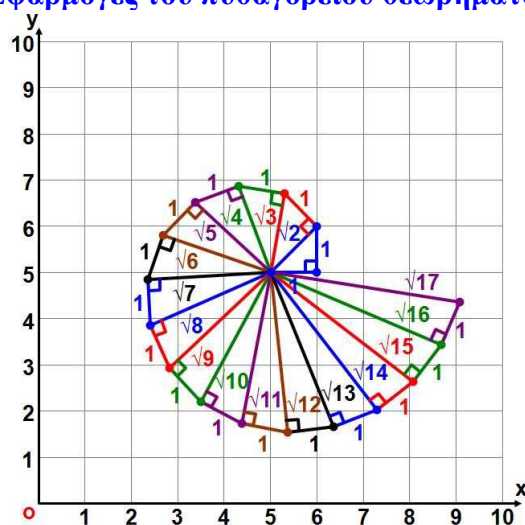




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Εφαρμογές του πυθαγορείου θεωρήματος



Σπουδαστής: Παντελής Αλέξανδρος (AM 7719)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2019 – 2020

Ημερομηνία ανάθεσης: 03.06. 2019

Ημερομηνία κατάθεσης:03.2020

Ημερομηνία εξέτασης:03.2020

Α/Α	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Ιδιαίτερα ικανοποιητική	
2	Αντώνιος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
3	Φραγκιαδάκης Νικόλαος Δρ. Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Αναπληρωτής Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	4
Οι τετραγωνισμοί των σχημάτων.....	4
Η σήραγγα της Σάμου.....	5
Αθροίζοντας παρόμοια σχήματα.....	5
Οι μηνίσκοι του Ιπποκράτη	6
Ο Λεονάρντο ντα Βίντσι και οι μηνίσκοι	7
Ανισότητες με τον Πυθαγόρα	8
Ανισότητα ανάμεσα στο $\sqrt{a+b}$ και στο $\sqrt{a} + \sqrt{b}$	8
Ανισότητες ανάμεσα σε αριθμητικούς και γεωμετρικούς όρους.....	9
Ανισότητες μεταξύ υποτείνουσας και καθέτων	9
Πυθαγόρειο θεώρημα και προοπτική.....	9
Από που κοιτάζει κανείς έναν πίνακα;.....	11
Ο πλαστικός αριθμός του Van der Laan	13
Από τον Πυθαγόρα στον Fermat και από τον Fermat στον Wiles.....	14
Το θεώρημα του συνημίτονου	16
Ο νόμος του παραλληλόγραμμου	16
Ο Πυθαγόρας σε 3D.....	17
Πρακτικές μετρήσεις χωρίς τον Πυθαγόρα	17
Από το ορθογώνιο τρίγωνο στο ορθό τετράεδρο.....	17
Το πυθαγόρειο θεώρημα και η σπειροειδής κλίμακα	18
Η καμπύλη της Agnesi.....	20
Φανταστικοί αριθμοί.....	20
Το πυθαγόρειο θεώρημα σε άλλες επιφάνειες.....	21
Το πυθαγόρειο θεώρημα σε άλλες κατασκευές.....	22

Εισαγωγή

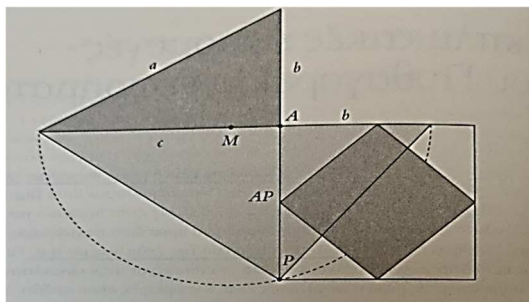
Η γεωμετρία είναι η γνώση της αιώνιας ύπαρξης. Πυθαγόρας

Θεμελιώδες συστατικό του θαυμασμού που προκαλεί το πανάρχαιο πυθαγόρειο θεώρημα, είναι η αναπάντεχη ποικιλία των εκδηλώσεων του. Αυτό ήταν που προσέλκυσε, αρχικά, το ενδιαφέρον στην αρχαιότητα. Ίχνη του, εντοπίζουμε στη γεωμετρία που επιλύει κλασσικά προβλήματα, με μεγάλη ευκολία και στην τέχνη.

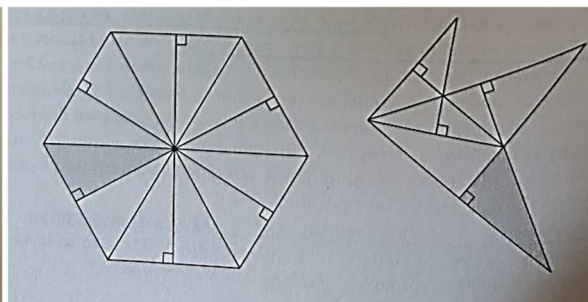
Οι τετραγωνισμοί των σχημάτων

Εδώ και αιώνες, η σχετική ευκολία υπολογισμού του εμβαδού του τετραγώνου, συνέβαλε στην προσπάθεια επίλυσης του γενικού προβλήματος των γραφικών τετραγωνισμών των σχημάτων. Δηλαδή, όταν έχουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο σχήμα, με κανόνα και διαβήτη, ίδιου εμβαδού. Αν ο σχεδιασμός ενός τέτοιου τετραγώνου είναι εφικτός, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως πολύτιμο εργαλείο για την επίλυση, μέσω σχεδίων, του προβλήματος υπολογισμού επιφανειών.

Αν έχουμε μία καθορισμένη γραμμική διάσταση L (πόδι, παλάμη, μέτρο), προκύπτει διάσταση επιφανείας L^2 , που θεωρείται εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς L (πόδι στο τετράγωνο, τετραγωνική παλάμη, τετραγωνικό μέτρο). Το πυθαγόρειο θεώρημα, απαντάται στον τετραγωνισμό των σχημάτων. Για αυτό, πρέπει να δούμε πώς τετραγωνίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο κάθετων πλευρών b, c και υποτείνουσας a . Στο σχήμα 1, τοποθετώ τη b μετά τη c και σημειώνω το μέσο M του τμήματος $b + c$.



Σχήμα 1

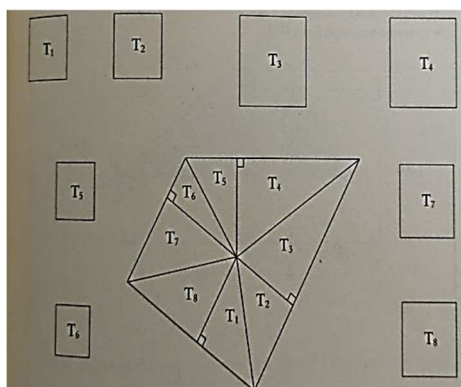


Σχήμα 2

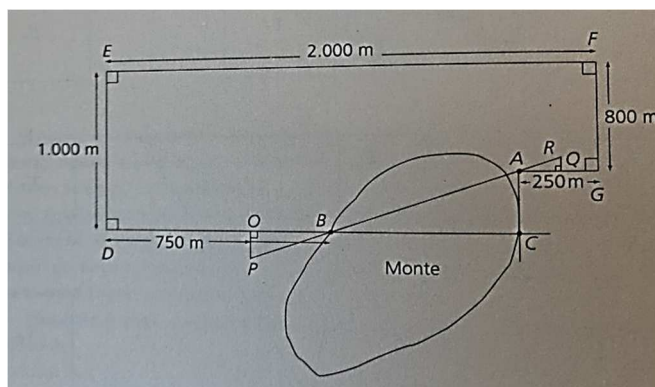
Μπορεί να σχεδιαστεί περιφέρεια κέντρου M και ακτίνας $\frac{b+c}{2}$. Προεκτείνω την κάθετο b από το A , φθάνω στο σημείο P . Εφόσον AP είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου υποτείνουσας $b + c$, από το θεώρημα του ύψους, προκύπτει ότι $AP = \sqrt{b \cdot c}$. Άρα, το τετράγωνο πλευράς $\sqrt{b \cdot c}$ έχει εμβαδό $b \cdot c$ και τα μέσα των πλευρών του σχηματίζουν τετράγωνο (το σκιερό κομμάτι στο σχήμα) με το μισό εμβαδό, δηλαδή $\frac{b \cdot c}{2}$. Οπότε, τετραγωνίσαμε ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο.

Θεωρώ ένα οποιοδήποτε πολυγωνικό σχήμα, π.χ. εξάγωνο. Όπως φαίνεται στο εξάγωνο του σχήματος 2, ένα πολυγωνικό σχήμα οποιουδήποτε τύπου μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα· με τη σειρά τους, καθένα από αυτά τα τρίγωνα μπορεί να διαιρεθεί σε 2 ορθογώνια τρίγωνα. Για αυτό, μπορώ πάντα να υπολογίζω το ολοκληρωμένο πολυγωνικό κομμάτι, με βάση τα εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων στα οποία αυτό έχει σπάσει. Σπάζοντας το εξάγωνο σε ορθογώνια τρίγωνα, προκύπτει μία σειρά από τετραγωνάκια που αθροιστικά έχουν το ίδιο εμβαδόν (σχήμα 3). Με αυτά, μπορώ να τετραγωνίσω το πολύγωνο. Αρκεί να κατασκευάσω

ένα μεγαλύτερο τετράγωνο από αυτά τα τετραγωνάκια, το εμβαδόν του οποίου είναι το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους τετραγώνων. Εδώ, εφαρμόζω το πυθαγόρειο θεώρημα. Ένα βήμα παραπάνω, είναι ο τετραγωνισμός του κύκλου που θεωρείται αδύνατος, διότι ο κύκλος δεν μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα. Μπορώ να μετατρέψω έναν κύκλο σε πολύγωνο πολλών και μικροσκοπικών πλευρών, οπότε να τετραγωνίσω το πολύγωνο.



Σχήμα 3



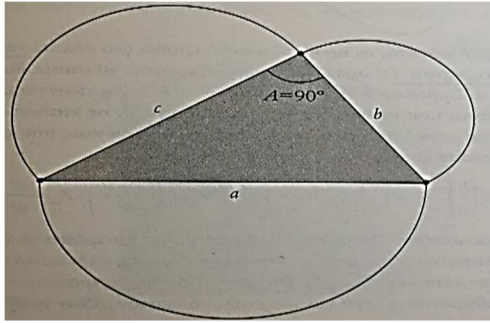
Σχήμα 4

Η σήραγγα της Σάμου

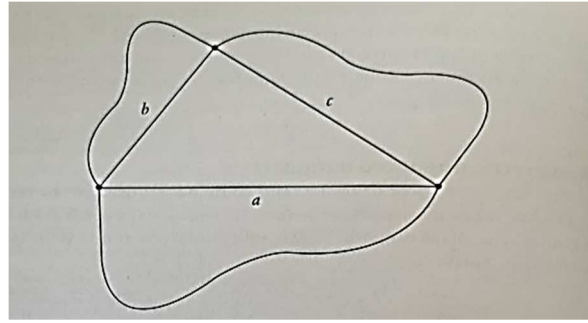
Το 1882, μία ομάδα αρχαιολόγων ανακάλυψε στη Σάμο μία σήραγγα 3500 ετών. Είχε κατασκευαστεί για τη διοχέτευση νερού στην πρωτεύουσα, μέσω του όρους Κάστρο και ο Έλληνας ιστορικός Ηρόδοτος την ανέφερε ως απίστευτο τεχνικό καύχημα της εποχής. Είχε μήκος 1 km , πλάτος 2 m και ύψος 2 m . Η ανακάλυψη, συνάρπασε μηχανικούς και μαθηματικούς, δεδομένου ότι έθετε ένα ερώτημα. Η διάνοιξη μιας σήραγγας σε οποιοδήποτε μέρος και οι επίμονες ανασκαφές ως την ανακάλυψη κάποιου ευρήματος ή της εξόδου της σήραγγας, δεν αποτελούσε πρόβλημα. Στη δεδομένη περίπτωση όμως, η εν λόγω σήραγγα μετέφερε νερό από ένα σημείο σε ένα άλλο. Διέσχισε ένα βουνό (σχήμα 4), από ένα καθορισμένο αρχικό σημείο (A) ως ένα επίσης καθορισμένο τελικό σημείο (B). Πως κατάφεραν οι 2 ομάδες ανασκαφών, δουλεύοντας προς αντίθετες κατευθύνσεις, να συναντηθούν στην καρδιά του βουνού, χωρίς δορυφόρους ή GPS; Η μαθηματική κοινότητα, καταπιάστηκε με την διαλεύκανση του μυστηρίου. Τη λύση, την παρείχε η γεωμετρία (Steen,1999). Από το σημείο B, προχωρώ απόσταση $BD=750\text{ m}$, μετά στρίβω 90° , προχωρώ $DE(1000\text{ m})$, στρίβω 90° , προχωρώ $EF=2\text{ km}$, στρίβω και γυρίζω με $FG=800\text{ m}$, έτσι ώστε το AG (στο παράδειγμα, 250 m) να είναι κάθετο στην FG. (Επιδιώκεται ο καθορισμός κάθετων κατευθύνσεων και αποστάσεων, που επιτρέπουν να τις ακολουθήσω, στο εσωτερικό του βουνού). Τώρα, προκύπτει $BC=1\text{ km}$, $AC=200\text{ m}$. Το πυθαγόρειο θεώρημα, δίνει μία σήραγγα $AB=1019,8\text{ m}$. Επιπρόσθετα, αν σχεδιάσω το τρίγωνο BOP ίδιο με το BAC (π.χ. $BO=50\text{ m}$, $PO=10\text{ m}$) και το APQ, με ίσες αναλογίες, θα ξέρω πως οι κατευθύνσεις προς τις οποίες πρέπει να γίνουν οι ανασκαφές είναι αυτές που δείχνουν τα PB και AR.

Αθροίζοντας παρόμοια σχήματα

Είδαμε το πως το πυθαγόρειο θεώρημα επιλύει την γραφική άθροιση των τετραγώνων. Εντελώς τυχαία, τα 3 τετράγωνα επί των πλευρών του ορθογώνιου τριγώνου είναι 3 παρόμοια σχήματα. Τι θα συνέβαινε ωστόσο, αν αντί για τετράγωνα συναντούσαμε ημικύκλια (σχήμα 5);



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Από το πυθαγόρειο θεώρημα ($a^2 = b^2 + c^2$), προκύπτει ότι το εμβαδό των ημικυκλίων $b + c$ είναι

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}\pi\frac{c^2}{4} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b^2 + c^2}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Δηλαδή, **τα εμβαδά των ημικυκλίων επί των καθέτων πλευρών, αθροιστικά, δίνουν ακριβώς το εμβαδόν του ημικυκλίου επί της υποτείνουσας**. Τι θα συνέβαινε αν δεν υπήρχαν ημικύκλια, αλλά καμπυλωτά και πολύ πιο περίπλοκα σχήματα (σχήμα 6); Τα 3 σχήματα, έχουν ίδια μορφή και εμβαδά A_a, A_b, A_c που σχετίζονται με το τετράγωνο του παράγοντα που περνά από έναν αριθμό μηκών σε κάποια άλλα. Αν $\frac{b}{a}$ ο παράγων που περνά από το a στο b , $\frac{c}{a}$ ο παράγων που περνά από το a στο c , προκύπτει ότι

$$A_b + A_c = \left(\frac{b}{a}\right)^2 A_a + \left(\frac{c}{a}\right)^2 A_a = \frac{b^2}{a^2} A_a + \frac{c^2}{a^2} A_a = \left(\frac{b^2 + c^2}{a^2}\right) A_a = \frac{a^2}{a^2} A_a = A_a.$$

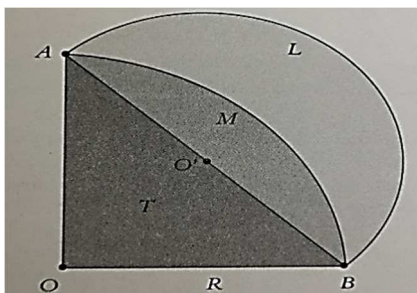
Έτσι, η επέκταση του πυθαγορείου θεωρήματος επιτρέπει το γραφικό άθροισμα όμοιων σχημάτων. Φυσικά, αυτοί οι υπολογισμοί βασίζονται στην κλασική απόδειξη της υπόθεσης των τετραγώνων. Ο Πυθαγόρας, παρείχε το μαθηματικό κλειδί για την επίλυση εκατοντάδων προβλημάτων.

Οι μηνίσκοι του Ιπποκράτη

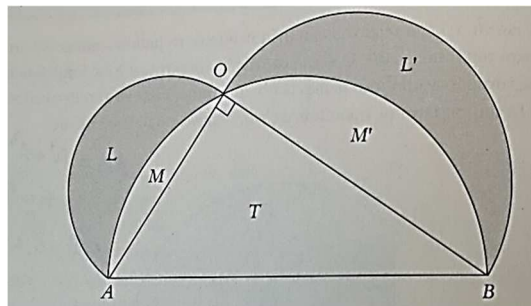
Με τις αποδείξεις αυτές, ο μαθηματικός κόσμος εισήλθε σε μία νέα διάσταση όπου **όλα τα πολύγωνα μπορούσαν να τετραγωνιστούν με κανόνα και διαβήτη**. Όσο παράλογο μπορεί να φαντάζει στις ημέρες μας, ήταν φυσικό να υποπτευθούν κάποιοι ότι η τέλεια περιφέρεια, όριο εγγεγραμμένων και ημιεγγεγραμμένων πολυγώνων, μπορούσε να τετραγωνιστεί μέσω αυτών των εργαλείων του σχεδιασμού.

Η αναμονή της αδιαμφισβήτητης απόδειξης, ότι κάτι τέτοιο ήταν αδύνατο, κράτησε «μόλις» 2000 χρόνια, οπότε πέρασαν αιώνες ολόκληροι κατά τους οποίους επαγγελματίες, μάταια έσπαγαν το κεφάλι τους. Μία τεράστια έκπληξη περίμενε τη μαθηματική κοινότητα, οι «μηνίσκοι του Ιπποκράτη». Ο Ιπποκράτης ο Χίος, επιβεβαίωσε την ύπαρξη σχημάτων, από τόξα περιφερειών, που μπορούσαν να τετραγωνιστούν. Η απόδειξη του, επέτεινε τις προσπάθειες για τετραγωνισμό του κύκλου. Στο σχήμα 7, φαίνεται ο μηνίσκος ή το σχήμα που περιέχεται ανάμεσα στο τεταρτημόριο της περιφέρειας κέντρου O και ακτίνας R και στην ημιπεριφέρεια

ακτίνας $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ και κέντρου στο μέσο O' της υποτείνουσας AB .



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Είναι $AB^2 = R^2 + R^2 = 2 \cdot R^2$ άρα, $AB = R\sqrt{2}$ συνεπώς, $O'B = O'A = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Αν T

είναι το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου AOB (που είναι $\frac{R^2}{2}$), αν L είναι το εμβαδό του μηνίσκου και αν M είναι το εμβαδόν ανάμεσα στην υποτείνουσα και στον μηνίσκο, τότε ισχύει ότι $L + M = \frac{1}{2} \pi \left(R \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} R^2$, άρα $L = \frac{\pi}{4} R^2 - M = T$. Έτσι,

το εμβαδόν του μηνίσκου είναι T και ολόκληρος ο μηνίσκος μπορεί να τετραγωνιστεί. Αυτός ο μηνίσκος, δεν ήταν ο μόνος που είχε ο Ιπποκράτης. Μπορούμε να δούμε την πιο ενδιαφέρουσα απόδειξή του στο σχήμα 8. Τα ημικύκλια επί των κάθετων AO, OB έχουν εμβαδόν $L + M$, $L' + M'$, αντίστοιχα. Ισχύει ότι το άθροισμα των εμβαδών των παρόμοιων ημικυκλίων, επί των κάθετων, ισούται με το εμβαδόν του ημικυκλίου επί της υποτείνουσας, που είναι $T + M + M'$, δηλαδή, $L + M + L' + M' = T + M + M'$ άρα, $L + L' = T$. Οπότε, ο διπλός μηνίσκος έχει ίδιο εμβαδόν με το ορθογώνιο τρίγωνο, το οποίο τετραγωνίζεται.

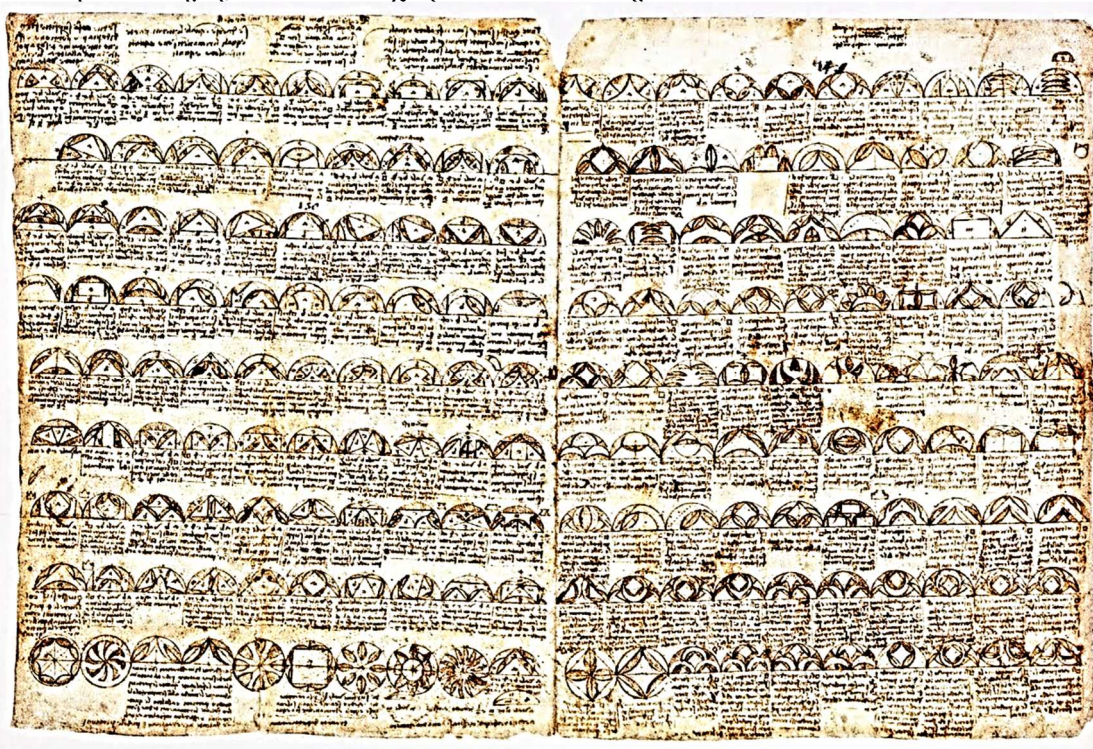
Ιπποκράτης ο Χίος

Από τους πρώτους Έλληνες σοφούς που συνέθεσε εμπειρισταωμένη πραγματεία για τη γεωμετρία, ήταν ο Ιπποκράτης ο Χίος (γύρω στο 440 π.Χ.). Δεν πρέπει να συγχέεται, όπως συχνά συμβαίνει, με τον σπουδαίο Έλληνα γιατρό Ιπποκράτη από την Κω (460–357 π.Χ.), που έχει δώσει το όνομα του στον ιατρικό όρκο. Ο γεωμέτρης Ιπποκράτης, μελέτησε τον **διπλασιασμό του κύβου** με διαφορετικά εργαλεία από τον κανόνα και τον διαβήτη, απέδειξε τον **τετραγωνισμό των σχημάτων** και ανακάλυψε πολλά άλλα αποτελέσματα.

Ο Λεονάρντο ντα Βίντσι και οι μηνίσκοι

Στις 10.11.1494, ο Luca Pacioli εξέδωσε το έργο «*Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*», το οποίο σημείωσε τεράστια επιτυχία μεταξύ των σύγχρονων του, που το αγόραζαν μανιωδώς. Ένας από τους αγοραστές, ήταν ένας συμπατριώτης του Pacioli ο οποίος το απέκτησε για 129 σόλδια και το ρούφηξε αχόρταγα. Ο ανήσυχος αγοραστής ονομαζόταν Λεονάρντο ντα Βίντσι, που σημείωσε στο *Codex Atlanticus*, στη σελίδα που είναι γνωστή ως f-104r, την αγορά του βιβλίου και το ποσό που κατέβαλε για αυτό. Ο μεγαλοφυής ουμανιστής, θα έφτιαχνε πολλά σχέδια και θα περιέγραφε διάφορες σκέψεις του, εμπνευσμένος από τον Pacioli, αλλά αυτό που τον συνάρπασε ήταν οι μηνίσκοι του Ιπποκράτη, που αναφέρονταν στο κείμενο. Ο Λεονάρντο, εντόπισε μία εντυπωσιακή σειρά τετραγωνισμένων μηνίσκων και άλλων πολυγώνων, ξαφνιάζοντας και αυτόν ακόμη τον Pacioli, με το οποίο είχε μία προσωπική συνομιλία στο Μιλάνο το 1496. Με τα σχέδια αυτά, ο Λεονάρντο ανακάλυψε ουσιαστικά τον κόσμο των αναλογιών και τον χρυσό αριθμό. Η επιρροή αυτών των ιδεών και η μαθηματική τους εξέλιξη, δεν καταδεικνύουν μόνο τη συμβολή του ως γεωμέτρη, αλλά απαντώνται και στο καλλιτεχνικό του έργο. Ποτέ κανείς δεν απέδειξε με τόσο αξιοσημείωτο τρόπο, όπως

ο Λεονάρντο, την πλάνη του μύθου, που επιδιώκει να κρατά σε απόσταση την τέχνη από την επιστήμη, τον καλλιτέχνη από τον επιστήμονα.

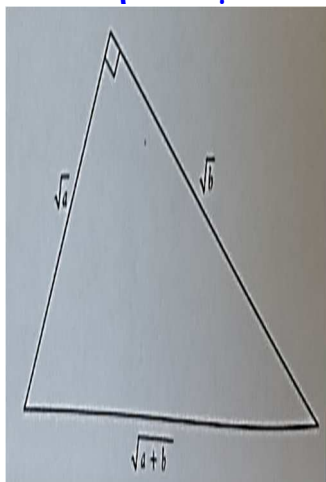


Σχήμα 9 Σελίδα του Codex Atlanticus του Λεονάρντο με σχέδια και σημειώσεις γύρω από τους μηνίσκους του Ιπποκράτη

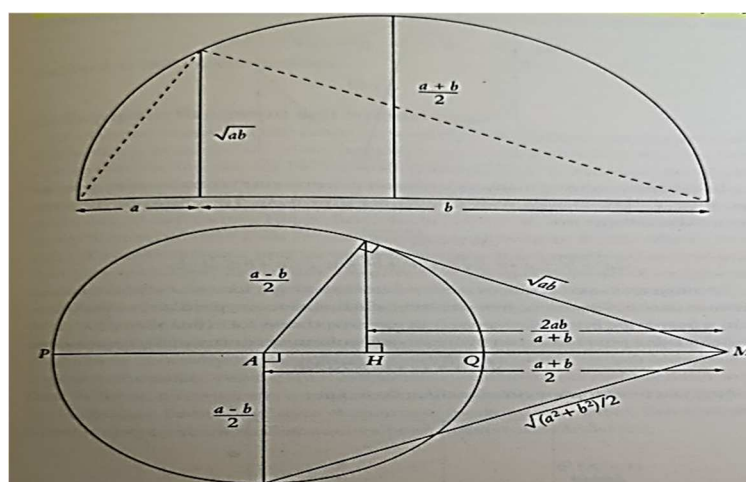
Ανισότητες με τον Πυθαγόρα

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, οποιαδήποτε κάθετη πλευρά του είναι πάντα μικρότερη από την υποτείνουσα και η υποτείνουσα είναι πάντα μικρότερη από το άθροισμα των 2 καθέτων πλευρών. Χρησιμοποιώντας αυτό το δεδομένο, μπορούμε να φτιάξουμε κάποια απλά σχήματα, βάσει του πυθαγορείου θεωρήματος, τα οποία επιτρέπουν να εντοπίσουμε κάποιες πολύ ενδιαφέρουσες μαθηματικές ανισότητες.

Ανισότητα ανάμεσα στο $\sqrt{a+b}$ και στο $\sqrt{a} + \sqrt{b}$



Σχήμα 10 $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$



Σχήμα 11

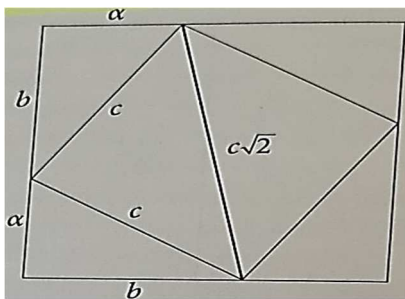
Ανισότητες ανάμεσα σε αριθμητικούς και γεωμετρικούς όρους

Αν $PM = a$, $QM = b$, $a > b > 0$, τότε τα δύο σχήματα 11 αποδεικνύουν πως μεταξύ των μέσων όρων ισχύουν οι ανισότητες $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,

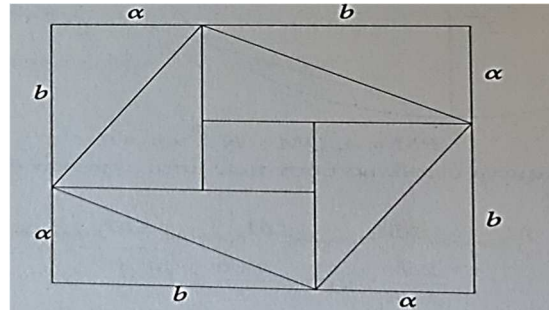
$M_{\text{Αρμονικός}} \leq M_{\text{Γεωμετρικός}} \leq M_{\text{Αριθμητικός}} \leq M_{\text{Τετραγωνικής ρίζας}}$ Ο αρμονικός μέσος όρος, είναι μικρότερος από τον γεωμετρικό μέσο, ο οποίος είναι μικρότερος από τον αριθμητικό μέσο που είναι μικρότερος από τον μέσο όρο της τετραγωνικής ρίζας.

Ανισότητες μεταξύ υποτείνουσας και καθέτων

Το σχήμα 12, επιτρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι αν $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ τότε $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ και $c \leq a + b \leq \sqrt{2} \cdot c$, που αποδεικνύει πως αν αντί να διασχίσουμε μία πλατεία διαγώνια, προχωρήσουμε ακολουθώντας τις δύο καθέτους, θα διανύσουμε μεγαλύτερη απόσταση, αλλά η διαγώνιος δεν θα ξεπεραστεί περισσότερο από 1,41 (δηλαδή $\sqrt{2}$).



Σχήμα 12



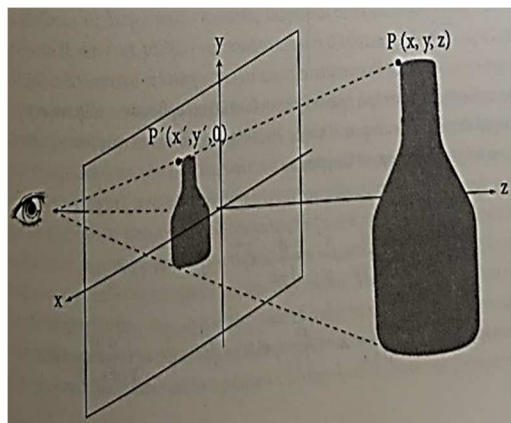
Σχήμα 13

Άλλη σχέση ανάμεσα στις 2 καθέτους και στην υποτείνουσα, είναι $\sqrt{a^2 + b^2} (a + b) \geq 2\sqrt{2}ab$. Από το σχήμα 13 είναι $(a + b)^2 \geq 4ab$. Το τετράγωνο της πλευράς $a + b$ περιέχει 4 ορθογώνια τρίγωνα των καθέτων πλευρών a, b . Ισχύει ότι $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις 2 ανισότητες, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ και $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2}\sqrt{ab}$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

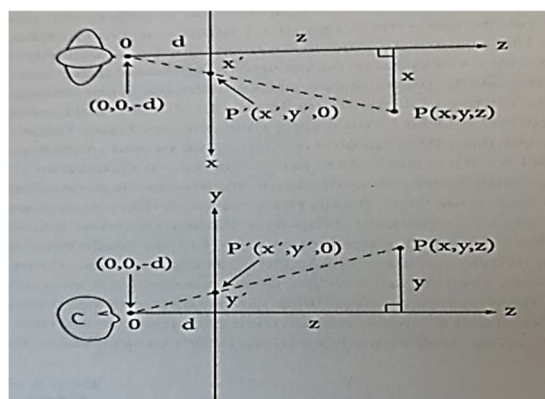
Πυθαγόρειο θεώρημα και προοπτική

Η ελληνική γεωμετρία, δεν έλυσε το πρόβλημα της γραφικής αναπαράστασης των τρισδιάστατων αντικειμένων (σώματα, τοπία) σε ένα επίπεδο. Μέχρι την Αναγέννηση (από τον 14^ο έως τον 16^ο αιώνα), οι ζωγράφοι και οι αρχιτέκτονες δεν ήξεραν πώς να χρησιμοποιήσουν τεχνικά μέσα για να απεικονίσουν ικανοποιητικά την προοπτική. Το 1^ο μεγάλο βήμα στην προοπτική, τολμήθηκε από τον πολύπλευρο καλλιτέχνη και αρχιτέκτονα Filippo Brunelleschi (1377–1446) και η 1^η πραγματεία επί του θέματος, με τίτλο «*Della Pittura*» γράφτηκε από τον Leone Battista Alberti (1404–1472). Η ανακάλυψή τους, μετέτρεψε τη ζωγραφική σε ένα παράθυρο ανοιχτό στον έξω κόσμο και έδειχνε τόσο πιστή, που μπορούσε να εξαπατήσει. Η Αναγέννηση, ξεκίνησε στην Ιταλία και υπήρξε κίνημα ουσιαστικά καλλιτεχνικό, αν και πολλά από τα επιτεύγματά της έχουν τη βάση τους στην επανάσταση της γνώσης που προηγήθηκε, δηλαδή στον ουμανισμό. Οι αναγεννησιακοί καλλιτέχνες Piero della Francesca, Ραφαήλ, Λεονάρντο απέδειξαν πως τα όρια ανάμεσα στις διαφορετικές σφαίρες γνώσεις και ανθρώπινη ευαισθησία ήταν εντελώς διαπερατά.

Η τεχνική που αναπτύχθηκε για την απόδοση της προοπτικής, γραφικά, είχε γεωμετρική βάση (σχήμα 14) και για αυτό ονομάστηκε **γραμμική προοπτική**.



Σχήμα 14



Σχήμα 15

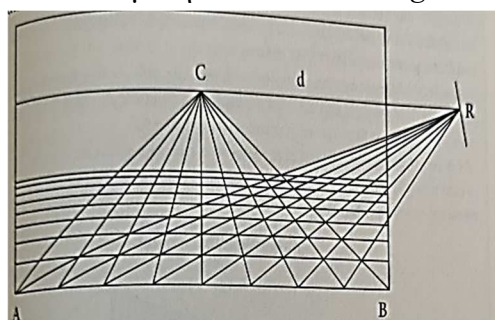
Στο σχήμα 15, κλειδί της προοπτικής ήταν να θεωρήσουμε τα 4 ακόλουθα στοιχεία, το αντικείμενο, το κάδρο, το μάτι του ζωγράφου και μία εικονική «πυραμίδα ακτίνων» που πηγαίνει από το μάτι του παρατηρητή στο αντικείμενο.

Η προοπτική αναπαράσταση του αντικειμένου, θα είναι ένα τμήμα (το κάδρο) αυτής της εικονικής πυραμίδας (προβολή). Στο σχήμα 15, εμφανίζονται 2 κύρια ορθογώνια τρίγωνα, οι πλευρές των οποίων πρέπει να είναι ανάλογες, λόγω της ομοιότητας και στις οποίες μπορεί να εφαρμοστεί το πυθαγόρειο θεώρημα.

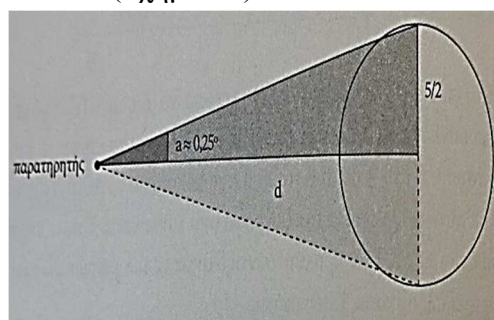
$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{d+z}, \frac{x'}{x} = \frac{d}{d+z}, \overline{OP} = \sqrt{y^2 + (d+z)^2} \quad \text{και} \quad \text{προκύπτει} \quad y' = \frac{dy}{d+z}, \quad x' = \frac{dx}{d+z}$$

$$y' = \frac{dy}{d+z}, \quad x' = \frac{dx}{d+z}, \quad \overline{OP'} = \sqrt{y'^2 + d^2} = \sqrt{\frac{d^2 y^2}{(d+z)^2} + d^2}.$$

Πρέπει να ληφθεί υπόψη, ότι ο ζωγράφος δεν δουλεύει πάνω σε διάφανο κρύσταλλο, αλλά πάνω σε διάφανο καμβά. Για να γίνουν οι απαραίτητοι σχεδιασμοί, οι ζωγράφοι έπρεπε να μετατραπούν σε γεωμέτρες, όπως για παράδειγμα στην αποκαλούμενη «*Costruzione Legittima*» του Alberti (σχήμα 16).



Σχήμα 16



Σχήμα 17

Ο Alberti, που επιδιώκει να απεικονίσει ένα τετράγωνο μωσαϊκό, καθορίζει ένα σημείο σύγκλισης C, χωρίζει το AB σε ίσα μέρη και τα ενώνει με αυτό. Στη συνέχεια, τοποθετεί το σημείο R σε απόσταση d, από το σημείο C. Αυτή η απόσταση d, είναι ίση με την απόσταση που χωρίζει τον ζωγράφο από τον πίνακα. Οπότε, ενώνει το σημείο R με τα τμήματα του AB. Έτσι, προκύπτουν οι διαγώνιες των μικρών πλακών, με τις οποίες μπορεί πλέον να τις απεικονίσει. Κάποιος που θα κοιτάζει τον πίνακα, θα υπολογίσει εύκολα την ιδανική απόσταση από την οποία

μπορεί να παρατηρήσει το μωσαϊκό, που σχηματίζουν οι μικρές πλάκες. Στην πραγματικότητα, πρόκειται για αναπαράσταση του δρόμου του Alberti προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αρκεί μόνο μία συρρικνωμένη εικόνα του πίνακα, που θα επιτρέψει να σχεδιάσουμε έξω από τα περιθώρια του, ώστε να τραβήξουμε τις διαγώνιους. Οι διαγώνιοι, θα συγκλίνουν εκτός του πίνακα, στο σημείο R και έτσι, μπορεί να υπολογιστεί η απόσταση $d = \overline{CB}$ σε κλίμακα. Παρά τα θεωρητικά τεχνάσματα και τις επιστημονικές αξιώσεις, η αναγεννησιακή προοπτική δεν είναι ρεαλιστική. Είναι ένα ευφυές οπτικό τρικ, που εξαπατά την ανθρώπινη αντίληψη και σηματοδοτεί μια θεμελιώδη καμπή, αναφορικά με την απεικονιστική αναπαράσταση της πραγματικότητας ως εκείνη τη στιγμή, αναπαράσταση που ήταν αξιοπρόσεκτα αντιφυσική. Αν αυτός ο γεωμετρικός μηχανισμός επαναληφθεί κατά ακριβή τρόπο, σε μία σειρά αντικειμένων μεγέθους απόλυτα οικείου στον παρατηρητή και αν είναι σε θέση να αποστασιοποιηθεί, κατά άμεσο τρόπο, θα εντοπίζονταν απρόσμενες και διασκεδαστικές ακολουθίες στις αναλογίες του. Η ανθρώπινη όραση, δεν χρησιμοποιεί κάποιο μαθηματικό τέχνασμα για να αντιληφθεί την πραγματικότητα, για αυτό κανένα πραγματικό σύστημα δεν μπορεί να απεικονίσει αυτό που βλέπει το μάτι.

Η απεικόνιση της Σελήνης

Στη ζωγραφική, στο θέατρο και στον κινηματογράφο, η Σελήνη εμφανίζεται συχνά σε νυχτερινά πλάνα που το μέγεθος και η θέση της συνήθως, είναι εσφαλμένα. Ως γενικό κανόνα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι όσο πιο χαμηλά παρουσιάζεται στον ορίζοντα, τόσο πιο υπερβολικά μεγάλο είναι το μέγεθος της αναπαράστασης της. Ένας απλός υπολογισμός της αναλογικότητας σε ορθογώνια τρίγωνα, δίνει το κατάλληλο μέγεθος της. Ο υπολογισμός είναι απλός διότι, δεδομένης της απόστασης μας από τη Σελήνη, η γωνία υπό την οποία τη βλέπουμε από τη Γη είναι πολύ μικρή, μόλις $0,5^\circ$. Αν σε πίνακα το παράθυρο έχει πλάτος 20 cm και οι «τέσσερις» Σελήνες ισοδυναμούν με αυτό το μέγεθος, τότε η Σελήνη έχει διάμετρο περίπου 5 cm. Αν ο ζωγράφος κοιτάζει τον πίνακα από απόσταση d (σχήμα 17), προκύπτει ότι, $\tan(0,25^\circ) = \frac{2,5}{d}$, δηλαδή, $d = \frac{2,5}{\tan(0,25^\circ)} \cong 581,4 \text{ cm}$. Εδώ, έχουμε να κάνουμε με έναν κορυφαίο ζωγράφο ο οποίος μπορεί να ζωγραφίσει σε απόσταση 5,81 m από τον πίνακα.

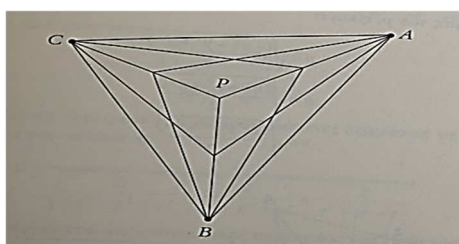
Από που κοιτάζει κανείς έναν πίνακα;

Από που ήθελαν οι Piero della Francesca και Λεονάρντο ντα Βίντσι, να κοιτάζουν οι παρατηρητές τα έργα τους; Οι αυστηρές αρχές της γραμμικής προοπτικής που περιγράφονται από τον Φλωρεντίνο αρχιτέκτονα, καλλιτέχνη και θεωρητικό Filippo Brunelleschi, ορίζουν πως το εικονικό έργο, ως αναπαράσταση της πραγματικότητας, πρέπει να προσφέρει στο μάτι του παρατηρητή την ίδια εικόνα που ο καλλιτέχνης θέλησε να αποτυπώσει στο έργο του. Κάθε ομάδα παράλληλων ευθειών που παρατηρείται στην πραγματικότητα, αναπαρίστανται στον πίνακα ως προσπίπτουσες γραμμές σε ένα σημείο σύγκλισης ή σε ένα σημείο στο άπειρο.

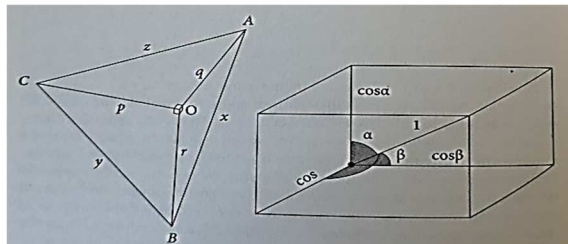
Αυτό το σημείο σύγκλισης, θα είναι αναγκαστικά το σημείο τομής του θεωρητικού τμήματος το οποίο, «περνώντας από το μάτι του καλλιτέχνη», είναι παράλληλο στην ομάδα των προηγούμενων ευθειών. Κατά συνέπεια, ιδανική θέση ενός πίνακα επιτυγχάνεται όταν ο παρατηρητής βρίσκεται σε εκείνο το σημείο στον χώρο όπου βρισκόταν και ο καλλιτέχνης, όταν ζωγράφιζε (σημείο παρατηρητή). Είναι όμως δυνατό να ανακαλύψουμε ακριβώς ποιο είναι αυτό το σημείο; Ο μαθηματικός Chris Zeeman, δείχνει τον καλύτερο τρόπο για να το επιτύχουμε. Στο σχήμα 18, παρατηρούμε έναν κύβο που απεικονίζεται να έχει 3 σημεία σύγκλισης στο A, στο B και στο C, που αντιστοιχούν στις 3 ομάδες παραλλήλων γραμμών, οι οποίες καθορίζουν τις ακμές του κύβου. Πλησιάζοντας πολύ το μάτι σε μία ζωγραφιά και

δοκιμάζοντας διαφορετικά σημεία παρατήρησης, χάνουμε την αντίληψη του σχήματος, ως κύβου. Το ερώτημα που προβάλλει τότε είναι το εξής, από που πρέπει να κοιτάμε το σχήμα ώστε να το βλέπουμε πραγματικά ως κύβο; Εξ ορισμού, όλες οι ευθείες που σχηματίζουν μία ομάδα παραλλήλων που έχουν την ίδια κατεύθυνση, στην τρισδιάστατη πραγματικότητα, διέρχονται από κάθε σημείο σύγκλισης του πίνακα. Για να «δούμε» πως τα AP, PB σχηματίζουν ορθή γωνία (κάτι απαραίτητο προκειμένου να δημιουργηθεί ο κύβος), πρέπει να καταφύγουμε σε ένα μικρό τρικ, πρέπει να φανταστούμε πως μπροστά από τον πίνακα υπάρχει σφαίρα διαμέτρου $\overline{AB}$.

Το μάτι του παρατηρητή, πρέπει να έχει σταθεί σε ένα σημείο της επιφάνειας της υποθετικής σφαίρας. Έτσι πρέπει να γίνει, διότι όλα τα τμήματα στον χώρο φαίνονται υπό γωνία 90° από τη σφαιρική επιφάνεια της διαμέτρου του δεδομένου τμήματος. Για να εκτιμήσουμε όμως τον κύβο, πρέπει να δούμε τις κάθετες AP, PC και τις BP, PC. Έτσι, βολεύει να τοποθετούμε το μάτι μας στην τομή 3 υποθετικών ημισφαιρικών επιφανειών μπροστά από τον πίνακα, που θα είχαν διαμέτρους $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ αντιστοίχως. Οι 2 πρώτες μεσαίες σφαιρικές επιφάνειες μπροστά από τον πίνακα, θα τμηθούν σε μία ημιπεριφέρεια και αυτή με τη σειρά της θα κόψει την 3^η ημισφαιρική επιφάνεια σε ένα σημείο. Σύμφωνα με το θεώρημα του παρατηρητή, το σημείο αυτό είναι μοναδικό. Χρησιμοποιώντας κάποιους αριθμούς, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση d, στην οποία πρέπει να τοποθετείται το περίφημο μάτι του παρατηρητή για να μπορεί να δει πραγματικά τον κύβο σε όλο του το μεγαλείο. Έστω ότι $AB=x, BC=y, CA=z$ και έστω q, r, p οι αποστάσεις από το σημείο παρατήρησης O των A, B, C αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα τουλάχιστον 3 φορές, προκύπτει ότι $x^2 = q^2 + r^2, y^2 = p^2 + r^2, z^2 = p^2 + q^2$



Σχήμα 18



Σχήμα 19

Επιλύοντας το σύστημα εξισώσεων (x, y, z φαίνονται στο σχήμα 19), προκύπτει $p = \sqrt{\frac{-x^2 + y^2 + z^2}{2}}, q = \sqrt{\frac{x^2 - y^2 + z^2}{2}}, r = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}}$. Στα δεξιά του σχήματος 19, φαίνεται πως αν η διαγώνιος ενός παραλληλεπιπέδου είναι 1 και οι γωνίες του είναι α, β, γ, τότε από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $\cos \alpha = \frac{\text{προσκειμένη κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{προσκειμένη κάθετος}}{1}$, άρα

$$1 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \text{ δηλαδή, } 1 = \left(\frac{d}{p}\right)^2 + \left(\frac{d}{q}\right)^2 + \left(\frac{d}{r}\right)^2,$$

$$1 = \frac{d^2}{p^2} + \frac{d^2}{q^2} + \frac{d^2}{r^2} = \frac{d^2 q^2 r^2 + d^2 p^2 r^2 + d^2 p^2 q^2}{p^2 q^2 r^2} = d^2 \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} \right) = 1$$

και προκύπτει ότι $d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}}}$. Αντικαθιστώντας τα p, q, r προκύπτει ότι

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{-x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2}{x^2 - y^2 + z^2} + \frac{2}{x^2 + y^2 - z^2}}} \quad \text{το οποίο μεταφράζεται ως}$$

πραγματικός περίπατος του Πυθαγόρα από τα μουσεία όλου του κόσμου.

Πυθαγόρειο θεώρημα, ταινίες και πάσσαλοι

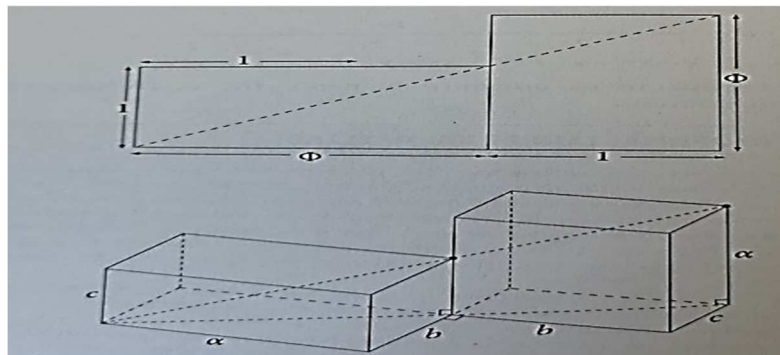
Από τότε που ξεκίνησε η αρχιτεκτονική, το πρώτο βήμα στη διαδικασία της οικοδόμησης οποιουδήποτε κτιρίου είναι ο καθορισμός του χώρου στον οποίο θα μουν τα θεμέλια του. Άρα, το πρόβλημα της οριοθέτησης ενός οικοπέδου και η λύση του καθορισμού του με ορθογώνιο, είναι παμπάλαια. Εκ των προτέρων, η όλη επιχείρηση φαντάζει ασήμαντη· 4 πάσσαλοι, μερικές ταινίες και ένας κανόνας αρκούν. Αλλά το ζήτημα της ακρίβειας, παραμένει στον αέρα. Πώς μπορεί κανείς να βεβαιωθεί ότι έχει σχηματιστεί ορθογώνιο και όχι ένα οποιοδήποτε τετράπλευρο;

Όπως και στην ιατρική, στην αρχιτεκτονική επιτρέπεται μόνο ένα πολύ μικρό περιθώριο ανακρίβειας. Μόλις μετρηθούν οι πλευρές του ορθογώνιου και των διαγωνίων του, το πυθαγόρειο θεώρημα μπορεί να επιβεβαιώσει ότι ισχύει η καθετότητα η οποία πρέπει να δεσπόζει στη σχέση ανάμεσα στις παρακείμενες πλευρές ενός ορθογώνιου. Πιο απλά, αν τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών είναι ίσα, αρκεί να μετρηθούν οι 2 διαγώνιες του ορθογώνιου και να επιβεβαιωθεί ότι είναι ίσες, ώστε να υπάρχει σιγουριά ότι αυτό που έχει σχεδιαστεί είναι ορθογώνιο και όχι ένα οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο.

Ο πλαστικός αριθμός του Van der Laan

Τον 20^ο αιώνα, ο Ολλανδός αρχιτέκτονας και Βενεδικτίνος μοναχός Dom Hans van der Laan (1904–1991), ανακάλυψε έναν καινούργιο αριθμό, που θα διεύρυνε τις λίστες των αριθμών με εκπληκτικές ιδιότητες, που πάντα μάγευαν τη μαθηματική κοινότητα. Τον αποκάλεσαν **μυστικό ή πλαστικό αριθμό**, όχι επειδή ανακαλύφθηκε την εποχή της κυριαρχίας του πλαστικού, αλλά λόγω της αισθητικής πλαστικότητας του. Ο αριθμός P , είναι μια κυβική ρίζα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος.

Εμφανίζεται στη θετική λύση της κυβικής εξίσωσης $x^3 = x + 1$, δηλαδή $P^3 = P + 1$, με $P = 1, 2, 3, \dots$. Όπως ο χρυσός αριθμός Φ επιβεβαίωνε την $\Phi^2 = \Phi + 1$, ο πλαστικός αριθμός που πρέπει να επιβεβαιωθεί, αντιπροσωπεύει σε πολλές καταστάσεις του τρισδιάστατου χώρου αυτό που ο χρυσός αριθμός αντιπροσωπεύει σε δισδιάστατο επίπεδο. Στο σχήμα 20, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές $c < b < a$, έχει κλωνοποιηθεί κατά τον υποδεικνυόμενο τρόπο.

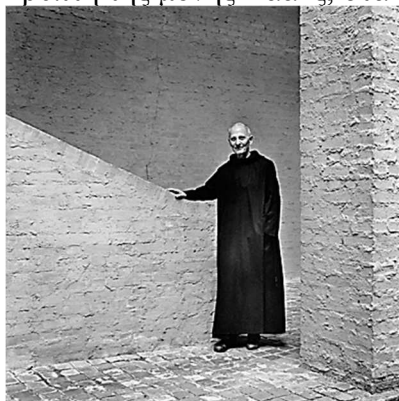


Σχήμα 20

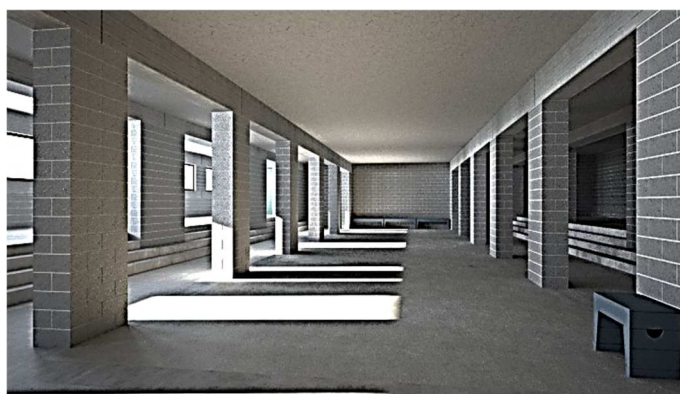
Η ιδιότητα των ορθογώνιων χαρακτηρίζει το Φ . Όπως φαίνεται στο σχήμα 20, θα καταφέρουμε να προεκτείνουμε στον χώρο, την κυρία διαγώνια του οριζοντίου

ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, που θα διέρχεται από την ανώτερη κορυφή που αντιστοιχεί στο κάθετο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, μόνο αν $b = P \cdot c$, $a = P^2 \cdot c$, με c τυχαίο αριθμό και P τον πλαστικό αριθμό. Για να εδραιωθεί αυτό το αποτέλεσμα, χρησιμοποιείται το πυθαγόρειο θεώρημα, σε ορθογώνια τρίγωνα που συνδέονται με διαγώνιους στο προηγούμενο σχήμα. Ο Hans Van der Laan, μελέτησε τις αναλογίες των ρωμαϊκών ναών και ανακάλυψε πως πολλές από αυτές ανταποκρίνονταν στις αναλογίες των όρων της ακολουθίας $1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, \dots$ που ξεκίνα με τρεις μονάδες και κάθε όρος προκύπτει από άθροιση των αριθμών που είναι τοποθετημένοι 2 και 3 θέσεις μπροστά του ($2+3=5, 4+5=9$), οπότε προκύπτουν οι λόγοι $\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \dots$ που τείνουν προς τον πλαστικό αριθμό P .

Το έργο του Hans van der Laan (σχήμα 21), έγινε αντικείμενο διδασκαλίας και μελέτης σε πολλά πανεπιστήμια ανά τον κόσμο. Από τις πρώτες δημιουργίες που προέκυψαν από τις θεωρητικές προτάσεις του ήταν η άνω εκκλησία, ο πρόναος και η κρύπτη της μονής Βααλς, στα νότια των Κάτω Χωρών (σχήμα 22).



Σχήμα 21



Σχήμα 22

Από τον Πυθαγόρα στον Fermat και από τον Fermat στον Wiles

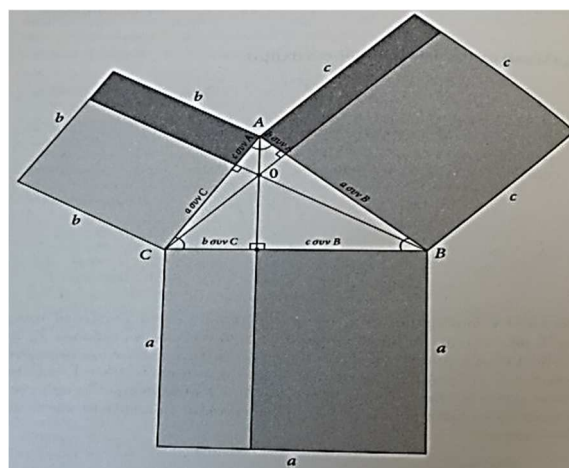
Το πιο γνωστό πυθαγόρειο τρίγωνο των αρχαίων χρόνων είναι το ορθογώνιο τρίγωνο, κάθετων πλευρών 3 και 4 και υποτεινουσας 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Μετά από την ανακάλυψη του, οι πυθαγόρειοι αναρωτήθηκαν αν υπάρχουν και άλλα ορθογώνια τρίγωνα ακέραιων πλευρών. Για να τα βρουν, σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα, έπρεπε να αναζητήσουν ακέραιους θετικούς αριθμούς όχι μηδενικούς x, y, z συνδεδεμένους μέσω της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$ (1). Οι πυθαγόρειες τριάδες, είναι συνδυασμοί τριών αριθμών που ανταποκρίνονται σε αυτή την εξίσωση. Οι πυθαγόρειοι, καταπιάστηκαν με την έρευνα των τριάδων, ένα συγκεκριμένο τύπο μαθηματικής αντιστοιχίας. Οι τριάδες μειώνονται, όσο αυξάνονται οι αριθμοί; Οι πυθαγόρειοι, επινόησαν έναν μεθοδικό τρόπο για να βρίσκουν τη μέγιστη δυνατή ποσότητα από αυτές. Στην πορεία, **απέδειξαν πως υπάρχει άπειρος αριθμός πυθαγορείων τριάδων**. Στο 10^ο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, εμφανίζεται ο τύπος που επιτρέπει την εύρεση όλων των δυνατών ακεραίων λύσεων της (1).

Έστω δύο οποιοδήποτε ακέραιοι θετικοί αριθμοί m, n με $m > n$, ο ένας άρτιος ο άλλος περιττός, τότε $x = 2m \cdot n$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$ (2). Εδώ εμφανίζονται άπειρες πυθαγόρειες τριάδες (x, y, z) . Οι πρώτες τιμές, παρατίθενται στο σχήμα 23. Αν (x, y, z) είναι μία πυθαγόρεια τριάδα, τότε η $(a \cdot x, a \cdot y, a \cdot z)$ με a ακέραιο είναι επίσης πυθαγόρεια τριάδα. Από οποιαδήποτε τριάδα, προκύπτουν άπειρες άλλες. Η δημοφιλέστερη τριάδα είναι η $(3, 4, 5) = (3, 3+1, 3+2)$, η

μοναδική σε αριθμητική πρόοδο, που παράγει το μοναδικό τρίγωνο με άνισες πλευρές η περίμετρος του οποίου είναι 12, διπλάσια του εμβαδού του, που είναι 6.

m	n	x	y	z
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61

Σχήμα 23



Σχήμα 24

Ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς, έγραψε 3 έργα, ένα εκ των οποίων ξεχωρίζει για την επιρροή του, σε σημείο που ο τίτλος του χάρισε όνομά του σε έναν ολόκληρο κλάδο των μαθηματικών. Το βιβλίο ήταν το «Αριθμητικά», από το «αριθμός» και από το «τέχνη», δηλαδή «αριθμητική». Τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου, συνέβαλαν στο πέρασμα των αιώνων, στην ανάπτυξη της θεωρίας των αριθμών. Στο έργο του, ο Διόφαντος έλυσε 130 προβλήματα και διατύπωσε την έκφραση που απαντάται στον Ευκλείδη σχετικά με τις πυθαγόρειες τριάδες (2), αν και μέσω άλλων επιχειρημάτων. Συχνά, το πυθαγόρειο θεώρημα προβάλλει στο κέντρο των προβλημάτων αυτού του συγγραφέα. Ενδεικτικά, το πρόβλημα 1 του 6^{ου} βιβλίου συναντά την πυθαγόρεια τριάδα (40, 96, 104), όπου η υποτεινούσα μείον οποιανδήποτε κάθετη είναι κύβος, $104 - 96 = 8 = 2^3$, $104 - 40 = 64 = 4^3$. Η επιρροή των «Αριθμητικών» του Διόφαντου, δεν βρίσκεται μόνο στο περιεχόμενό αλλά και στο περιθώριο ενός τυπωμένου αντίγραφου των κλασικών Αριθμητικών, ο Pierre de Fermat (1601–1665) απηύθυνε, γύρω στο 1637, την ακόλουθη πρόταση «Είναι αδύνατο να διαιρεθεί κύβος σε άθροισμα δύο κύβων, ή ένα διτετράγωνο σε άθροισμα δύο διτετραγώνων, ή γενικά, η οποιαδήποτε δύναμη μεγαλύτερη του δύο σε δύο δυνάμεις ίδιου βαθμού· ανακάλυψα μία καταπληκτική απόδειξη αυτής της δήλωσης. Αλλά το περιθώριο αυτό είναι υπερβολικά στενό για να τη χωρέσει.» Μία καταπληκτική απόδειξη και δεν υπήρχε αρκετός χώρος στο περιθώριο! Το αίνιγμα, που κατέληξε να αποκαλείται «τελευταίο θεώρημα του Fermat», απειλούσε τη μαθηματική κοινότητα για τουλάχιστον 300 έτη και εκατοντάδες μαθηματικοί εργάστηκαν για να βρουν την καταπληκτική απόδειξη. Το πρόβλημα, είναι τόσο δύσκολο που θεωρείται δεδομένο πως ο Fermat διέπραξε κάποιο σφάλμα στην απόδειξη του. Το 1995, ο βρετανός **Andrew Wiles** κατέληξε σε μία ευφυέστατη λύση.

Μία περίεργη τριάδα

Το 666 ή ο αριθμός του θηρίου υπήρξε πάντα αινιγματικός που υποδαύλιζε μεγάλα πάθη (κάθε τύπου) μεταξύ των θιασωτών της αριθμολογίας. Οι αλλόκοτες ιδιότητες του εμφανίζονται ήδη στο ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης, όπου ο 666 γράφεται **DCLXVI** και **χρησιμοποιεί μόνο μία φορά καθένα από τα σύμβολα των τιμών που είναι μικρότερες από το M (1000)**. Σε αυστηρά μαθηματικό πλαίσιο και οι αντιστοιχίες είναι εξίσου περίεργες. Είναι $666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$ δηλαδή, το άθροισμα των τετραγώνων των 7 πρώτων

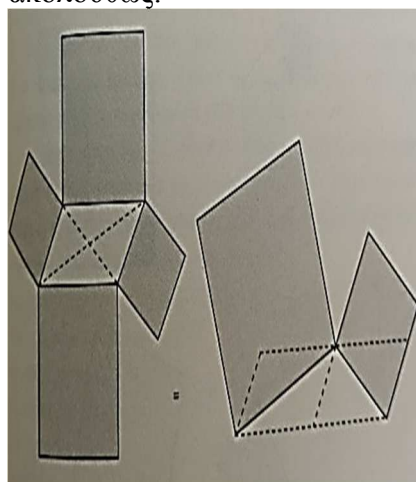
αριθμών. Οι λάτρεις της αριθμολογίας που αναζητούν τις εμφανίσεις του **666**, έχουν στη διάθεσή τους την πυθαγόρεια τριάδα $(x, y, z) = (693, 1.924, 2.045)$. Το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου που σχηματίζει αυτή η τριάδα, είναι **666.666**.

Το θεώρημα του συνημίτονου

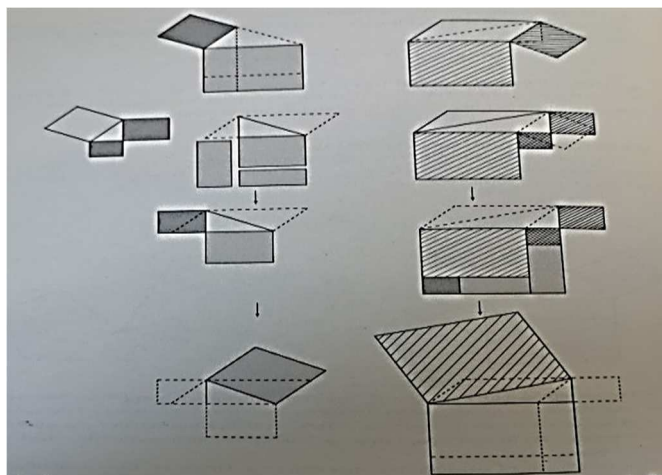
Αν ABC είναι ένα οποιοδήποτε τρίγωνο (όχι απαραίτητα ορθογώνιο), τότε μπορούμε να συνεχίσουμε να κατασκευάζουμε τα 3 τετράγωνα επί των πλευρών του και να αναρωτιόμαστε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των εμβαδών αυτών των τετραγώνων. Για μέγιστη σαφήνεια, ας θεωρήσουμε την περίπτωση του οξυγώνιου τριγώνου ($A < 90^\circ$) (σχήμα 24). Έχουν σχεδιαστεί τα 3 ύψη του τριγώνου που αν προεκταθούν, διαιρούν τα τετράγωνα επί των κάθετων, σε 2 ορθογώνια. Λαμβάνοντας υπόψη τις διαστάσεις των πλευρών, ανακαλύπτουμε πως το ανώτερο δεξιό τρίγωνο έχει εμβαδόν $c \cdot a \cdot \cos B$. Το εν λόγω εμβαδόν, είναι ίσο με το εμβαδόν του κατώτερου δεξιού ορθογώνιου. Τα αριστερά μέρη, έχουν εμβαδόν $b \cdot a \cdot \cos C$. Επιπλέον, εμφανίζοντας τα δύο τμήματα, $b \cdot c \cdot \cos A$ προκύπτει ότι, $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$ που είναι ο νόμος συνημιτόνου. Όταν $A = 90^\circ$, τότε $\cos 90^\circ = 0$ και $a^2 = b^2 + c^2$. Ο νόμος του συνημιτόνου, συνιστά προέκταση της κλασικής περιπτώσεως.

Ο νόμος του παραλληλόγραμμου

Παρουσιάζεται μία παράξενη ιδιότητα των 4 τετραγώνων, που μπορούν να σχηματιστούν επί των πλευρών ενός παραλληλογράμμου και την οποία περιγράφουν ακολούθως.



Σχήμα 25



Σχήμα 26

Από το σχήμα 25, το άθροισμα των εμβαδών των 4 τετραγώνων είναι ίσο με το άθροισμα των 2 τετραγώνων που μπορούν να σχεδιαστούν επί των διαγωνίων. Στη συνέχεια, αποδεικνύεται η ακολουθία που επιτυγχάνεται με την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος, τουλάχιστον 4 φορές. Η ακολουθία αυτή, καταδεικνύει την ιδιότητα. Το πιο περίεργο σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι αν αντί για παραλληλόγραμμο, το αρχικό σχήμα είναι ορθογώνιο (σχήμα 26), τότε ο νόμος που ισχύει, είναι το πυθαγόρειο θεώρημα. Συνεπώς και οι 2 ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

Στο σχήμα 26, αποτυπώνεται η ακολουθία των Alsina και Nelsen (2006) που καταδεικνύει τον νόμο του παραλληλόγραμμου, σύμφωνα με τον οποίο το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που μπορούν να σχεδιαστούν στις πλευρές ενός παραλληλόγραμμου, είναι ίσο με αυτό των εμβαδών των τετραγώνων επί των διαγωνίων.

Ο Πυθαγόρας σε 3D

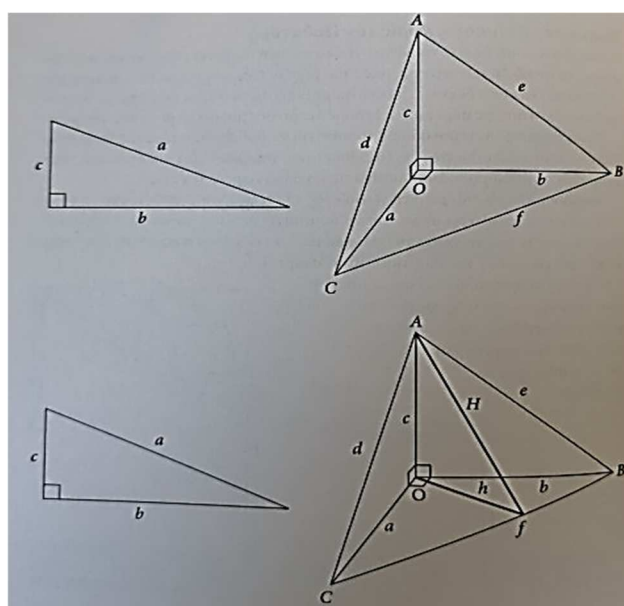
Μία άμεση διεύρυνση του πυθαγορείου θεωρήματος στον τρισδιάστατο χώρο όπου η κυρία διαγώνιος d ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με ακμές a, b, c δίνεται από τη σχέση $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (3)

Πρακτικές μετρήσεις χωρίς τον Πυθαγόρα

Έστω ότι θέλω να μάθω την εσωτερική διαγώνιο ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, που δεν μπορεί να ανοίξει ή η εσωτερική μάζα του είναι συμπαγής. Παίρνω μετροταινία για να μετρήσω την κυρία διαγώνιο d από τις ακμές a, b, c δεδομένου ότι δεν μπορεί να μετρηθεί από μέσα. Είναι ο τύπος (3) ο μοναδικός τρόπος για να βρω την τιμή της διαγωνίου d ; Θεωρώ ως περιφέρεια τη γωνία ενός τραπεζιού και τοποθετώ το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, έτσι ώστε η χαμηλότερη ακμή του να συμπίπτει με αυτή τη γωνιά. Απομακρύνω το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο από τη γωνία, παράλληλα με τον εαυτό του, αφήνοντας έναν κενό χώρο ίδιο με αυτόν του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου. Έτσι, ανάμεσα στη γωνία και μία ψηλότερη ακμή του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, μπορώ εύκολα να φανταστώ πως η διαγώνιος d έχει αποκαλυφθεί, άρα μπορεί να μετρηθεί χωρίς πρόβλημα (σχήμα 27).



Σχήμα 27



Σχήμα 28

Για πρακτικούς λόγους, δεν έχει νόημα να εφαρμόσω το συγκεκριμένο τέχνασμα σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα μεγεθών που ξεπερνούν τις ανθρώπινες διαστάσεις, αλλά λύνω το πρόβλημα για τα συνήθη κουτιά. Εντούτοις, όπως φαίνεται, δεν είναι ανάγκη να εφαρμόσω κάποια εξίσωση.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο στο ορθό τετράεδρο

Είναι γνωστό, πόσο εύκολη είναι η μεταφορά επίπεδων δυσδιάστατων σχημάτων στον τρισδιάστατο χώρο, αλλά τι θα συνέβαινε αν θέλαμε να προβάλλουμε το πυθαγόρειο θεώρημα σε 3D; Για να περάσω από το επίπεδο στον χώρο, μία πιθανή επιλογή είναι να θεωρήσω πως τα επίπεδα τρίγωνα που καθορίζονται από 3 κορυφές είναι ισοδύναμα στον χώρο με τα τετράεδρα που καθορίζονται από 4 κορυφές. Σύμφωνα με αυτόν τον συλλογισμό, το ορθογώνιο τρίγωνο θα μεταφερόταν

τρισεπίσταντα στο ορθό τετράεδρο, όπου 3 κάθετες συγκλίνουν σε μία κορυφή. Έτσι, αν το πυθαγόρειο θεώρημα σε 2D συνδέει το τετράγωνο της υποτεινούς με τα τετράγωνα των 2 καθέτων, στο ορθό τετράεδρο σε 3D θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε, υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο τετράγωνο του εμβαδού του τριγώνου ABC με τα τετράγωνα των εμβαδών των άλλων 3 τριγωνικών εδρών; Η απάντηση είναι, ναι. Η εν λόγω σχέση, παρουσιάζει τέλεια αναλογία με την πυθαγόρεια σχέση $\text{Εμβαδό}_{ABC}^2 = \text{Εμβαδό}_{ACO}^2 + \text{Εμβαδό}_{ABO}^2 + \text{Εμβαδό}_{BCO}^2$.

Στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος, προβάλλει το αποκαλούμενο θεώρημα του Gua, προς τιμήν του εφευρέτη του, του αβά Jean Paul de Gua de Malves, Γάλλου μαθηματικού σύγχρονου της Εγκυκλοπαίδειας. Για να επικυρωθεί αυτή η σχέση, παίρνω ως αφετηρία το γεγονός ότι οι έδρες των κάθετων ακμών των ορθογωνίων τριγώνων είναι τρεις. Άρα,

$$\begin{aligned} \text{Εμβαδό}_{ABC}^2 &= \text{Εμβαδό}_{ACO}^2 + \text{Εμβαδό}_{ABO}^2 + \text{Εμβαδό}_{BCO}^2 = \left(\frac{1}{2}a \cdot c\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b \cdot c\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a \cdot b\right)^2 = \\ \frac{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2}{4} &= \frac{c^2(a^2 + b^2) + a^2b^2}{4} = \frac{f^2c^2 + a^2b^2}{4}. \quad (4) \end{aligned}$$

Παρατηρώ στο σχήμα 28, πως το εμβαδόν της βάσης COB μπορεί να υπολογιστεί με 2 διαφορετικούς τρόπους (η 1^η ισότητα, αντιστοιχεί στον 1^ο τρόπο και η 2^η ισότητα αντιστοιχεί στον 2^ο τρόπο). Για παράδειγμα $\frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}h \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}h \cdot f$. Αν συγκρίνω την 1^η έκφραση με την τελευταία, προκύπτει ότι $h = \frac{ab}{f}$. Για άλλη μία φορά, κατά τον Πυθαγόρα, υπολογίζεται το

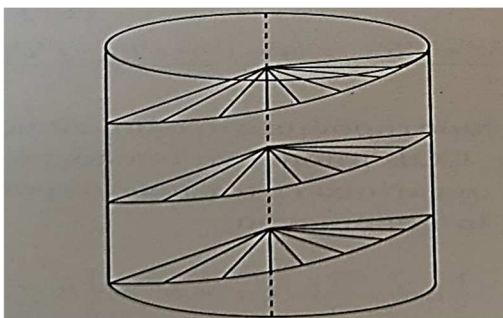
εμβαδόν του τριγώνου ABC με Η το ύψος του. $H^2 = c^2 + h^2 = c^2 + \frac{a^2b^2}{f^2}$. Άρα,

$$\text{Εμβαδό}_{ABC}^2 = \left(\frac{1}{2}f \cdot H\right)^2 = \frac{1}{4}f^2 \left(c^2 + \frac{a^2b^2}{f^2}\right) = \frac{f^2c^2 + a^2b^2}{4} \quad \text{που είναι ο ζητούμενος τύπος (4).}$$

Το πυθαγόρειο θεώρημα και η σπειροειδής κλίμακα

Από τη φαντασία, εύκολα ανασύρεται η εικόνα ενός μεσαιωνικού πύργου στο πάνω μέρος του οποίου όπου ενδεχομένως περιμένει η πριγκίπισσα, φθάνει κανείς μέσω μιας σπειροειδούς σκάλας. Η γεωμετρική βάση της σπειροειδούς κλίμακας, είναι μία στριφογυριστή καμπύλη που ονομάζεται έλικα (σχήμα 29). Στο σχήμα 30, φαίνεται η σπειροειδής κλίμακα ελικοειδούς σχήματος, σχεδιασμένη από τον Antoni Gaudí για την εκκλησία της **Sagrada Familia** στη Βαρκελώνη. Για να κατασκευαστεί μία έλικα από χαρτί, αρκεί να πάρω ένα ορθογώνιο φύλλο (σχήμα 31) και να σημειώσω τα 3 ορθογώνια τρίγωνα με τις ίσες παράλληλες υποτεινούσες (ίδια κλίση).

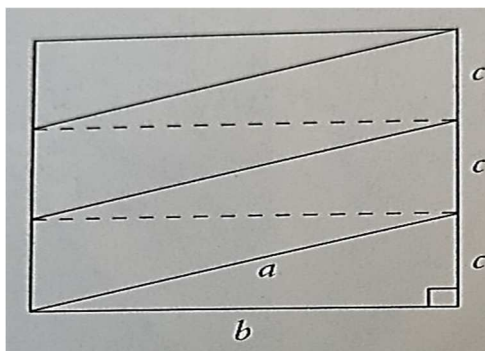
Ενώνοντας τα 2 άκρα του φύλλου, θα σχηματιστεί η έλικα. Η καμπύλη αυτή, έχει σταθερή κλίση η οποία συνιστά απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να κατασκευαστεί σπειροειδής κλίμακα. Στο εν λόγω παράδειγμα, από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει το συνολικό μήκος L της έλικας $L = 3 \cdot a = 3 \cdot \sqrt{b^2 + c^2}$.



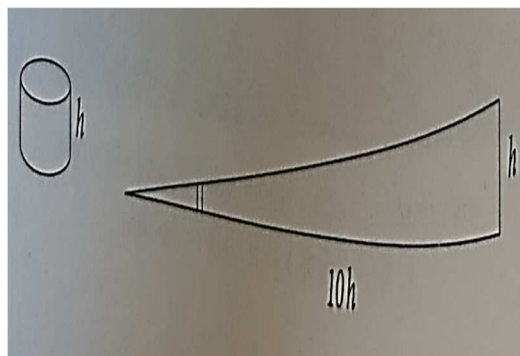
Σχήμα 29



Σχήμα 30



Σχήμα 31



Σχήμα 32

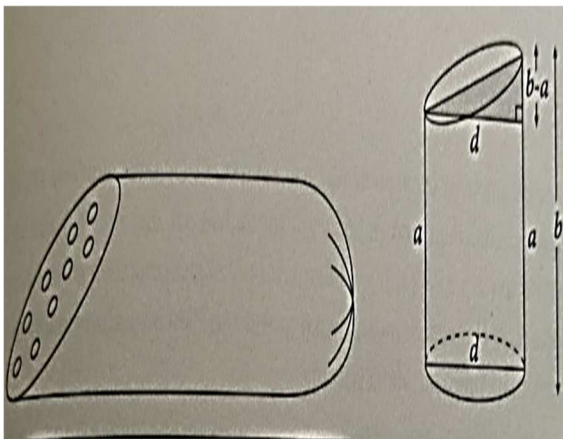
Έστω μία άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση, με αφετηρία έναν κύλινδρο από χαρτόνι, ύψους h . Θέλω να σχεδιάσω σε αυτόν, έλικα κλίσης 10% και να υπολογίσω το μήκος της. Πώς πρέπει να προχωρήσω ώστε να επιτύχω; Κατασκευάζω με χαρτί ένα ορθογώνιο τρίγωνο καθέτων πλευρών h και $10 \cdot h$. Με τις διαστάσεις αυτές, η κλίση της υποτείνουσας είναι $\frac{\text{αντίθετη κάθετος}}{\text{προσκεείμενη κάθετος}} = \frac{h}{10 \cdot h} = \frac{1}{10} = 0.1$. Η υποτείνουσα είναι $\sqrt{h^2 + (10h)^2} = h\sqrt{101}$ και τυλίγοντας το χάρτινο τρίγωνο γύρω από τον κύλινδρο, προκύπτει η ζητούμενη έλικα (γυρίζοντας περισσότερες ή λιγότερες φορές ανάλογα με την τιμή της r).

Το μυστήριο του τέλειου κουτιού

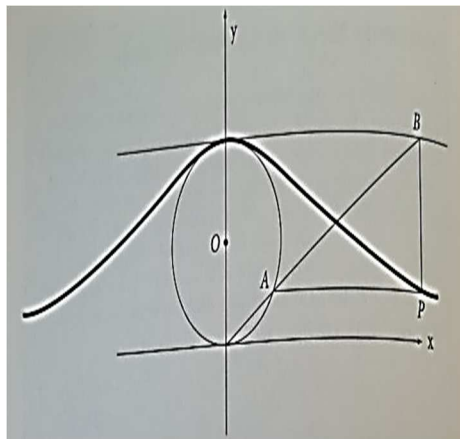
Οι πυθαγόρειες τριάδες, κατέστησαν σαφές πως υπάρχουν άπειρα ορθογώνια, οι πλευρές και η διαγώνιος των οποίων είναι ακέραιοι. Μπορεί να υπάρξει ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακέραιες ακμές a , b , c τέτοιες ώστε όλες οι διαγώνιοι των εδρών $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$, $\sqrt{a^2 + c^2}$ και η κύρια διαγώνιος $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ να είναι ακέραιοι αριθμοί; Αυτό το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο παραμένει άλυτο μυστήριο. Έχουν βρεθεί πολύεδρα ανάλογης τελειότητας, αλλά ποτέ ένα απλό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Το πυθαγόρειο θεώρημα και το κόψιμο του σαλαμιού

Το σαλάμι, έχει κυλινδρικό σχήμα. Αν πάρω ένα μαχαίρι και το κόψω πλαγιαστά, θα δημιουργήσω ελλειπτικό σχήμα. Αν d είναι η διάμετρος του σαλαμιού (σχήμα 33), ανάλογα με το αν θα το κόψω με μεγαλύτερη ή με μικρότερη κλίση, το τμήμα $b-a$ θα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο. Η ελλειπτική φέτα, έχει μία διάσταση μικρότερη και μια μεγαλύτερη φέτα έχει διάσταση L . Για το πυθαγόρειο θεώρημα, η τιμή της είναι $L = \sqrt{(b-a)^2 + d^2}$. Έτσι, το d δεν θα άλλαζε ποτέ, αλλά μπορώ να κόψω μεγάλες φέτες (οριοθετημένες μόνο από το συνολικό μήκος του σαλαμιού). Ο έλεγχος του μεγέθους αυτών των φετών, θα εξαρτηθεί από πυθαγόρεια σχέση.



Σχήμα 33



Σχήμα 34

Η καμπύλη της Agnesi

Η σπουδαία Ιταλίδα μαθηματικός Maria Gaetana Agnesi (1718–1799), συνέβαλε καθοριστικά στην εξέλιξη του μαθηματικών. Από τις αναρίθμητες συνεισφορές της, είναι η καμπύλη που φέρει το όνομά της και βασίζεται σε πυθαγόρεια ιδιότητα (σχήμα 34). Έστω σταθερή περιφέρεια κέντρου O . Για κάθε σημείο A της περιφέρειας, σχεδιάζω από τη βάση του την ευθεία AB , που προσδιορίζει το ορθογώνιο τρίγωνο ABP . Όταν το A διατρέχει την περιφέρεια, ποια καμπύλη περιγράφει η P ; Η παχιά καμπύλη είναι η τροχιά της P και ονομάζεται καμπύλη της Agnesi, προς τιμήν της Maria Gaetana. Η εξίσωσή της είναι $y = \frac{1}{1+x^2}$ και το εμβαδόν της περιοχής κάτω από αυτή την καμπύλη αυτή είναι π .

Η μάγισσα της Agnesi

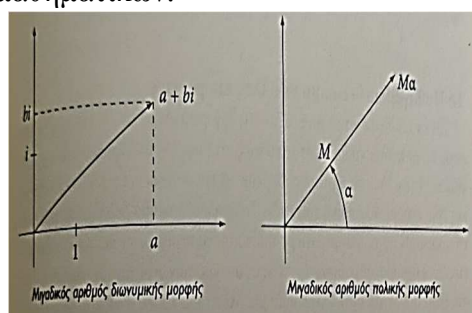
Στους Αγγλοσάξονες, η καμπύλη της Agnesi είναι γνωστή ως «*Η μάγισσα της Agnesi*» λόγω μιας κακής απόδοσης της στα αγγλικά. Στα ιταλικά, η καμπύλη αποκαλείται *versiera*, ναυτικός όρος που περιγράφει τον κάβο που γυρίζει το ιστίο και που μοιάζει πολύ με την καμπύλη. Ένας κακός μεταφραστής μπέρδενε το *versiera* με το *avversiera* που σημαίνει «μάγισσα».

Φανταστικοί αριθμοί

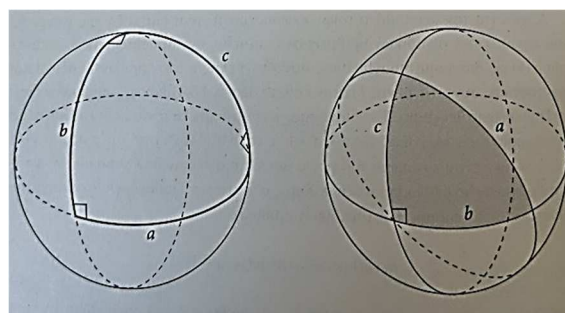
Από τις πρώτες εμφανίσεις του τετραγωνικών ριζών και ξεκινώντας από αυτές, για να επιλυθούν εξισώσεις 2^{ου} βαθμού, αναδύθηκαν μυστηριώδεις εκφράσεις όπως $\sqrt{81-144}$ που δεν φαίνονταν να έχουν λογική εξήγηση. Έτσι, η $x^2 = 1$ έχει ως λύσεις τα ± 1 , αλλά η $x^2 = -1$ δεν έχει πραγματικές λύσεις. Ο Αναγεννησιακός μαθηματικός και φιλόσοφος Girolamo Cardano πρότεινε την αποσύνθεση του αριθμού $10 = x + y$ έτσι ώστε το γινόμενο του να είναι $x \cdot y = 40$. Από εκεί, κατέληξε στις εκφράσεις $x = 5 + \sqrt{-15}$ και $y = 5 - \sqrt{-15}$. Χρειάστηκε να περάσουν πολλά χρόνια ώσπου σπουδαίοι μαθηματικοί του 18^{ου} και 19^{ου} αιώνα όπως οι Euler, Wessel, Argand, Gauss, να επινοήσουν τους μιγαδικούς αριθμούς, προεκτείνοντας το σύνολο των πραγματικών αριθμών οπότε πλέον όλες οι πολυωνυμικές εξισώσεις λύνονταν.

Με το σύμβολο $i = \sqrt{-1}$, οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν εκφράσεις του τύπου $a + bi$ όπου a είναι το πραγματικό μέρος και b είναι το φανταστικό μέρος. Κλειδί για τον χειρισμό τέτοιων εκφράσεων, είναι η επίτευξη της γραφικής απεικόνισης των μιγαδικών αριθμών στο επίπεδο, αντιμετωπίζοντας την κάθε μία $a + bi$ ως διάνυσμα πραγματικής συντεταγμένης a , στον οριζόντιο και φανταστικής

συντεταγμένης bi , στον κάθετο άξονα. Το «διάνυσμα» $a+bi$ μπορεί να προσδιοριστεί και μέσω 2 παραμέτρων M_α , όπου $M = \sqrt{a^2 + b^2}$ είναι η απόλυτη τιμή του αριθμού $a+bi$ και η γωνία α είναι το όρισμα, ή η γωνία που σχηματίζει το διάστημα με τον πραγματικό οριζόντιο άξονα $\tan \alpha = b/a$. Χάρη σε αυτή την πυθαγόρεια αναπαράσταση, ο πολλαπλασιασμός των μιγαδικών αριθμών $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc) \cdot i$ καθίσταται εφικτός, αν M_α αντιστοιχεί στο $a+bi$ και N_β αντιστοιχεί στο $c+di$, $M_\alpha \cdot M_\beta = (M \cdot N)_{\alpha+\beta}$. Οι μιγαδικοί αριθμοί, είναι θεμελιώδεις στην άλγεβρα, στη μιγαδική ανάλυση και έχουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην ηλεκτρονική μηχανική, στον ηλεκτρομαγνητισμό, στη θεωρία χάλους, στην κβαντική φυσική στη θεωρία των φράκταλ, στη θεωρία ελέγχου, στη θεωρία του σήματος και σε αναρίθμητους κλάδους των καθαρών και των εφαρμοσμένων μαθηματικών.



Σχήμα 35



Σχήμα 36

Το πυθαγόρειο θεώρημα σε άλλες επιφάνειες

Έχει νόημα, να διατυπώσουμε την πυθαγόρεια σχέση σε μία σφαίρα; Στο επίπεδο, οι κύριες γραμμές είναι ευθείες. Στη σφαίρα, υπάρχουν μέγιστες περιφέρειες (όλοι οι μεσημβρινοί, ο Ισημερινός κ.ο.κ.), κατά συνέπεια έχουμε «σφαιρικά τρίγωνα». Το σχήμα 36, δείχνει πώς μπορούν να υπάρξουν σφαιρικά τρίγωνα με 3 ίσα τόξα περιφέρειας και 3 ορθές γωνίες. Στη σφαίρα, οι γωνίες ενός σφαιρικού τριγώνου δεν δίνουν αθροιστικά μια σταθερή ποσότητα, ούτε έχει νόημα μία σχέση τύπου $a^2 = b^2 + c^2$, διότι μπορεί να ισχύει ότι $a = b = c$. Μπορώ να θεωρήσω σφαιρικά τρίγωνα με μία μόνο ορθή γωνία και να βρω τις εκφράσεις που συσχετίζουν τις διαστάσεις των πλευρών a, b, c λαμβάνοντας υπόψη την ακτίνα R της σφαίρας και τα συνημίτονα των γωνιών, από το κέντρο της σφαίρας. Ένας τρόπος για να εκπληρώσω τον στόχο, είναι να ξεκινήσω από το επίπεδο με ένα φύλλο στο οποίο υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο, όπου ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα και να σχηματίσω με αυτό το φύλλο αναπτύξιμη επιφάνεια. Αν εμφανιζόταν κύλινδρος, το τρίγωνο θα παρέμενε καμπυλωτό.

Λογοτεχνικές φρικαλεότητες με τον Πυθαγόρα

Η λογοτεχνική φαντασία, έχει εκμεταλλευτεί σημαντικά τη νομενκλατούρα των καθέτων πλευρών και των υποτεινουσών. Πολύ συχνά, όταν κάποιος μελετητής της συγκριτικής λογοτεχνίας εξετάζει τις εμφανίσεις τους, νιώθει να εισέρχεται σε ένα δωμάτιο με λογοτεχνικές φρικαλεότητες. Για παράδειγμα, στο διάσημο παραμύθι του μάγου του Οζ ένας από τους ήρωες αναφέρει πως «το άθροισμα των τετραγωνικών ριζών δύο οποιονδήποτε πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα της άλλης πλευράς». Η διατύπωση αυτή, συγχέει το ισοσκελές τρίγωνο και το ορθογώνιο τρίγωνο, με αποτέλεσμα να μην βγαίνει νόημα. Εν τούτοις, σε ένα λιγότερο λογοτεχνικό αλλά πολύ πιο διασκεδαστικό πλαίσιο στην ιστορία, το έγκλημα της υποτεινουσας που περιλαμβάνεται στο βιβλίο «Τα παλάτια των θεών» από τις περιπέτειες του Αστερίξ και Οβελίξ, εμφανίζεται κάποιος αρχιτέκτονας του Ιουλίου Καίσαρα που αποκαλείται «τετράγωνα επί της υποτεινουσας».

Το πυθαγόρειο θεώρημα σε άλλες κατασκευές

Για να υπολογίσει τις αποστάσεις μεταξύ των διανυσμάτων, ο Rene Descartes χρησιμοποίησε τις συντεταγμένες τους και τον πυθαγόρειο τύπο

$$d((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Ο τύπος αυτός, μπορεί να επεκταθεί και σε διανύσματα με έναν οποιοδήποτε αριθμό συντεταγμένων. Έτσι, για $n=4$, προκύπτει μια πυθαγόρεια εκδοχή στον χώρο των 4 διαστάσεων. Η αναλυτική (ή καρτεσιανή) γεωμετρία, γεννήθηκε από τη θεώρηση της περιγραφής των σημείων του επιπέδου (ή του χώρου), μέσω διανυσμάτων και συντεταγμένων. Χρησιμοποιώντας αυτή τη γλώσσα, ο Descartes (ή Καρτέσιος) ένωσε την κλασική (συνθετική) γεωμετρία, με την αριθμητική. Ο Γάλλος φιλόσοφος, ασπάζονταν τη γεωμετρία του Ευκλείδη, αλλά τη συμπλήρωνε με τις αντίστοιχες αριθμητικές μετρήσεις. Αυτό, τον οδήγησε στο να αναπτύξει τις εξισώσεις και την άλλη πλευρά του. Ο ίδιος ο Descartes δηλώνει σε μία επιστολή προς την πριγκίπισσα Ελισσάβετ της Βοημίας: «...δεν χρησιμοποιώ κανένα θεώρημα που δεν υποστηρίζει ότι οι πλευρές όμοιων τριγώνων είναι ανάλογες και πως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτεινουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών. Δεν διστάζω να εισαγάγω πολλές άγνωστες ποσότητες, με στόχο να περιορίσω το πρόβλημα, με τέτοιους όρους ώστε να εξαρτάται μόνο από τα δύο αυτά θεωρήματα.» Στις κατασκευές, που αποκαλούνται **διανυσματικοί χώροι** νόρμας $\|\vec{x}\|$, η απόλυτη τιμή (ή μήκος) του διανύσματος ορίζεται από το $\vec{x}$ και είναι χρήσιμο όταν θεωρούμε τη σχέση ορθογωνικότητας που δίνεται από, $\vec{x}$ είναι ορθογώνιο με το $\vec{y}$ αν $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$. (5)

Εδώ, η πυθαγόρεια σχέση δεν συσχετίζει πλέον επιφάνειες τετραγώνων αλλά καθορίζει την ορθογωνικότητα. Τα διανύσματα αυτών των κατασκευών, μπορεί να είναι πιο αφηρημένα στοιχεία από τα ύψη καμπυλότητας στο επίπεδο (ή στον χώρο), π.χ., συνεχείς συναρτήσεις F που ορίζονται σε διάστημα $[0, -1]$, με πραγματικές τιμές. Μπορεί να υπολογιστεί η νόρμα τους, μέσω της έκφρασης

$$\|f\| = \sqrt{\left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)} \text{ ή } \|f\| = \text{Μέγιστο}\{|f(x)|, x \text{ στο } [0, 1]\}. \text{ Έτσι, προκύπτουν}$$

ισότητες του τύπου (5) εκφράζοντας ορθογωνικότητα μεταξύ των συναρτήσεων ή των ακολουθιών ή των οποιωνδήποτε στοιχείων της διανυσματικής δομής. Στους αποκαλούμενους χώρους Hilbert, θεωρείται το εσωτερικό γινόμενο $\vec{x} \cdot \vec{y}$ των διανυσμάτων στο επίπεδο $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ και υπολογίζονται οι νόρμες

(ή μήκη) των διανυσμάτων, μέσω της έκφρασης $\|\vec{x}\| = +\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$. Η ορθογωνικότητα

των διανυσμάτων, μπορεί να διασφαλιστεί με βάση την ιδιότητα $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, που είναι ισοδύναμη με το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \text{ αν και μόνο αν } \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

Επίλογος

Το πυθαγόρειο θεώρημα, δεν είναι απλά ένα μαθηματικό αποτέλεσμα, απαραίτητο για τη γνώση των ορθογώνιων τριγώνων, με χρήσιμες εφαρμογές σε πολλούς τομείς. Αν έχει αντέξει στον χρόνο, είναι επειδή συνιστά τον πυρήνα του φιλόδοξου φιλοσοφικού και μαθηματικού σχεδίου μίας μορφής σκέψης βασισμένης στην πανίσχυρη ιδέα πως μπορούμε να προσεγγίζουμε και να κατανοούμε τον κόσμο, μέσα από τους αριθμούς. Ο επιστήμονας John Bernal, υπήρξε πρωτοπόρος της

κρυσταλλογραφίας των ακτίνων Χ και εκλαϊκευτής, με έργα όπως το «Κοινωνική ιστορία της επιστήμης». Σε αυτό, γράφει για τον Πυθαγόρα «...το σίγουρο είναι πως η σχέση που εδραιώθηκε από τη σχολή του, ανάμεσα στα μαθηματικά, την επιστήμη και τη φιλοσοφία δε θα χαθεί ποτέ». Τη γνώμη του, υιοθετεί και εκφράζει με πολύ πιο επιβλητικό τρόπο ο εξέχων φιλόσοφος, λογοκράτης και μαθηματικός Bertrand Russell, στο έργο του «Ιστορία της δυτικής φιλοσοφίας»: «Δεν γνωρίζω κανέναν άλλον να έχει τόσο σημαντική επιρροή στο χώρο της σκέψης, διότι αυτό που μοιάζει με πλατωνισμό, αφού αναλυθεί, αποδεικνύεται ουσιαστικά πυθαγορισμός».

Στο παραπάνω έργο, μεταγενέστερα, ο Russell συμπλήρωσε, σε μία από τις συνήθειες καίριες και διεισδυτικές παρατηρήσεις του «Το πιο ιδιόμορφο χαρακτηριστικό της σύγχρονης επιστήμης είναι η επιστροφή της στον πυθαγορισμό». Πράγματι, στις αρχές του 21^{ου} αιώνα, η ψηφιακή επανάσταση ολοκλήρωσε ήδη το πρώτο μέρος της και εδραιώθηκε πλήρως, σε μια συνεχή διαδικασία μεταμόρφωσης του κόσμου. Στις ημέρες μας, η ιδέα της σαρωτικής παρουσίας των αριθμών ως θεμελίου και ουσίας όλων των εκδηλώσεων της επιστήμης, της τεχνικής άρα και της καθημερινής ζωής, είναι πιο αδιαμφισβήτητη και γενικευμένη από ποτέ. Ο πυθαγορισμός, αντανακλάται σε όλους τους τύπους και τους υπολογισμούς που περιγράφουν τη συμπεριφορά της φύσης και των φυσικών και χημικών της φαινομένων, στη γονιδιακή έρευνα, στις κλινικές αναλύσεις, στη μικροχειρουργική, στις μετεωρολογικές προβλέψεις, στις κοινωνικές επιστήμες, στις μουσικές παρτιτούρες, στους χορούς και σε κάθε στίχο που διαβάζουμε αναζητώντας μια αίσθηση ομορφιάς. Το πυθαγόρειο θεώρημα, είναι κατά έναν τρόπο, το θεώρημα της ζωής μας, αφού σήμερα, περισσότερο από ποτέ, η ζωή μας είναι πυθαγόρεια.