγώνων με διαφορά μίας περιστροφής 90° , είναι τόσο σύνηθες σε τρούλους και διακόσμους.

Η ακολουθία της Κόρδοβα είναι παρούσα σε όλες αυτές τις αναπαραστάσεις.



Σχήμα 4 Οκταγωνική βάση τρούλου στη Μεσκίτα της Κόρδοβα. Η αναλογία της Κόρδοβα, είναι ο λόγος του πλευράς αυτού του σχήματος και της ακτίνας της περιφέρειας στην οποία θα μπορούσε να εγγραφεί.

Η πρώτη απόδειξη για το ότι η $\sqrt{2}$ είναι άρρητη

Στην αρχαία Ελλάδα, υπήρχε ήδη μια πολύ ωραία απόδειξη για το ότι η $\sqrt{2}$ δεν μπορούσε να είναι κλάσμα. Η πλατωνική επιχειρηματολογία χρησιμοποιούσε τη μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής» με τον ακόλουθο τρόπο. «Αν υπήρχε κλάσμα, θα μπορούσαμε να το εκφράσουμε ως λόγο μεταξύ δύο ακέραιων a, b δηλαδή $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε

ότι οι a, b δεν έχουν κοινούς παράγοντες. Υψώνοντάς το στο τετράγωνο, προκύπτει ότι $2 \cdot b^2 = a^2$. Και με δεδομένο ότι ο όρος στα αριστερά είναι ζυγός (διαιρείται δια του 2), το 2 θα έπρεπε να διαιρεί το a^2 , το οποίο είναι δυνατό μόνο αν ο a είναι ζυγός, δηλαδή, αν $a = 2 \cdot c$, άρα $2 \cdot b^2 - a^2 = (2 \cdot c)^2 = 4c^2$ και $b^2 = 2 \cdot c^2$. Αφού είναι ζυγός ο $2 \cdot c^2$, ο παράγοντας 2 πρέπει να διαιρεί το b^2 άρα και τον b . Εντούτοις, μολονότι είχε υποτεθεί ότι οι a, b δεν είχαν κοινούς παράγοντες, προέκυψε ότι είναι ζυγοί. Η αντίφαση αυτή αποδεικνύει πόσο αδύνατο είναι η $\sqrt{2}$ να είναι κλάσμα.»

Η ιδιότητα του άρρητου με τις περισσότερες αποδείξεις

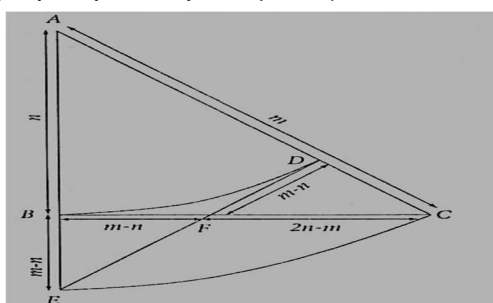
Η ιστορία, βρίθεται από επιχειρηματολογίες απόδειξης του άρρητου της $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια, παραθέτουμε κάποιες από τις πιο παράξενες αποδείξεις.

Γιατί δεν υπάρχουν κατασρόλες τετράγωνης διατομής;

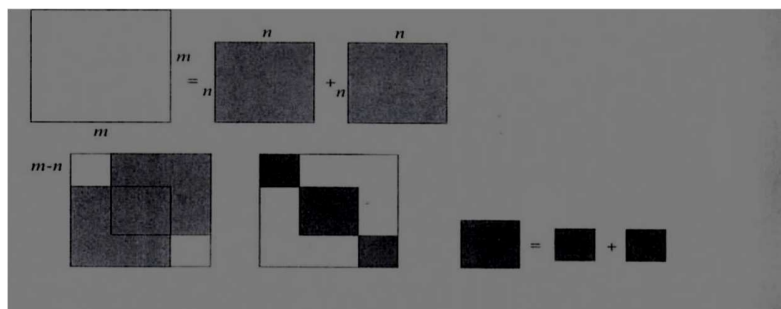
Οι κατασρόλες είναι κυλινδρικές. Ποτέ δεν θα βρει κανείς πρισματική κατασρόλα με τετράγωνη διατομή. Είναι πρόδηλο πως το κυκλικό σχήμα είναι το πιο λογικό. Επειδή δεν έχει ακμές, μπορεί να αφαιρεθεί το περιεχόμενο εύκολα, αλλά και να πλυθεί εύκολα. Από την άλλη πλευρά, ο κύκλος της βάσης επιτρέπει τη συμμετρική διάχυση της θερμότητας. Υπάρχει και μια άλλη λιγότερο προφανής, αλλά περισσότερο σημαντική εξήγηση. Ο κύριος λόγος που οι κατασρόλες είναι κυκλικές είναι για να μην πέσει μέσα το καπάκι. Και όσο απίστευτο κι αν φαντάζει, πρέπει να καταφύγουμε στη $\sqrt{2}$ για να το εξηγήσουμε. Σε κατασρόλα τετράγωνης διατομής με πλευρά 20 cm , η διαγώνιος είναι $20\sqrt{2} \text{ cm} = 28,28 \text{ cm}$. Έτσι, ή το καπάκι θα είναι πολύ μεγαλύτερο ή σίγουρα θα πέσει στο εσωτερικό της κατασρόλας. Σε κατασρόλα κυκλικού σχήματος ωστόσο αυτό δεν θα συμβεί ποτέ.

Μία γεωμετρική απόδειξη

Αν η $\sqrt{2} > 1$ ήταν κλάσμα $\frac{m}{n}$, όπου m, n οι μικρότεροι ακέραιοι (χωρίς κοινούς παράγοντες) που δίνουν $\sqrt{2}$, θα ήταν $m^2 = 2n^2$ άρα θα είχαμε ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ABC καθέτου n και υποτεινουσας m . Στο σχήμα 5, τραβήξτε με κανόνα και διαβήτη το κυκλικό τόξο BD , το τόξο EC και τα τμήματα DE , BC . Με το EBF ισοσκελές τρίγωνο και $EB = FB = m - n$ προκύπτει $FC = FE = n - (m - n) = 2n - m$. Στη συνέχεια, το EBF γίνεται τρίγωνο με πλευρές μικρότερες από αυτές του αρχικού σχήματος, και έτσι η $\sqrt{2}$ μπορεί να εκφραστεί ως $\frac{2n - m}{m - n}$. Αυτό έρχεται σε σύγκρουση με την υπόθεση ότι οι m, n ήταν οι μικρότεροι ακέραιοι με λόγο $\sqrt{2}$.



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Μία απόδειξη με παράγοντες

Αν $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ήταν κλάσμα με ακέραιους όρους m, n χωρίς κοινούς διαιρέτες και αν μετατρέψουμε την έκφραση υψώνοντάς τη στο τετράγωνο για να εξαλείψουμε τη ρίζα, είναι $m^2 = 2n^2$. Γράφοντας τους m, n ως γινόμενα δυνάμεων πρώτων αριθμών, η τιμή της $2n^2$ είναι πάντα ζυγή έκφραση, οπότε υποχρεωτικά και ο m^2 θα είναι επίσης ζυγός. Αυτό είναι άτοπο, διότι οι δύο αριθμοί ήταν χωρίς κοινούς διαιρέτες.

Μία απόδειξη με υπολογισμό (Miklos Lasckovich)

Αν ήταν $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (με m, n τους μικρότερους ακέραιους), τότε $m^2 = 2 \cdot n^2$, με $m > n$ και $n > m - n$, άρα (ανακτώντας τη γεωμετρική απόδειξη) $\frac{2n - m}{m - n} = \frac{\frac{2n - m}{n}}{\frac{m - n}{n}} = \frac{2 - \frac{m}{n}}{\frac{m}{n} - 1}$

Εφόσον $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ είναι $\frac{2 - \frac{m}{n}}{\frac{m}{n} - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}$ Ο τύπος αυτός παρουσιάζει τη $\sqrt{2}$ ως λόγο ακέραιων όρων πολύ μικρότερων των αρχικών, το οποίο είναι αδύνατο.

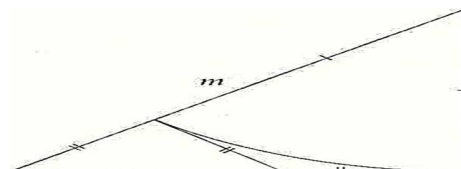
Μια ευφυής γραφική απόδειξη (Alexander J. Hahn)

Αν $\sqrt{2}$ ήταν κλάσμα (ήδη απλοποιημένο), ο λόγος $\frac{m}{n}$ θα ήταν $m^2 = 2n^2$ και το λευκό τετράγωνο πλευράς m θα ήταν ίσο σε εμβαδό με τα δύο σκιερά τετράγωνα πλευράς n (σχήμα 6). Τα σκιερά τετράγωνα που είναι τοποθετημένα στις αντικριστές πλευρές του λευκού τετραγώνου, διασταυρώνονται σε ένα νέο τετράγωνο ακέραιης πλευράς $m - 2(m - n) = 2n - m$, το εμβαδό του οποίου πρέπει να είναι το άθροισμα των δύο μαύρων τετραγώνων πλευράς $m - n$. Έτσι $(2n - m)^2 = 2(m - n)^2$. Το $\sqrt{2}$ εμφανίζεται ξανά ως κλάσμα $\frac{2n - m}{m - n}$ ακέραιων μικρότερων των m, n που θεωρητικά, ήταν οι πιο μικροί! Για άλλη μια φορά, υπάρχει αντίφαση.

Μια απόδειξη με σχέδιο (Tom Apostol)

Αυτή η απόδειξη της ιδιότητας του άρρητου της $\sqrt{2}$ παρουσιάστηκε το 2000. Οφείλεται στο μαθηματικό, ειδικό της θεωρίας αριθμών, Tom Apostol. Το «ελάχιστο» ορθογώνιο τρίγωνο ακέραιων πλευρών m, n, n με $m^2 = 2n^2$ εμπεριέχει άλλο τρίγωνο με ακόμη πιο μικρές ακέραιες πλευρές. Αυτό όμως έρχεται σε σύγκρουση με την αρχική υπόθεση του ελαχίστου.

Σχήμα 7



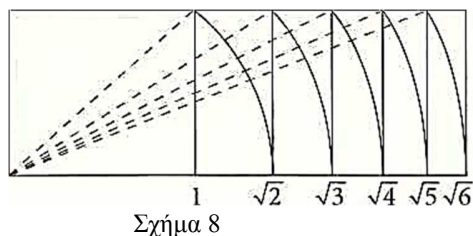
Το πρόβλημα του $2^{\sqrt{2}}$

Στο διεθνές μαθηματικό συνέδριο που έλαβε χώρα στο Παρίσι το 1900, ο Γερμανός μαθηματικός David Hilbert, παρουσίασε αυτό που θεωρούσε ως σύγχρονα όρια των μαθηματικών και προέτρεψε τη μαθηματική κοινότητα να καταπιαστεί με την υπέρβασή τους.

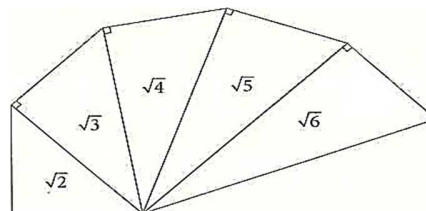
Ο Hilbert πρότεινε μία λίστα 23 άλυτων προβλημάτων τα οποία, κατά την άποψή του, είχαν ύψιστη σημασία. Μεταξύ αυτών συγκαταλεγόταν το αίνιγμα του Fermat, αλλά και η $\sqrt{2}$.

Το ερώτημα που έθετε ο Hilbert σχετικά με αυτή ήταν « $O\ 2^{\sqrt{2}}$ είναι υπερβατικός αριθμός δηλαδή, αριθμός που δεν μπορεί να εμφανιστεί ως λύση πολυώνυμου με ακέραιους συντελεστές ίσους με μηδέν;» Ο Hilbert, προαισθάνθηκε πως η απάντηση ήταν καταφατική. Το 1930, τριάντα χρόνια αργότερα, μπόρεσε να το αποδείξει οριστικά.

Γεωμετρικά σχέδια της $\sqrt{2}$



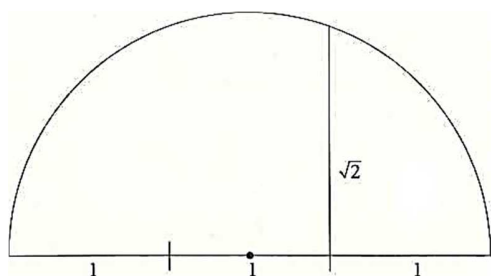
Σχήμα 8



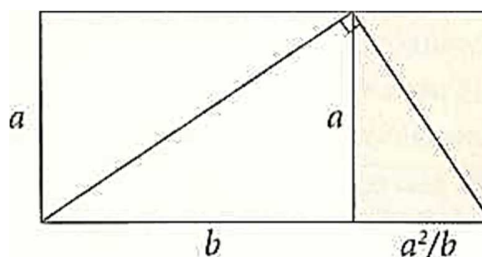
Σχήμα 9

Όπως καθίσταται προφανές, το πρώτο γεωμετρικό σχέδιο της $\sqrt{2}$ είναι η διαγώνιος του

μοναδιαίου τετραγώνου. Στο σχήμα 8 όταν τοποθετήσουμε το τμήμα $\sqrt{2}$ με κανόνα και διαβήτη, προκύπτει ορθογώνιο πλευρών 1 και $\sqrt{2}$, η διαγώνιος του οποίου είναι $\sqrt{3}$. Τότε, αρχίζουν να εμφανίζονται και όλα τα τμήματα $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots$. Η ίδια σειρά, μπορεί να απεικονιστεί οπτικά σχεδιάζοντας μία σπείρα (σχήμα 9). Άλλο είδος σχεδίασης της $\sqrt{2}$, είναι μέσω της χρήσης περιφερειών. Αν σχεδιαστεί ημικύκλιο διαμέτρου 3 και στο σημείο της διαμέτρου που απέχει 2 μονάδες από ένα άκρο, υψώνεται η κάθετος, αυτή θα κόψει την περιφέρεια με τμήμα μήκους $\sqrt{2}$ (σχήμα 10). Αν έχουμε ορθογώνιο axb πάντα μπορούμε να τραβήξουμε τη διαγώνιο του. Τότε, από την κορυφή του, μπορεί να σχεδιαστεί η κάθετος της διαγώνιου εξωτερικά (ή εσωτερικά), κατασκευάζοντας το επονομαζόμενο αντίστροφο ορθογώνιο. Το νέο αυτό ορθογώνιο, εκτός του ότι έχει το ίδιο σχήμα, μοιράζεται μία πλευρά με το αρχικό ορθογώνιο. Κατά συνέπεια, έχει την ίδια αναλογία μεταξύ των πλευρών του a και $\frac{a^2}{b}$ (σχήμα 11).

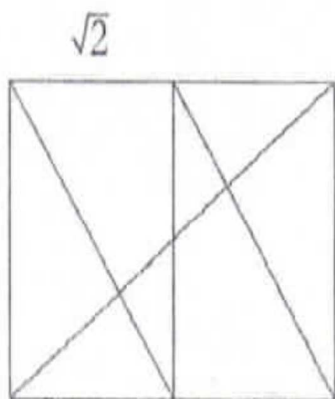


Σχήμα 10

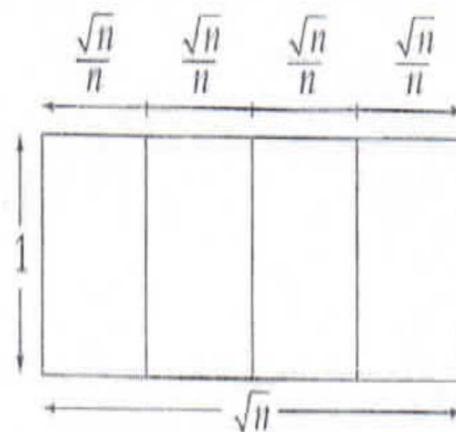


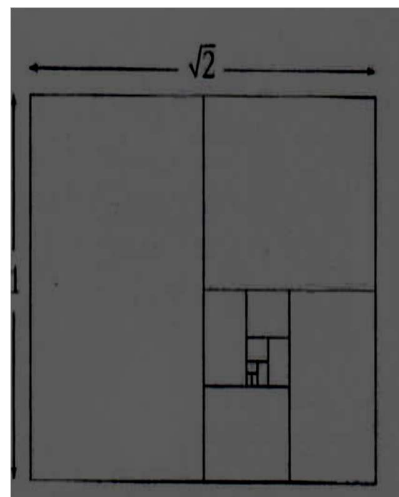
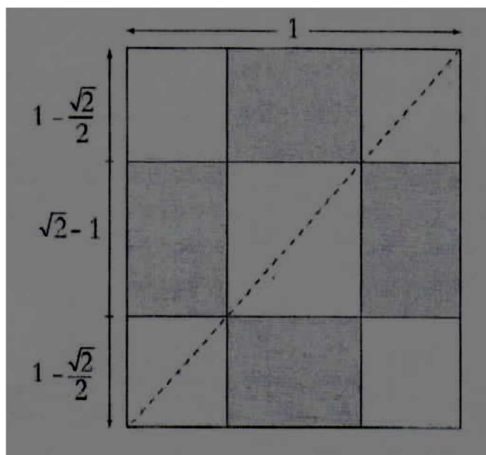
Σχήμα 11

Τότε, πότε ένα αντίστροφο ορθογώνιο είναι το μισό του αρχικού ορθογωνίου; Πρέπει να είναι $\frac{a^2}{b} = \frac{b}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{b}{a}$. Το ορθογώνιο της αναλογίας $\sqrt{2}$ είναι ο μοναδικός τύπος του οποίου το μισό είναι το αντίστροφό του. Τα ακόλουθα σχήματα 12, 13 εμφανίζουν ενδιαφέροντα γεωμετρικά συμπεράσματα προερχόμενα από την εν λόγω ιδιότητα.



Σχήμα 12





Σχήμα 13

Μορφότυπα DIN χαρτιού και φωτογραφιών

Υπάρχουν σχήματα χαρτιού όπως το A4 (210x290 mm), το ολλανδικό (215x285 mm), το A5 (215x157,5 mm), το μισό του A5, γνωστό ευρύτερα ως A6. Η τεχνολογική πρόοδος απέσυρε τις γραφομηχανές (χειρός ή ηλεκτρικές) και δημιούργησε έναν καινούργιο κόσμο πολυμηχανημάτων (υπολογιστές, τηλετυπία, φωτοτυπικά). Αποσκοπώντας στην πολυλειτουργική χρήση αυτών των συσκευών, για εξοικονόμηση χρόνου και για ευκολία, επικράτησαν στην Ευρώπη κάποια μορφότυπα χαρτιού, η σειρά DIN. Το περίεργο είναι πως το εν λόγω σύστημα δεν είναι καθόλου καινούργιο. Πρόκειται για παλαιό σύστημα σχεδίασης του γερμανικού **Deutsches Institut für Normung**, στα αρχικά του οποίου οφείλει το μορφότυπο DIN και το όνομά του. Το DIN, ήταν ένα ίδρυμα αφιερωμένο στην τυποποίηση το οποίο ανέθεσε στον μηχανικό Walter Forstmann την επεξεργασία ενός προτύπου (DIN 476) για τον καθορισμό σχημάτων χαρτιού κατά τον Μεσοπόλεμο, το έτος 1922. Ο Διεθνής Οργανισμός Τυποποίησης (ISO κατά το αγγλικό όνομά του) ενσωμάτωσε το γερμανικό πρότυπο στο δικό του πρότυπο **ISO 216**. Ο οργανισμός αυτός, ιδρύθηκε μετά τον 2^ο Παγκόσμιο πόλεμο με αντικείμενο την προώθηση διεθνών προτύπων στη βιομηχανία, το εμπόριο και την επικοινωνία, ώστε να αυξηθούν οι εγγυήσεις ποιότητας και ασφάλειας των προϊόντων.

Σήμερα, 160 χώρες συμμετέχουν στον οργανισμό αυτό που έχει την έδρα του στη Γενεύη της Ελβετίας. Σήμερα, ελάχιστες χώρες ακολουθούν αυτά τα πρότυπα (Η.Π.Α., Καναδάς και κάποιες λατινοαμερικανικές). Στην Ευρώπη υπάρχει μία χώρα που χρησιμοποιεί διαφορετικό σύστημα. Στο Ηνωμένο Βασίλειο υπάρχουν φύλλα όπως το **Letter** (11x8,5 ίντσες), το **Legal** (14x8,5 ίντσες) και το **Tabloid** (17x11 ίντσες). Στην καρδιά αυτής της ενοποίησης των μέτρων βρίσκεται μία παντελώς άγνωστη και συνάμα πολύ παράξενη έκπληξη για το ευρύ κοινό. Η μαθηματική βάση του συστήματος DIN είναι η αναλογία $\sqrt{2}$ και μία επιφάνεια 1 m^2 .

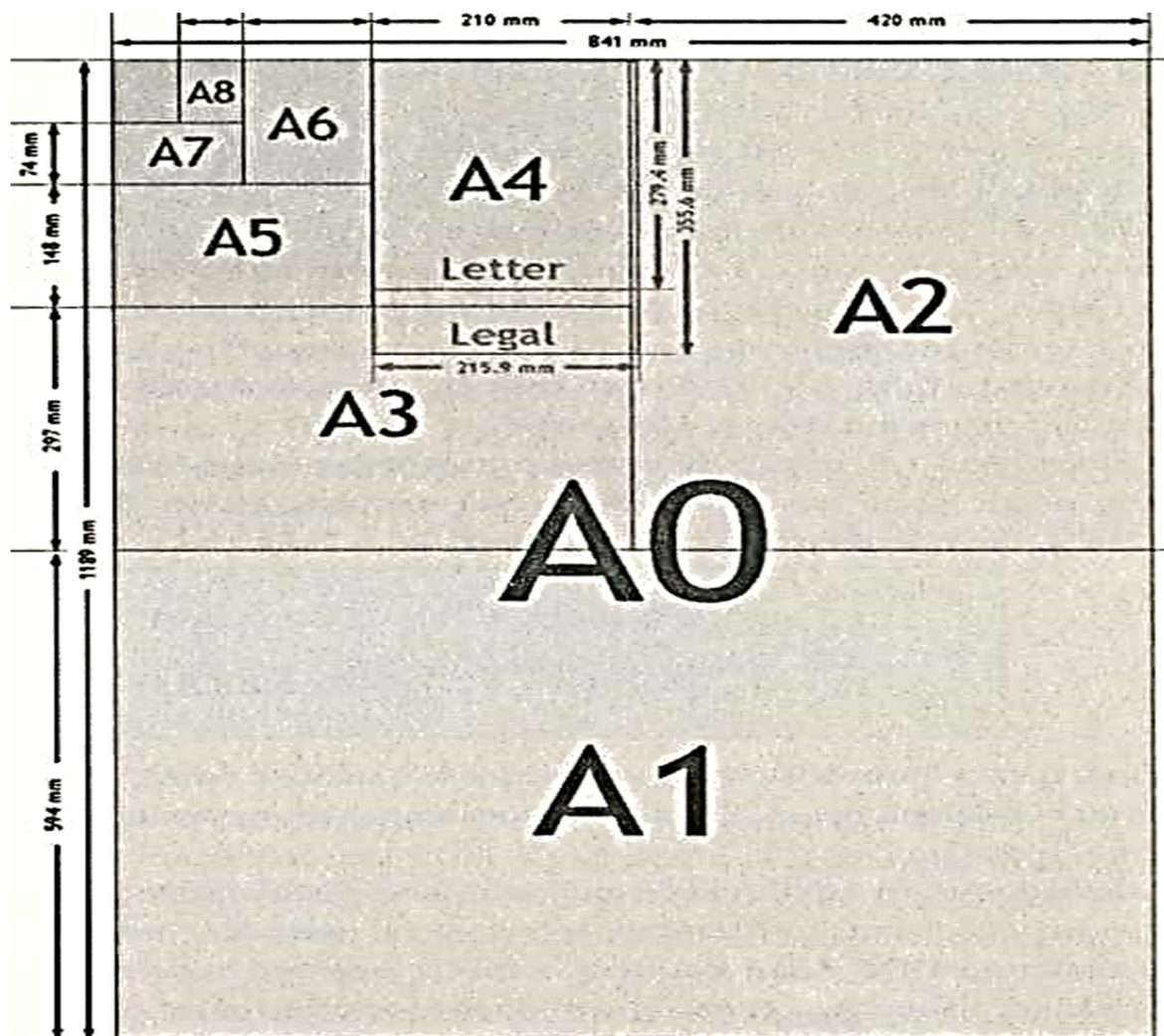
Αν χρειάζονται ορθογώνια φύλλα χαρτιού $a \times b$ (με $a < b < 2a$), έτσι ώστε το αρχικό φύλλο DIN A0 να έχει επιφάνεια 1 m^2 και κάθε φύλλο χωρισμένο στη μέση της μεγάλης πλευράς b να δίνει δύο κομμάτια ίσου προτύπου, προκύπτει η αναλογία $\frac{b}{a} = \frac{a}{\frac{b}{2}} \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{2}$. Βλέπουμε ότι η $\sqrt{2}$ είναι το κλειδί για να διευκολυνθεί μία λογικά

συνεπής σειρά πανομοιότυπων προτύπων χρησιμοποιώντας την αρχή της συνεχούς διαίρεσης σε

μισά. Στην περίπτωση του DIN A0, όταν εκφράζεται σε mm, θα είναι $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ και

$$ba = 1.000.000 \text{ mm}^2 = 1 \text{ m}^2. \text{ Άρα, } a2\sqrt{2} = 10^6 \Leftrightarrow \sqrt{10^6\sqrt{2}} = 841 \text{ mm και } b = 1.189 \text{ mm}.$$

Είναι σαφές πως πρόκειται για τις διαστάσεις κομμένων φύλλων. Οι κατασκευαστές κυλίνδρων χαρτιού δουλεύουν με μεγαλύτερες διαστάσεις για να προβούν σε ασφαλείς κοπές. Για παράδειγμα, για ένα DIN A0 κατασκευάζονται κομμάτια $880 \times 1.230 \text{ mm}$. Εκτός από τη σειρά A, υπάρχουν οι B και C. Στο πλαίσιο που παρατίθεται στο περιθώριο, απαριθμούνται οι διαστάσεις τους σε χιλιοστά. Σημειώνονται παρεκκλίσεις $\pm 1,5 \text{ mm}$ για διαστάσεις 150 mm .



Σχήμα 14 Μορφότυπα DIN μεγέθους χαρτιού από A0, επιφάνειας 1 m^2 ως A8, λίγο μεγαλύτερο από μία κάρτα επισκέπτη

Οι διαστάσεις της σειράς BN είναι αντιστοίχως (ύψος και πλάτος) ο γεωμετρικός μέσος όρος των τιμών που είναι σχετικές με το DIN AN και το DIN A (N+1). Για παράδειγμα, στο DIN B4 ισχύουν τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα 2.

B4 (250 x 353)	$250\text{ mm} = \sqrt{210 \cdot 297}\text{ mm}, \text{ A4}$
	$353\text{ mm} = \sqrt{297 \cdot 420}\text{ mm}, \text{ A3}$

Πίνακας 2

Η σειρά C έχει διαστάσεις τους γεωμετρικούς μέσους όρους των A, B και συνιστά μια ενδιάμεση σειρά. Στα πιο δημοφιλή μέλη του συναντάμε τους φακέλους. Αν σηκώσουμε το καπάκι ενός φωτοτυπικού μηχανήματος, θα παρατηρήσουμε στο περιθώριο της γυάλινης επιφάνειας τις αναφορές που ανταποκρίνονται στα πρότυπα DIN. Αλλά και στις κασέτες χαρτιού τους βλέπουμε ότι οι κινητές βελόνες έχουν σχεδιαστεί ώστε να προσαρμόζονται σε όλα τα πρότυπα. Ακόμη και στην κασέτα εξόδου, συχνά, υπάρχουν σημάδια ή οδηγοί προσαρμογής.

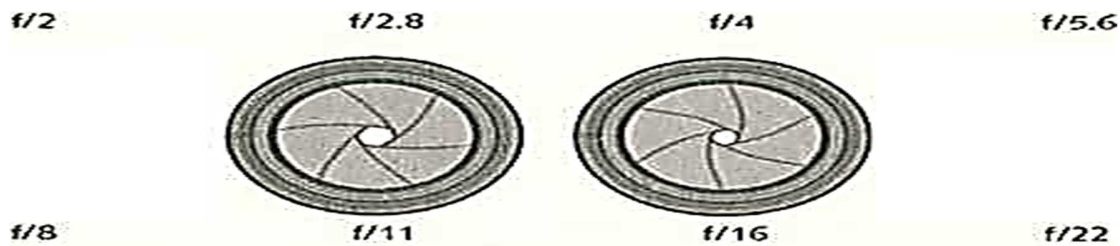
Η πυθαγόρεια ουσία του φωτοτυπικού μηχανήματος είναι καταφανής ήδη από το σχεδιάσμά του. Αλλά οι πιο πολύπλοκες πυθαγόρειες λειτουργίες εκτελούνται στο εσωτερικό του ηλεκτρονικού εγκεφάλου του μηχανήματος. Τι συμβαίνει όταν βγάζουμε μία φωτοτυπία σε μεγέθυνση ή σμίκρυνση; Ας θεωρήσουμε την περίπτωση ενός DIN A3 που μειώνεται σε DIN A4. Εφόσον το εμβαδόν του DIN A4 είναι το μισό του DIN A3, η μαθηματική διαδικασία για να ρυθμιστούν τα μήκη συνεπάγεται τη διαίρεση δια $\sqrt{2}$, δηλαδή $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Αυτό αναπαριστά

έναν παράγοντα σμίκρυνσης της $\frac{\sqrt{2}}{2}$, που μας δίνει ο αριθμός 0,7071..., δηλαδή ένα 70%.

Σειρά A	A0	841 x 1.189	Σειρά B	B0	1.000 x 1.414	Σειρά C	C 0	917 x 1.297
	A1	594 x 841		B1	707 x 1000		C 1	648 x 917
	A2	420 x 594		B2	500 x 707		C 2	458 x 648
	A3	297 x 420		B3	353 x 500		C 3	324 x 458
	A4	210 x 297		B4	250 x 353		C 4	229 x 324
	A5	148 x 210		B5	176 x 250		C 5	162 x 229
	A6	105 x 148		B6	125 x 176		C6	114 x 162
	A7	74 x 105		B7	88 x 125		C 7/6	81 x 114
	A8	52 x 74		B8	62 x 88		C 7	81 x 114
	A9	37 x 52		B9	44 x 62		C 8	57 x 81
	A10	26 x 37		B10	31 x 44		C 9	40 x 57
							C 10	28 x 40

Πίνακας 3 Διαστάσεις σειρών DIN (σε mm)

Κατά ανάλογο τρόπο, αυξάνοντας το μήκος του αρχικού DIN A4 πολλαπλασιάζεται με $\sqrt{2} = 1,4142$ (αφού το DIN A3 έχει διπλάσια επιφάνεια). Άρα, πραγματοποιεί μεγέθυνση της τάξεως του 141,42%. Τελικά, κάθε φωτοτυπία που βγάζουμε, όσο παράξενο και αν φαίνεται, προτρέπει το $\sqrt{2}$ να αναλάβει δράση σε μια διόλου ευκαταφρόνητη σειρά μαθηματικών υπολογισμών.



Ανοίγματα διαφραγμάτων αναλογικής φωτογραφικής μηχανής με αριθμούς f σημειωμένους από κάτω.

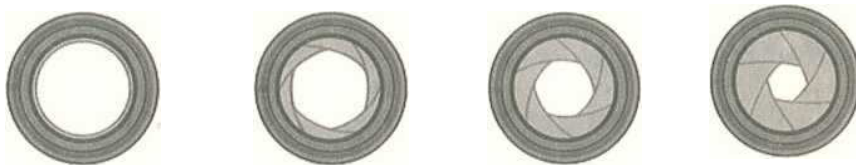
Από το διπλασιασμό του τετραγώνου στο διπλασιασμό του κύβου

Αν έχουμε τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς, μπορούμε να σχεδιάσουμε με κανόνα και διαβήτη, άλλο τετράγωνο διπλάσιου εμβαδού; Η απάντηση είναι ναι, διότι αφού η διαγώνιος του ίδιου του τετραγώνου $\sqrt{2}$ είναι η νέα πλευρά του τετραγώνου εμβαδού 2. Το απλούστατο αυτό ερώτημα, επιλύθηκε με ευκολία, αλλά τότε στην αρχαία Ελλάδα, τέθηκε το αναπόφευκτο ερώτημα «μπορούσε να γίνει το ίδιο και με έναν κύβο»; Αν έχουμε κύβο μοναδιαίας ακμής, μπορούμε να κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη την πλευρά x ενός κύβου διπλάσιου όγκου; Κάτι τέτοιο θα ισοδυναμούσε με $x^3 = 2$, δηλαδή, θα ψάχναμε να βρούμε πώς να σχεδιάσουμε $\sqrt[3]{2}$. Ως τον 19^ο αιώνα δεν είχε αποδειχθεί αν ένα τέτοιο σχέδιο ήταν αδύνατο με κανόνα και διαβήτη.

Οι αριθμοί f στη φωτογραφία

Ας θεωρήσουμε κύκλο ακτίνας R , η επιφάνεια του οποίου θα είναι πR^2 . Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε κύκλο διπλάσιου εμβαδού $2\pi R^2$, χρειαζόμαστε μια ακτίνα r τέτοια ώστε $r = \sqrt{2}R$. Κατά παρόμοιο τρόπο, για να προκύψει το μισό του εμβαδού, διαιρούμε δια $\sqrt{2}$. Άρα, το παιγνίδι επιφανειών κυκλικών διπλών/μισών θα ισούται με το συνεχή πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση των ακτίνων και των διαμέτρων επί ή δια $\sqrt{2}$. Έτσι, θα εμφανιστεί η ακολουθία δυνάμεων $\sqrt{2}$, $(\sqrt{2})^2$, $(\sqrt{2})^3$, $(\sqrt{2})^4$, $(\sqrt{2})^5$, $(\sqrt{2})^6$, $(\sqrt{2})^7$, $(\sqrt{2})^8$, ... που, αν προσεγγιστεί με δύο δεκαδικά, εκφράζεται ως εξής 1,41 2 2,82 4 5,64 8 11,28 16...

Και ενώ η χαρτοβιομηχανία σχεδίαζε την ενοποίησή της, δίνοντας προτεραιότητα στη $\sqrt{2}$ και εδραιώνοντας αναλογίες προερχόμενες από τη διαίρεση στη μέση, η φωτογραφική βιομηχανία βρήκε σ' αυτόν τον πανταχού παρών αριθμό τον λόγο των αναλογιών της. **Η $\sqrt{2}$ καθορίζει τα διαφράγματα των αντικειμένων στις φωτογραφικές μηχανές.** Γι' αυτό χρησιμοποιεί την ακολουθία δυνάμεων της $\sqrt{2}$ που εκφράζονται με τρόπο δεκαδικό. Στον χώρο της φωτογραφίας αποκαλούνται αριθμοί f (σχήμα 15).



Όταν βγάζουμε μια φωτογραφία με χειροκίνητες ρυθμίσεις, κοιτάζουμε την εστίαση, την ταχύτητα κλείστρου και την ποσότητα του εισερχόμενου φωτός. Ελέγχουμε την ποσότητα του εισερχόμενου φωτός ανοιγοκλείνοντας περισσότερο ή λιγότερο το διάφραγμα (μια μικρή πορτούλα που κλείνει κυκλικά). Αν το φως στον περιβάλλοντα χώρο είναι δυνατό (ύπαιθρος),

κλείνουμε το διάφραγμα, διαφορετικά η φωτογραφία θα καεί. Αν το φως στον περιβάλλοντα χώρο είναι χαμηλό (νύχτα), ανοίγουμε το διάφραγμα, διαφορετικά η φωτογραφία θα βγει σκοτεινή. Το διάφραγμα δεν ανοιγοκλείνει από μόνο του. Έχει διαφορετικές θέσεις που πρέπει να επιλέξουμε με προσοχή, δεδομένου ότι πρέπει να συνδυάσουμε και με άλλες παραμέτρους, όπως η ταχύτητα κλείστρου. Οι θέσεις αυτές υπολογίζονται με τη $\sqrt{2}$. Όταν το διάφραγμα περνά από μία θέση ανοίγματος στην επόμενη, η διάμετρος του ανοίγματος διαιρείται δια $\sqrt{2}$, αλλά η επιφάνεια εισόδου φωτός είναι η μισή οπότε μειώνεται η φωτεινότητα. Οι αριθμοί f που ήταν ενσωματωμένοι στις παλιές φωτογραφικές μηχανές ήταν 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16...



Δηλαδή, προσεγγίσεις δεκαδικού, με εξαίρεση το 11.28 που μειώνεται δραστικά στο 11, χωρίς να δώσει καμία ευκαιρία στο πιο λογικό 11.2. Μοιάζει με αρχαιολογική έρευνα η προσπάθεια εντοπισμού φωτογραφικών καρτέ με τις συγκεκριμένες ενδείξεις που μας πηγαίνουν πίσω σε άλλες εποχές «**αν έχει συννεφιά επιλέξτε 8, αν έχει ηλιοφάνεια επιλέξτε 16**». Τότε έμοιαζαν ακίνδυνες, αλλά στην πραγματικότητα ήταν ένας τρόπος για να ρωτήσεις «**σε ποια δύναμη της $\sqrt{2}$ προτιμάς να βγάλεις τη φωτογραφία σου;**»

Η $\sqrt{2}$ στο πάρκο Γκουέλ (Βαρκελώνη) του Antoni Gaudi

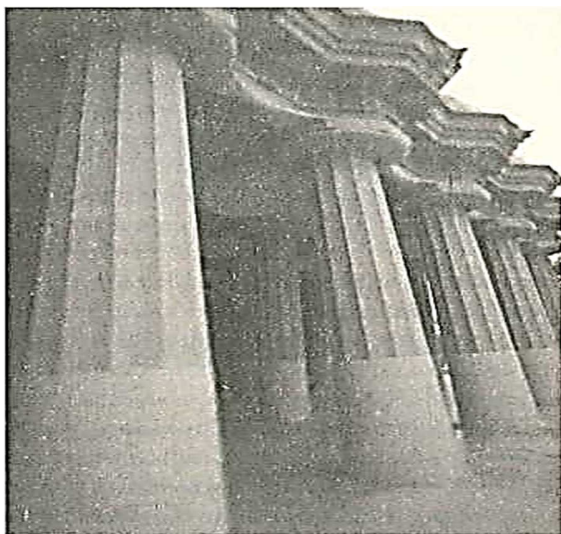
Το $\sqrt{2}$ μπορεί να μην είναι ο πιο υπερβατικός αριθμός σίγουρα όμως καταλαμβάνει περίοπτη θέση στην τέχνη, στην αρχιτεκτονική και στο σχέδιο. Μέσα στη φύση του πάρκου, ο αρχιτέκτονας δημιούργησε μια σειρά από μοναδικούς χώρους. Ανεβασμένη σε πελώριους αρχαιοελληνικούς κίονες δεσπόζει στο κέντρο του πάρκου μια πλατεία (σχήμα 16). Σε αυτή, συναντάμε τον περίφημο πάγκο που είναι κοίλος από τη μία πλευρά και κυρτός από την άλλη, ο οποίος είναι διακοσμημένος με ένα μωσαϊκό από αστραφτερά κεραμικά, το παιγνίδι του οποίου με το κανονικό και το μη κανονικό τραβά αμέσως την προσοχή (σχήμα 17). Και πάλι, η πλατεία αυτή κρύβει ένα μαθηματικό μυστικό βασισμένο στο $\sqrt{2}$. Ο Gaudi τοποθέτησε τα ανώτερα κέντρα των κίωνων σε ένα πλέγμα τετραγώνων. Ο επισκέπτης που παρατηρεί τον διάκοσμο του κυματοειδούς πάγκου ή την κλίση των κίωνων τα αποδίδει σε μια αρχιτεκτονική ευφυΐα που ξεπερνά τα όρια της λογικής. Μόνο που η αντίληψη αυτή είναι πέρα για πέρα πλασματική.

Η σταθερότητα του συνόλου, εξασφαλίζεται από την τέλεια τετραγωνισμένη γεωμετρία. Ο Gaudi, γνώριζε πώς να συνδυάσει τα πιο καθαρά γεωμετρικά σχέδια με την πιο συνετή και καλαίσθητη διακόσμηση. Οι κίονες που στηρίζουν την κυματιστή πλατεία του πάρκου Γκουέλ, προφανέστατα ακανόνιστες, είναι στο άνω τμήμα τους τοποθετημένες στο κέντρο ενός τέλειου πλέγματος τετραγώνων.

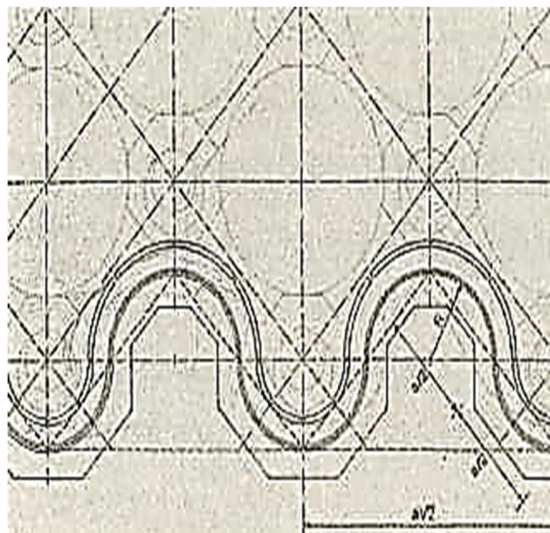
Μία σήραγγα για έναν κύβο

Έστω κύβος πλευράς 1 m , στον οποίο θέλουμε να ανοίξουμε οπή για να περάσουμε άλλον κύβο. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος κύβος που καταφέρνουμε να περάσουμε; Αυτό το πρόβλημα επιλύθηκε από το Δανό Pieter Nieuwland ο οποίος αποφάνθηκε πως **ο μέγιστος κύβος που μπορούσε να περάσει από την οπή θα ήταν**

μεγαλύτερος από τον ίδιο τον κύβο, με πλευρά $1,060660\dots\text{ m}$, δηλαδή πλευρά τιμής ίσης με $\frac{3\sqrt{2}}{4}$



Σχήμα 16



Σχήμα 17

Ταξίδι στη σπείρα του Θεόδωρου

Ο αριθμός κυβερνά το σύμπαν. Πυθαγόρας

Μια γνωστή ταινία της Disney χρησιμοποιεί ένα από τα συνήθη αστεία γύρω από τις τετραγωνικές ρίζες Στο «Ο Donald Duck και η χώρα των μαθηματικών», η πάπια φτάνει στη θαυμαστή χώρα όπου συναντά ένα δάσος με δέντρα, οι ρίζες των οποίων είναι φτιαγμένες από τετράγωνα. Οι σεναριογράφοι δεν επεδίωκαν κάτι περισσότερο από μια απλή γλωσσολογική σύγχυση, ωστόσο, η σχέση ανάμεσα στις τετραγωνικές ρίζες και το τετράγωνο γεωμετρικό σχήμα, είναι ιδιαίτερα στενή. Οι κειμενογράφοι της Disney δεν έκαναν λάθος όταν παρουσίασαν με το συγκεκριμένο τρόπο τις τετραγωνικές ρίζες στη φύση. Όλες οι τετραγωνικές ρίζες, όχι μόνο η $\sqrt{2}$, συνδέονται με μήκη ή αναλογίες γεωμετρικών σχημάτων. Αν το πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμοστεί σε πλήθος σχημάτων που εμφανίζονται σε καλλιτεχνικές απεικονίσεις, εύκολα αποκαλύπτεται τα $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$ Θα φανεί περίεργο, αν και απίστευτο, δεδομένου ότι οι καλλιτέχνες ήταν που τα χρησιμοποίησαν, είτε ασυναίσθητα, είτε ακολουθώντας κανόνες αρμονικής αναλογίας με βάση τα μαθηματικά. Αυτό που πραγματικά προκαλεί έκπληξη είναι πως η πυθαγόρεια ανάλυση, επιτρέπει τον εντοπισμό των τετραγωνικών ριζών σε χιλιάδες φυσικά σχήματα, σε ασύλληπτες και μαθηματικά τέλειες αναλογίες. Μπορούν να εντοπιστούν σε μέταλλα που μεγαλώνουν ακολουθώντας πολυεδρικά μοτίβα, από κρυστάλλινους πρισματικούς τύπους έως κύβους από πυρίτη. Οι μετρήσεις και οι υπολογισμοί που γίνονται με αυτά τα κομμάτια δίνουν εκπληκτικά μαθηματικά αποτελέσματα.

Το πιο θαυματικό όλων είναι η επιβεβαίωση της παρουσίας της $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$ στο φυτικό κόσμο. Απαντώνται στα λουλούδια ή στους καρπούς που εμφανίζουν κανονικά σχήματα αναπτύξεως, για παράδειγμα, στις πολυγωνικές κατανομές των πετάλων, στις σπειροειδείς κατανομές των σπόρων, κ.ο.κ. Και στο ζωικό βασίλειο συναντάμε πυθαγόρεια παιχνίδια. Οι τετραγωνικές ρίζες ρυθμίζουν την ανάπτυξη των κελυφών ή των κεράτων και δείχνουν έναν κόσμο σπειρών και ελίκων γεωμετρικής εξελίξεως που αψηφά την αφαιρετική ικανότητα του ανθρώπου, και πάνω απ' όλα, του χαρίζει την αισθητική ευαισθησία του. Ο **Theodore Andrea Cook**, κριτικός τέχνης των αρχών του 20^{ού} αιώνα, υπήρξε ο πρώτος που μελέτησε αυτό το

φαινόμενο. Η πραγματεία του «**Οι καμπύλες της ζωής**» θεωρείται κλασική και αφετηρία κάθε μεταγενέστερης αναλύσεως. Ακολουθως, εξετάζονται τα μαθηματικά που υποβόσκουν σ' αυτούς τους φυσικούς νόμους.



Σχήμα 18 Τρία παραδείγματα από ζωϊκό και φυτικό βασίλειο στα οποία οι ρίζες και οι μαθηματικές σειρές παρουσιάζουν πυθαγόρειο συσχετισμό



Σχήμα 19 Προμετωπίδα του βιβλίου του Tartaglia Nova Scientia με υπότιτλο «Ο κήπος των μαθηματικών τεχνών», χώρος που περιφρουρείται από τον Ευκλείδη

Ρίζες και εξισώσεις, μία ιστορική σημείωση

Οι ρίζες, εμφανίζονται άρρηκτα συνδεδεμένες με τη λύση των εξισώσεων 2^{ου}, 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού, ζήτημα που μπορεί στην εποχή μας να περιγράφεται και να εκτελείται καλαίσθητα μέσω των συμβόλων και των αλγεβρικών μεθόδων, αλλά στο πέρασμα των χρόνων συχνά προσεγγιζόταν γεωμετρικά.

Εξισώσεις 3^{ου} βαθμού

Το γενικό πρόβλημα με τις εξισώσεις 3^{ου} βαθμού τέθηκε στην Αναγέννηση. Τον 16^ο αιώνα στην Ιταλία, ένας αυτοδίδακτος μαθηματικός, ο **Niccolo Fontana**, ο επονομαζόμενος **Tartaglia** (1499–1557), βρήκε αριστοτεχνικούς τύπους για να επιλύσει τέτοιου είδους προβλήματα ενώ εμπνεύστηκε και ποιήματα οι στίχοι των οποίων οδηγούσαν στη λύση. Παρά το γεγονός ότι ο **Gerolamo Cardano** (1501–1576), άλλος Ιταλός μαθηματικός στον οποίο είχε αποκαλύψει το μυστικό του, είχε υποσχεθεί ότι δεν θα μιλούσε σε κανένα για τις ανακαλύψεις του, τελικά εξέδωσε ο ίδιος τις λύσεις πριν από τον Tartaglia. Έτσι, ξέσπασε τεράστιο σκάνδαλο στους επιστημονικούς κύκλους της εποχής.

Εξισώσεις 4^{ου} βαθμού

Ένας μαθητής του Cardano, ο μαθηματικός **Ludovico Ferrari** (1522–1565), βρήκε τους τύπους μέσα από τις ρίζες της εξίσωσης 4^{ου} βαθμού βασιζόμενος σ' αυτές του 2^{ου} και 3^{ου} βαθμού.

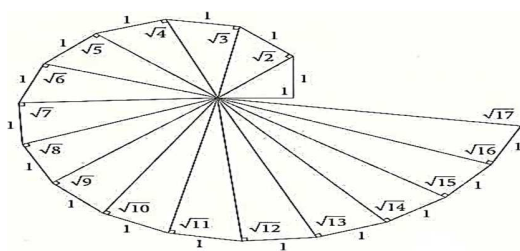
Εξισώσεις άλλων βαθμών

Εφόσον προέκυψαν γενικοί τύποι, με ρίζες και στοιχειώδεις αριθμητικές πράξεις ως τον 4^ο βαθμό, όλα έδειχναν πως ίσως θα μπορούσε να βρεθεί και μία γενική λύση για κάθε εξίσωση n βαθμού. Πολλές ειδικές περιπτώσεις όντως επιλύθηκαν (αν $x^2 = 8$, η έβδομη ρίζα του 8 είναι λύση) αλλά και όχι το γενικό πρόβλημα.

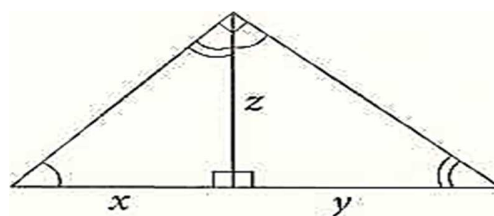
Ο **Paolo Ruffini** (1765–1822), γεννημένος στο Βαλεντάνο της Ιταλίας, ανέπτυξε τον περίφημο κανόνα που φέρει το όνομά του, έναν οργανωμένο τύπο που μπορεί να επιβεβαιώσει αν ένας αριθμός λύνει πολυωνυμική εξίσωση. Πολλά χρόνια αργότερα, με αφετηρία αποτελέσματα προκατόχων τους, όπως οι **Euler**, **Lagrange**, **Ruffini**, **Niels Henrik Abel** (1802–1829), **Evariste Galois** (1811–1832) απέδειξαν πως, γενικά, ξεκινώντας από το βαθμό $n = 5$, δεν ήταν δυνατό να βρεθούν αριθμητικοί τύποι λύσεων.

Οι δυναμικές αναλογίες $\sqrt{n}$

Για πολύ καιρό, η $\sqrt{2}$ υπήρξε ο μόνος γνωστός άρρητος αριθμός. Στον διάλογο «**Θεαίτητος**», ο Πλάτων εξηγεί ότι ο δάσκαλος του των μαθηματικών (**Θεόδωρος ο Κυρηναίος**), υπήρξε ο πρώτος που απέδειξε την ιδιότητα του άρρητου και άλλων τετραγωνικών ριζών περί το 425 π.Χ., θεωρώντας τα μήκη $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{17}$. Το πυθαγόρειο θεώρημα επιτρέπει τον σχεδιασμό όλων των τετραγωνικών ριζών των φυσικών αριθμών, σε σπείρα, καθορισμένη από ορθογώνια τρίγωνα. Δεν ισχύει πως ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος σχεδίασε τη σπείρα, αλλά η ιστορία της έδωσε το όνομά του, ίσως σε αναγνώριση της απόδειξης του άρρητου των τμημάτων αυτών των μηκών. Σήμερα, η εν λόγω κατασκευή είναι γνωστή αποκλειστικά ως η **Σπείρα του Θεόδωρου**.



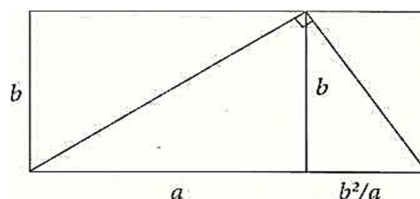
Σχήμα 20



Σχήμα 21

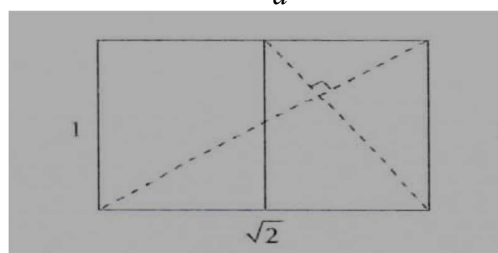
Στο σχήμα 20, η $\sqrt{2}$ είναι η διαγώνιος του τετραγώνου, αλλά η $\sqrt{3}$ είναι η διαγώνιος του ορθογωνίου πλευράς 1 και $\sqrt{2}$ ως υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με τα ίδια αυτά μήκη στις πλευρές (1 και $\sqrt{2}$). Η $\sqrt{4}$ είναι η υποτείνουσα των καθέτων 1 και $\sqrt{3}$. Η $\sqrt{5}$ είναι η υποτείνουσα των καθέτων 1 και $\sqrt{4}$. Έτσι η σειρά των αριθμών $\sqrt{n}$ αναδύεται κατά τρόπο διαδοχικό. Λόγω του επαναλαμβανόμενου τύπου δημιουργίας ορθογωνίων πλευράς 1 και $\sqrt{n}$ οι αναλογίες έχουν ονομαστεί δυναμικές. Παίζοντας με τις δυναμικές αναλογίες και εφαρμόζοντας το θεώρημα του ύψους, μπορούμε να κατασκευάσουμε το αντίστροφο ορθογώνιο. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το ύψος z της κορυφής της ορθής γωνίας απέναντι από την υποτείνουσα τη διαιρεί σε δύο μέρη x, y (σχήμα 21). Με τον τρόπο αυτό το τρίγωνο διαιρείται σε δυο ορθογώνια τρίγωνα ίσων γωνιών. Ως όμοια, οι πλευρές τους είναι ανάλογες. $\frac{z}{y} = \frac{x}{z} \Leftrightarrow z^2 = x \cdot y \Leftrightarrow z = \sqrt{x \cdot y}$ άρα ο z είναι ο γεωμετρικός μέσος των x, y . Το αποτέλεσμα αυτό αποκαλείται θεώρημα του ύψους. Στη συνέχεια, θα το εφαρμόσουμε για να κατασκευάσουμε το αντίστροφο ορθογώνιο (σχήμα 22).

Σχήμα 22

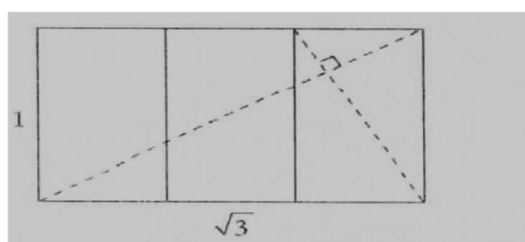


Αν θεωρήσουμε το αντίστροφο μαζί με το ορθογώνιο πλευρών a, b με μια γωνία ορθή μεταξύ διαγώνιων, προκύπτει πως οι πλευρές του νέου ορθογωνίου πρέπει να είναι $b, \frac{b^2}{a}$.

Άρα, η αναλογία του αντίστροφου ορθογωνίου είναι $\frac{b}{\frac{b^2}{a}} = \frac{a}{b}$, ακριβώς η ίδια με αυτή του αρχικού ορθογωνίου. Πότε τα αντίγραφα του αντίστροφου ορθογωνίου καλύπτουν το αρχικό ορθογώνιο; Όταν $n \frac{b^2}{a} = a$. Αν όμως $n = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{n}$.



Σχήμα 23



Σχήμα 24

Έτσι αποδείχθηκε η θαυμαστή ιδιότητα των δυναμικών αναλογιών $\sqrt{n}$, των μόνων που καθιστούν δυνατή τη διαίρεση ενός τριγώνου σε n όμοια ορθογώνια κομμάτια. Το σύστημα DIN της ενοποίησης του χαρτιού, τις χρησιμοποιεί ευρέως. Η βάση του συστήματος εφαρμόζει την ιδιότητα για $n=2$. Στην περίπτωση που $n=3$, η ιδιότητα χρησιμοποιείται για τη

δημιουργία τριπτύχου από ένα φύλλο αναλογιών $\sqrt{3}$.

Ο τύπος του Ήρωνα του Αλεξανδρέα και η $\sqrt{n}$

Ο Ήρων ο Αλεξανδρεὺς υπήρξε μοναδική προσωπικότητα και έζησε μεταξύ των ετών 10 και 70 μ.Χ. Ήταν γεωμέτρης, μηχανικός, συγγραφέας εγκυκλοπαίδειας και εφευρέτης απίστευτων συσκευών. Στη γεωμετρία, έδωσε το όνομά του στον τύπο υπολογισμού του εμβαδού A ενός οποιουδήποτε τριγώνου πλευρών a, b, c . Αν υπολογίσουμε την ημιπερίμετρο $\tau = \frac{a+b+c}{2}$ προκύπτει

$A = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}$. Ο τύπος αυτός καθιερώνει τις τετραγωνικές ρίζες στους υπολογισμούς επιφανειών οποιουδήποτε πολυγωνικού σχήματος, διότι μπορεί πάντα να υποδιαιρείται σε τρίγωνα. Ο Ήρων περιγράφει και έναν τύπο προσέγγισης της $\sqrt{n}$ που χρησιμοποιείται ως σήμερα στους υπολογισμούς. Αν $ab = n$ τότε η $\sqrt{n}$ προσεγγίζεται από $\frac{a+b}{2}$. Με τον τρόπο, αυτό αν $a_1 = a$ είναι μια πρώτη προσέγγιση,

η $a_2 = \frac{a_1 + \frac{n}{a_1}}{2}$ θα είναι καλύτερη και η $a_3 = \frac{a_2 + \frac{n}{a_2}}{2}$ ακόμη καλύτερη και έτσι θα μπορούσαμε να

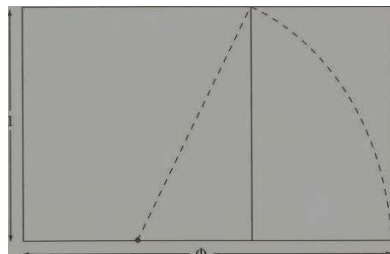
συνεχίσουμε επ' άπειρον. Π.χ., αν $n = 3$ και $a_2 = 2$, είναι $a_2 = \frac{2 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4}$, $a_3 = \frac{\frac{7}{4} + \frac{3}{\frac{7}{4}}}{2}$ κ.λπ.

Η ομορφιά και ο χρυσός αριθμός

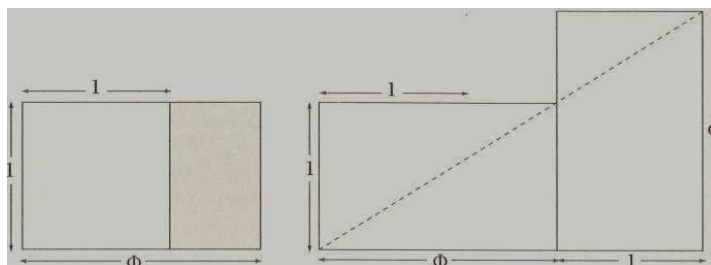
Ο χρυσός αριθμός, είναι ένας άρρητος αριθμός που ανακάλυψαν οι αρχαίοι Έλληνες της κλασικής εποχής. Για πρώτη φορά, μελετήθηκε επίσημα στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Τον 20^ο αιώνα, άρχισε να συμβολίζεται με το γράμμα Φ . Η αριθμητική του έκφραση, είναι **1,6180339887...** Δεν πρόκειται για ιδιαίτερα εντυπωσιακό αριθμό, ωστόσο, αν τον δούμε γεωμετρικά, αμέσως εμφανίζει κάποιες από τις ιδιότητές του. Για παράδειγμα, αν διαβάζεται ως αναλογία. Ο Ευκλείδης το διατυπώνει ως εξής «Μία ευθεία λέγεται ότι έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο, όταν όπως έχει η ολόκληρη ευθεία προς το μεγαλύτερο τμήμα, έχει το μεγαλύτερο τμήμα προς το μικρότερο». Η Αναγέννηση αντιμετωπίζει την εν λόγω αναλογία με δέος.

Για τον Λεονάρντο ντα Βίντσι αποτελούσε ύψιστη έκφραση αρμονίας και τη χρησιμοποιούσε ως κανόνα αισθητικού κάλλους. Αυτός ήταν που βάφτισε το Φ «χρυσό αριθμό» και την αναλογία που αντιπροσωπεύει «χρυσή τομή». Το 1509 εκδόθηκε μια διατριβή αφιερωμένη στη χρυσή τομή με τίτλο *De Divina Proportione* και συγγραφέα το Luca Pacioli έναν φραγκισκανό μαθηματικό, πρωτοπόρο του υπολογισμού των πιθανοτήτων. Ο Pacioli, διατηρούσε επαφή με τους πιο διακεκριμένους καλλιτέχνες της εποχής του, συμπεριλαμβανομένου του Λεονάρντο ντα Βίντσι και στο έργο του διατυπώνει κοσμολογικές και μαθηματικές θεωρίες που συνδέουν τη θεωρία των πλατωνικών στερεών με την αρχιτεκτονική και την εικονική προοπτική. Ο Pacioli, έδωσε στο Φ το δημοφιλέστερο και πιο επικό όνομά του, τη **θεία αναλογία**. Οι αναγεννησιακοί καλλιτέχνες, τη χρησιμοποιούσαν ευρύτατα και τη συναντάμε στα πιο διάσημα έργα τους. Ο μυθικός χρυσός αριθμός προσδιορίζεται από την τιμή $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$ Μετά τον Pacioli, λέγεται πως κάθε ορθογώνιο η

αναλογία του οποίου (η μεγαλύτερη πλευρά δια της μικρότερης) ισούται με Φ , είναι χρυσό. Το σχήμα 25, προτείνει έναν απλό τρόπο κατασκευής ορθογωνίων με τη θεία αναλογία.



Σχήμα 25



Σχήμα 26

Όπως φαίνεται, εδώ λειτουργεί το πυθαγόρειο θεώρημα. Αν ενώσουμε ένα μεσαίο σημείο της πλευράς ενός τετραγώνου με την απέναντι κορυφή, τότε προκύπτει τμήμα μήκους

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ το οποίο, αν ευθυγραμμιστεί με $\frac{1}{2}$, δίνει $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, που είναι ο χρυσός αριθμός.

Στο σχήμα 26 παρουσιάζονται 2 αξιοσημείωτες γεωμετρικές ιδιότητες των χρυσών ορθογωνίων. Στην 1^η περίπτωση φαίνεται πως το χρυσό ορθογώνιο είναι το μόνο που μπορεί να σπάσει σε ένα τετράγωνο και σε ένα άλλο ορθογώνιο κομμάτι, που με τη σειρά του είναι κι αυτό χρυσό. Στη 2^η περίπτωση, μόνο η θεία αναλογία επιτρέπει, όταν τοποθετήσουμε 2 κομμάτια ακριβώς όπως δείχνει το σχήμα, στην προέκταση της διαγώνιου του οριζόντιου κομματιού να περάσει από την ψηλότερη γωνία δεξιά του κάθετου κομματιού.

Πολύγωνα, πολύεδρα και ρίζες

Το πυθαγόρειο θεώρημα επιτρέπει την εδραίωση των διαστάσεων θεμελιωδών κομματιών στη μελέτη των πολυγώνων στο επίπεδο και των πολύεδρων στον χώρο.

Η $\sqrt{3}$ στο ισόπλευρο τρίγωνο και στο κανονικό εξάγωνο

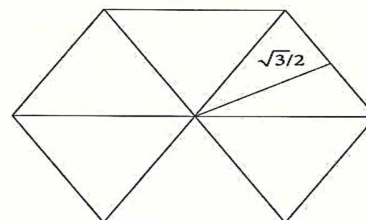
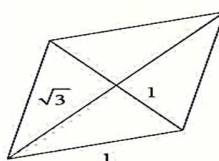
Το τελειότερο τρίγωνο είναι το ισόπλευρο, δεδομένου ότι έχει και τις 3 πλευρές και γωνίες του ίσες. Αν εφαρμοστεί το πυθαγόρειο θεώρημα, λαμβάνοντας υπόψη τη μοναδιαία

πλευρά, το ύψος του εν λόγω τριγώνου είναι $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα το εμβαδόν είναι $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

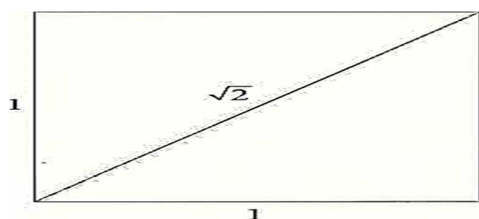
Ενώνοντας 2 τέτοια τρίγωνα στη βάση τους (σχήμα 27), κατασκευάζουμε ρόμβο διαγώνιων 1 και $\sqrt{3}$. Με 6 αντίγραφα του ίδιου τριγώνου, σχηματίζουμε κανονικό εξάγωνο, με απόστημα (απόσταση κέντρου από την πλευρά) ίσο με $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και εμβαδό $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Σχήμα 27

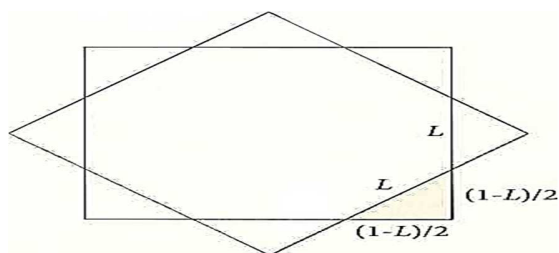
Η $\sqrt{2}$ στο τετράγωνο και στο κανονικό οκτάγωνο



Η διαγώνιος του μοναδιαίου τετραγώνου είναι $\sqrt{2}$ (σχήμα 28). Αφού το κανονικό οκτάγωνο παράγεται από τη διασταύρωση 2 πανομοιότυπων τετραγώνων αντεστραμμένων και υπέρθετων (σχήμα 29) τότε από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι $L^2 = 2\left(\frac{1-L}{2}\right)^2$ άρα, $2L^2 = (1-L)^2 = 1 + L^2 - 2L$ άρα $L^2 + 2L - 1 = 0 \Leftrightarrow L = \sqrt{2} - 1$.



Σχήμα 28



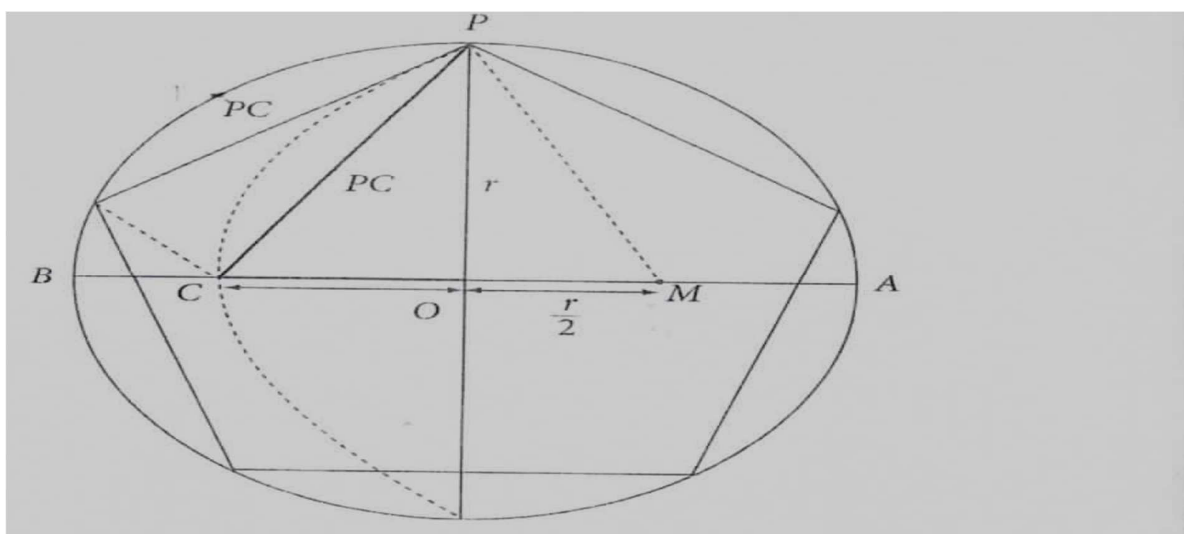
Σχήμα 29

Τοις μετρητοῖς ἢ με κάρτα;

Η πλειοψηφία των **πιστωτικών καρτών** ή των **καρτών επίσκεψης**, των **εισιτηρίων παρκινγκ** και των **τηλεοπτικών οθονών** αναλογίας 16:9, σέβονται τη θεία αναλογία. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί χωρίς να χρειάζονται μετρήσεις ή μαθηματικοί υπολογισμοί. Ας παίξουμε με τα σχήματα 2 τραπεζικών καρτών ίσου μεγέθους. Αρκεί να τις τοποθετήσουμε τη μία οριζόντια και την άλλη κάθετα και να τις ευθυγραμμίσουμε στη βάση. Αν τραβήξουμε τη διαγώνιο της οριζόντιας κάρτας και την προεκτείνουμε, θα καταλήξει να συμπίπτει ακριβώς με τη δεξιά κορυφή της κάθετης κάρτας.

Η $\sqrt{5}$ στην κατασκευή του κανονικού πενταγώνου

Ένα μολύβι, ένας διαβήτης και ένας κανόνας αρκούν για να αναδυθεί η πανίσχυρη αρμονία του κανονικού πενταγώνου. Σχεδιάζουμε περιφέρεια (O, r) και σημειώνουμε το μέσο M της ακτίνας OA . Με κέντρο το M και ακτίνα την PM , σχεδιάζουμε τόξο περιφέρειας που τέμνει την ακτίνα OB στο C . Άρα, PC είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου που είναι εγγεγραμμένο στην αρχική περιφέρεια. Γιατί; Για να το κατανοήσουμε, πρέπει να προβούμε σε



διπλή εφαρμογή του θεωρήματος $PM = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} \frac{r\sqrt{5}}{2},$

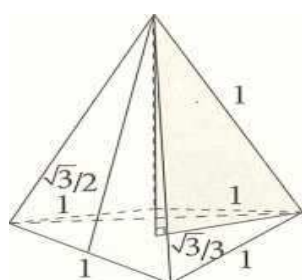
$$PC^2 = OP^2 + OC^2 = r^2 + \left(PM - \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)r^2. \text{ Για να επιβεβαιώσουμε το εύρημα}$$

μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το ότι $\cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2}$. Οπότε, παρατηρώντας το τρίγωνο με πλευρές

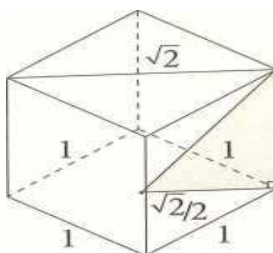
r, r, PC επιβεβαιώνεται πως μια γωνία στο O είναι 72° ή $360^\circ/5$. Άρα, κατασκευάσαμε κανονικό πεντάγωνο. Κατά ανάλογο τρόπο, μπορούμε να εντοπίσουμε την παρουσία των $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5} \dots$ σε πολύεδρα κάθε τύπου. Μπορούμε να βρούμε τις ρίζες στις πολυγωνικές έδρες, στις διαγώνιους, στα ύψη και στις προβολές. Στο σχήμα 31 φαίνεται ένα τετράεδρο μοναδιαίας πλευράς. Το πυθαγόρειο θεώρημα επιτρέπει τον υπολογισμό του ύψους του, μέσω του τύπου

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ Στον κύβο (σχήμα 32) και στην πυραμίδα (σχήμα 33) μπορούμε να}$$

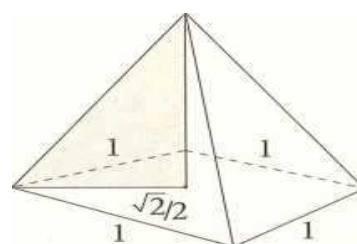
επιβεβαιώσουμε πως το θεώρημα επιτρέπει τον υπολογισμό κάθε τύπου εσωτερικών διαστάσεων.



Σχήμα 31



Σχήμα 32



Σχήμα 33

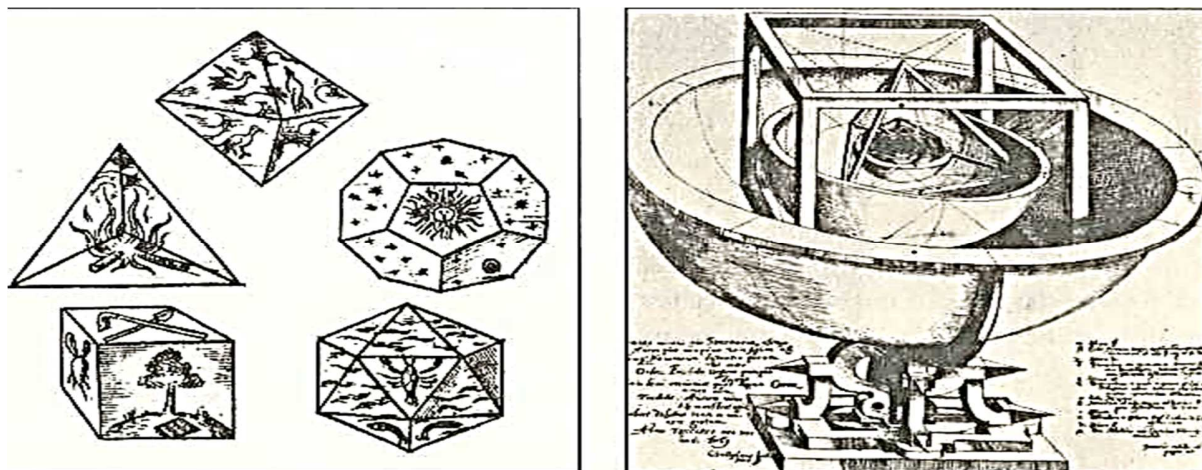
Πυθαγόρεια κοσμογονία με πολύεδρα

Τα γραπτά του Φιλολάου του Κροτωνιάτη, μαθητή του Πυθαγόρα, του νεοπλατωνικού Πρόκλου και του βυζαντινού Σιμπλίκιου αναφέρονται συχνά στον τρόπο που οι πυθαγόρειοι αντιστοίχισαν τα 4 φυσικά στοιχεία (φωτιά, γη, αέρα, νερό) με τα κανονικά πολύεδρα (τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, εικοσάεδρο). Η σειρά ολοκληρώνεται με ένα 5^ο πολύεδρο (δωδεκάεδρο) που συμβολίζει το σύμπαν στο σύνολό του. Οι 12 έδρες του, είναι πενταγωνικές, για αυτό περιέχουν το πεντάγωνο αστέρι, γραφικό στοιχείο της ταυτότητας των πυθαγορείων.

Μολονότι η πυθαγόρεια σχολή γνώριζε τα εν λόγω σώματα και επεσήμανε τον κοσμολογικό συμβολισμό τους, στην πραγματικότητα ήταν ο Πλάτων εκείνος που διέθετε την πληρέστερη γνώση σχετικά με αυτά. Δεν είναι τυχαίο που σήμερα αποκαλούνται πλατωνικά στερεά. Στα 12^ο, 13^ο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη γίνεται ήδη αναφορά στις ακμές των 5 κανονικών πολύεδρων. Αν θεωρηθούν εγγεγραμμένα σε σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας, εξηγεί ο

Ευκλείδης, καταλήγουν να είναι $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (τετράεδρο), $\sqrt{2}$ (κύβος), $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (οκτάεδρο), $\frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{5}$

(εικοσάεδρο) και $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}$ (δωδεκάεδρο). Τα πολύεδρα αυτά συνάρπαζαν καλλιτέχνες όπως τους Piero della Francesca, Luca Pacioli, Λεονάρντο ντα Βίντσι, Albrecht Durer, ενώ ο Kepler (σχήμα 34) θεμελίωσε την κοσμολογία του σε αυτά, σε μια εποχή που ήταν γνωστοί μόνο 6 πλανήτες.

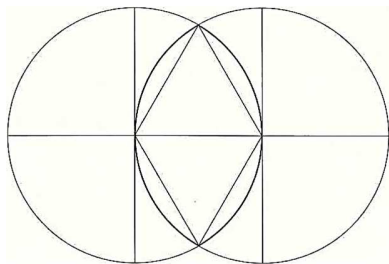


Σχήμα 34 Αριστερά Κοσμολογικό μοντέλο του Kepler (Mysterium Cosmographicum, 1596) και δεξιά Εικόνες από το έργο Harmonices Mundi του Kepler (1619)

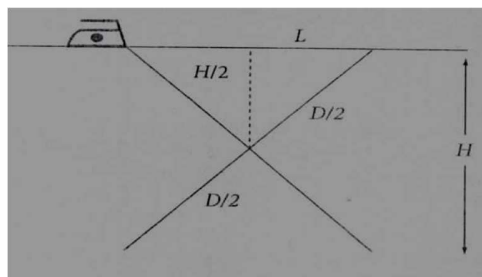
Τετραγωνικές ρίζες, τέχνη και σχέδιο

Οι τετραγωνικές ρίζες στη φύση, πάντα προκαλούσαν το δέος των ανθρώπων. Δέος που δεν παύει να είναι λογικό, ο ανθρώπινος νους χρειάστηκε χρόνια προκειμένου να αναπτύξει τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία με τα οποία επιδιώκει να κατανοήσει τον κόσμο, ενώ η φύση διαμορφώνει σχέσεις και αναλογίες που αψηφούν με συνταρακτική ευκολία τα πιο εξεζητημένα ανθρώπινα έργα. Εντούτοις, πολύ γρήγορα ο άνθρωπος παραμέρισε το δέος του και βάλθηκε να γνωρίσει σε βάθος τους μηχανισμούς αυτών των αναλογιών και σχέσεων. Με τη γνώση αυτή, ευελπιστούσε να τελειοποιήσει την πιο σημαντική του ικανότητα, την κατασκευή νέων κόσμων. Η ζωγραφική, η γλυπτική και η αρχιτεκτονική χρησιμοποιούν γεωμετρικά μέσα για να δημιουργήσουν σχήματα στο επίπεδο ή στον χώρο. Στις διαστάσεις ή στις αναλογίες αυτών των σχημάτων, εμφανίζεται η σειρά των ριζών $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5} \dots$ και φυσικά ο χρυσός αριθμός. Στη διάρκεια της ιστορίας, οι αισθητικές επιλογές εξέλιξαν τον ρυθμό της θεωρητικής γνώσης και της τεχνικής τελειοποίησης την οποία αυτή η γνώση παρείχε και επέτρεπε. Με τη βαθιά γνώση της γεωμετρίας, μπορούμε να επιχειρήσουμε μια γενική ερμηνεία της ιστορίας της τέχνης σε σχέση με την πρόοδο των μαθηματικών. Αρκούν μερικά σύντομα σχόλια. Από την αρχαιότητα ως το ρωμαϊκό Μεσαίωνα, η χρήση των πλεγμάτων τετραγώνων ήταν ιδιαίτερα συνηθισμένη, άρα και των απλών αναλογιών $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$

Η γοτθική τέχνη, σχεδιάζει γεωμετρικά σχήματα με κανόνα και διαβήτη και αφθονούν τα πολυγωνικά σχήματα με τις τετραγωνικές τους ρίζες. Το χαρακτηριστικό γοτθικό τόξο (σχήμα 35), αποτελείται από 2 τόξα περιφέρειας που ενώνουν τις απέναντι κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου. Σε αυτά εμφανίζεται σταθερά η $\sqrt{3}$.



Σχήμα 35



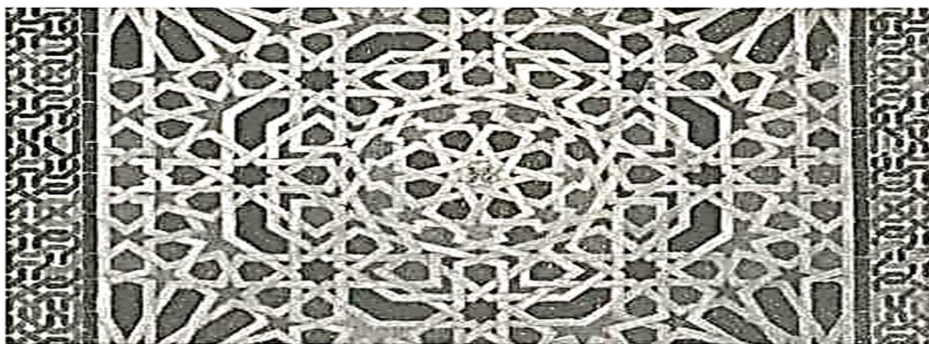
Σχήμα 36

Τετραγωνικές ρίζες και από πού να κοιτάς ένα άγαλμα.

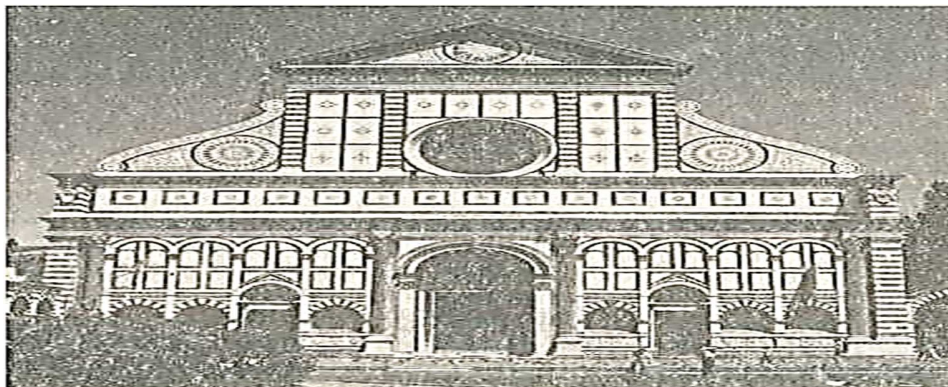
Ο Γερμανός αστρονόμος και μαθηματικός **Johann Muller** (1436–1476), γνωστός με το όνομα **Regiomontanus**, έθεσε τον 15^ο αιώνα ένα διάσημο πρόβλημα στο οποίο η ιστορία χάρισε το όνομά του, «το πρόβλημα του Regiomontanus». Που πρέπει να σταλθεί ο παρατηρητής ενός αγάλματος που βρίσκεται πάνω σε βάθρο, με τη βάση του γλυπτού πάνω από το μάτι του παρατηρητή, προκειμένου η οπτική γωνία να είναι η μέγιστη; Το εν λόγω πρόβλημα θεωρείται το 1^ο του είδους του, δηλαδή, στην αναζήτηση των μεγίστων. Αν η βάση του αγάλματος υπερβαίνει το ύψος του ματιού του παρατηρητή κατά μήκος a και το ψηλότερο άκρο του αγάλματος το υπερβαίνει κατά μήκος b , τότε η οπτική γωνία θα είναι μέγιστη αν ο παρατηρητής στέκεται, ακριβώς σε απόσταση $\sqrt{a \cdot b}$ από το βάθρο.

Ο Πυθαγόρας και η σιδερώστρα

Η σιδερώστρα (σχήμα 36) είναι ένα οικιακό εργαλείο που έχει 2 αρθρωτά πόδια που επιτρέπουν την τοποθέτησή της σε διαφορετικά ύψη. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το ότι είναι πτυσσόμενη. Αν παρατηρήσουμε το σχήμα που δημιουργεί το επίπεδο τμήμα της σιδερώστρας και τα σταυρωτά της πόδια, θα δούμε ότι πρόκειται για τρίγωνο. Σύμφωνα με το σχήμα και το πυθαγόρειο θεώρημα, $(H/2)^2 + (D/2)^2 = L^2$, είναι η ισότητα που επιτρέπει να συμπεράνουμε οποιαδήποτε διάσταση σε σχέση με τις άλλες δύο. Κρίνοντας από τις κατασκευές τους, η δυναστεία Ναζαρί, η τελευταία μουσουλμανική δυναστεία που βρέθηκε στον θρόνο της Γρανάδα, είχε πάθος με τη γεωμετρία. Την περίοδο της βασιλείας της, οικοδομήθηκε το παλάτι της Αλάμπρα, ένα από τα διαμάντια της μουσουλμανικής τέχνης όλων των εποχών, που βρίθκει γεωμετρικών σχεδίων όχι μόνο στη διακόσμηση, αλλά και στην αρχιτεκτονική του κτιρίου, με τους θόλους του σε οκταγωνική βάση. Τα σχέδια των Ναζαρί που είναι βασισμένα σε τετράγωνα περιέχουν τη $\sqrt{2}$, ενώ στα πενταγωνικά σχέδια εμφανίζονται η $\sqrt{5}$ και ο χρυσός αριθμός.



Σχήμα 37 Γεωμετρικό σχέδιο Ναζαρί του παλατιού της Αλάμπρα

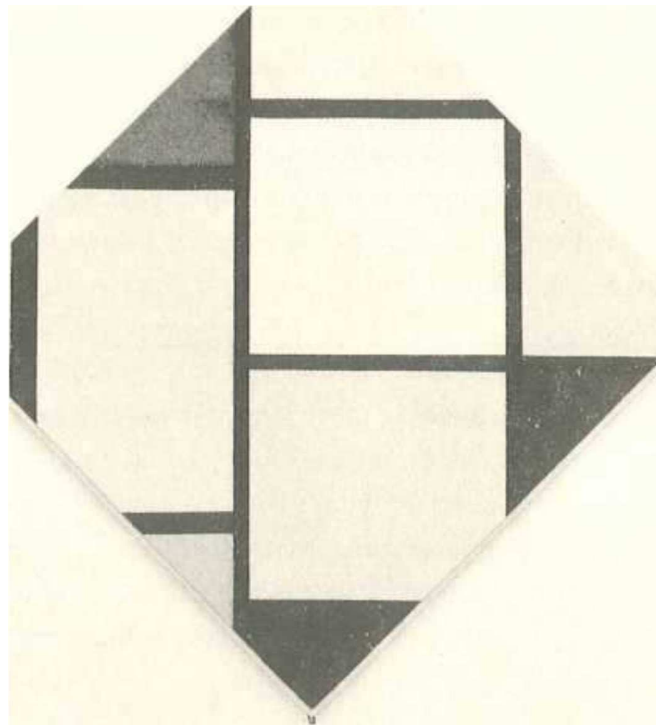


Σχήμα 38 Santa Maria Novella (Φλωρεντία) Πρόσοψη χρυσής σύνθεσης όπου αφθονούν τα ορθογώνια ο λόγος των οποίων είναι ο χρυσός αριθμός.

Ο διάσημος «*Άνθρωπος του Βιτρούβιου*», σχέδιο του Λεονάρντο ντα Βίντσι, επιδιώκει τη συμφιλίωση των απλών σχημάτων του ανθρώπινου σώματος, απεικονίζοντας έναν άνδρα εγγεγραμμένο σε τετράγωνο, με τις δυναμικές διαστάσεις του άνδρα που είναι ταυτόχρονα εγγεγραμμένος και σε πεντάγωνο. Η απάντηση του Le Corbusier ήταν ο «*Άνθρωπος του (συστήματος) Modulor*». Στο εν λόγω έργο, ο Γάλλος αρχιτέκτονας χρησιμοποιεί το κλασικό ιδεώδες για να εδραιώσει μια σχέση ανάμεσα στις αναλογίες του κτιρίου και στις αναλογίες του ανθρώπου. Οι σχέσεις του συστήματος Modulor, εξάγονται από τον χρυσό αριθμό ή από τις δυνάμεις του, παρουσιάζοντας έναν άνθρωπο που υπερβαίνει τα ανθρώπινα. Παρά την αναγεννησιακή του γένση, ο χρυσός αριθμός θα διαδραματίσει καθοριστικό ρόλο στη σύγχρονη αρχιτεκτονική. Επιπρόσθετα, στο τέλος της διαδρομής, όταν μπορεί να διατυπωθεί ο ισχυρισμός ότι η εξαφάνιση του ρεαλισμού θα σβήσει κάθε έννοια αναλογιών, τότε ακριβώς εκθειάζονται τα πιο καθαρά γεωμετρικά σχέδια και οι σχετικές αναλογίες τους.

Παραδείγματα προς επίρρωση, οποιοδήποτε από τα έργα του Piet Mondrian, του ρηξικέλευθου Ολλανδού του ανήκει στην ομάδα De Stijl ή του Ελβετού Paul Klee, που είναι μια ξεχωριστή κατηγορία από μόνος του. Μια πραγματικά ιδιαίτερη περίπτωση, είναι το τρίγωνο του Reuleaux, που σχηματίζεται από 3 ίσα τόξα περιφέρειας που ξεκινούν από κάθε κορυφή ενός ισόπλευρου τριγώνου και περνούν από τις άλλες 2. Το σχήμα αυτό, κρύβει τη $\sqrt{3}$ και έχει χρησιμοποιηθεί ήδη από τη γοτθική τειχοδομία σε πέτρινους διακόσμους. Ο Γερμανός μηχανικός Franz Reuleaux (1829–1905), ήταν αυτός που ανακάλυψε τις δυναμικές αρετές του εν λόγω σχήματος. Πρόκειται για μια καμπύλη σταθερού πλάτους που μπορεί να κυλίσει σαν περιφέρεια μεταξύ 2 παράλληλων γραμμών, αγγίζοντας πάντα και τις 2. Έχει χρησιμοποιηθεί σε μηχανισμούς με ευρύτατες βιομηχανικές εφαρμογές, όπως στις βενζινοκίνητες μηχανές αυτοκινήτων ή στις λεπίδες των γεωτρήσεων, που γυρίζοντας ανοίγουν σχεδόν τετραγωνισμένες τρύπες, μαγεύοντας τον παρατηρητή. Αλλά και κάποιες καραμέλες έχουν τέτοιο σχήμα ώστε να μπορούν να γυρίζουν εύκολα στο στόμα. Στις μέρες μας, είναι σύνηθες να συναντάμε σκεύη τέτοιου σχήματος. Το σύγχρονο σχέδιο αποτίναξε το ζυγό του κύκλου στα πιάτα και τα ποτήρια (αν και σε αυτήν την περίπτωση, το μόνο σημαντικό είναι πως τα δοχεία παραμένουν ως έχουν). Η ανεμπόδιστη εμφάνιση ενός νέου κόσμου πιο τολμηρών περιγραμμάτων, φάνηκε ιδιαίτερα χρήσιμη στους Άγγλους, που μονίμως επιδιώκουν να ξεχωρίσουν στο εσωτερικό της ευρωπαϊκής ηπείρου. Εδώ και χρόνια έλαβε χώρα μία κοπή νομισμάτων που δεν ήταν στρογγυλά, όπως αυτά των υπόλοιπων χωρών του κόσμου, αλλά

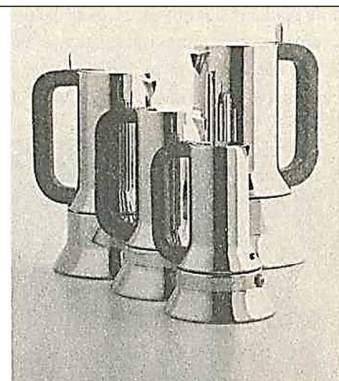
παρουσίαζαν 5 ή 6 τόξα περιφέρειας που σχετίζονταν με κανονικά πολύγωνα 5 ή 6 πλευρών. Και αυτές οι καμπύλες είναι σταθερού πλάτους, για αυτό και τα νομίσματα γυρίζουν πολύ εύκολα στις μηχανές που αξιώνουν την εισαγωγή τους. Για άλλη μία φορά, η $\sqrt{5}$ και η ομάδα της βρίσκονται στη βάση αυτών των σχεδίων.



Σχήμα 39 Πίνακας του Mondrian όπου μπορεί κανείς να παρατηρήσει τη σχέση του έργου με τη $\sqrt{2}$

Η $\sqrt{3}$ και η καφετιέρα Alessi

Η περίφημη καφετιέρα του ιταλικού οίκου Alessi, είναι η αγαπημένη των γεωμετρών λόγω της ποικιλίας των κωνικών και κυλινδρικών σχημάτων που εμφανίζει και επειδή η μεταλλική λαβή της αποτελεί ευφύεστατη λύση αφού την ίδια στιγμή είναι και λαβή και καπάκι, χωρίς να υπάρχει κίνδυνος να καεί, όπως συμβαίνει με τις πλαστικές. Εκτός όλων αυτών, εμφανίζει και μια σημαντική καινοτομία ο καφές σερβίρεται μέσω μιας οπής που έχει σχήμα τέλειου τριγώνου. Το ισόπλευρο τρίγωνο, που σχετίζεται με τη $\sqrt{3}$, επιτρέπει να διοχετεύεται ο καφές στο φλιτζάνι κατά τρόπο απόλυτα ελεγχόμενο με την κορυφή-έξοδο του προς τα κάτω. Το καπάκι που έχει κυκλοφορήσει και προορίζεται για μπουκάλια μηλίτη (τα οποία σερβίρονται σε αρκετή μεγάλη απόσταση από το ποτήρι) διαθέτει εξόδους σε σχήμα ισόπλευρου τριγώνου.



Βιβλιογραφία

- Claudi Alsina, (2011). «Η κλίκα των αριθμών. Το πυθαγόρειο θεώρημα», Αθήνα, Εκδόσεις 4π