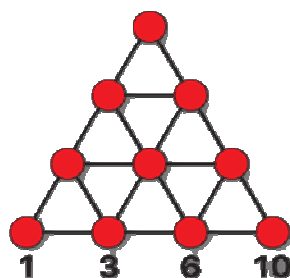




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Blaise Pascal

Mathematician • Scientist • Philosopher

Πτυχιακή εργασία
Το έργο και η ζωή του Pascal

Σπουδαστές: Μίχας Γεώργιος (AM 8835)
Μυλωνάς Άγγελος (AM 8541)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2023–2024

Ημερομηνία ανάθεσης:12.2022
Ημερομηνία κατάθεσης: 03.2024
Ημερομηνία εξέτασης: 04.2024

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Δρ. Αναστασόπουλος Γεώργιος Μηχανολόγος Μηχανικός Επίκουρος Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περίληψη

Ο Blaise Pascal, μέχρι τα 15 του έτη μελετούσε στα κρυφά μαθηματικά διότι του το είχε απαγορεύσει ο πατέρας του. Παρά το απαγορευτικό, ο Pascal ανακάλυψε μόνος του ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 2 ορθές γωνίες. Όταν ο πατέρας του, Étienne Pascal, είδε τα επιτεύγματα του γιου του, εντυπωσιάστηκε και του επέτρεψε τη μελέτη των μαθηματικών κειμένων, αρχίζοντας με το κλασικό έργο *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Λίγο πριν κλείσει τα 20 του έτη, είχε δημιουργήσει μία μηχανή υπολογισμών, την **Πασκαλίνα**. Το 1647, ανακάλυψε την **αρχή του Pascal** και τη χρήση του βαρομέτρου για τη μέτρηση του υψομέτρου. Το 1654 δημοσίευσε μια εργασία με τον τίτλο *Traité du triangle arithmétique*, με την συγγραφή της οποίας έθεσε τις βάσεις για τη συνδυαστική (κλάδος των μαθηματικών) και τον λογισμό των πιθανοτήτων. Μια από τις πιο γνωστές μαθηματικές μελέτες του, είναι το επονομαζόμενο **τρίγωνο του Pascal**, το οποίο είναι ουσιαστικά μια ατελείωτη πυραμίδα αριθμών, χτισμένη από πάνω προς τα κάτω.

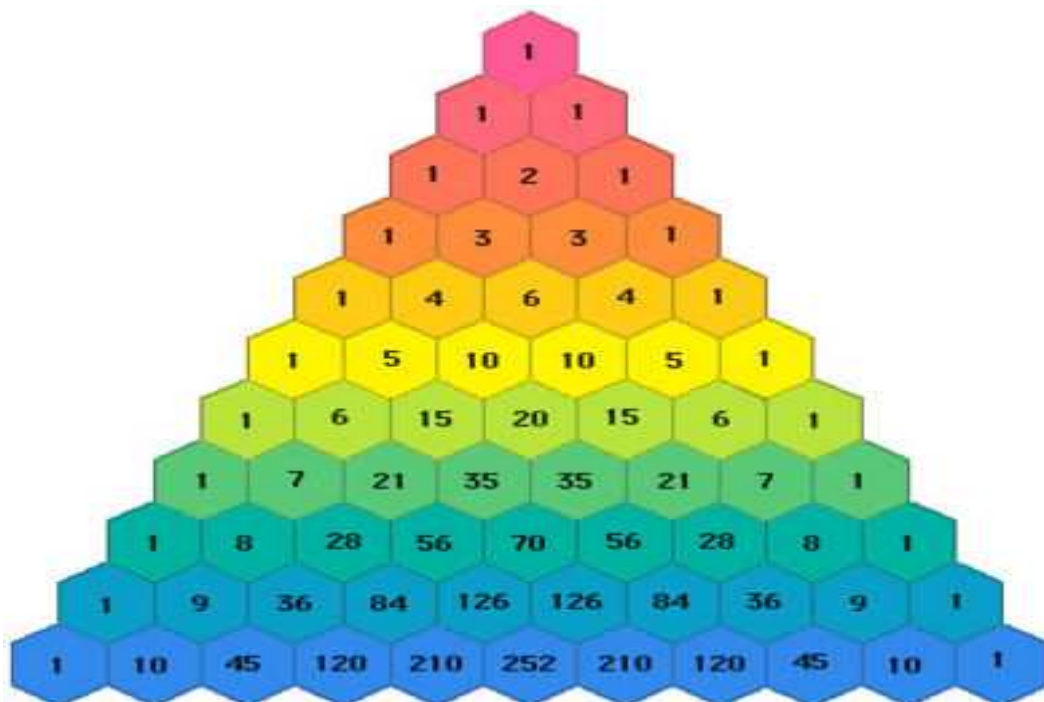
Στην κορυφή της βρίσκεται η μονάδα, ο θεμέλιος λίθος των μαθηματικών. Προς τιμήν του, δόθηκε το όνομά του στη μονάδα μέτρησης της πίεσης στο SI (Διεθνές Σύστημα Μετρήσεων).

Λέξεις κλειδιά

Στοχασμοί, Τα γράμματα του Luis de Montalte σε έναν επαρχιώτη φίλο, συνδυαστική, θεωρία πιθανοτήτων, Antoine Gombaud Chevalier de Mere, κυκλοειδής καμπύλη (Ωραία Ελένη» της γεωμετρίας), εξισώσεις Lagrange και Hamilton, εξίσωση Friedmann, Viviani, Sir Christopher Wren, Charles Bourelles, Johann Bernoulli, ψευδώνυμο Amos Dettonville, Huygens, πασκαλίνα (Pascaline), αρχή του Pascal, αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων, ατμοσφαιρική πίεση, hPa, kPa, MPa, υδραυλικό πιεστήριο, τρίγωνο του Pascal, αριθμητικό τρίγωνο, αρμονικό τρίγωνο, προβολική γεωμετρία, έλλειψη, εστίες, εκκεντρότητα, υπερβολή, παραβολή, λογισμός των μεταβολών,

Περιεχόμενα

Περίληψη	2
Λέξεις κλειδιά	2
1. Η οικογένεια του Pascal.....	9
2. Το λογοτεχνικό του έργο	9
3. Το μαθηματικό του έργο	9
4. Τα μαθητικά του χρόνια.....	10
5. Pascal και Καρδινάλιος Ρισελιέ.....	11
6. Pascal και Sylvester	11
7. Pascal και κωνικές τομές	12
8. Η παραγμένη υγεία του	13
9. Pascal και ατμοσφαιρική πίεση	13
10. Η αρχή του Pascal	14
10.1 Πειραματική απόδειξη της αρχής του Pascal για τα υγρά	15
10.2 Θεωρητική απόδειξη της αρχής του Pascal	15
10.3 Εφαρμογές της αρχής του Pascal	16
10.4 Υδραυλικό πιεστήριο	16
11. Αρχή του Pascal για τα αέρια	17
11.1 Πειραματική απόδειξη της αρχής του Pascal για τα αέρια	17
11.2 Μονάδα μέτρησης πίεσης Pa	17
11.3 Άλλες μονάδες μέτρησης της πίεσης	18
11.4 Παρατήρηση.....	18
12. Pascal και Descartes.....	19
13. Συνεχείς μετασχηματισμοί.....	21
14. Η επιστροφή στο Παρίσι.....	23
15. Η κυκλοειδής καμπύλη	25
16. Pascal και θεωρία των πιθανοτήτων	27
16.1 Πρόβλημα.....	29
16.1.1 Η λύση του Pascal	29
16.1.2 Η λύση του Fermat	30
16.1.3 Αντιρρήσεις	30
16.2 Ο Pascal και οι εφαρμογές των πιθανοτήτων.....	30
16.2.1 Επιχείρημα του λάθος Θεού	31
16.2.2 Επιχείρημα της ανειλικρινούς πίστης.....	31
16.2.3 Το παράδοξο του De Méré (1654).....	31
16.2.4 Το δέλεαρ των λόττο και το «στοίχημα του Pascal».....	32
16.2.5 Η ρουλέτα	32
17. Το τρίγωνο του Pascal	33
17.1 Ο πίνακας του Galton	37
17.2 Το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz.....	37
18. Η υπολογιστική μηχανή Pascaline.....	39
18.1 Η γλώσσα προγραμματισμού Pascal.....	40
19. Το τέλος του.....	40
20. Έργα του Pascal	41
Βιβλιογραφία	41



ŒUVRES

DE

BLAISE PASCAL.

*Cujus gloria neque profuit quisquam laudando, nec vituperando
quisquam nocuit, cum utrumque summis præditi fecerint
ingeniis. TIT. LIV. Ex Hieronym. Prol. Lib. II, in Oseam.*

TOME PREMIER.



A LA HAYE,
CHEZ DETUNE, LIBRAIRE.

M. DCC. LXXIX.

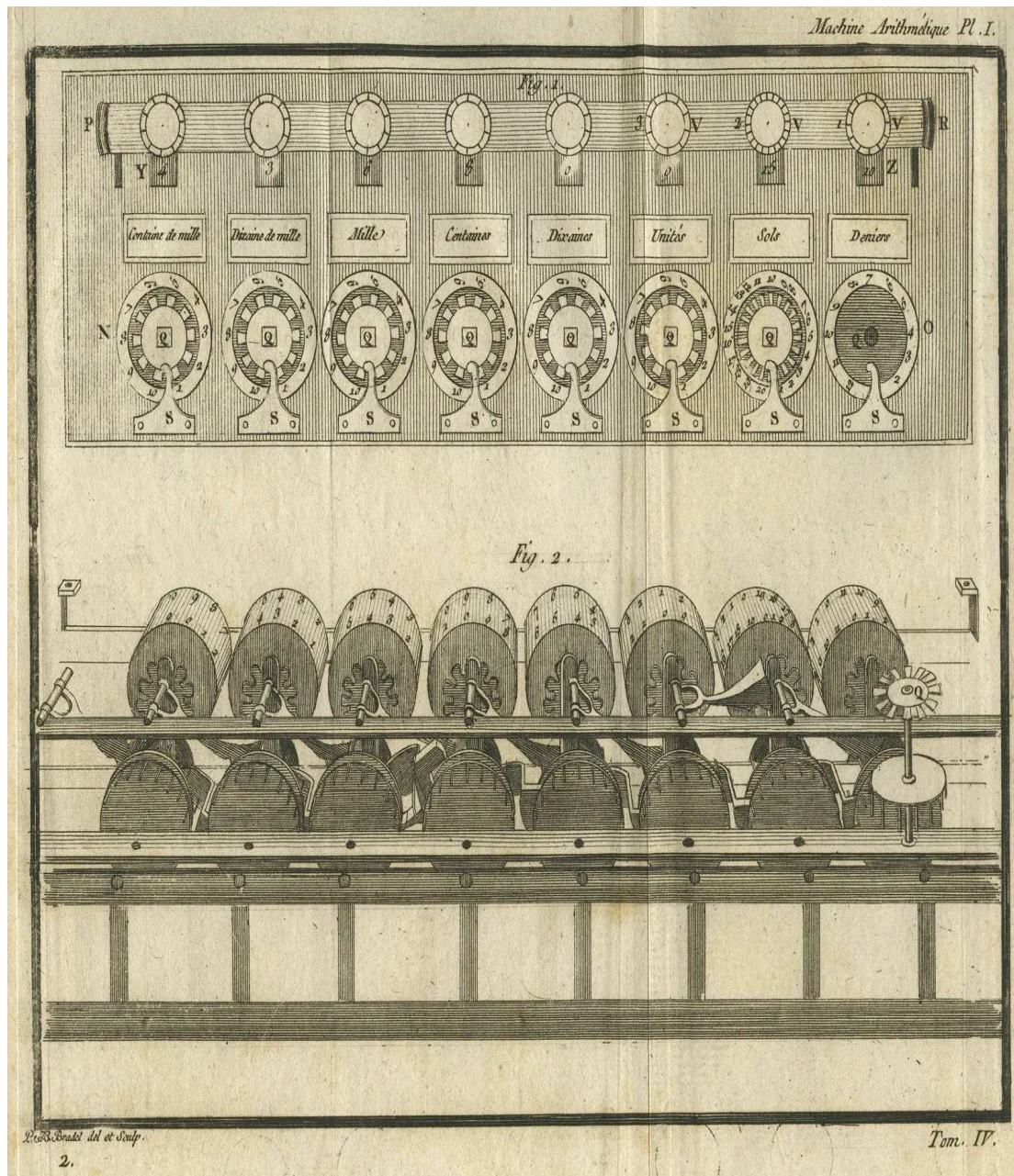


L. N. Quosnel pinx.

Tiré du Cabinet de M^r Guerrier de Bezance Maître des Requêtes.



Μέτρηση της ατμοσφαιρικής πίεσης με στήλη υδραργύρου (Hg)



Η παραλλαγή της πασκαλίνας (Pascaline) με τις 8 τροχαλίες

«Βλέπουμε.... πως η θεωρία των πιθανοτήτων είναι στη βάση της απλής κοινής λογικής η οποία έχει αναχθεί σε υπολογισμούς, μας κάνει να εκτιμήσουμε με ακρίβεια ότι τα λογικά μυαλά αισθάνονται ενστικτωδώς, συχνά χωρίς να μπορούν να το εξηγήσουν Είναι αξιοσημείωτο ότι αυτή η επιστήμη που ξεκίνησε από τα τυχερά παιχνίδια, κατέληξε να γίνει το σπουδαίο ιερό αντικείμενο που γνωρίζουμε».

P.S. Laplace

1. Η οικογένεια του Pascal

Νεότερος κατά 27 έτη από τον σύγχρονο του Descartes, ο Blaise Pascal γεννήθηκε στην Clermont της Auevergne στη Γαλλία, στις **19.06.1623** και έζησε 12 έτη μετά τον θάνατο του Descartes. Ο πατέρας του, Ettienne Pascal, πρόεδρος στο δικαστήριο βοηθημάτων στην Clermont, ήταν ένας καλλιεργημένος άνθρωπος και τύχαινε υπόληψης για τα πνευματικά του προσόντα. Η μητέρα του, Antoinette Begone, πέθανε όταν ο γιός της ήταν 4 ετών. Ο Pascal είχε 2 όμορφες και προικισμένες αδελφές, την Gilberte η οποία έγινε κυρία Perier και την Jacqueline, που και οι 2, ιδιαίτερα η 2^η, έπαιξαν σπουδαίο ρόλο στη ζωή του.

2. Το λογοτεχνικό του έργο

Ο Blaise Pascal, είναι γνωστότερος στον μέσο αναγνώστη από τα 2 κλασικά φιλολογικού – λογοτεχνικού χαρακτήρα έργα του, τους *Στοχασμούς* (εκδόθηκαν 8 έτη μετά από τον θάνατο του) και τα *Γράμματα του Luis de Montalte* σε έναν επαρχιώτη φίλο, συνηθίζουν δε να συμπυκνώνουν τη μαθηματική του καριέρα σε μερικές παραγράφους, ενώ αναφέρονται αναλυτικά στις θρησκευτικές του επιδόσεις. Εδώ θα κρατήσουμε μια διαφορετική στάση και θα δούμε τον Pascal ως έναν εξαιρετικά προικισμένο μαθηματικό ο οποίος επέτρεψε στις μαζοχιστικές του ροπές προς τον αυτοβασανισμό και προς τις ανώφελες θεωρητικολογίες για τις αιρετικές διαφωνίες των ημερών του, να τον υποβιβάσουν στο επίπεδο ενός θρησκευόμενου, με τη σημερινή ορολογία.

3. Το μαθηματικό του έργο

Από μαθηματική άποψη, ο Pascal αποτελεί ίσως την πιο μεγάλη «ανεκπλήρωτη δυνατότητα» της ιστορίας. Είχε την ατυχία να προηγηθεί κατά μερικά μόνο έτη του Newton και να είναι σύγχρονος των Descartes και Fermat, που και οι 2 υπήρξαν σταθερότεροι χαρακτήρες από αυτόν. Η πιο νεωτεριστική του εργασία, η δημιουργία της θεωρίας των πιθανοτήτων ανήκει και στον Fermat, ο οποίος δεν θα είχε δυσκολία να την κάνει μόνος του. Στη **γεωμετρία**, στην οποία είναι διάσημος ως παιδί – θαύμα, στην πιο δημιουργική ιδέα του τον πρόλαβε ένας άνδρας με πολύ μικρότερη φήμη, ο Desargues. Οι αντιλήψεις του για την **πειραματική επιστήμη**, δείχνουν ότι ο Pascal είχε πολύ καθαρότερο όραμα από τον Descartes, βάσει της σύγχρονης αντίληψης για την επιστημονική μέθοδο. Δεν διάθετε όμως τη στοχοπροσήλωση του Descartes και αν και έκανε κάποια 1^{ης} τάξης εργασία, άφηνε τον εαυτό του να παρασυρθεί από το νοσηρό πάθος του για διάφορα λεπτά θρησκευτικά ζητήματα, ξεστρατίζοντας έτσι από ότι θα μπορούσε να πετύχει. Είναι ανώφελο να πιθανολογούμε τι θα μπορούσε να είχε κάνει. Η ζωή του είναι ένα ζωντανό σχόλιο πάνω σε 2 από τις ιστορίες ή παρομοιώσεις της Καινής Διαθήκης, η οποία αποτελούσε την σταθερή του συντροφιά και παρηγοριά, την παραβολή των ταλάντων και την αναφορά στο νέο κρασί που καταστρέφει του παλαιού ασκού. Αν ποτέ ένας εξαιρετικά προικισμένος άνθρωπος έθαψε το ταλέντο του, αυτός ήταν ο Pascal και αν ποτέ ένα μεσαιωνικής νοοτροπίας μυαλό ράγισε και έσπασε σε πολλά

κομμάτια προσπαθώντας να κρατήσει το νέο κρασί της επιστήμης του 17^{ου} αιώνα, αυτό ήταν του Pascal. Τα μεγάλα του таланτα, δόθηκαν σε λάθος ιστορικό πρόσωπο.

4. Τα μαθητικά του χρόνια

Επτά ετών ήταν ο Pascal όταν άφηνε την Clermont μαζί με τον πατέρα του και τις αδερφές του με κατεύθυνση το Παρίσι. Τότε περίπου άρχισε ο πατέρας τα μαθήματα στον γιό του. Ο Pascal ως παιδί, υπήρξε πολύ ανεπτυγμένος πνευματικά. Αυτός και οι αδερφές του, είχαν προικιστεί εξαιρετικά από τη φύση. Όμως, ο Blaise κληρονόμησε (ή απέκτησε καθοδόν) μια εξαιρετικά αδύναμη κράση και κάτι ανάλογο πρέπει να συνέβαινε με την πιο προικισμένη από τις αδερφές του, την Jacqueline, καθώς και αυτή έπεσε θύμα της νοσηρής θρησκευτικότητας. Στην αρχή, όλα πήγαιναν αρκετά καλά. Ο πατέρας Pascal, κατάπληκτος με την ευκολία με την οποία ο γιός του απορροφούσε ότι υπήρχε στην κλασική παιδεία της εποχής του, προσπάθησε να κρατήσει το παιδί σε έναν φυσιολογικό ρυθμό μάθησης για να μην κάνει κακό στην υγεία του. Τα μαθηματικά του ήταν απαγορευμένα, εξαιτίας της άποψης ότι η νεαρή μεγαλοφυΐα θα κουραζόταν υπέρμετρα από την προσπάθεια. Ο πατέρας του ήταν άριστος εκπαιδευτής, αλλά κακός ψυχολόγος. Η απαγόρευση των μαθηματικών εξήγησε την περιέργεια του παιδιού. Μία ημέρα, όταν ήταν στα 12 του, ο Pascal απαίτησε να μάθει τι ήταν η γεωμετρία. Ο πατέρας του, την περιέγραψε γλαφυρά. Αυτό, έκανε τον Pascal να βρει τον πραγματικό του προορισμό. Αντίθετα με την ίδια του την γνώμη, εκφρασμένη αργότερα, είχε κληθεί από τον Θεό όχι για να βασανίσει τους Ιησουίτες αλλά για να γίνει μεγάλος μαθηματικός. Αυτό που συνέβη όταν ο Pascal άρχισε να μελετά τη γεωμετρία, συνιστά έναν θρύλο πάνω στην πρώιμη μαθηματική ικανότητα. Ας επισημάνουμε ότι αυτές οι ικανότητες δεν ξεφουσκώνουν πάντα, όπως λέγεται από ορισμένους. Η πρώιμη μαθηματική ιδιοφυΐα, συχνά υπήρξε η 1^η σπίθα μίας δοξασμένης ωριμότητας, σε πείσμα της επίμονης προκατάληψης για το αντίθετο. Στην περίπτωση του Pascal, τα μεγάλα του χαρίσματα στα μαθηματικά δεν εξαφανίστηκαν καθώς μεγάλωνε, αλλά καταπνίγονταν από άλλα ενδιαφέροντα. Η ικανότητα του να παράγει 1^{ης} τάξης μαθηματικά διατηρήθηκε, όπως θα φανεί από το επεισόδιο της κυκλοειδούς, σε όλη την τόσο σύντομη ζωή του και αν κάτι πρέπει να κατακριθεί ως αιτία για τον πρόωρο μαθηματικό του θάνατο, είναι πιθανώς το στομάχι του. Το 1^ο εντυπωσιακό του κατόρθωμα ήταν η απόδειξη, χωρίς καμία βοήθεια, ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 2 ορθές γωνίες. Αυτό, τον ενεθάρρυνε να συνεχίσει με απίστευτα εντατικό ρυθμό.

Αντιλαμβανόμενος ότι είχε μπροστά του έναν μαθηματικό, ο πατέρας του έκλαψε από χαρά και έδωσε στον γιό του ένα αντίγραφο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, που ο Pascal γρήγορα καταβρόχθισε, όχι ως στόχο αλλά ως παιγνίδι. Παραιτήθηκε από τα παιγνίδια του, για να ασχοληθεί με τη γεωμετρία. Σε σχέση με την ταχύτατη απορρόφηση από τον Pascal των στοιχείων, η αδερφή του Gilberte επέτρεψε στον εαυτό της ένα χοντρό ψέμα. Είναι αλήθεια ότι ο Pascal βρήκε μόνος του και απέδειξε διάφορες ευκλείδειες προτάσεις, πριν δει ακόμη το βιβλίο. Η Gilberte, δήλωνε ότι ο αδερφός της είχε ξαναανακαλύψει τις πρώτες 32 προτάσεις του Ευκλείδη και μάλιστα με την ίδια σειρά. Η 32^η πρόταση είναι πραγματικά η περίφημη πρόταση για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, που ο Pascal την βρήκε ανεξάρτητα.

Βέβαια, μπορεί να υπάρχει μόνο ένας τρόπος για να γίνει σωστά ένα πράγμα, μάλλον όμως υπάρχουν άπειροι τρόποι για να το κάνεις λάθος. Ξέρουμε σήμερα ότι οι υποτιθέμενα αυστηρές αποδείξεις του Ευκλείδη, ακόμη και στις τέσσερις πρώτες προτάσεις του, δεν συνιστούν κατά κανέναν τρόπο αποδείξεις. Το ότι ο Pascal επανέλαβε με απόλυτη πιστότητα, όλες τις παραδρομές του Ευκλείδη είναι κάτι που

εύκολα λέγεται αλλά δύσκολα γίνεται πιστευτό. Οποσδήποτε, μπορούμε να συγχωρέσουμε την Gilberte για τις καυχησιές της. Ο αδερφός της τις άξιζε. Στα 14 του είχε γίνει δεκτός στις εβδομαδιαίες επιστημονικές συζητήσεις που διηύθυνε ο Mersenne, από τις οποίες προήλθε η Γαλλική Ακαδημία Επιστημών.

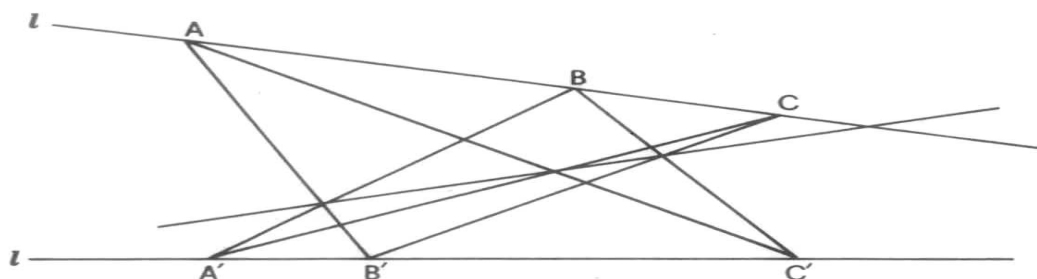
5. Pascal και Καρδινάλιος Ρισελιέ

Ενώ ο γιός Pascal εξελισσόταν γρήγορα στη γεωμετρία, ο πατέρας Pascal έμπλεκε σε ιστορίες με τις αρχές, εξαιτίας της εντιμότητας και της ορθής στάσης του. Συγκεκριμένα, διαφώνησε με τον Καρδινάλιο Ρισελιέ σχετικά με κάποιο μικρό ζήτημα επιβολής φόρων. Ο Καρδινάλιος εξοργίστηκε, οπότε η οικογένεια Pascal κρυβόταν μέχρι να περάσει η θύελλα. Λέγεται ότι η όμορφη και ταλαντούχα Jacqueline έσωσε την οικογένεια και πέτυχε την υποστήριξη του Καρδινάλιου με το εξαιρετικό της παίξιμο, incognito, σε ένα έργο που παρουσιάστηκε για την διασκέδαση του Ρισελιέ. Όταν ο τελευταίος ζήτησε να μάθει το όνομα της νεαρής γοητευτικής καλλιτέχνιδας που είχε εξάψει την κληρική του φαντασία, του είπαν ότι πρόκειται για την κόρη του ασήμαντου αντιπάλου του, ο Ρισελιέ με όμορφο τρόπο συγχωρέσε όλη την οικογένεια και τοποθέτησε τον πατέρα σε πολιτικό πόστο στην Rouen. Με βάση τα όσα είναι γνωστά για τον Ρισελιέ, αυτό το ευχάριστο παραμύθι φαντάζει πολύ αφελές. Όπως και να έχει, οι Pascal βρήκαν για μια φορά ακόμη δουλειά και ασφάλεια στην Rouen. Εκεί ο νεαρός Pascal συνάντησε τον δραματουργό Κορνήλιο, που εντυπωσιάστηκε δεόντως από τη μεγαλοφυΐα του παιδιού.

Εκείνη την εποχή, ο Pascal ήταν ολοκληρωτικά δοσμένος στα μαθηματικά και είναι πιθανόν ο Κορνήλιος να μην διέβλεψε την εξέλιξη του νεαρού του φίλου σε έναν από τους μεγάλους δημιουργούς της Γαλλικής πρόζας.

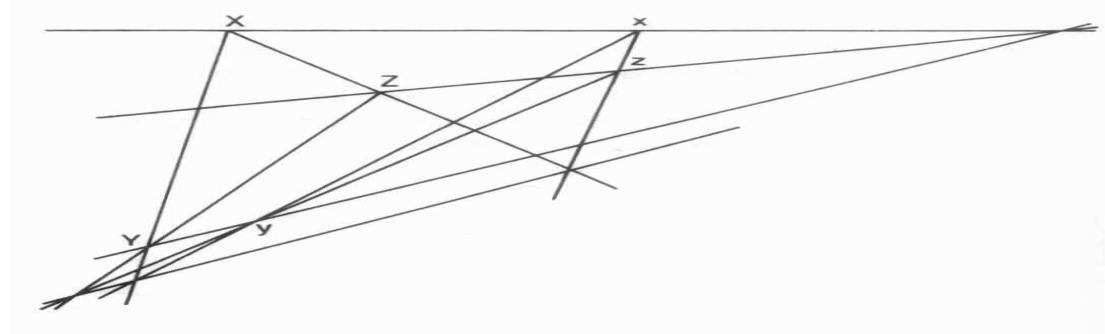
6. Pascal και Sylvester

Όλο αυτό το διάστημα, ο Pascal μελετούσε ακατάπαυστα. Πριν μπει στα δεκαέξι (γύρω στα 1639), είχε αποδείξει ένα από τα ωραιότερα θεωρήματα σε όλη τη γεωμετρία. Ευτυχώς, μπορεί να περιγραφεί με όρους κατανοητούς από οποιονδήποτε. Ο Sylvester, μαθηματικός του 19^{ου} αιώνα αποκάλεσε το μεγάλο θεώρημα του Pascal ένα είδος «**κούνιας της γάτας**». Διατυπώνουμε πρώτα μια ειδική περίπτωση του γενικού θεωρήματος, που μπορεί να κατασκευασθεί μόνο με τη χρήση κανόνα. Έστω i, i' 2 τεμνόμενες ευθείες. Παίρνουμε πάνω στην i 3 διακεκριμένα σημεία A, B, C και πάνω στην i' 3 διακεκριμένα σημεία A', B', C' . Ενώνουμε αυτά τα σημεία με 3 ζεύγη ευθειών ως εξής: το A με το B' και το A' με το B , το B με το C' και το B' με το C , το C με το A' και το C' με το A . Οι 2 ευθείες στο κάθε ζεύγος τέμνονται σε κάποιο σημείο. Παίρνουμε έτσι 3 σημεία. Η ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Pascal, που περιγράφουμε τώρα, λέει ότι αυτά τα σημεία είναι συνευθειακά.



Σχήμα 1

Πριν δώσουμε τη γενική περίπτωση του θεωρήματος, αναφέρουμε ένα άλλο ανάλογο με το προηγούμενο, που οφείλεται στον Desargues (1593–1662). Αν οι 3 ευθείες που συνδέουν αντίστοιχες κορυφές 2 τριγώνων XYZ και xyz περνούν από ένα σημείο, τότε τα 3 σημεία όπου τέμνονται τα ζεύγη των αντίστοιχων πλευρών των τριγώνων βρίσκονται πάνω σε ευθεία. Έτσι, αν οι ευθείες που συνδέουν τα X & x , Y & y , Z & z περνούν από ένα σημείο τότε οι τομές των XY & xy , YZ & yz , ZX & zx είναι συνευθειακές.



Σχήμα 2

7. Pascal και κωνικές τομές

Έστω μία κωνική τομή, π.χ. μία έλλειψη. Πάρτε πάνω σε αυτήν 6 σημεία A, B, C, D, E, F και ενώστε τα κατά αυτή τη σειρά, με ευθείες γραμμές. Έτσι έχουμε ένα εξάπλευρο σχήμα εγγεγραμμένο στην κωνική τομή, όπου τα AB & DE , BC & EF , CD & FA είναι ζεύγη αντιθέτων πλευρών. Οι 2 ευθείες κάθε ζεύγους τέμνονται σε ένα σημείο, τα 3 σημεία τομής είναι συνευθειακά. Αυτό είναι το θεώρημα του Pascal, το σχήμα που αντιστοιχεί είναι αυτό που αποκαλούμαι «**μυστικό εξάγραμμα**». Κατά πάσα πιθανότητα, ο Pascal απέδειξε πρώτα την ισχύ του για την περίπτωση του κύκλου και εν συνεχεία, πέρασε με προβολή σε τυχαία κωνική τομή. Μόνο ένας χάρακας (κανόνας) και ένας διαβήτης απαιτούνται για να σχεδιάσει ο αναγνώστης ένα τυπικό σχήμα όταν έχουμε κύκλο και να το μελετήσει. Υπάρχουν διάφορα καταπληκτικά πράγματα γύρω από αυτό το θαυμάσιο θεώρημα και ένα από αυτά είναι σίγουρα το ότι ανακαλύφθηκε και αποδείχθηκε από ένα αγόρι 16 ετών.

Στην *Essai pour les coniques* (Μελέτη πάνω στις κωνικές) γραμμένη γύρω από το μεγάλο θεώρημα, αυτό το εξαιρετικά προικισμένο παιδί αποδεικνύει, ούτε λίγο ούτε πολύ 400 προτάσεις πάνω στις κωνικές τομές που περιλαμβάνουν το έργο του Απολλώνιου και άλλων, συνάγοντας τες όλες με συστηματικό τρόπο ως πορίσματα, με το να επιτρέπει σε ζεύγη σημείων να συμπίπτουν, έτσι ώστε μια χορδή να γίνεται εφαπτόμενη, καθώς και με άλλα τεχνάσματα. Η πλήρης *Essai* δεν δημοσιεύθηκε ποτέ και όπως φαίνεται έχει οριστικά χαθεί, όμως ο Leibniz είδε και έλεγξε ένα αντίγραφο της. Πέραν αυτών, το είδος της γεωμετρίας που κάνει εδώ ο Pascal διαφέρει θεμελιωδώς από εκείνο των Ελλήνων, δεν είναι μετρική, αλλά περιγραφική ή προβολική. Μήκη ευθειών ή μεγέθη γωνιών δεν υπεισέρχονται ούτε στη διατύπωση ούτε στην απόδειξη του θεωρήματος. Αυτό το ένα θεώρημα από μόνο του, αρκεί για να εξοβελίσει τον ανόητο ορισμό των μαθηματικών, κληρονομημένο από τον Αριστοτέλη και ωστόσο ακόμη αναπαραγόμενο ενίοτε σε λεξικά, ως της επιστήμης της «ποσότητας». Δεν υπάρχουν «ποσότητες» στη γεωμετρία του Pascal. Για να δούμε τι σημαίνει η προβολικότητα του θεωρήματος, ας φανταστούμε έναν (κυκλικό) κώνο φωτός που ξεκινά από ένα σημείο και περνά από ένα επίπεδο φύλλο γυαλιού που αλλάζει θέση. Η συνοριακή καμπύλη του

σχήματος, που προκύπτει από την τομή του κώνου με το φύλλο, είναι μια κωνική τομή. Αν το «μυστικό εξάγραμμο» του Pascal σχηματιστεί πάνω στο γυαλί, για οποιαδήποτε δοσμένη θέση και ένα άλλο γυάλινο επίπεδο κόψει τον κώνο, με τη σκιά του εξάγραμμου να πέφτει πάνω του, τότε η σκιά θα δώσει ένα άλλο «μυστικό εξάγραμμο» και τα 3 σημεία τομής των ζευγών των αντίθετων πλευρών του νέου εξάγραμμου θα βρίσκονται σε μια ευθεία σκιά της «ευθείας των 3 σημείων», στο αρχικό εξάγραμμο. Δηλαδή, το θεώρημα του Pascal είναι αναλλοίωτη της κωνικής προβολής. Οι μετρικές ιδιότητες που μελετά η στοιχειώδης γεωμετρία, δεν συνιστούν αναλλοίωτες της κωνικής προβολής. Για παράδειγμα, η σκιά μιας ορθής γωνίας δεν είναι ορθή γωνία για όλες τις θέσεις του 2^{ου} φύλλου γυαλιού. Είναι προφανές, ότι αυτό το είδος της προβολικής (ή περιγραφικής) γεωμετρίας, είναι μια από τις γεωμετρίες που με φυσικό τρόπο αρμόζουν σε ορισμένα προβλήματα προοπτικής.

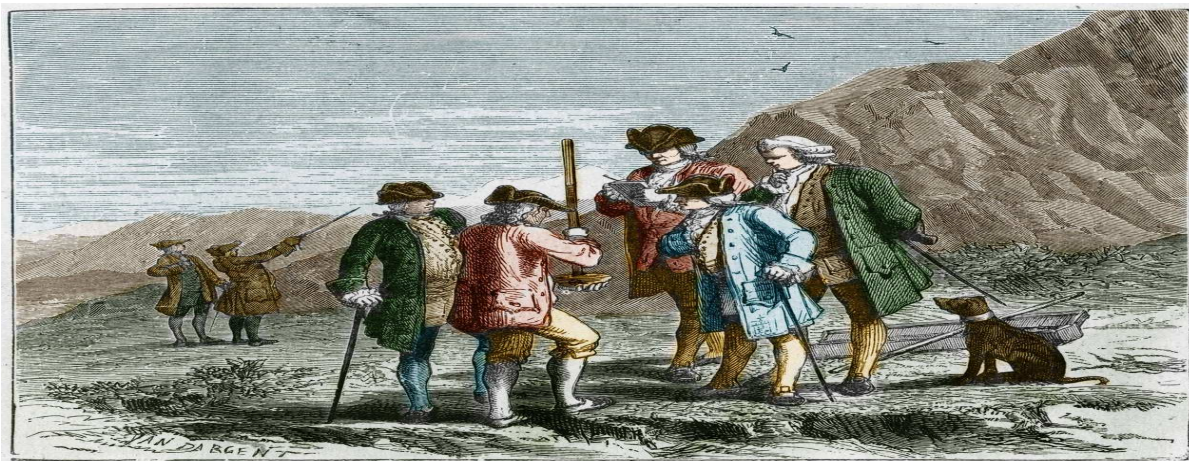
Η μέθοδος της προβολής, χρησιμοποιήθηκε από τον Pascal στην απόδειξη του θεωρήματος του, αλλά είχε εφαρμοστεί προηγουμένως από τον Desargues στη συναγωγή του αποτελέσματος που αναφέρθηκε πιο πάνω σχετικά με 2 τρίγωνα «σε προοπτική». Ο Pascal, αναγνώρισε πλήρως στον Desargues τη μεγάλη επινόηση.

8. Η παραγμένη υγεία του

Πλήρωνε ωστόσο, βαρύ τίμημα για την ιδιοφυία του. Από τα 17 του ως το τέλος της ζωής του, στα 39 του έτη, λίγες ήταν οι ημέρες που δεν υπέφερε. Οξεία δυσπεψία, τον βασάνιζε στη διάρκεια της ημέρας και χρόνια αϋπνία, έκανε τις νύχτες του εφιαλτικές. Και όμως, εργαζόταν ακατάπαυστα. Στα 18 του, επινόησε και κατασκεύασε την 1^η υπολογιστική μηχανή στην ιστορία, την **Πασκαλίνα**, τον πρόδρομο όλων των αριθμομηχανών που έχουν αντικαταστήσει στρατιές υπαλλήλων στις ημέρες μας. Πέντε έτη αργότερα, το 1646, υπέστη την 1^η του «μεταστροφή». Δεν είχε βαθιές προεκτάσεις, ίσως διότι ήταν μόνο 23 ετών και ακόμη απορροφημένος από τα μαθηματικά. Μέχρι τότε η οικογένεια του εκδήλωνε την θρησκευτικότητα της αξιοπρεπώς, τώρα όλοι μοιάζανε ελαφρώς αποτρελαμένοι. Είναι δύσκολο για έναν σύγχρονο άνθρωπο να βιώσει τα έντονα θρησκευτικά πάθη που άναψαν φωτιές τον 17^ο αιώνα, διαλύοντας οικογένειες και ρίχνοντας χριστιανικές χώρες και αιρέσεις σε αγώνα αλληλοεξόντωσης. Ανάμεσα στους εν δυνάμει θρησκευτικούς μεταρρυθμιστές του αιώνα ήταν ο **Cornelius Jansen** (1585–1638), ένας επιδεικτικός Ολλανδός που έγινε επίσκοπος της Υπρες. Κύριο σημείο του δόγματος του, ήταν η αναγκαιότητα της «μεταστροφής» ως μέσου για τη «χάρη», κάτι που θυμίζει τις τακτικές ορισμένων αιρέσεων που έχουν ξεπεταχθεί στις μέρες μας. Η σωτηρία, φαίνεται ότι ήταν ο λιγότερο φιλόδοξος στόχος του Jansen. Ο τελευταίος, ήταν πεπεισμένος πως ο Θεός τον είχε επιλέξει για να καταστρέψει τους Ιησουίτες σε αυτή τη ζωή και να τους στείλει στην κόλαση. Αυτή ήταν η αποστολή του. Η πίστη του, δεν ταυτιζόταν ούτε με τον καθολικισμό ούτε με τον προτεσταντισμό, αν και έκλινε μάλλον προς τον 2^ο. Αυτό που τον κινούσε όμως, ήταν ένα λυσσαλέο μίσος για όσους αμφισβητούσαν τη δογματική του μισαλλοδοξία. Η οικογένεια του Pascal, ασπάστηκε το 1646 με πάθος, αν και στην αρχή πιο ήπια, την άχαρη πίστη του γιανσενισμού. Έτσι, ο Pascal στην ηλικία των 23 ετών άρχισε να σβήνει πνευματικά. Τον ίδιο χρόνο, όλο του το πεπτικό σύστημα εμφάνισε σοβαρά προβλήματα και έπαθε προσωρινή παράλυση. Δεν ήταν ακόμη διανοητικά νεκρός.

9. Pascal και ατμοσφαιρική πίεση

Η επιστημονική του μεγαλοσύνη, αναδείχθηκε και πάλι το 1648, σε μια τελείως νέα κατεύθυνση. Συνεχίζοντας τη δουλειά του Torricelli (1608–1647) πάνω στην ατμοσφαιρική πίεση, ο Pascal την ξεπέρασε και απέδειξε ότι είχε κατανοήσει την επιστημονική μέθοδο που ο Γαλιλαίος, ο δάσκαλος του Torricelli, είχε δείξει στον κόσμο. Πειραματιζόμενος με το βαρόμετρο, ο Pascal απέδειξε πράγματα γνωστά σήμερα αναφορικά με την ατμοσφαιρική πίεση. Η Gilberte, η αδερφή του, είχε παντρευτεί κάποιον Perier. Με την υπόδειξη του Pascal, ο Perier εκτέλεσε ένα πείραμα μεταφέροντας ένα βαρόμετρο στην κορυφή του καθεδρικού ναού της Auvergne, σημειώνοντας την πτώση της υδραργυρικής στήλης, καθώς μειωνόταν η ατμοσφαιρική πίεση. Αργότερα, όταν ο Pascal πήγε στο Παρίσι με την αδερφή του Jacqueline, επανέλαβε το πείραμα μόνος του. Το 1647 ανακάλυψε την **αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων**.



Σχήμα 3 Μέτρηση ατμοσφαιρικής πίεσης από τους Pascal και Perrier

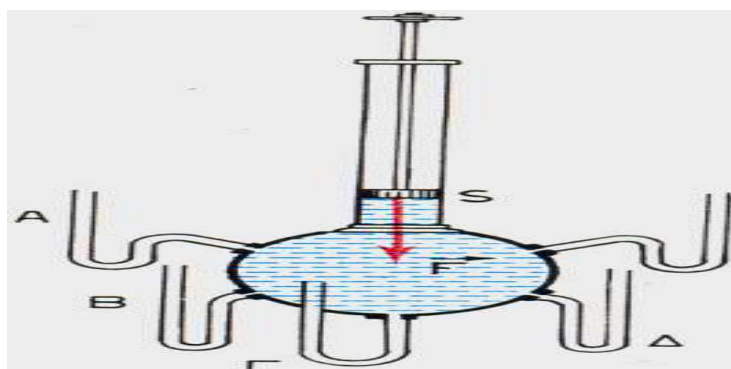
10. Η αρχή του Pascal

Είναι ένας από τους βασικούς νόμους της υδροστατικής. Η αρχή αυτή που προσδιορίστηκε από τον Pascal, προς τιμή του οποίου και φέρει το όνομά της, καθορίζει ότι *η οποιαδήποτε πίεση που τυχόν μπορεί να ασκηθεί στην επιφάνεια ενός υγρού, μεταδίδεται ομοιόμορφα εντός αυτού, προς όλες τις διευθύνσεις και σε όλο το βάθος του*. Αν σε ένα ανοικτό δοχείο πλήρες υγρού, εφαρμόσουμε σε όλη την ελεύθερη επιφάνειά του (π.χ. με ένα έμβολο) οποιαδήποτε πίεση, θα διαπιστώσουμε ότι οι δυνάμεις που ασκεί το υγρό σε οποιοδήποτε σημείο των εσωτερικών τοιχωμάτων ή του πυθμένα του δοχείου, ανεξάρτητα της βαρύτητας, θα παρουσιάζουν παντού την ίδια τιμή. Προφανές είναι ότι η πίεση αυτή, που προέρχεται από εξωτερικές δυνάμεις (π.χ. ατμοσφαιρική πίεση ή πίεση από πεπιεσμένο αέρα ή πίεση που ασκεί ένα έμβολο στην επιφάνεια ενός υγρού), είναι τελείως ανεξάρτητη των δυνάμεων της γήινης βαρύτητας. Αυτό, σε αντιδιαστολή με την υδροστατική πίεση που εξαρτάται από την βαρύτητα. Εφαρμογές της αρχής του Pascal αποτελούν η πλήρωση με αέρα ενός τροχού ή μπαλονιού, το υδραυλικό πιεστήριο, οι υδραυλικοί γερανοί, τα υδραυλικά φρένα. Η αρχή του Pascal αφορά όλα τα ρευστά. Διατυπώνεται ως εξής: *Αν σε σημείο υγρού που ισορροπεί προκληθεί εξωτερική πίεση, τότε το υγρό την μεταδίδει αμετάβλητη σε όλη τη μάζα του και στα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει, προς όλες τις διευθύνσεις*. Αν και θεωρούμε τα υγρά ασυμπίεστα, στην πράξη είναι πολύ λίγο συμπίεστα. Τούτο σημαίνει πως, κάθε μεταβολή της πίεσης που ασκείται σε τμήμα του υγρού, μεταδίδεται μέσα σε όλο το

υγρό, σαν ένα κύμα με την ταχύτητα του ήχου. Όταν η διαταραχή αποσβεστεί, αποκαθίσταται η ηρεμία και βρίσκεται ότι ισχύει η αρχή του Pascal.

10.1 Πειραματική απόδειξη της αρχής του Pascal για τα υγρά

Χρησιμοποιώ μία γυάλινη συσκευή, όπως αυτή του σχήματος 4, που περιέχει υγρό και φέρει στο πάνω μέρος της ένα έμβολο και στα πλευρικά της τοιχώματα βρίσκονται τοποθετημένα μανόμετρα σε σημεία διαφορετικού ύψους. Έστω ότι πριν ασκήσω δύναμη στο έμβολο, οι ενδείξεις των μανομέτρων Α, Β, Γ, Δ, Ε είναι αντίστοιχα, $p_A, p_B, p_\Gamma, p_\Delta, p_E$. Ασκώ στο έμβολο εμβαδού S , κατάλληλη δύναμη F_1 που προκαλεί πίεση $1at$. Παρατηρώ ότι οι ενδείξεις των μανομέτρων Α, Β, Γ, Δ, Ε είναι αντίστοιχα $p_A + 1at, p_B + 1at, p_\Gamma + 1at, p_\Delta + 1at, p_E + 1at$. Ασκώ στο έμβολο εμβαδού S , κατάλληλη δύναμη F_2 που προκαλεί πίεση $2at$. Παρατηρώ ότι οι ενδείξεις των μανομέτρων Α, Β, Γ, Δ & Ε είναι αντίστοιχα $p_A + 2at, p_B + 2at, p_\Gamma + 2at, p_\Delta + 2at, p_E + 2at$.



Σχήμα 4 Συσκευή για την πειραματική απόδειξη της αρχής του Pascal στα υγρά

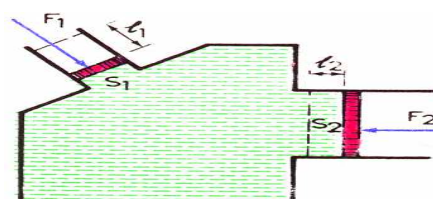
Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται για διάφορες τιμές της πίεσης και από τις ενδείξεις των μανομέτρων, διαπιστώνω ότι οποιαδήποτε εξωτερική πίεση και αν προκληθεί σε ένα οποιοδήποτε σημείο του υγρού, αυτό θα τη μεταβιβάσει αμετάβλητη σε όλα τα σημεία του.

10.2 Θεωρητική απόδειξη της αρχής του Pascal

Αν ασκήσω στο μικρό έμβολο εμβαδού S_1 του σχήματος 5 δύναμη F_1 τότε αυτό μετακινείται κατά απόσταση l_1 ενώ το μεγάλο έμβολο εμβαδού S_2 , μετακινείται κατά απόσταση l_2 και επειδή τα υγρά είναι ασυμπίεστα ισχύει ότι $S_1 \cdot l_1 = S_2 \cdot l_2$. (1)

Το έργο που δαπάνησε η δύναμη F_1 κατά τη μετακίνηση της, κατά απόσταση l_1 είναι $F_1 \cdot l_1$ και ισούται με το έργο της δύναμης F_2 που μετακίνησε το σημείο εφαρμογής της κατά απόσταση l_2 . Δηλαδή ισχύει ότι $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ (2)

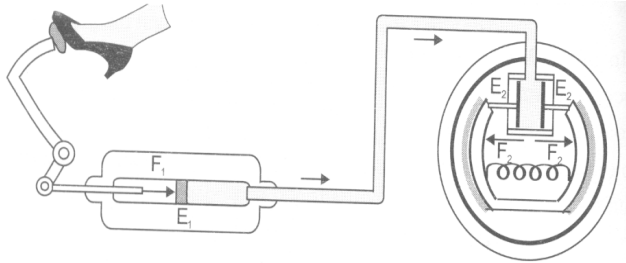
Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ ή $P_1 = P_2$. Δηλαδή, οι πιέσεις στα 2 έμβολα είναι ίσες μεταξύ τους.



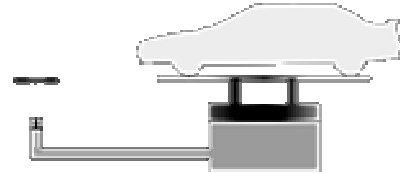
Σχήμα 5 Συσκευή για την απόδειξη της αρχής του Pascal

10.3 Εφαρμογές της αρχής του Pascal

Η αρχή του Pascal, βρίσκει άμεση εφαρμογή στα υδραυλικά φρένα των αυτοκινήτων (σχήμα 6), στους υδραυλικούς γρύλους με τους οποίους ανυψώνουμε αυτοκίνητα, στα υδραυλικά καθίσματα των κομμωτηρίων και στα υδραυλικά πιεστήρια.



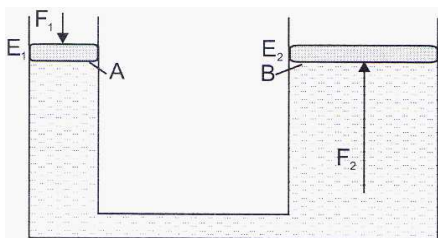
Σχήμα 6 Υδραυλικά φρένα αυτοκινήτου



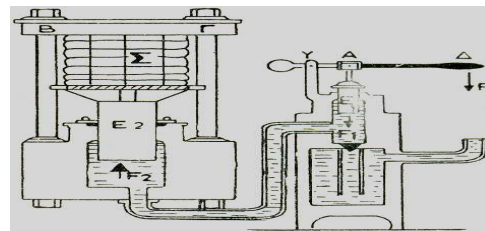
Σχήμα 7 Υδραυλικό πιεστήριο

10.4 Υδραυλικό πιεστήριο

Είναι μία μηχανή, μέσω της οποίας μπορώ να πολλαπλασιάσω τις ασκούμενες δυνάμεις. Αποτελείται από 2 συγκοινωνούντα δοχεία, εκ των οποίων το ένα έχει μεγαλύτερη διατομή. Εντός των δοχείων, κινούνται αεροστεγώς δύο έμβολα E_1 (μικρό) και E_2 (μεγάλο), εμβαδού S_1 και S_2 , αντίστοιχα (σχήμα 8). Αν ασκήσω δύναμη F_1 στο μικρό έμβολο E_1 , τότε η πίεση στο σημείο A του υγρού που προέρχεται από το έμβολο, είναι $P = \frac{F_1}{S_1}$. Σύμφωνα με την αρχή του Pascal, η πίεση στο σημείο B θα είναι ίδια με την πίεση στο σημείο A. Εξ αιτίας αυτής της πίεσης, ασκείται στο μεγάλο έμβολο E_2 δύναμη $F_2 = P \cdot S_2$, άρα $F_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2$



Σχήμα 8 Υδραυλικό πιεστήριο



Σχήμα 9 Εφαρμογή του υδραυλικού πιεστηρίου στη συσκευασία του βαμβακιού

Από τη σχέση αυτή, προκύπτει ότι αν το εμβαδό S_2 είναι πολλαπλάσιο του εμβαδού S_1 , τότε το μέτρο της δύναμης F_2 είναι πολλαπλάσιο του μέτρου της δύναμης F_1 , δηλαδή με το υδραυλικό πιεστήριο επιτυγχάνω να πολλαπλασιάσω τη δύναμη, δηλαδή πρόκειται για ένα είδος «υδραυλικού μοχλού». Τα υδραυλικά πιεστήρια, χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε διάφορες εφαρμογές, όπως:

Α. Στη συμπίεση του βαμβακιού (σχήμα 9) και του χαρτιού, στα ελαιотριβεία, στη σφράγιση των νομισμάτων και στην εκτύπωση μετάλλων με διάφορες παραστάσεις.

Β. Στη σφυρηλάτηση του χάλυβα, αντί των μεγάλων σφυριών του ατμού που χρησιμοποιούνταν παλαιότερα.

Γ. Στη δοκιμή της αντοχής των ατμολεβήτων, δηλαδή των συσκευών που τροφοδοτούνται με νερό και παράγουν ατμό. Αν υπάρχουν ενδείξεις ότι τα ελάσματα

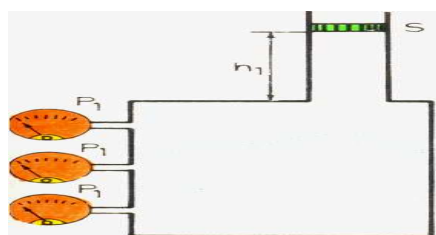
του ατμολέβητα έχουν χαλαρώσει, τότε επιβάλλεται να γίνει μία δοκιμή, προκειμένου να εξακριβωθεί η αντοχή του, δια της υδραυλικής πίεσης και όχι με πίεση ατμού, ώστε να μην υπάρξει κίνδυνος έκρηξης του ατμολέβητα.

11. Αρχή του Pascal για τα αέρια

Αν σε αέριο που ηρεμεί δεν επιδρά το βαρυτικό πεδίο, η πίεση σε όλη του την έκταση είναι σταθερή. Κάθε εξωτερική πίεση που προκαλείται σε αέριο που ηρεμεί, μεταβιβάζεται αμετάβλητη σε όλα τα σημεία του. Η πίεση, προέρχεται από τη θερμική κίνηση εξαιτίας της οποίας τα μόρια του αερίου τείνουν να καταλάβουν όλο τον χώρο που τους προσφέρεται, κατανεμημένα ομοιόμορφα σε αυτόν.

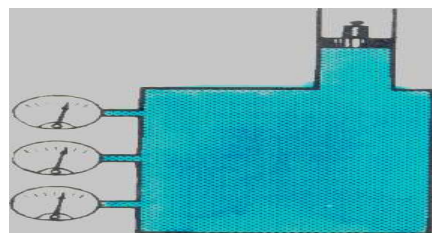
11.1 Πειραματική απόδειξη της αρχής του Pascal για τα αέρια

Χρησιμοποιώ μία γυάλινη συσκευή όπως αυτή του σχήματος 10 που περιέχει αέρα, φέρει στο πάνω μέρος της έμβολο και στο αριστερό τμήμα της έχει μεταλλικά μανόμετρα, τοποθετημένα σε σημεία διαφορετικού ύψους. Αν και υπάρχει βαρύτητα, οι ενδείξεις των μανομέτρων είναι πρακτικά ίδιες, διότι οι υψομετρικές διαφορές είναι μικρές. Όταν ασκώ μία σταθερή δύναμη στο έμβολο (π.χ. τοποθετώντας πάνω του ένα βάρος), παρατηρώ ότι η αύξηση των ενδείξεων των μανομέτρων είναι η ίδια (σχήμα 11). Αν εξακολουθήσω μετακινώντας το έμβολο, να ελαττώνω τον όγκο του αέρα, η πυκνότητα του αυξάνεται. Συνεπώς, αυξάνεται και η πίεση, αλλά οι ενδείξεις των μανομέτρων είναι πάλι ίσες μεταξύ τους (σχήμα 12).



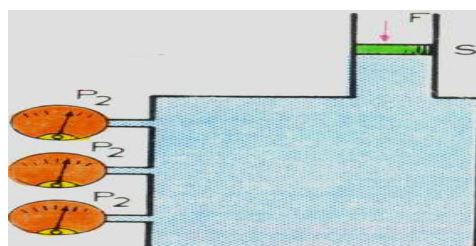
Σχήμα 10

Συσκευή για την πειραματική απόδειξη της αρχής του Pascal στα αέρια



Σχήμα 11

Η σχέση που συνδέει τις πιέσεις p_1, p_2 είναι η ακόλουθη: $p_2 = p_1 + p = p_1 + \frac{F}{S}$

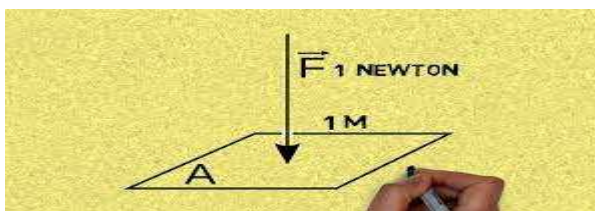


Σχήμα 12

11.2 Μονάδα μέτρησης πίεσης Pa

Το pascal (συντομογραφία Pa), είναι μονάδα μέτρησης της πίεσης στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI) που πήρε το όνομα της προς τιμήν του Γάλλου φιλοσόφου, φυσικού και μαθηματικού Pascal. Ορίζεται ως ίση με την πίεση που προκαλεί δύναμη μέτρου 1 Newton (1 N), όταν ασκείται κάθετα σε επιφάνεια εμβαδού 1 m².

Δηλαδή, $1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}$ Η ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας και σε θερμοκρασία 25°C, ισούται με 101.325 Pa.



Σχήμα 13 Ορισμός Pa

11.3 Άλλες μονάδες μέτρησης της πίεσης

1 bar	100.000 Pa
1 mbar	100 Pa
1 atm	101.325 Pa
1 mmHg (or Torr)	133,322 Pa
1 inHg	3.386,833 Pa
1 psi	6.894,76 Pa
1 cmH₂O	98,0638 Pa



Πίνακας 1 Σχέσεις μονάδων μέτρησης πίεσης

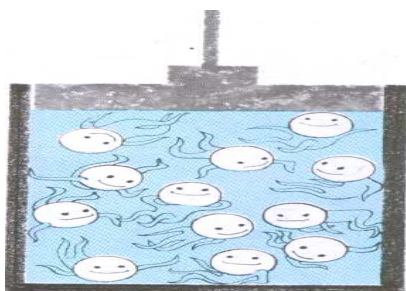
Σχήμα 14 Πιεσόμετρο

Επειδή το Pa είναι πάρα πολύ μικρή μονάδα μέτρησης της πίεσης, χρησιμοποιούμε πολλαπλάσια του όπως **1 hPa = 100 Pa** (εκατοπασκάλ),
1 kPa = 1.000 Pa (κιλοπασκάλ) **1 MPa = 1.000.000 Pa** (μεγαπασκάλ)

Περισσότερο εύχρηστη μονάδα μέτρησης της πίεσης είναι το $1 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$, για το οποίο ισχύει ότι $1 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 1 \frac{\text{N}}{10^{-4} \text{m}^2} = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Στο σύστημα CGS, η δύναμη μετριέται σε dyn και το εμβαδό σε cm^2 . Έτσι, προκύπτει ως μονάδα μέτρησης η $1 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$. Στο τεχνικό σύστημα, η δύναμη μετριέται σε Kp και το εμβαδό σε m^2 . Έτσι, προκύπτει ως μονάδα μέτρησης το $1 \frac{\text{Kp}}{\text{m}^2}$. Ισχύει ότι: $1 \frac{\text{Kp}}{\text{m}^2} = 10^{-4} \frac{\text{Kp}}{\text{cm}^2} = 10^{-4} \frac{1.000 \text{p}}{\text{cm}^2} = 0,1 \frac{\text{p}}{\text{cm}^2}$

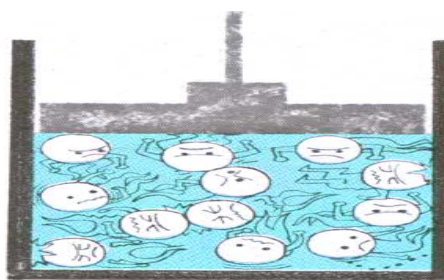
11.4 Παρατήρηση

Ο Robert Boyle, ανακάλυψε πως αν ο όγκος ενός αερίου γίνει ο μισός, τότε η πίεση του διπλασιάζεται. Τα μόρια, αν και κινούνται με την ίδια ταχύτητα, έχουν τώρα μόνο τον μισό χώρο, συνεπώς κτυπούν πάνω στα τοιχώματα 2 φορές περισσότερο από ότι προηγουμένως (σχήματα 15, 16). Ένας άλλος τρόπος για να αυξηθεί η πίεση που ασκούν τα μόρια ενός αερίου, είναι αν αυξηθεί η θερμοκρασία του, ενώ ο όγκος του παραμένει ο ίδιος. Αυτό οφείλεται στο ότι με την άνοδο της θερμοκρασίας, αυξάνεται η κινητική ενέργεια που αποκτούν τα μόρια του αερίου. Συνεπώς, κινούνται ταχύτερα και χτυπούν συχνότερα και δυνατότερα πάνω στα τοιχώματα του δοχείου, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η πίεση (σχήματα 17, 18).



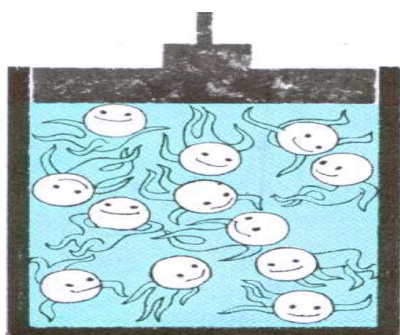
Σχήμα 15

Αρχικά τα μόρια του αερίου ηρεμούν και ασκούν μικρή πίεση στα τοιχώματα



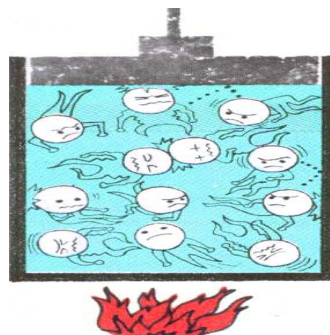
Σχήμα 16

Τα μόρια του αερίου στριμώχνονται και αυξάνεται η πίεση που ασκούν στα τοιχώματα



Σχήμα 17

Αρχικά τα μόρια του αερίου ηρεμούν



Σχήμα 18

Όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, τόσο αυξάνεται και η πίεση που ασκούν τα μόρια του αερίου

12. Pascal και Descartes

Μετά την επιστροφή του Pascal και της Jacqueline στο Παρίσι, συναντήθηκαν με τον πατέρα τους, που είχε ανακτήσει πλήρως τη θέση του ως κρατικού σύμβουλου. Αμέσως, η οικογένεια δέχτηκε μία κάπως τυπική επίσκεψη του Descartes. Με τον Pascal συζήτησαν διάφορα θέματα, περιλαμβανομένου του βαρομέτρου. Δεν υπήρχε μεγάλη συμπάθεια μεταξύ τους. Αφενός ο Descartes είχε αρνηθεί ανοιχτά να πιστέψει ότι το διάσημο *Essai pour les coniques* είχε γραφεί από ένα αγόρι 16 ετών και αφετέρου υποψιαζόταν ότι ο Pascal είχε κλέψει την ιδέα των βαρομετρικών πειραμάτων από τον ίδιο, καθώς είχε συζητήσει τις δυνατότητες τους σε επιστολές του προς τον Mersenne. Ο Pascal, όπως έχει αναφερθεί, παρευρισκόταν στις εβδομαδιαίες συναντήσεις του Mersenne από τα 14 του. Ένα 3^ο σημείο που εξηγεί την αμοιβαία αντιπάθεια ήταν οι θρησκευτικές τους αντιθέσεις. Ο Descartes, έχοντας δοκιμάσει σε όλη του τη ζωή την ευγένεια των Ιησουιτών τους αγαπούσε, ο Pascal, ακολουθώντας τον άτεγκτο Jansen, μισούσε τους Ιησουίτες περισσότερο από όσο ο διάβολος το λιβάνι. Και τέλος, σύμφωνα με την ειλικρινή Jacqueline, ο ένας ζήλευε έντονα τον άλλον. Η επίσκεψη, είχε παγερή επιτυχία. Ο καλός Descartes πάντως, έδωσε στον νεαρό φίλο του μερικές έξοχες συμβουλές με πραγματικό χριστιανικό πνεύμα. Συμβούλεψε τον Pascal να ακολουθήσει το παράδειγμα του και να μένει στο κρεβάτι καθημερινά ως τις 11. Για το στομάχι του φτωχού Pascal που ήταν σε άθλια κατάσταση, πρότεινε μια δίαιτα που αποτελούνταν μόνο από βοδινό ζουμί. Όμως ο Pascal αγνόησε την ευγενική συμβουλή, ίσως διότι προερχόταν από τον Descartes. Ανάμεσα στα άλλα πράγματα που ο Pascal δεν διέθετε στο ελάχιστο, ήταν και η αίσθηση του χιούμορ. Η Jacqueline, άρχισε τώρα να παρασέρνει τον ιδιοφυή αδερφό της προς τα κάτω ή προς τα πάνω, εξαρτάται από τον τρόπο με το οποίο βλέπει κανείς τα πράγματα. Στα 1648, στην ευεπηρεάστη ηλικία των 23 ετών, η

Jacqueline εξέφρασε την πρόθεση της να πάει στο Port Royal κοντά στο Παρίσι, το κύριο κέντρο των Γιανсениστών στη Γαλλία, για να γίνει καλόγρια. Ο πατέρας της αντέδρασε έντονα και η πιστή Jacqueline επικέντρωσε τις προσπάθειες της στον αμαρτωλό αδερφό της. Υποψιαζόταν ότι δεν είχε ακόμη μεταστραφεί όσο θα έπρεπε και μάλλον είχε δίκιο. Η οικογένεια επέστρεψε στην Clermont, όπου και έμεινε για 2 χρόνια. Στη διάρκεια αυτών των 2 ετών που πέρασαν γρήγορα, ο Pascal φαίνεται ότι είχε γίνει σχεδόν φυσιολογικός, σε πείσμα των προειδοποιήσεων της Jacqueline που του ζητούσε να παραδοθεί τελείως στον Κύριο. Ακόμη και το απείθαρχο στομάχι υποτάχθηκε στην ορθολογική αγωγή, για μερικούς μήνες. Λέγεται από ορισμένους και αμφισβητείται έντονα από άλλους, ότι ο Pascal στη διάρκεια αυτού του υγιούς διαλείμματος και για μερικά χρόνια ακόμη, ανακάλυψε τον ρόλο του κρασιού και των γυναικών. Δεν ήταν άγγελος. Όμως αυτές οι διαδόσεις για την τόσο ανθρώπινη ευτέλεια, μπορεί να είναι απλώς διαδόσεις. Διότι αμέσως μετά τον θάνατο του, ο Pascal πέρασε στην χριστιανική αγιοκρατία και κάθε προσπάθεια να χυθεί φως στην ανθρώπινη πλευρά της ζωής του εξουδετερώθηκε σιωπηλά από αντίπαλες παρατάξεις, από τις οποίες η μία αγωνιζόταν να αποδείξει ότι υπήρξε ένας φανατικός πιστός, η άλλη ένας άθεος σκεπτικιστής, αλλά και οι δύο διακήρυτταν ότι ήταν ένας άγιος που δεν ανήκε σε αυτόν τον κόσμο.

Κατά τη διάρκεια αυτών των ζωντανών χρόνων, η αρρωστημένα άγια Jacqueline συνέχισε τις προσπάθειες προσηλυτισμού του αδύναμου αδερφού της. Από μία παράξενη ειρωνεία της τύχης, ο Pascal επρόκειτο τώρα να προσηλυτιστεί, για τα καλά αυτή τη φορά και ήταν της μοίρας του να αναγκάσει την υπερβολικά ευσεβή αδερφή του να πάει στο μοναστήρι, πράγμα που τώρα ίσως της φαινόταν λιγότερο επιθυμητό. Αυτό βέβαια, δεν αποτελεί την ορθόδοξη ερμηνεία του τι συνέβη, άλλα για κάποιον που δεν είναι τυφλός οπαδός της μίας ή της άλλης παράταξης, αποτελεί λογικότερη εκδοχή της νοσηρής σχέσης ανάμεσα στον Pascal και στην ανύπαντρη του αδερφή από αυτήν που ενέκρινε η παράδοση.

Κάθε σύγχρονος αναγνώστης των *Στοχασμών*, πρέπει να αισθανθεί ότι κάτι είτε διέφυγε πλήρως της προσοχής των επιφυλακτικότερων προγόνων μας ή αγνοήθηκε από αυτούς σε μια επίδειξη σοφότερης φιλανθρωπίας. Τα παραληρήματα του Pascal στους *Στοχασμούς* σχετικά με την «λαγνεία», τον προδίδουν τελείως, όπως και τα πολλαπλά βεβαιωμένα αφύσικα ξεσπάσματα του στη θέα της παντρεμένης του αδερφής Gilberte που χαίδευε τα παιδιά της. Σύγχρονοι ψυχολόγοι, όπως και παλιότεροι που διέθεταν κοινή λογική, συχνά τονίζουν τη στενή σχέση ανάμεσα στην σεξουαλική καταπίεση και στον αρρωστημένο θρησκευτικό φανατισμό.

Ο Pascal υπέφερε και από τα δύο και οι αθάνατοι *Στοχασμοί* του αποτελούν μια λαμπρή, αν και ενίοτε ακατάληπτη, μαρτυρία για τις εκκεντρικότητες του. Αν μπορούσε να είναι αρκετά ανθρώπινος, ώστε να αφήσει ελεύθερο τον εαυτό του όταν όλη του η φύση τον καλούσε, θα είχε ίσως εκδηλώσει όλα όσα ήταν μέσα του, αντί να καταπνίξει το καλύτερο μισό από αυτά, κάτω από μία μάζα ακατανόητου μυστικισμού και κοινότοπων παρατηρήσεων για την αθλιότητα και την αξιοπρέπεια του ανθρώπου. Όταν ο Fermat έστειλε στους μαθηματικούς του Παρισιού το *Methodius ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum* για να το εκτιμήσουν, ο Descartes βρήκε την ευκαιρία και τον κατηγόρησε για αμφίβολη συλλογιστική. Οι Roberval και Pascal, βγήκαν να υπερασπίσουν τον Fermat, ενώ αρχικά ο Μυντόρζ και ο Ντεζάργκ στάθηκαν στο πλευρό του Descartes.

Κατά την διάκριση του Αριστοτέλη, οι μαθηματικοί δεν χρησιμοποιούσαν τα απείρως μεγάλα ή τα απείρως μικρά μεγέθη, αλλά μεγέθη οσοδήποτε μεγάλα ή οσοδήποτε μικρά. Αυτή η τάση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών,

επηρέασε αποφασιστικά τα μεταγενέστερα μαθηματικά για πολλούς αιώνες και ιδιαίτερα την περίοδο μέχρι τον 16^ο–17^ο αιώνα, οπότε από πολλές πλευρές δημιουργήθηκε μία αντίδραση στη δεσμευτική για την ανάπτυξη των μαθηματικών (όπως πίστευαν) αυστηρότητα που είχαν επιβάλει με το κύρος τους οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί. Κυριότεροι εκφραστές αυτής της αντίδρασης ήταν οι B. Pascal, P. Fermat, J. Kepler, Γαλιλαίος και οι μαθητές του μεταξύ των οποίων και ο B. Cavalieri.

13. Συνεχείς μετασχηματισμοί

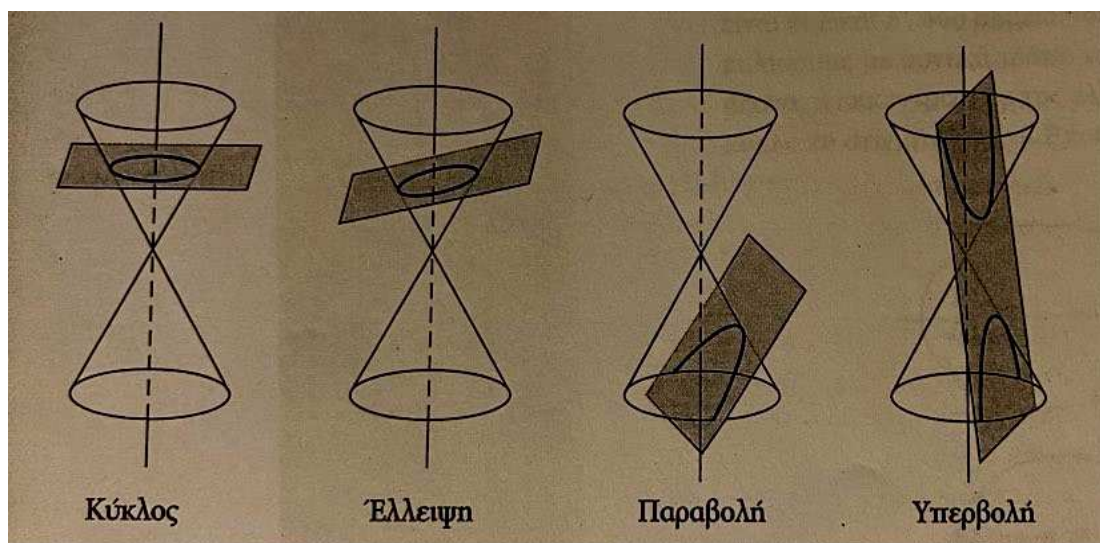
Το απείρως διαιρετό, είναι μία έννοια που δεν μπορεί να διαχωριστεί από αυτήν της συνέχειας. Πρόκειται για ένα σύνθετο και σχετικά σημαντικό ζήτημα. Εδώ, προχωράμε μέσα στο συνεχές με συνεχή τρόπο, κυριολεκτικά. Ο πιο ενστικτώδης τρόπος για τον ορισμό της συνέχειας είναι ο εξής: μία γραμμή είναι συνεχής, αν μπορούμε να τη σχεδιάσουμε χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι. Γενικότερα, ο όρος αυτός εφαρμόζεται στην έννοια του μετασχηματισμού. Έστω, για παράδειγμα, ένα παραλληλόγραμμο όπως αυτό της εικόνας:



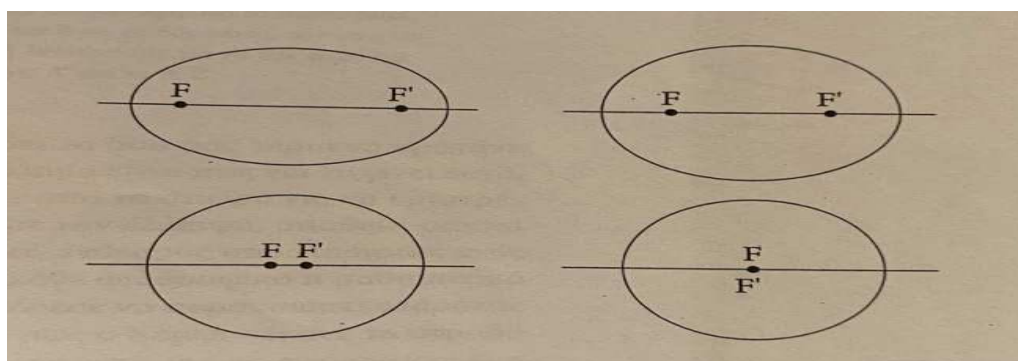
Θέλουμε να το μεταμορφώσουμε σε τετράγωνο, μέσω συνεχούς μετασχηματισμού.



Πρέπει να φανταστούμε πως οι πλευρές έχουν φτιαχτεί από ύλη που μπορεί να παραμορφωθεί, σα να ήταν από καουτσούκ, ώστε να περνάμε από το ένα σχήμα στο άλλο, χωρίς άλμα ή ρήξη, δηλαδή με τρόπο συνεχή. Το 1604, ο Kepler δημοσίευσε ένα μικρό φυλλάδιο με τίτλο *Astronomiae pars optica* (Το οπτικό μέρος της αστρονομίας), ως συμπλήρωμα σε μία πραγματεία αστρονομίας αφιερωμένη στην απαραίτητη θεωρητική ανάπτυξη, για την κατασκευή οπτικών οργάνων. Ο Kepler, μελετούσε τις κωνικές τομές και τους πιθανούς συνεχείς μετασχηματισμούς μίας κωνικής τομής σε μία άλλη. Οι κωνικές τομές, είναι επίπεδα γεωμετρικά σχήματα που λαμβάνονται ως τομές ενός κώνου, όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα. Ο Απολλώνιος, στο έργο του με τίτλο *Οι κωνικές τομές*, τις ορίζει ως γεωμετρικούς τόπους ενός επιπέδου. Αυτή η μέθοδος είναι ακριβής, προϋποθέτει όμως ορισμένους γεωμετρικούς λεπτούς χειρισμούς. Η μέθοδος του Kepler αντιθέτως, είναι πιο ενστικτώδης και καθιστά δυνατή μία πιο σαφή γεωμετρική αναπαράσταση. Ο ορισμός παρουσιάζεται ως εξής: αν κόψουμε έναν κώνο σε 2 στρώματα (2 απείρως μακριούς κώνους σε αντίθετη φορά, με ίδιο άξονα και κορυφές που συμπίπτουν) με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα, παίρνουμε μία περιφέρεια. Αν δώσουμε μία ελαφριά κλίση στο επίπεδο, η περιφέρεια θα μετασχηματιστεί σε έλλειψη, η οποία θα μεγαλώνει καθώς θα αυξάνει η κλίση του επιπέδου. Συνεχίζοντας να δίνουμε κλίση στο επίπεδο, θα επέλθει μία στιγμή όπου θα γίνει παράλληλο στη γεννήτρια του κώνου και η τομή των 2 θα είναι μία **παραβολή**. Όταν τέλος, το επίπεδο γίνει παράλληλο στον άξονα του κώνου, η τομή θα δώσει τους 2 κλάδους μίας **υπερβολής**.



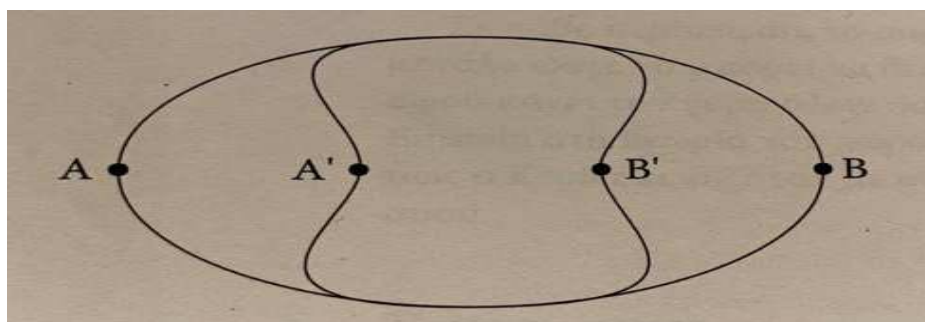
Είναι το σύνολο αυτών των καμπυλών, των ελλείψεων, των παραβολών και των υπερβολών που ονομάζουμε κωνικές τομές, όπου ο κύκλος θεωρείται συνήθως μία ιδιαίτερη περίπτωση έλλειψης. Μπορούμε επίσης να κόψουμε τον κώνο με διαφορετικό τρόπο και τότε λαμβάνουμε τις κωνικές τομές που ονομάζονται εκφυλισμένες (2 ευθείες). Μπορούμε να φανταστούμε πως η κίνηση αυτού του επιπέδου που τέμνει τον κώνο γίνεται με τρόπο συνεχή, χωρίς να υπάρχει άλμα. Αν μπορούσαμε να οπτικοποιήσουμε τον μετασχηματισμό της επίπεδης τομής, θα βλέπαμε πώς μία έλλειψη μετασχηματίζεται σε κύκλο για παράδειγμα, ή σε μία υπερβολή. Ο Kepler, παρουσιάζει αυτούς τους μετασχηματισμούς στο επίπεδο, ξεκινώντας από μία έλλειψη. Μία έλλειψη, είναι μία κωνική τομή που μπορεί να οριστεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου του οποίου το άθροισμα των αποστάσεων από 2 σταθερά σημεία που ονομάζονται **εστίες** είναι σταθερό.



Ας υποθέσουμε πως οι εστίες της έλλειψης που θέλουμε να μετασχηματίσουμε είναι οι F, F' 2 σημεία που βρίσκονται στον μεγάλο άξονα της έλλειψης. Αν κυλίσουμε με συνεχή τρόπο το σημείο F προς το σημείο F' πάνω στον μεγάλο άξονα, η **εκκεντρότητα** της έλλειψης θα μειωθεί ώσπου να μετασχηματιστεί σε κύκλο, τη στιγμή όπου τα F, F' θα συμπίπτουν. Αν τώρα απομακρύνουμε την εστία F από την εστία F' , η εκκεντρότητα της έλλειψης θα αυξηθεί, δηλαδή το σχήμα θα διαπλατυνθεί (η εκκεντρότητα e είναι μία παράμετρος που κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1, η οποία εκφράζει ακριβώς το κατά πόσο η έλλειψη απομακρύνεται από τον κύκλο).

Έρχεται μία στιγμή όπου το σχήμα δεν είναι πια έλλειψη αλλά παραβολή, μία κωνική τομή σε μία μόνο εστία, την οποία ο Απολλώνιος ορίζει ως τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που απέχουν ίση απόσταση από ένα σταθερό σημείο που ονομάζεται εστία και από μία σταθερή ευθεία που ονομάζεται διευθετούσα. Αν το σημείο F στην τροχιά του δεν σταματήσει στο άπειρο και συνεχίσει, θα εμφανιστεί στα αριστερά του F' και θα έχουμε μία υπερβολή. Πιο οπτικά, για να περάσουμε από μία έλλειψη σε μία υπερβολή, πρέπει να πάρουμε την έλλειψη από τα άκρα της, σα να ήταν 2 λαβές και να τα διπλώσουμε προς τα πίσω, όπως στη παρακάτω εικόνα.

Μπορούμε να λάβουμε μια υπερβολή, ξεκινώντας από μία έλλειψη. Για τον σκοπό αυτό, ας φανταστούμε πως την πιάνουμε από τα σημεία A, B με τα 2 χέρια, σα να ήταν το τιμόνι ενός αυτοκινήτου και πως στη συνέχεια τη διπλώνουμε για να την φέρουμε στο κέντρο. Έτσι, το σημείο A θα γίνει A' και το σημείο B θα γίνει B'.



Ένα άτομο που στέκεται απέναντί μας, θα δει τα 2 μας χέρια να κρατάνε τους 2 κλάδους της υπερβολής. Το μόνο πρόβλημα είναι πως για να γίνει αυτό, πρέπει να φύγουμε στον χώρο, να περάσουμε από το άπειρο για να επιστρέψουμε εκεί που βρισκόμασταν και να κοιτάξουμε την έλλειψη απαθείς, σα να μη συνέβαινε τίποτα.

Πώς είναι δυνατόν ο Kepler, ένθερμος υποστηρικτής ενός πεπερασμένου σύμπαντος και αντίθετος προς κάθε φιλοσοφικό ή μαθηματικό ρεύμα, να υποστήριζε το ενεργειακό άπειρο, να μπόρεσε να παρουσιάσει ατάραχος έναν τέτοιο μετασχηματισμό; Θα λέγαμε κοινώς πως ο Kepler «έκανε τα στραβά μάτια» σε κάποιες θεωρίες του απείρου που ίσχυαν τότε, για να αποκομίσει ένα ορισμένο πρακτικό όφελος. Φυσικά δεν μιλάμε για κοσμικό όφελος, αλλά για όφελος στο πλαίσιο των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Αυτή η έννοια της συνεχούς εφαρμογής που συνοψίσαμε, έμελλε να αποτελέσει τον ακρογωνιαίο λίθο της **προβολικής γεωμετρίας**. Η ιδέα είναι η εξής: υποθέτουμε πως βρίσκουμε μία γεωμετρική ιδιότητα της έλλειψης. Αν μετακινήσουμε μία από τις εστίες της όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, αυτή η ιδιότητα πρέπει να διατηρηθεί. Τι σημαίνει πως η έλλειψη είναι πιο πεπλατυσμένη ή πιο επιμήκης; Αν ο μετασχηματισμός είναι συνεχής, θα έλθει μία στιγμή όπου η ιδιότητα αυτή θα μπορεί να εφαρμοστεί στον κύκλο, στην παραβολή ή στην υπερβολή. Η τεχνική του συνεχούς μετασχηματισμού, χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια από τον Pascal, την εφάρμοσε όμως σε κανονικά πολύγωνα, μετασχηματίζοντας για παράδειγμα ένα εξάγωνο σε πεντάγωνο, μετατοπίζοντας 2 προσκείμενες πλευρές ούτως ώστε να τις κάνει να συμπίσουν.

14. Η επιστροφή στο Παρίσι

Πάντα μετακινούμενη, η οικογένεια επέστρεψε στο Παρίσι το 1680. Τον επόμενο χρόνο πέθανε ο πατέρας. Ο Pascal, βρήκε την ευκαιρία να γράψει στην Gilberte και στον άνδρα της ένα μακροσκελές γράμμα – κήρυγμα για τον θάνατο γενικά. Αυτό το γράμμα, έχει επαινεθεί πολύ. Το γιατί αυτό το ξιπασμένο κατεβατό

θηρησκόληπτης και άκαρδής ηθικολογίας, ορμώμενης από τον θάνατο ενός αγαπημένου γονιού, θα έπρεπε να προξενεί τον θαυμασμό και όχι την περιφρόνηση για τον συγγραφέα του, είναι (όπως η αγάπη του Θεού στη οποία το γράμμα επιμένει *ad nauseam*) μυστήριο αζεδιάλυτο. Οποσδήποτε είναι θέμα γούστου και όσοι αρέσκονται σε ανάλογου περιεχομένου κείμενα μπορούν να αφεθούν στην απόλαυση του περιλάλητου γράμματος του Pascal, που σε τελευταία ανάλυση είναι από τα αριστουργήματα ενσυνείδητης αυτοαποκάλυψης στην γαλλική λογοτεχνία.

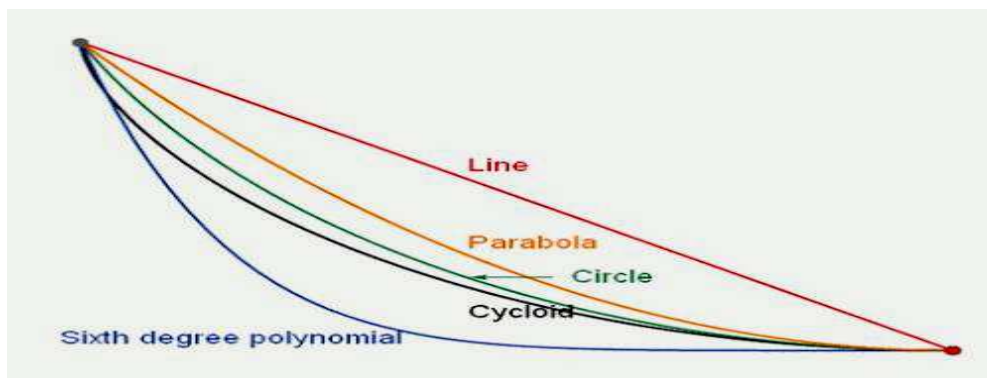
Ένα πρακτικότερο αποτέλεσμα που είχε ο θάνατος του πατέρα Pascal, ήταν η ευκαιρία που πρόσφερε στον γιό του, ως διαχειριστή της περιουσίας, να έχει φυσιολογικές σχέσεις με τους συνανθρώπους του. Ενθαρρυσμένη από τον αδερφό της, η Jacqueline πήγε στο Port Royal, μιας και ο πατέρας της δεν ήταν πλέον σε θέση να φέρει αντίρρηση. Το γλυκό ενδιαφέρον της για την ψυχή του αδερφού της τώρα πικράθηκε, εξαιτίας ενός καυγά σχετικά με την μοιρασιά της περιουσίας. Ένα γράμμα του προηγούμενου έτους (1650) αποκαλύπτει μία άλλη όψη του ευλαβικού χαρακτήρα του Pascal, ή ίσως τη ζήλεια του για τον Descartes. Ζαλισμένος από την υπερβατική λάμψη της Χριστίνας της Σουηδίας, ο Pascal ικέτευσε ταπεινά να φέρει την υπολογιστική μηχανή του στα πόδια της «μεγαλύτερης πριγκίπισσάς του κόσμου», η οποία μηχανή, όπως αυτός δηλώνει με γλυκερές φράσεις, είναι τόσο επιφανής διανοητικά όσο είναι η πριγκίπισσα κοινωνικά. Το τι έκανε η Χριστίνα με τη μηχανή δεν είναι γνωστό. Δεν προσκάλεσε πάντως τον Pascal σε αντικατάσταση του Descartes, τον οποίο είχε ξεκάνει. Τέλος, στις **23.11.1654** έλαβε χώρα η πραγματική μεταστροφή του Pascal. Σύμφωνα με ορισμένες εκδοχές, είχε ζήσει μία εγκρατή ζωή για 3 χρόνια. Οι καλύτερες αυθεντίες φαίνεται να συμφωνούν ότι δεν υπάρχει πολύ αλήθεια σε αυτή τη φήμη και πως δεν υπήρξε και τόσο εγκρατής. Είχε απλώς προσπαθήσει να κάνει περισσότερο υποφερτή τη ζωή του και να πάρει από αυτήν κάτι περισσότερο από μαθηματικά και ευσέβεια. Για κάποιον που διαθέτει τον μυστικισμό του Pascal, αυτή η τυχερή διαφυγή από έναν βίαιο θάνατο, αποτελούσε μια σαφή προειδοποίηση του ουρανού να κρατηθεί στο χείλος του ηθικού γκρεμού, στον οποίο φανταζόταν, θύμα της αρρωστημένης του αυτοανάλυσης, ότι επρόκειτο να πέσει. Πήρε ένα μικρό κομμάτι περγαμινής, σκάλισε πάνω του κάτι περίεργα αισθήματα μυστικιστικής αφοσίωσης και από τότε το έφερνε πάνω του, κοντά στην καρδιά του σαν φυλαχτό, για να τον προστατεύει από τον πειρασμό και να του υπενθυμίζει την καλοσύνη του Θεού που το είχε αρπάξει, αυτόν τον αμαρτωλό από το στόμα της κόλασης.

Από τότε μόνο μια φορά απομακρύνθηκε από τη χάρη του Θεού (κατά τη δική του αξιοθρήνητη άποψη), αν και στο υπόλοιπο της ζωής του υπέφερε από παραισθήσεις γκρεμών που έχασκαν μπροστά του. Η Jacqueline, δόκιμη τώρα στο μοναστήρι του Port Royal, ήλθε σε βοήθεια του αδερφού της. Εν μέρει με την δική του θέληση, εν μέρει εξαιτίας των πιεστικών εκκλήσεων της αδερφής του, ο Pascal έστρεψε τα νώτα του στον κόσμο και εγκαταστάθηκε στο Port Royal, για να θάψει το ταλέντο του διαλογιζόμενος στο εξής πάνω «στο μεγαλείο και στην αθλιότητα του ανθρώπου». Αυτό συνέβη στα 1654, όταν ο Pascal ήταν 31 ετών. Πριν όμως εγκαταλείψει για πάντα όσα είχαν σχέση με τη σάρκα και το μυαλό, είχε ολοκληρώσει τη σημαντικότερη συνεισφορά του στα μαθηματικά, δημιουργώντας από κοινού με τον Fermat τη μαθηματική θεωρία των πιθανοτήτων. Η ζωή του στο Port Royal ήταν τουλάχιστον υγιεινή, αν και όχι ακριβώς τόσο όσο θα ευχόταν κάποιος, ενώ η ήσυχη τακτική ρουτίνα βοήθησε σε αξιόλογο βαθμό την πειραγμένη του υγεία. Ήταν τότε που συνέθεσε τα περίφημα *Γράμματα σε έναν επαρχιώτη φίλο* που τα εμπνεύστηκε στην επιθυμία του να βοηθήσει στην απαλλαγή του Arnold, του

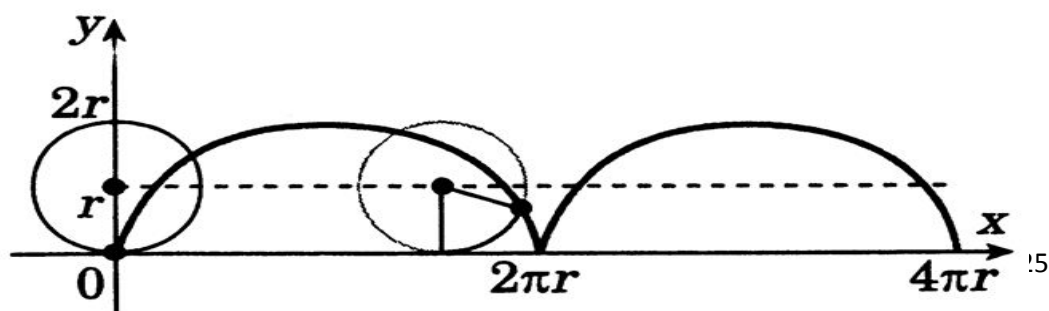
φάρου του ιδρύματος, από την κατηγορία της αίρεσης. Αυτά τα διάσημα γράμματα (ήταν 18, το 1^ο τυπώθηκε στις **23.01.1656**), αποτελούν αριστουργήματα μαχητικής ικανότητας και λέγεται ότι κατάφεραν ένα ισχυρό κτύπημα στους Ιησουίτες, από το οποίο το Τάγμα τους ποτέ δεν συνήλθε τελείως. Παρόλη την έντονη ενασχόληση του με ζητήματα σχετικά με την σωτηρία του και την αθλιότητα του ανθρώπου, ο Pascal ήταν ακόμη ικανός για μαθηματική παραγωγή εξαιρετικού επιπέδου, αν και έβλεπε τις επιστημονικές επιδιώξεις ως μία ματαιότητα που πρέπει κανείς να αποφεύγει, λόγω των μειωτικών της συνεπειών στην ψυχή. Πάντως, για μία φορά ακόμη ολίσθησε, αλλά ήταν η τελευταία. Η περίπτωση αφορά στο διάσημο επεισόδιο της κυκλοειδούς καμπύλης. Αυτή η καμπύλη με τις όμορφες αναλογίες (διαγράφεται από την κίνηση που κάνει ένα σταθερό σημείο της περιφέρειας ενός τροχού, καθώς ο τροχός κυλά κατά μήκος μίας ευθείας σε ένα επίπεδο λιθόστρωτο), φαίνεται να έχει πρωτοεμφανιστεί στην μαθηματική γραμματολογία στα 1501, όταν ο Charles Bourelles την περιέγραψε συνδέοντας τη με τον τετραγωνισμό του κύκλου.

15. Η κυκλοειδής καμπύλη

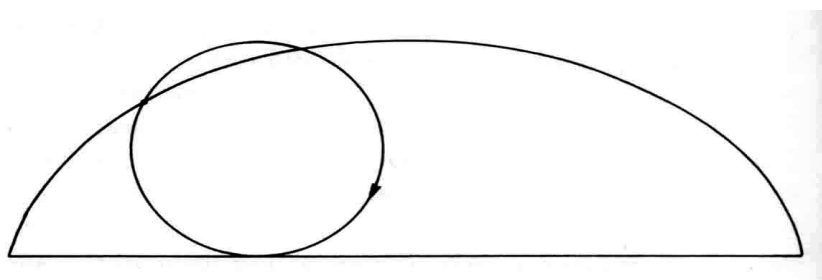
Αν μία επιφάνεια έχει το σχήμα καμπύλης τέτοιο ώστε ο χρόνος ολίσθησης ενός σώματος, χωρίς τριβές, μέχρι το κατώτερο σημείο της να είναι ανεξάρτητος από το σημείο εκκίνησης (συνθήκη του ισοχρόνου), τότε η καμπύλη ονομάζεται *κυκλοειδής* και είναι η συντομότερη καμπύλη μεταξύ 2 σημείων. Πρακτικά, η κατασκευή μίας κυκλοειδούς καμπύλης δεν είναι κάτι δύσκολο. Η ιδέα είναι ότι σκιαγραφείς την πορεία ενός σημείου πάνω σε έναν κύκλο ακτίνας R , καθώς αυτός κυλίζει κατά μήκος μίας ευθείας ή πάνω σε μία άλλη καμπύλη. Φυσικά το αποτέλεσμα είναι αισθητικά όμορφο από μόνο του, μπορεί όμως να γίνει πιο ελκυστικό αν επιτρέψουμε στον κύκλο να κινηθεί σε λιγότερο κανονικές τροχιές και να επιλέξουμε πιο πολλά σημεία πάνω του.



Ο Γαλιλαίος, ήταν εκείνος που της έδωσε το όνομα κυκλοειδής καμπύλη, ενώ με τις ιδιότητές της προκάλεσε το ενδιαφέρον των μαθηματικών του 17^{ου} αιώνα. Αν R είναι η ακτίνα του κύκλου από τον οποίο προκύπτει, τότε το ύψος της είναι ίσο με $2R$, το εμβαδόν της είναι ίσο με $3\pi R^2$ και το μήκος του τόξου της είναι ίσο με $8R$. Την χαρακτηρίζουν «**Ωραία Ελένη**» της γεωμετρίας.



Το 1696, ο Johann Bernoulli έθεσε στους μαθηματικούς της εποχής του το εξής πρόβλημα «Έστω 2 δεδομένα σημεία A, B σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Να βρεθεί η καμπύλη την οποία πρέπει να διαγράψει μία σημειακή μάζα, υπό την επίδραση της βαρύτητας, έτσι ώστε ξεκινώντας από το A και χωρίς αρχική ταχύτητα να φτάσει χωρίς τριβές στο B , στον ελάχιστο χρόνο». Ο Γαλιλαίος στα τέλη του 16^{ου}, αρχές του 17^{ου} αιώνα πειραματιζόμενος με κεκλιμένα επίπεδα και με σωλήνες μεταφοράς ύδατος σε σχήμα τόξων, διαπίστωσε ότι η κίνηση κατά μήκος ενός κυκλικού τόξου διαρκεί λιγότερο από την κίνηση κατά μήκος της αντίστοιχης χορδής. Ήταν όμως η διαδρομή του κυκλικού τόξου η συντομότερη δυνατή; Ο ίδιος δεν πρόλαβε να δώσει τη σωστή απάντηση, που είναι πάλι η κυκλοειδής καμπύλη.



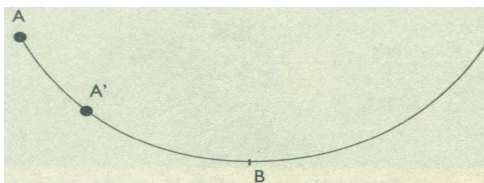
Λύσεις στο πρόβλημα Bernoulli έδωσαν οι Leibniz, De l' Hospital, Jacob Bernoulli (αδελφός του Johann) και πιθανώς ο Newton (με ψευδώνυμο). Η ευφυέστερη όλων, ίσως ήταν η λύση που δόθηκε από τον Johann Bernoulli που ξεκινώντας από ένα πρόβλημα μηχανικής έφθασε σε ένα πρόβλημα οπτικής, χρησιμοποιώντας την αρχή του Fermat, ότι *το φως όταν κινείται μεταξύ 2 σημείων, διασχίζει τη διαδρομή που απαιτεί το ελάχιστο χρονικό διάστημα*. Το πρόβλημα της βραχυστόχρονης που οδηγεί στην κυκλοειδή καμπύλη, καθοδήγησε την ανάπτυξη του λογισμού των μεταβολών και την διατύπωση της κλασσικής μηχανικής μέσω των εξισώσεων Lagrange και Hamilton, που αποτέλεσαν τη βάση για τη μαθηματική θεμελίωση της κβαντομηχανικής. Η κυκλοειδής καμπύλη, είχε προκαλέσει τον ενθουσιασμό των μαθηματικών και των φυσικών για αρκετά έτη και πολλοί από αυτούς θεωρούσαν ότι η καμπύλη θα έπαιζε σημαντικό ρόλο στην ερμηνεία της φύσης. Όμως, παρά το γεγονός ότι μπορεί να εμφανιστεί στη λύση της εξίσωσης Friedmann που για συγκεκριμένες τιμές διαφόρων παραμέτρων, περιγράφει την χρονική εξέλιξη της διαστολής του σύμπαντος ή και σε άλλους τομείς της επιστήμης, τελικά η κυκλοειδής καμπύλη με το πάροδο του χρόνου πέρασε στην αφάνεια.

Ο Γαλιλαίος και ο μαθητής του Viviani, την μελέτησαν και έλυσαν το πρόβλημα της κατασκευής εφαιτομένης στην καμπύλη σε τυχαίο σημείο (πρόβλημα που ο Fermat έλυσε αμέσως όταν του το πρότειναν) και ο Γαλιλαίος υπέδειξε τη χρήση της ως τόξου για γέφυρες. Από τότε που το ενισχυμένο τσιμέντο (μπετόν αρμέ) έγινε κάτι το σύνθηρες, τα κυκλοειδή τόξα τα βλέπουμε συχνά σε υπερυψωμένες γέφυρες μεγάλων δρόμων. Για μηχανικούς λόγους (που δεν ήταν γνωστοί στον Γαλιλαίο), το κυκλοειδές τόξο υπερέχει των άλλων στην κατασκευή. Ανάμεσα στους διάσημους άνδρες που μελέτησαν την κυκλοειδή ήταν ο Sir Christopher Wren, ο αρχιτέκτονας του καθεδρικού του Αγίου Παύλου, που προσδιόρισε το μήκος του κάθε τόξου της καμπύλης και το κέντρο βάρους του, ενώ ο Huygens την εισήγαγε για μηχανικούς λόγους στην κατασκευή των εκκρεμών ρολογιών. Μια από τις ωραιότερες ανακαλύψεις του Huygens (1629–1695) σχετίζεται με την κυκλοειδή. Απέδειξε ότι η (ανεστραμμένη) κυκλοειδής καμπύλη είναι το ταυτόχρονο, δηλαδή η καμπύλη με την

εξής ιδιότητα: αν τοποθετήσουμε με τυχαίο τρόπο χάντρες σε διάφορα σημεία της, όλες θα χρειαστούν τον ίδιο χρόνο για να κυλίσουν προς το χαμηλότερο σημείο της υπό την επίδραση της βαρύτητας. Ανάμεσα στις διάφορες αρρώστιες που βασάνιζαν τον Pascal, ήταν η αϋπνία και τα χαλασμένα δόντια, μια εποχή που οδοντίατροι ήταν οι παραμπερήδες, με εργαλεία 2 τσιμπίδες και κτηνώδη δύναμη. Ξαγρυπνώντας μία νύχτα (1658) με βασανιστικό πονόδοντο, ο Pascal άρχισε να σκέφτεται εντατικά την κυκλοειδή καμπύλη, μήπως και βοηθήσει το μυαλό του να ξεστρατίσει από τον διαπεραστικό πόνο. Προς μεγάλη του έκπληξη, διαπίστωσε ότι σύντομα ο πόνος είχε περάσει. Ερμηνεύοντας το ως θεϊκό σημάδι που του έδειχνε πως δεν αμάρτανε ασχολούμενος με την κυκλοειδή, συνέχισε. Επί 8 ημέρες παραδόθηκε στη γεωμετρία της κυκλοειδούς καμπύλης και κατάφερε να λύσει πολλά από τα βασικά προβλήματα που την αφορούσαν. Μερικά από όσα ανακάλυψε, τα εξέδωσε με το ψευδώνυμο **Amos Dettonville** ως προκλήσεις προς του Γάλλους και τους Άγγλους μαθηματικούς. Στον τρόπο με τον οποίο αντιμετώπιζε τους ανταγωνιστές του σε αυτό το ζήτημα, δεν ήταν πάντα τόσο λεπτολόγος όσο θα όφειλε. Επρόκειτο για το τελευταίο τρεμόσβημα της μαθηματικής δραστηριότητας του και για τη μόνη συνεισφορά στην επιστήμη μετά την είσοδο του στο Port Royal.

Το πρόβλημα της ταυτόχρονης και της βραχυστόχρονης

Έστω ότι θέλουμε να πάμε από το Α στο Β με το πιο γρήγορο δυνατό τρόπο, ενώ υποβαλλόμαστε αποκλειστικά στη δράση της βαρύτητας, ή πράγμα που είναι το ίδιο, θέλουμε να βρούμε τη μορφή που πρέπει να έχει η καμπύλη πάνω στην οποία γλιστράμε ώστε φεύγοντας από το Α να φτάσουμε το συντομότερο στο Β. Αυτή η καμπύλη, ονομάζεται βραχυστόχρονη (από τις ελληνικές λέξεις βράχυστος, συντομότερος και χρόνος). Στην αρχή, η διαίσθησή λέει ότι ο γρηγορότερος τρόπος για να γλιστρήσουμε από το Α στο Β είναι η μικρότερη απόσταση, δηλαδή η ευθεία γραμμή. Ωστόσο, δεν είναι έτσι. Η ταχύτερη γραμμή είναι το αντεστραμμένο τόξο της κυκλοειδούς καμπύλης, που διέρχεται από το Α και έχει το ελάχιστο του στο Β. Το 1696 ο Johann Bernoulli, γνωρίζει ήδη τη λύση στο πρόβλημα και προκάλεσε τους επιστήμονες της εποχής να το λύσουν. Το πρόβλημα λύθηκε ανεξάρτητα από τους Leibniz, Newton, Johann Bernoulli, De L' Hospital. Το 1673 ο Huygens, ανακάλυψε ότι αν ένα αντικείμενο αφεθεί να πέσει πάνω σε ένα τόξο της κυκλοειδούς καμπύλης, δεν έχει σημασία από ποιο ύψος, κάνει πάντα τον ίδιο χρόνο για να φτάσει στη βάση. Ως εκ τούτου, η κυκλοειδής λύνει επίσης το πρόβλημα της ταυτόχρονης (από τις ελληνικές λέξεις το αυτό και χρόνος).



16. Pascal και θεωρία των πιθανοτήτων

Οι πραγματικοί θεμελιωτές της μαθηματικής θεωρίας των πιθανοτήτων, ήταν ο Pascal και ο Fermat, οι οποίοι ανέπτυξαν τις θεμελιώδεις αρχές του κλάδου, μέσα από μία πυκνή και ενδιαφέρουσα αλληλογραφία το 1654 Αυτή η αλληλογραφία υπάρχει στις *Oeuvres de Fermat* (έκδοση των P.Tannery και C.Henry, τόμος 2, 1904). Οι επιστολές δείχνουν ότι, οι Pascal και Fermat είχαν ίση συμμετοχή στη δημιουργία της θεωρίας. Οι σωστές λύσεις που έδωσαν για τα διάφορα προβλήματα διαφέρουν στις λεπτομέρειες, όχι όμως σε θεμελιακές αρχές. Εξαιτίας της κουραστικής αρίθμησης των πιθανών περιπτώσεων σε ένα ορισμένο πρόβλημα, ο Pascal προσπάθησε να συντομεύσει την ανάλυση και υπέπεσε σε λάθος. Ο Fermat του υπέδειξε το σφάλμα και ο Pascal το αναγνώρισε. Η 1^η επιστολή της σειράς έχει χαθεί, όμως η ύπαρξη της σχετικής αλληλογραφίας είναι επαρκώς διασταυρωμένη.

Το αρχικό πρόβλημα που στάθηκε η αφετηρία για ολόκληρη τη θεωρία, προτάθηκε στον Pascal από τον Chevalier de Mere, έναν λίγο πολύ επαγγελματία παίκτη τυχερών παιχνιδιών. Το πρόβλημα ήταν εκείνο των «σημείων»: ο καθένας από

τους 2 παίκτες (ας πούμε στα ζάρια) χρειάζεται έναν ορισμένο αριθμό σημείων για να κερδίσει το παιχνίδι, αν σταματήσουν το παιχνίδι πριν τελειώσει, πως θα έπρεπε να μοιραστεί το στοίχημα τους;

Το σκορ (αριθμός σημείων) του κάθε παίκτη, δίνεται τη στιγμή της αποχώρησης του από το παιχνίδι και το πρόβλημα βρίσκεται στον καθορισμό της πιθανότητας που ο κάθε παίκτης έχει στην παρούσα φάση του παιχνιδιού, για να κερδίσει. Υποτίθεται ότι οι παίκτες έχουν τις ίδιες πιθανότητες να κερδίσουν ένα σημείο. Η λύση απαιτεί κοινή λογική, τα μαθηματικά των πιθανοτήτων μπαίνουν όταν αναζητούμε μία μέθοδο για την εύρεση του αριθμού των πιθανών περιπτώσεων χωρίς να προχωρήσουμε σε πραγματικό μέτρημα. Για παράδειγμα, πόσες εξάδες τραπουλόχαρτων μίας κανονικής τράπουλας των 52 φύλλων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, ώστε η καθεμία τους να περιλαμβάνει ακριβώς 3 δυάρια; Ή, όταν ρίχνουμε μαζί 10 ζάρια, κατά πόσους τρόπους μπορούμε να φέρουμε 3 άσσους, 5 δυάρια και 2 εξάρια; Ένα 3^ο πρόβλημα του είδους: πόσα διαφορετικά βραχιόλια μπορούμε να φτιάξουμε τοποθετώντας σε αλυσίδα 10 πέρλες, 7 ρουμπίνια, 6 σμαράγδια και 8 ζαφείρια, αν δεν κάνουμε διάκριση ανάμεσα στις πέτρες του ίδιου είδους; Προβλήματα όπου ζητάμε να βρούμε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει ένα ορισμένο πράγμα, ή να συμβεί ένα πλήρως προσδιορισμένο γεγονός, ανήκουν στην περιοχή της συνδυαστικής ανάλυσης. Η εφαρμογή της στις πιθανότητες είναι προφανής. Υποθέστε ότι θέλουμε να μάθουμε την πιθανότητα να φέρουμε 2 άσσους και 1 δυάρι, ρίχνοντας ταυτόχρονα 3 ζάρια. Αν γνωρίζουμε τον συνολικό αριθμό των δυνατών τελικών διατάξεων ($6 \times 6 \times 6 = 216$) όταν ρίξουμε ταυτόχρονα 3 ζάρια και τον αριθμό των τρόπων (έστω n) με τους οποίους μπορούμε να πετύχουμε 2 άσσους και 1 δυάρι, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{n}{216}$

Επειδή εδώ είναι $n = 3$, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{3}{216} = \frac{1}{72}$. Ο Antoine

Gombaud Chevalier de Mere (1607–1684) που υποκίνησε όλη αυτή την ιστορία, περιγράφεται από τον Pascal σαν ένας άνθρωπος με πολύ καλό μυαλό, αλλά χωρίς μαθηματικές δυνατότητες, ενώ ο Leibniz που φαίνεται ότι είχε αντιπαθήσει τον χαρωπό Chevalier, τον αποκαλούσε άνθρωπο με οξύ μυαλό, φιλόσοφο και παίκτη, ένας αρκετά ασυνήθιστος συνδυασμός.



Η διατύπωση πιθανοθεωρητικών λύσεων στα προβλήματα της διανομής μεριδίων και του συμφερότερου στοίχηματος, από τους Pascal και Fermat, θεωρείται ευρύτατα ως η αρχή (γένεση) της θεωρίας πιθανοτήτων. Η εργασία του Cardano στις πιθανότητες, η οποία προηγήθηκε εκείνης των Pascal και Fermat κατά ένα περίπου

αιώνα, δημοσιεύθηκε μετά τον θάνατό του στο περίφημο δεκαπεντασέλιδο βιβλίο του με τίτλο *Liber de Ludo Aleae* (The book on games of chance). Προβλήματα πιθανοτήτων εξέτασε και στο βιβλίο του *Practica Arithmetice et Mensurandi Singularis*. Η συμβολή του Cardano (1501–1576) στη γένεση της θεωρίας των πιθανοτήτων, θεωρείται από αρκετούς ότι δεν έχει τύχει της αναγνώρισης που πιθανόν αξίζει. Ο Cardano που ήταν ιατρός και μαθηματικός σε βιβλίο του, που ο ίδιος λέει ότι το έγραψε το 1526 (σε ηλικία 25 ετών) ανακαλύφθηκε μετά το θάνατό του το 1576 και τυπώθηκε το 1663, ασχολείται με διάφορα προβλήματα των τυχερών παιχνιδιών. Υπολογίζει σωστά όλες τις περιπτώσεις στο ρίξιμο 2 ζαριών και ότι όταν ρίχνουμε 3 ζάρια, υπάρχουν 216 περιπτώσεις. Εκεί, υπολογίζει σωστά ότι σε 3 περιπτώσεις παίρνουμε άθροισμα 4, σε 27 περιπτώσεις παίρνουμε άθροισμα 10 και σε 25 περιπτώσεις παίρνουμε άθροισμα 9. Το 1307–1321 γράφτηκε από τον Dante Alighieri *Η αγία κωμωδία*, που αναφέρει και το ρίξιμο ζαριών. Το 1477 ο Benvenuto d' Imola σχολιάζοντας το σημείο αυτό, υπολογίζει ότι όταν ρίξουμε 3 ζάρια υπάρχει μία περίπτωση να πάρουμε άθροισμα:

- τρία (τρεις άσσοι) και
- τέσσερα (ένα διπλό και δυο άσσοι).

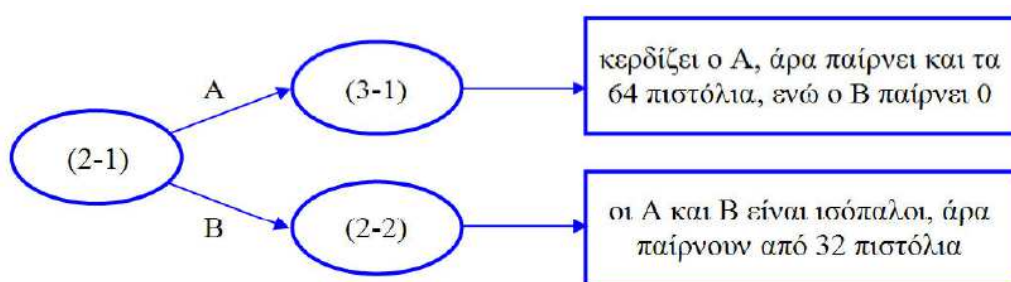
Έκανε λάθος στον υπολογισμό του 4 διότι υπάρχουν 3 περιπτώσεις: (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), δηλαδή δεν ξεχώρισε τις διαφορετικές διατάξεις.

16.1 Πρόβλημα

Δύο παίκτες A, B στοιχημάτισαν βάζοντας από 32 pistoles (ονομασία ισπανικού νομίσματος με αξία 2 δουκάτα) ο καθένας. Συμφώνησαν ότι όποιος κερδίσει πρώτος 3 παρτίδες ενός παιχνιδιού, θα πάρει και τα 64 pistoles. Όταν το παιχνίδι ήταν 2–1 υπέρ του A, αναγκάστηκαν να σταματήσουν. Από πόσα pistoles πρέπει να πάρουν οι A, B;

16.1.1 Η λύση του Pascal

Αν συνέχιζαν το παιχνίδι, θα κέρδιζε ο A ή ο B, άρα ο A παίρνει 48 (=32+16) δηλαδή το στοίχημα μερίζεται με λόγο 3 προς 1 (3:1).

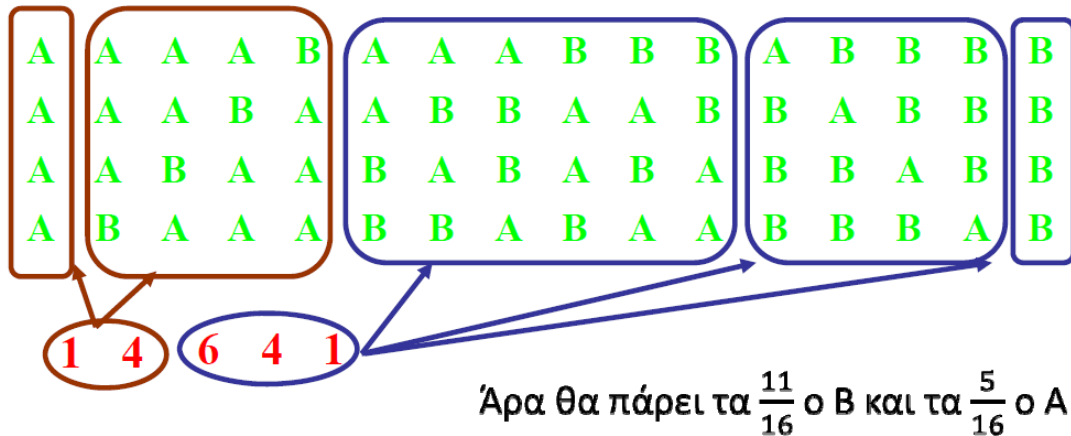


- Αν το παιχνίδι είχε σταματήσει στο 2–0, τότε στο επόμενο παιχνίδι αν ο A κέρδιζε θα έπαιρνε και τα 64 πιστόλια ή αν ο A έχανε τότε το σκορ θα γινότανε 2–1 δηλαδή ο A θα έπαιρνε 48 πιστόλια και ο B θα έπαιρνε 16 πιστόλια. Άρα, θα πάρει ο A 56 (=32+24) πιστόλια και ο B 8 (=0+8) πιστόλια.

- Αν το παιχνίδι είχε σταματήσει στο 1–0, τότε στο επόμενο παιχνίδι, αν ο A κέρδιζε το σκορ θα γίνονταν 2–0 και θα έπαιρναν ο A 56 πιστόλια και ο B 8 πιστόλια, ή αν ο A έχανε, το σκορ θα γίνονταν 1–1 και θα έπαιρναν ο A 32 πιστόλια και ο B 32 πιστόλια. Άρα, θα πάρει ο A 44 (=28+16) πιστόλια και ο B 20 (=4+16) πιστόλια.

16.1.2 Η λύση του Fermat

Ο Fermat απάντησε με τη λύση του προβλήματος της διαίρεσης, ενός στοιχήματος όταν ο ένας παίκτης Α έχει άλλες 3 παρτίδες να κερδίσει παιχνίδι, ενώ ο άλλος Β έχει ακόμη 2. Τότε καταγράφοντας τα αποτελέσματα των επόμενων 4 παρτίδων, διαπίστωσε ότι μόνο ο ένας κερδίζει, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα.



16.1.3 Αντιρρήσεις

Οι Roberval και D' Alembert, διατύπωσαν την αντίρρησή τους στο ότι η υπόθεση των 4 υπολειπομένων παιχνιδιών δεν μπορεί να γίνει, εφ' όσον είναι δυνατό ο παίκτης Α να αναδειχθεί νικητής και σε λιγότερα από 4 παιχνίδια. Ο Pascal απάντησε στην αντίρρηση αυτή, υποστηρίζοντας ότι αν και είναι δυνατόν η σειρά των παιχνιδιών να κριθεί σε 2 ή 3 παιχνίδια, τα επιπλέον παιχνίδια δεν παίζουν κανένα ρόλο στην ανάδειξη του νικητή. Βέβαια, παίζουν ρόλο στην αναγωγή των διάφορων περιπτώσεων σε ισοπίθανες καταστάσεις.

16.2 Ο Pascal και οι εφαρμογές των πιθανοτήτων

Ο Pascal πάντως προχώρησε σε μια εφαρμογή των πιθανοτήτων (στους Στοχασμούς), που για την εποχή του ήταν αυστηρά πρακτική. Πρόκειται για το περίφημο Στοίχημα. Η προσδοκία (μαθηματική ελπίδα) σε ένα τυχερό παιχνίδι, είναι η αξία του επάθλου πολλαπλασιασμένη επί την πιθανότητα να κερδηθεί το έπαθλο. Σύμφωνα με τον Pascal, η αξία της αιώνιας ευτυχίας είναι άπειρη. Συλλογίστηκε πως ακόμη και αν η πιθανότητα να κερδηθεί η αιώνια ευτυχία με ενάρετη ζωή είναι πράγματι πολύ μικρή, παρόλα αυτά, μια και η προσδοκία είναι άπειρη (και κάθε πεπερασμένο κλάσμα του απείρου είναι το ίδιο άπειρο) θα αποζημιωθεί όποιος ζει με αυτόν τον τρόπο. Όπως και να το κάνουμε, χρειαζόταν να πάρει το γιατρικό του.

Όμως, σα να ήθελε να δείξει ότι δεν είχε καταπιεί και το μπουκαλάκι, προβάλλει σε κάποιο άλλο σημείο των Στοχασμών το τελείως σκεπτικιστικό «είναι πιθανή η πιθανότητα;». Είναι ενοχλητικό, λέει σε άλλο σημείο, να ενδιατρίβεις σε τέτοιες ελαφρότητες, έρχεται όμως ο καιρός και για αυτό. Η δυσκολία του Pascal ήταν πως δεν μπορούσε να δει καθαρά τότε καταγινόταν με ελαφρότητες, όπως στο στοίχημα του με το Θεό, ή τότε ήταν βαθύς, όπως στη βοήθεια που πρόσφερε στον Chevalier de Mere.

	Ο Θεός υπάρχει	Ο Θεός δεν υπάρχει
Πίστη στο Θεό	Μέγιστο κέρδος	Μικρή ζημία
Μη πίστη στο Θεό	Μέγιστη ζημία	Μικρό κέρδος

Ο Βολτέρος, που έζησε μια γενιά μετά τον Pascal, δεν αποδέχθηκε το στοίχημα του Pascal καθώς το έκρινε ως παιδικό. Ο Βολτέρος ισχυρίστηκε πως όσο και να θέλει κάποιος να πιστέψει στον Ιησού για να σωθεί, με βάση το στοίχημα του Pascal, το αποτέλεσμα θα είναι στην καλύτερη των περιπτώσεων μια αδύναμη πίστη. Ο Pascal, δεν πρότεινε το επιχείρημα του ως απόδειξη για την ύπαρξη του Θεού, αλλά ως πραγματιστική επιλογή που έχει να κάνει κάθε άνθρωπος.

Σύμφωνα με τον Γάλλο φιλόσοφο Étienne Souriau, για να αποδεχθεί κάποιος το στοίχημα του Pascal πρέπει να είναι σίγουρος ότι ο Θεός θα τιμήσει το στοίχημα, κάτι το οποίο δεν είναι σίγουρο. Κάνει τη σύγκριση με ένα ανόητο, ο οποίος βλέπει ένα φύλλο να επιπλέει στην επιφάνεια ενός ποταμού που διχάζεται λίγο παρακάτω, σκέφτεται για μερικά δευτερόλεπτα και λέει «Στοιχηματίζω 1.000.000 € με τον Ρότσιλντ ότι θα πάρει την αριστερή πλευρά». Και τελικά όντως παίρνει την αριστερή πλευρά, αλλά δυστυχώς ο Ρότσιλντ δεν είπε ποτέ ότι αποδέχεται το στοίχημα.

16.2.1 Επιχείρημα του λάθος Θεού

Από τη στιγμή που υπάρχουν πολλές θρησκείες άρα και Θεοί, μερικοί υποστηρίζουν πως αυτό πρέπει να ζυγιστεί σε ένα επιχείρημα γνωστό ως επιχείρημα από την ασυνέπεια των αποκαλύψεων. Σύμφωνα με αυτό, οι πιθανότητες να πιστέψει κανείς στον λάθος Θεό είναι αυξημένες και μαθηματικά καταρρίπτει το πλεονέκτημα που δίνει το στοίχημα του Pascal. Ο Ντενίς Ντιντερό, σύγχρονος του Βολτέρου σχολίασε «και ένας Ιμάμης μπορεί να ισχυριστεί το ίδιο». Ο J.L. Mackie, σημειώνει πως «μόνο στην εκκλησία μπορεί να βρει κάποιος σωτηρία, αλλά μπορεί να μην είναι η ρωμαιοκαθολική εκκλησία, αλλά η εκκλησία των αναβαπτιστών, ή των Σουνιτών μουσουλμάνων, ή της Κάλι ή του Οντιν.»

Φαίνεται πως ο Fermat δεν είχε ποτέ ελκυσθεί, όπως συνέβαινε με τους Descartes, Pascal από την απατηλή γοητεία της φιλοσόφησης γύρω από τον Θεό, τον άνθρωπο και το σύμπαν ως ένα όλο· έτσι, αφού έπαιξε τον ρόλο του στον λογισμό και στην αναλυτική γεωμετρία και έχοντας ζήσει μία ήρεμη ζωή γεμάτη συνεχή σκληρή δουλειά για να κερδίσει τα προς το ζην, ήταν ακόμη ελεύθερος να αφιερώσει τη διαθέσιμη ενέργεια του στην αγαπημένη του ενασχόληση, στα καθαρά μαθηματικά και να επιτύχει το μεγαλύτερο του έργο, τη θεμελίωση της θεωρίας των αριθμών, χάριν της οποίας πέρασε στην αιωνιότητα.

16.2.2 Επιχείρημα της ανειλικρινούς πίστης

Μερικοί κριτικοί υποστηρίζουν ότι το στοίχημα του Pascal είναι για όσους δεν πιστεύουν πραγματικά και τους οδηγεί σε μια ανειλικρινή και ανήθικη επιλογή, για να κερδίσουν μια αιώνια ανταμοιβή. Επιπλέον, είναι ανόητο να πιστεύουν πως κάποιος Θεός ο οποίος είναι δίκαιος και πάνσοφος δεν θα μπορούσε να αντιληφθεί αυτή την στρατηγική εκ μέρους του «πιστού».

16.2.3 Το παράδοξο του De Méré (1654)

Τον 17^ο αιώνα, συνήθιζαν να παίζουν ρίχνοντας ένα κανονικό ζάρι 4 φορές, ποντάροντας ότι θα έρθει ένα τουλάχιστον «6» (Π1). Σύμφωνα με έναν «παλιό νόμο των παικτών» αυτό είναι ισοδύναμο με το να έρθει τουλάχιστον μία φορά «(6,6)» ρίχνοντας δύο κανονικά ζάρια 24 φορές (Π2). Αυτό, διότι ο (ρίψεις) λόγος 4 προς 6 (αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων στο Π1) είναι ίσος με τον λόγο του 24 (ρίψεις) προς 36 (αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων στο Π2). Ο Chevalier de Méré (1607–1684), Γάλλος ευγενής και διάσημος παίκτης τυχερών παιχνιδιών, παρατήρησε ότι όταν στοιχημάτιζε με το παιχνίδι Π1, κατά κανόνα κέρδιζε (σε μεγάλο πλήθος

παιχνιδιών). Όταν όμως στοιχημάτιζε με το παιχνίδι Π2 τότε έχανε, κάτι που κατά τη γνώμη του ήταν μεγάλο σκάνδαλο και σήμαινε ότι τα αριθμητικά θεωρήματα δεν είναι πάντα αληθή και ότι η αριθμητική πέφτει σε αντιφάσεις. Απευθύνθηκε στον Pascal, ο οποίος με τη σειρά του απευθύνθηκε στον φίλο του Fermat και έλυσαν το πρόβλημα. Η πιθανότητα να έρθει ένα τουλάχιστον 6 σε τέσσερις ανεξάρτητες ρίψεις ενός ζαριού είναι **0.518**, δηλαδή το παιχνίδι Π1 είναι ευνοϊκό για τον παίκτη. Δηλαδή, σε μεγάλο αριθμό παιχνιδιών ο παίκτης κερδίζει. Η πιθανότητα να έρθει ένα τουλάχιστον «(6,6)» σε 24 ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών είναι **0.491**, δηλαδή το παιχνίδι Π2 δεν είναι ευνοϊκό για τον παίκτη. Αυτό το παρατήρησε ο De Méré, διαπιστώνοντας ότι χάνει σε μεγάλο αριθμό παιχνιδιών. Το παιχνίδι Π2 γίνεται ευνοϊκό, αν αντί 24 φορές ρίξουμε τα ζάρια 25 φορές. Τότε, η πιθανότητα για τουλάχιστον μία φορά εξάρες γίνεται **0.505**.

16.2.4 Το δέλεαρ των λόττο και το «στοίχημα του Pascal»

Ποιος είναι ο λόγος για τη δημοτικότητα των λόττο; Ότι με ασυνείδητο τρόπο, γίνεται ένα σκεπτικό παρόμοιο με το στοίχημα του Pascal. Η μαθηματική προσδοκία είναι ίδια, όπως σε πολλές άλλες λαχειοφόρες αγορές, αφού εξαρτάται από το ποσοστό των εσόδων που αφιερώνεται στα βραβεία. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι τα βραβεία διανέμονται με διαφορετικό τρόπο και μπορεί να φτάσουν να γίνουν πολύ μεγαλύτερα. Υπάρχει πολύ μικρή πιθανότητα να πέσει ένα μεγάλο βραβείο, αλλά αν αυτό συμβεί θα είμαστε πραγματικά πλούσιοι από τη μία ημέρα στην άλλη. Η κοινωνική απόφαση είναι ότι αξίζει το ρίσκο και έτσι παίζουμε.

16.2.5 Η ρουλέτα

Ουσιαστικά, η **ευρωπαϊκή ρουλέτα** είναι ένας κύλινδρος στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει ένας περιστρεφόμενος δίσκος 37 θέσεων, εναλλάξ μαύρες, κόκκινες αριθμημένες από το 1 ως 36 συν το 0, που είναι σε θέση διαφορετικού χρώματος (πράσινο) και πρέπει να διατηρεί μια ευαίσθητη και λεπτή ισορροπία μεταξύ όλων των θέσεων στις οποίες τοποθετούνται οι αριθμοί. Στόχος του παιχνιδιού είναι, να προβλεφθεί σε ποιον αριθμό ή σε ποιο χρώμα του περιστρεφόμενου δίσκου, θα πέσει η μικρή μπάλα, που ρίχνει ο κρουπιέρης. Υπάρχουν παραλλαγές αυτού του μοντέλου ρουλέτας, όπως η **αμερικανική ρουλέτα**, η οποία έχει επίσης το «διπλό μηδέν» και περιλαμβάνει μερικές μικρές διαφοροποιήσεις ως προς τα στοιχήματα και τα βραβεία. Εδώ αναφερόμαστε στην ευρωπαϊκή ρουλέτα. Πρώτα γίνονται τα στοιχήματα, έπειτα γυρίζει με δύναμη ο τροχός και στη συνέχεια η μπάλα ρίχνεται από τον κρουπιέρη στο εξωτερικό τμήμα του τροχού, όπου παραμένει κάνοντας γύρους. Όταν ο τροχός χάνει την επαρκή ταχύτητα, τότε η μπάλα πέφτει στις υποδοχές, όπου παραμένει αναπηδώντας από το ένα νούμερο στο άλλο, έως ότου καθίσει τελικά σε μία από τις 37 υποδοχές. Η «μαγεία» της κίνησης του τροχού, έχει επηρεάσει την ανθρωπότητα σχεδόν από την εμφάνισή του. Η φαινομενική ακινησία του κέντρου, μαζί με την αύξηση της ταχύτητας καθώς απομακρυνόμαστε από αυτό και η αβεβαιότητα για το σημείο που θα σταματήσει, ήταν η αιτία για τα πολλά παιχνίδια που έχουν τον τροχό ως βάση. Σύμφωνα με όλες τις ενδείξεις, η δημιουργία της ρουλέτας και των κανόνων του παιχνιδιού της, πολύ παρόμοιων με αυτούς που γνωρίζουμε σήμερα, οφείλεται στον Pascal που εφηύρε μία ρουλέτα με 36 αριθμούς. Φαίνεται ότι η επιλογή 36 αριθμών ενισχύει ακόμα περισσότερο τη μαγεία, επειδή **το άθροισμα των πρώτων 36 αριθμών δίνει τον αριθμό 666**. Η επιλογή του αριθμού 36 είναι ίσως επειδή έχει πολλούς διαιρέτες. Αν και υπάρχουν πολλοί τρόποι πονταρίσματος στη ρουλέτα, για να απλουστευθεί η παρουσίαση θα

υποθέσουμε ότι ένας παίκτης παίζει μόνο μονά ή ζυγά, κόκκινο ή μαύρο, μεγάλα ή μικρά (μεγάλα είναι το ποντάρισα στα νούμερα 19 έως 36 και μικρά, 1 έως 18). Για κάθε € που ποντάρει, ο παίκτης παίρνει αν κερδίσει, αυτό το € και άλλο ένα.



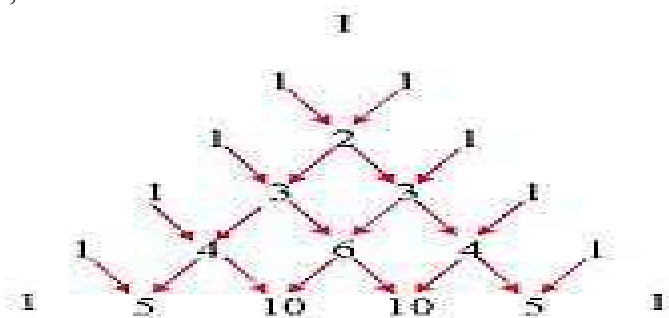
Αμερικανική ρουλέτα



Ευρωπαϊκή ρουλέτα

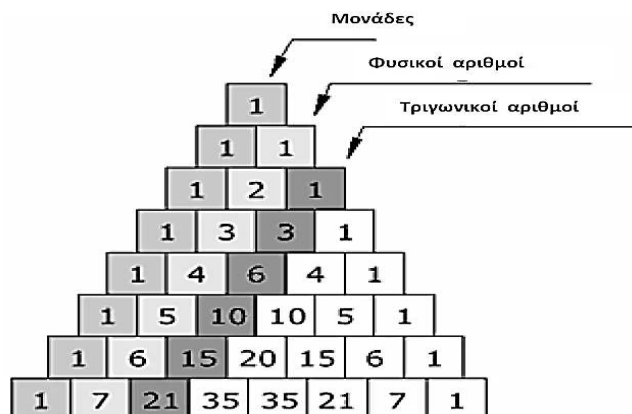
17. Το τρίγωνο του Pascal

Σε συνάφεια με τα προβλήματα στη συνδυαστική ανάλυση και στις πιθανότητες, ο Pascal χρησιμοποίησε εκτενώς το αριθμητικό τρίγωνο, στο οποίο οι αριθμοί κάθε νέας σειράς μετά τις 2 πρώτες, προκύπτουν από εκείνους της προηγούμενης σειράς, με την παράθεση των ακραίων 1 και με την πρόσθεση διαδοχικών ζευγών αριθμών από τα αριστερά προς τα δεξιά, έτσι $5=1+4$, $10=4+6$, $10=6+4$, $5=4+1$.

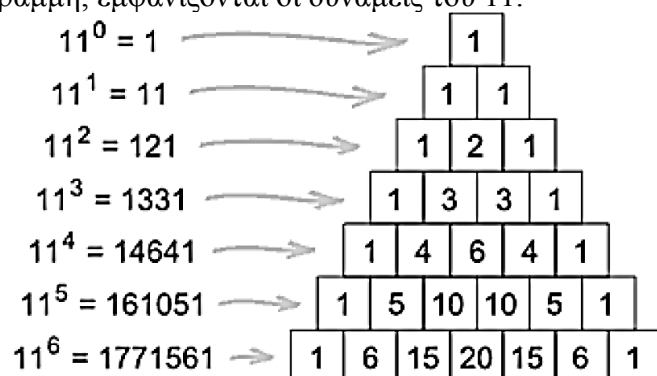


Οι αριθμοί στη n -οστή σειρά μετά το 1, είναι οι αριθμοί των διαφορετικών επιλογών ενός, δύο, τριών,, πραγματικών, αντίστοιχα, από n διακεκριμένα πράγματα. Για παράδειγμα, 10 είναι ο αριθμός των διαφορετικών ζευγών των πραγμάτων που μπορούμε να επιλέξουμε από 5 διακεκριμένα πράγματα.

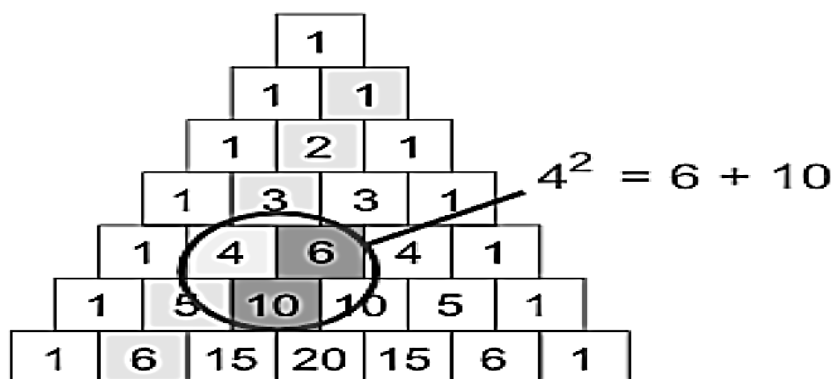
- Η 1^η διαγώνιος, αποτελείται μόνο από τον αριθμό 1.
- Η 2^η διαγώνιος, αποτελείται από τους φυσικούς αριθμούς.
- Η 3^η διαγώνιος, αποτελείτε τους λεγομένους τρίγωνους αριθμούς (1, 3, 6, 10, 15...) δηλαδή από τους αριθμούς που παριστάνονται στο επίπεδο, με τη μορφή τριγώνου.
- Η 4^η διαγώνιος αποτελείτε από τους τετραεδρικούς ή πυραμιδοειδείς ή τετράγωνους αριθμού (1, 4, 10, 20). Προχωρώντας στις διαγώνιες σειρές, το φαινόμενο αυτό επαναλαμβάνεται, δηλαδή η n -οστή διαγώνιος περιέχει τους αντίστοιχους των τριγωνικών αριθμών στον n -διάστατο χώρο (π.χ. Η 5^η διαγώνιος αποτελείται από πεντάγωνους αριθμούς, όπου ο γενικός τύπος είναι $n(3n-1)/2$).



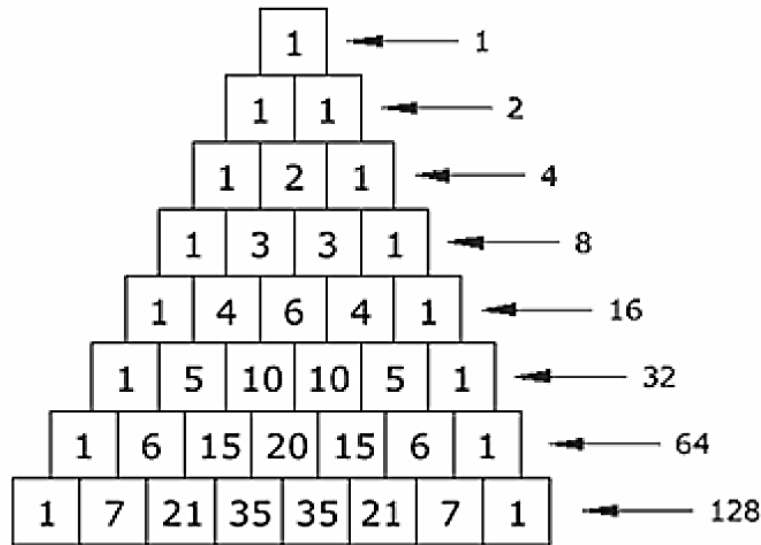
- Οι αριθμοί που εμφανίζονται σε κάθε οριζόντια γραμμή του τριγώνου, είναι ακριβώς οι συντελεστές που εμφανίζονται στα αναπτύγματα των πολυωνύμων. $(\alpha+\beta)^0$, $(\alpha+\beta)^1$, $(\alpha+\beta)^2$, $(\alpha+\beta)^3$, $(\alpha+\beta)^4$, κλπ.
- Το άθροισμα των αριθμών κάθε γραμμής, είναι ίσο με μια δύναμη του 11.
- Σε κάθε γραμμή, εμφανίζονται οι δυνάμεις του 11.



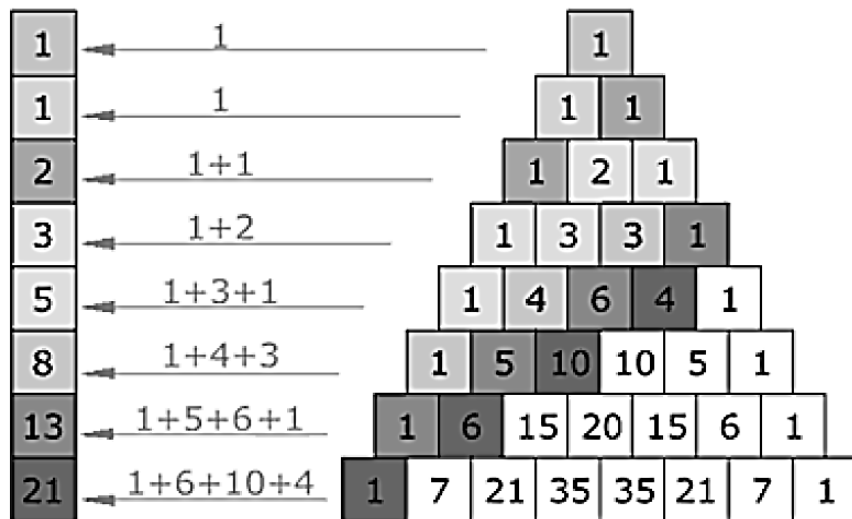
- Το τετράγωνο κάθε αριθμού, ισούται με το άθροισμα 2 αριθμών, ενός δεξιά του και ενός κάτω και δεξιά του.



- Το άθροισμα της κάθε γραμμής διπλασιάζεται.



- Αν προσθέσουμε διαγωνίως, προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας Fibonacci.

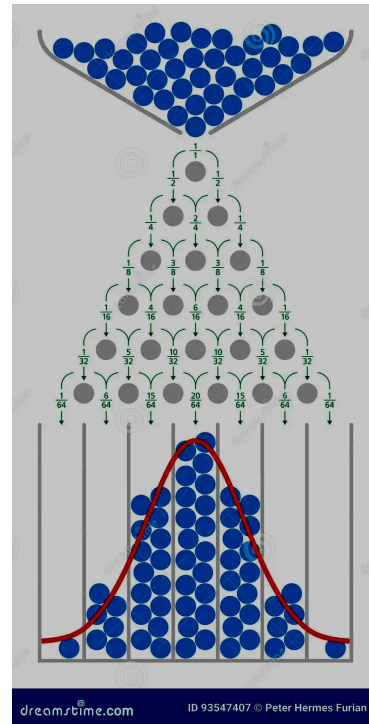


Αν και το τρίγωνο ήταν γνωστό πριν από τον Pascal, πήρε το όνομα του, λόγω της ιδιοφυούς χρησιμοποίησης του από τον Pascal, στις πιθανότητες. Η θεωρία που ξεκίνησε από μια διαφωνία παικτών τυχερών παιχνιδιών, βρίσκεται τώρα στη βάση πολλών τομέων που θεωρούμε σημαντικότερους από τον τζόγο και περιλαμβάνουν όλα τα είδη της ασφάλισης, τη μαθηματική στατιστική και την εφαρμογή της στη βιολογία και σε εκπαιδευτικού χαρακτήρα μετρήσεις και σημαντικό μέρος της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής. Δεν σκεφτόμαστε πια ότι το ηλεκτρόνιο βρίσκεται «σε δοσμένη θέση σε δοσμένη χρονική στιγμή», αλλά υπολογίζουμε την πιθανότητα να βρίσκεται σε δοσμένη περιοχή. Λίγη σκέψη θα μας πείσει ότι και οι απλούστερες μετρήσεις που κάνουμε (όταν επιχειρούμε να μετρήσουμε κάτι με ακρίβεια), είναι ως προς τον χαρακτήρα τους στατιστικές.

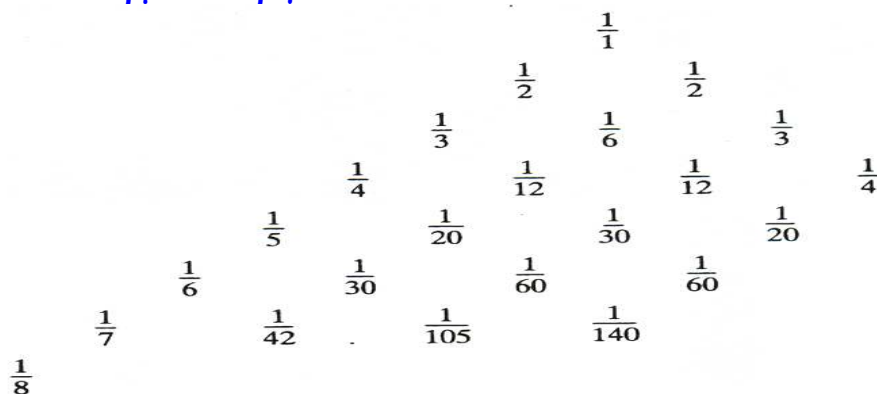
17.1 Ο πίνακας του Galton

Ο πίνακας που επινοήθηκε από τον Galton, είναι μια διάταξη που επιτρέπει να ελεγχθεί πειραματικά η κανονικότητα των πιθανοτήτων και το κεντρικό οριακό θεώρημα (ΚΟΘ). Πρόκειται για κατακόρυφη πλάκα, με μία σειρά από καρφιά που ακολουθούν το σχήμα του τριγώνου του Pascal. Κάτω από μία χοάνη από την οποία αφήνουμε να πέσουν όμοιες μπάλες, βρίσκεται ένα καρφί και κάτω από αυτό άλλα δύο, ένα δεξιά και ένα αριστερά. Κάτω από αυτά, βρίσκονται με τη σειρά τους άλλα καρφιά τοποθετημένα αριστερά και δεξιά αυτών που βρίσκονται στην παραπάνω σειρά και ούτω καθεξής. Όταν μια μπάλα πέφτει μέσα από τα διαδοχικά επίπεδα, χτυπά σε κάποιο καρφί, το οποίο την κατευθύνει προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, ενώ αυτή συνεχίζει να πέφτει. Τέλος, οι μπάλες συλλέγονται σε θήκες που βρίσκονται κάτω από καθέναν από τους χώρους που είναι κάτω από την τελευταία σειρά των καρφιών. Οι μπάλες που στοιβάζονται, σχηματίζουν την **κανονική καμπύλη**. Η ερμηνεία της διαδικασίας είναι η εξής, αρχικά μια μπάλα αντιπροσωπεύει το σφάλμα που κάνουμε κατά τη μέτρηση ενός χαρακτηριστικού.

Αυτό το σφάλμα της μέτρησης (ή τυχαία μεταβλητή) μπορεί να πάρει μόνο 2 τιμές (αριστερά και δεξιά, υπόλειμμα ή πλεόνασμα), με ίσες πιθανότητες. Η τιμή, αντιστοιχεί στη μετατόπιση που προκαλεί το καρφί που βρίσκεται κάτω από τη χοάνη, όταν η μπάλα χτυπά πάνω του. Όταν κινηθεί σε μία χαμηλότερη σειρά, αυτό που συμβαίνει είναι ότι παράγεται ένα νέο σφάλμα, που συσσωρεύεται στο προηγούμενο. Αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση κάθε μπάλας σε μια σειρά αντιπροσωπεύει τη συσσώρευση σφαλμάτων, το τελικό αποτέλεσμα, που συνίσταται στο να παρατηρήσουμε τη θέση όπου αποθηκεύεται η μπάλα, αναπαριστά το άθροισμα τόσων λαθών, όσων και οι γραμμές που υπάρχουν στη διάταξη. Αν τοποθετήσουμε ένα τρίγωνο του Pascal πάνω από τη διάταξη αυτή, οι αριθμοί του τριγώνου δείχνουν τον αριθμό των δρόμων που οδηγούν σε κάθε καρφί.



17.2 Το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz



Σχήμα. Τμήμα του αρμονικού τριγώνου του Leibniz

Οι ιδιότητες του, είναι «ανάλογες λόγω αντίθεσης» προς αυτές του τριγώνου Pascal. Το τελευταίο περιλαμβάνει ακεραίους, ενώ το τρίγωνο του Leibniz περιέχει αντίστροφους των ακεραίων. Στο τρίγωνο του Pascal, ο κάθε αριθμός είναι το άθροισμα του βορειοδυτικού και βορειοανατολικού γείτονα του. Στο τρίγωνο του Leibniz, ο κάθε αριθμός ισούται με το άθροισμα του νοτιοδυτικού και του νοτιοανατολικού γείτονα του. Για παράδειγμα:

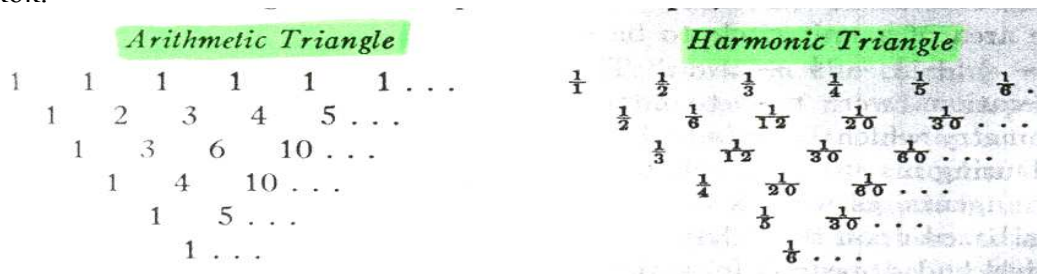
$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$, $\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$ το οποίο αποτελεί τον αναδρομικό τύπο του τριγώνου του Leibniz. Υπάρχει επίσης και η εξής συνοριακή συνθήκη του τριγώνου: Οι αριθμοί που ανήκουν στη βορειοδυτική μεθόριο (τη «μηδενική λεωφόρο») είναι οι αντίστροφοι των διαδοχικών ακεραίων, $1/1$, $1/2$, $1/3$, Ξεκινώντας από τις συνοριακές τιμές, που είναι γνωστές, παίρνουμε τους υπόλοιπους αριθμούς μέσω πρόσθεσης στην περίπτωση του τριγώνου του Pascal, αλλά μέσω αφαίρεσης στο παρόν τρίγωνο. Στο παραπάνω σχήμα, 1 υπάρχουν μερικά κενά τα οποία μπορούν αμέσως να συμπληρωθούν με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου, λόγω χάρη, $\frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$ και $\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$.

Αριθμητικό τρίγωνο	Αρμονικό τρίγωνο
1 1 1 1 1 1 ...	$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$...
1 2 3 4 5 6 ...	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{30}$...
1 3 6 10 15 ...	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{60}$...
1 4 10 20 ...	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{60}$...
1 5 15 ...	$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{30}$...
1 6 ...	$\frac{1}{6}$...
1 ...	

Στο αριθμητικό τρίγωνο, κάθε στοιχείο (εκτός αυτών της 1^{ης} στήλης) ισούται με τη διαφορά των 2 όρων ακριβώς από κάτω του και προς τα αριστερά. Στο αρμονικό τρίγωνο, κάθε όρος (εκτός αυτών της 1^{ης} γραμμής) ισούται με τη διαφορά των 2 όρων ακριβώς από πάνω του και προς τα δεξιά. Επιπλέον, στο αριθμητικό τρίγωνο κάθε στοιχείο (εκτός αυτών της 1^{ης} στήλης ή γραμμής) ισούται με το άθροισμα όλων των όρων στην από πάνω γραμμή και προς τα αριστερά. Στο αρμονικό τρίγωνο, κάθε στοιχείο ισούται με το άθροισμα όλων των όρων στην από κάτω γραμμή και προς τα δεξιά. Ο αριθμός των όρων στην τελευταία περίπτωση, είναι άπειρος και έτσι ο Leibniz εξασκήθηκε αρκετά στην άθροιση των απειροσειρών. Η σειρά στην 1^η γραμμή είναι η **αρμονική σειρά**, η οποία **αποκλίνει**. Σε όλες τις υπόλοιπες σειρές, η σειρά **συγκλίνει**. Οι αριθμοί στη 2^η σειρά, ισούται με το ήμισυ των αντιστρόφων των τριγώνων αριθμών και ο Leibniz γνώριζε ότι το άθροισμα αυτής της σειράς είναι 1. Οι αριθμοί στην 3^η σειρά, ισούται με το $1/3$ των αντιστρόφων των πυραμδικών αριθμών $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) / 1 \cdot 2 \cdot 3$ και το αρμονικό τρίγωνο δείχνει ότι το άθροισμα αυτής της σειράς είναι $1/2$. Οι αριθμοί στην 4^η σειρά, είναι το $1/4$ των αντιστρόφων των πολυγωνικών αριθμών που αντιστοιχούν στο τετραδιάστατο ανάλογο του τετραέδρου και το άθροισμα τους είναι $1/3$. Στο αρμονικό τρίγωνο και στο αριθμητικό τρίγωνο του Pascal, υπάρχουν

εκπληκτικές σχέσεις. Λόγου χάρη, στο αριθμητικό τρίγωνο κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα όλων των όρων στη γραμμή που βρίσκεται πάνω και προς τα αριστερά από αυτό και είναι επίσης η διαφορά μεταξύ των 2 όρων ακριβώς κάτω από αυτό.

Ομοίως, στο αρμονικό τρίγωνο κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των όρων της γραμμής που βρίσκεται κάτω και προς τα δεξιά από αυτό και είναι επίσης η διαφορά μεταξύ των 2 όρων που βρίσκονται ακριβώς πάνω από αυτό. Δηλαδή, στο αριθμητικό τρίγωνο του Pascal, αν συμβολίσουμε με x τους αριθμούς σε οποιαδήποτε γραμμή, οι αριθμοί της $1^{\text{ης}}$ γραμμής που βρίσκεται από κάτω, θα είναι το άθροισμα όλων των x ως εκείνο το σημείο, από αριστερά προς τα δεξιά. Εκείνοι της $2^{\text{ης}}$ γραμμής προς τα κάτω, θα είναι το άθροισμα των αθροισμάτων όλων των x , κοκ. Αντιστρόφως, οι γραμμές προς τα επάνω, αντιπροσωπεύουν τις διαφορές, τις διαφορές των διαφορών, κοκ.



Ομοίως, στο αρμονικό τρίγωνο, σε σχέση με τα στοιχεία της κάθε γραμμής, εκείνα που βρίσκονται από κάτω παριστάνουν τις διαφορές, τις διαφορές των διαφορών, κοκ. Εκείνα που βρίσκονται από πάνω, είναι τα αθροίσματα, τα αθροίσματα των αθροισμάτων, κοκ – από δεξιά προς τα αριστερά, αυτή τη φορά.

Συνεπώς, στα 2 αυτά τρίγωνα βλέπουμε ότι αθροίσματα και διαφορές είναι το ένα αντίστροφο του άλλου,¹ όπως ακριβώς το πρόβλημα των εφαιπτομένων, το οποίο εξαρτάται από τις διαφορές των τεταγμένων, είναι το αντίστροφο του προβλήματος των τετραγωνισμών, το οποίο εξαρτάται από το άθροισμα όλων των τεταγμένων, κατά την έννοια του Cavalieri. Μολαταύτα, ενώ οι διαφορές μεταξύ των στοιχείων στο αρμονικό και στο αριθμητικό τρίγωνο είναι πεπερασμένες, εκείνες μεταξύ των τεταγμένων μίας καμπύλης είναι απειροστές και οι τύποι που εφαρμόζονται στην $1^{\text{η}}$ περίπτωση, δεν ισχύουν στην περίπτωση καμπυλών.

18. Η υπολογιστική μηχανή Pascaline

Όταν ο Pascal ήταν 16 ετών, ο πατέρας του βρήκε δουλειά ως φοροεισπράκτορας στην πόλη Ρουέν. Προκειμένου να τον βοηθήσει, ο Pascal επινόησε την $1^{\text{η}}$ αληθινή αριθμομηχανή, που εκτελούσε προσθέσεις και αφαιρέσεις, την Pascaline, επιβλέποντας την κατασκευή και την πώληση της. Για την ολοκλήρωση της εργάστηκε επί 3 έτη. Η Pascaline είχε μικρές διαστάσεις, χωρούσε πάνω σε ένα μικρό τραπέζι και έμοιαζε πολύ με τις αριθμομηχανές που κυκλοφορούσαν σε όλο τον κόσμο στις δεκαετίες του 1940 και 1950. Με τη μηχανή αυτή, μπορούσε κάποιος να κάνει (σχετικά) εύκολα μαθηματικούς υπολογισμούς. Η εφεύρεση του Pascal, αναγνωρίστηκε με δίπλωμα ευρεσιτεχνίας το 1649, αλλά λόγω του υψηλού κόστους αγοράς της, οδηγήθηκε σε εμπορική αποτυχία. Το 1918 (περίπου 270 αργότερα), κατασκευάστηκε μία παρόμοια συσκευή, η Addometer, η οποία είχε εμπορική επιτυχία. Η μηχανή του Pascal είχε τροχαλίες, τις οποίες, όταν περιστρέφει ο χρήστης, εμφάνιζαν τα αποτελέσματα. Ο αρχικός «υπολογιστής», είχε 5 γρανάζια (με αποτέλεσμα να μπορεί να κάνει υπολογισμούς με σχετικά μικρούς

¹ Leibniz, “Early mathematical manuscripts”, page 142, & “Mathematische Schriften”, volume 397

αριθμούς), αλλά κατασκευάστηκε και σε παραλλαγές με 6 και 8 γρανάζια. Η μηχανή, εκτελούσε 2 πράξεις, πρόσθεση και αφαίρεση. Στο επάνω μέρος, υπήρχε μια σειρά από οδοντωτούς τροχούς (γρανάζια), που το καθένα περιείχε τους αριθμούς από 0 έως 9. Ο 1^{ος} τροχός, συμβόλιζε τις μονάδες, ο 2^{ος} τις δεκάδες, ο 3^{ος} τις εκατοντάδες, κ.ο.κ. Όταν ένα γρανάζι έκανε μία πλήρη περιστροφή, παρέσυρε το γρανάζι που βρίσκονταν αμέσως αριστερά του και με τον τρόπο αυτό μεταφέρονταν το κρατούμενο από τις μονάδες, στις δεκάδες, από τις δεκάδες, στις εκατοντάδες, από τις εκατοντάδες, στις χιλιάδες κ.ο.κ. Το 1673, ο Γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός Leibniz κατασκεύασε μια πιο βελτιωμένη υπολογιστική μηχανή, ικανή να πολλαπλασιάζει και να διαιρεί.

18.1 Η γλώσσα προγραμματισμού Pascal

Η γλώσσα προγραμματισμού Pascal, δημιουργήθηκε στο Πανεπιστήμιο της Γενεύης από τον Nicklaus Wirth, πήρε το όνομά της προς τιμήν του Blaise Pascal και είναι μία δομημένη γλώσσα με ιδιαίτερο χαρακτηριστικό τη δυνατότητα ορισμού από τον προγραμματιστή, δικών του δομών δεδομένων. Θεωρείται ως μία επιτυχημένη επέκταση της επιστημονικής γλώσσας προγραμματισμού ALGOL, που αναπτύχθηκε στην Ευρώπη τη δεκαετία του '60. Η Pascal, έχει όλα τα στοιχεία για την ανάπτυξη δομημένου προγραμματισμού και χρησιμοποιήθηκε εκτεταμένα στα Πανεπιστήμια, ως εργαλείο για τα μαθήματα προγραμματισμού και για τα μαθήματα δομών δεδομένων. Η Pascal, μπορεί να θεωρηθεί ως γλώσσα γενικής χρήσης (όχι μόνο επιστημονικών εφαρμογών, όχι μόνο εμπορικών εφαρμογών).

Αρχικά, δεν διέθετε εξελιγμένο σύστημα χειρισμού των αρχείων (και για αυτό δεν εκτόπισε την COBOL στις εμπορικές εφαρμογές), αλλά όπως οι περισσότερες γλώσσες, πέρασε από πολλές εκδόσεις που κάθε μία βελτίωνε την προηγούμενη. Διάφορες εκδόσεις της Pascal είναι σήμερα σε χρήση. Διάφορα λειτουργικά συστήματα, (όπως το Macintosh της Apple), είχαν μέρη τους γραμμένα σε Pascal. Το τυπογραφικό λογισμικό TEX, που δημιούργησε ο Donald E. Knuth, γράφτηκε σε μία διάλεκτο Pascal, την WEB. Η εταιρεία Borland έχει εκδώσει μία σειρά από ταχύτατους μεταφραστές Pascal με το όνομα Turbo Pascal. Η τελευταία έκδοση της Pascal για τα Windows, θεωρείται μία από τις καλύτερες εκδόσεις της, στον χώρο των μικροϋπολογιστών.

19. Το τέλος του

Τον ίδιο χρόνο (1658), αρρώστησε σοβαρότερα από ποτέ. Οξείς και ακατάπαυστοι πονοκέφαλοι, δεν του επέτρεπαν παρά μικρά διαλείμματα ύπνου. Υπέφερε για 4 έτη, ζώντας ακόμη πιο ασκητικά. Τον Ιούνιο του 1662, παραχώρησε ως πράξη αυταπάρνησης, το σπίτι του σε μια φτωχή οικογένεια που είχε πληγεί από ευλογιά και πήγε να ζήσει με την παντρεμένη του αδερφή. Στις **19.08.1662** η βασανισμένη του ύπαρξη έσβησε μέσα σε σπασμούς. Ήταν 39 ετών. Η νεκροψία, αποκάλυψε ότι αναμενόταν, σε σχέση με το στομάχι και τα ζωτικής σημασίας όργανα, έδειξε επίσης μία σοβαρή εγκεφαλική βλάβη. Και όμως, σε πείσμα όλων αυτών, ο Pascal είχε κάνει μεγάλη δουλειά στα μαθηματικά και στην επιστήμη και άφησε ένα όνομα στη λογοτεχνία που είναι ακόμη σεβαστό μετά το πέρασμα τόσων αιώνων. Τα όμορφα πράγματα που έκανε στην γεωμετρία, με την πιθανή εξαίρεση του «μυστικού εξάγραμμου», θα μπορούσαν να είχαν γίνει και από πολλούς. Αυτό, ισχύει ιδιαίτερα για την μελέτη της κυκλοειδούς καμπύλης. Μετά την επινόηση του λογισμού, όλα αυτά έγιναν ασυγκρίτως ευκολότερα. Όμως, στην κοινή με τον Fermat δημιουργία της θεωρίας των πιθανοτήτων, ο Pascal έφτιαξε ένα νέο κόσμο. Φαίνεται

αρκετά πιθανό ότι θα θυμόμαστε τον Pascal για τη συμβολή του αυτή, ακόμη και όταν θα έχει λησμονηθεί ως συγγραφέας. Οι *Στοχασμοί* και τα *Γράμματα*, ξέχωρα από τις λογοτεχνικές του αρετές, στην ουσία ασκούν γοητεία σε έναν τύπο μυαλού που ταχύτατα εξαφανίζεται. Τα επιχειρήματα υπέρ και κατά ενός συγκεκριμένου σημείου, εκλαμβάνονται από ένα μοντέρνο μυαλό ως τετριμμένα ή ως μη πειστικά και τα περισσότερα ερωτήματα που απασχολούσαν τον Pascal με τέτοια εμμονή, σήμερα φαίνονται κάπως γελοία. Όμως στη θεωρία των πιθανοτήτων, ο Pascal διατύπωσε και έλυσε ένα πραγματικό πρόβλημα, εκείνο της αποκατάστασης του νόμου, της τάξης και της κανονικότητας στο πεδίο της καθαρής τύχης, σήμερα αυτή η λεπτοφυής θεωρία φαίνεται να εμπλέκεται τόσο στις ρίζες της ανθρώπινης γνώσης όσο και στα θεμέλια της φυσικής επιστήμης. Οι διακλαδώσεις της φτάνουν παντού, από την κβαντική θεωρία έως την επιστημολογία.

20. Έργα του Pascal

- “Essai pour les coniques”, (1640)
- “Expériences nouvelles touchant le vide”, (1647)
- “Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs”, (1648)
- “Traité de la pesanteur de la masse de l'air”, (1651–1653)
- “Traité du triangle arithmétique (1654)
- “Les Provinciales”, (1656–1657)
- “Éléments de géométrie”, (1657)
- “De l'Esprit géométrique (1657)
- “Histoire de la roulette (1658)
- “L'Art de persuader”, (1660). «Η τέχνη της πειθούς», (2005), μετάφραση Κουσουρή, Δ., Αθήνα: εκδόσεις Ροές
- “Pensées”, (1669). «Σκέψεις», (1999). Μετάφραση Αντωνόπουλος, Αναγνωστίδης «Στοχασμοί», (1986). Μετάφραση Ματσούκας, Ν., 1^η έκδοση, Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Πουρναράς.
«Σκέψεις», μετάφραση Παπαγιώργης, Κ., 2^η έκδοση, Αθήνα: εκδόσεις Καστανιώτης.
- «Η αθλιότητα του ανθρώπου & άλλες σκέψεις», (2009). Μετάφραση Τσίρου, Γ., Αθήνα: εκδόσεις «Το Ποντίκι»
- “Discours sur les passions de l'amour”, (1843). «Τα πάθη του έρωτα», (2007). Μετάφραση Βέλιος, Α., 2^η έκδοση, Αθήνα: εκδόσεις Ροές.

Βιβλιογραφία

- Αναπολιτάνος, Δ. (1985). «Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών», Δ' έκδοση, Αθήνα, εκδόσεις Νεφέλη
- Βώκος, Γ. (1997). «Η γραφομηχανή. Εισαγωγή στις σκέψεις του Pascal», Αθήνα, εκδόσεις Νήσος
- Bell, E. (2000). «Οι μαθηματικοί», 1^{ος} τόμος, 3^η έκδοση, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
- Boyer, K. B.–Uta C. Merzbach, (1968). «Η ιστορία των μαθηματικών», 2^η έκδοση, Αθήνα, εκδόσεις Πνευματικός
- Δελλής, Ι. (1988). «Επιδράσεις του αρχαίου σκεπτικισμού στις γνωσιολογικές αντιλήψεις του B. Pascal». *Επετηρίς της εταιρείας ηλειακών σπουδών*, Αθήνα, τεύχος 5, σελίδες 61–71
- Davis, D. (2001). «Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών», Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

- Evans, H. (1990). «Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών μετά το 1650», τόμος 2, Αθήνα, εκδόσεις τροχαλία
- Καραγιάννης, Γ.Σ. (1997). «Σκέψη & πίστη . Παρατηρήσεις & σκέψεις επάνω στη ρήση του Pascal: “Le Pyrrhonisme sert à la religion”». *Φιλοσοφία & Παιδεία*, τεύχη 9 & 10, σελίδες 34–36
- Loria, G. «Ιστορία των μαθηματικών», τόμος 3 ^A, Αθήνα, εκδόσεις Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας
- Μπουρντιέ, Π. (2016). «Πασκαλιανοί διαλογισμοί», Αθήνα, εκδόσεις Πατάκη.
- Mankiewicz, R. (2002). «Η ιστορία των μαθηματικών», Αθήνα, εκδόσεις Αλεξάνδρεια
- Ξηρογιάννη, Π. (2006). «Blaise Pascal: Η έννοια της αγωνίας», Αθήνα, εκδόσεις Έννοια
- Polya, G. (2001). «Η μαθηματική ανακάλυψη», τόμος 1, Αθήνα, εκδόσεις κάτοπτρο
- Rogers, B. (2006). «Πασκάλ. Εγκώμιο στη ματαιοδοξία», μετάφραση Σταροπούλου, Ι., Αθήνα, εκδόσεις Ενάλιος
- Smith, D. (1951). «History of mathematics», volume 1, New York: Dover Publications, INC
- Struik, D. (1980). «Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών», β' έκδοση, Αθήνα, Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος
- «Τα χίλια πρόσωπα της γεωμετρικής ομορφιάς», Αθήνα, εκδόσεις 4π
- «Φευγαλέες ιδέες, αιώνια θεωρήματα», Αθήνα, εκδόσεις 4π
- «Η πλάνη των αισθήσεων», Αθήνα, εκδόσεις 4π
- «Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά», Αθήνα, εκδόσεις 4π
- «Στην άλλη πλευρά του καθρέφτη», Αθήνα, εκδόσεις 4π
- «Το όνειρο του τέλει χάρτη», Αθήνα, εκδόσεις 4π
- «Η 4^η διάσταση», Αθήνα, εκδόσεις 4π