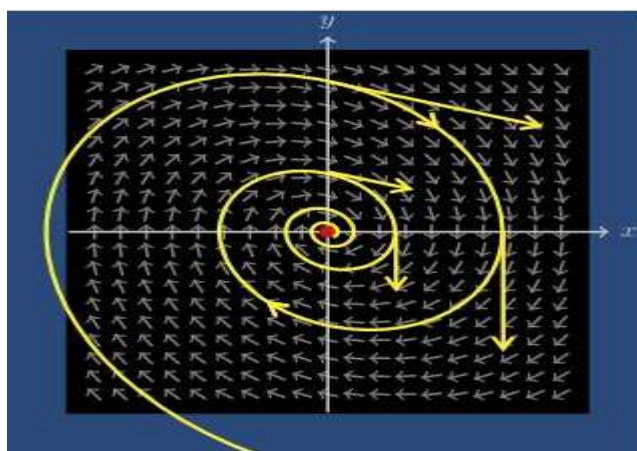




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης



Σπουδαστής: Μηνάς Μηνάς (AM 9257)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.)
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2025–2026

Ημερομηνία ανάθεσης: 14.11.2024
Ημερομηνία κατάθεσης:10.2025
Ημερομηνία εξέτασης:10.2025

A/A	Όνοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός (Ph.D.) Καθηγήτρια		
3	Τσαγκανός Γεώργιος Αυτοματιστής (M.Sc.) ΕΔΙΠ		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Πίνακας γραφημάτων	5
Περίληψη	6
Λέξεις κλειδιά	6
1. Γεωμετρικές εφαρμογές	7
1.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες	7
1.2 Πολικές συντεταγμένες	8
Εφαρμογή 1	9
Εφαρμογή 2	9
Εφαρμογή 3	10
Εφαρμογή 4	10
Εφαρμογή 5	11
Εφαρμογή 6	12
Εφαρμογή 7	13
1.3 Ισογώνιες και ορθογώνιες τροχιές	14
1.3.1 Εφαρμογές των ορθογώνιων τροχιών	17
Εφαρμογή 8	18
Εφαρμογή 9	19
Εφαρμογή 10	20
Εφαρμογή 11	21
Εφαρμογή 12	22
2. Τεχνολογικές εφαρμογές	23
2.1 Μηχανική	23
Εφαρμογή 13	23
Εφαρμογή 14	25
Εφαρμογή 15	26
2.2 Ηλεκτρικά κυκλώματα	26
Εφαρμογή 16	26
Εφαρμογή 17	27
Εφαρμογή 18	28
2.3 Γεωμετρική οπτική	29
Εφαρμογή 19 (Πρόβλημα του Biot)	29
Εφαρμογή 20	30
2.4 Διαλύματα	31
Εφαρμογή 21	31
2.5 Θερμότητα – θερμοδυναμική	32
Εφαρμογή 22	32
Εφαρμογή 23	33
2.6 Μηχανική των υγρών	33
Εφαρμογή 24	33
2.7 Δημογραφία	34
Εφαρμογή 25	34
2.8 Χημεία	35
Εφαρμογή 26	35
Εφαρμογή 27	36
2.9 Βιολογία	37
Εφαρμογή 28	37
3. Εφαρμογές στη ναυτιλία	38
3.1 Ορισμός και γενική μορφή	40
3.2 Διαχωρίσιμες εξισώσεις	41

3.3 Γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης.....	41
3.4 Ομογενείς εξισώσεις	41
3.5 Ακριβείς εξισώσεις.....	41
3.6 Φόρτωση των πλοίων	42
3.7 Υδροδυναμική αντίσταση	42
3.8 Υδροδυναμική βελτίωση.....	43
3.9 Ανάλυση των κυκλωμάτων και ενεργειακή απόδοση.....	45
3.10 Διαχείριση του συστήματος τροφοδοσίας.....	45
3.11 Δίκτυα επικοινωνίας και καθυστερήσεις	46
Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία	47
Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία από μετάφραση.....	47
Ξενόγλωσση βιβλιογραφία	47

Πίνακας γραφημάτων

Γράφημα 1 Καμπύλη σε ορθογώνιες συντεταγμένες	7
Γράφημα 2 Καμπύλη σε πολικές συντεταγμένες.....	9
Γράφημα 3 Τόξο έλλειψης.....	11
Γράφημα 4	13
Γράφημα 5 Κυκλικός τομέας.....	13
Γράφημα 6 Ισογώνιες τροχιές.....	14
Γράφημα 7 Καμπύλη οικογένειας.....	16
Γράφημα 8 Οικογένεια καμπυλών.....	19
Γράφημα 9 Οικογένεια ελλείψεων	20
Γράφημα 10 Οικογένεια κύκλων	21
Γράφημα 11 Οικογένεια λογαριθμικών ελίκων.....	22
Γράφημα 12 Λημνίσκος του Bernoulli.....	23
Γράφημα 13 Πτώση αλεξιπτωτιστή.....	24
Γράφημα 14 Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.....	25
Γράφημα 15 Ηλεκτρικό κύκλωμα RL	26
Γράφημα 16 Ηλεκτρικό κύκλωμα RC	27
Γράφημα 17 Πρόβλημα του Biot.....	29
Γράφημα 18 Ανάκλαση φωτεινής ακτίνας σε κάτοπτρο	30
Γράφημα 19 Δεξαμενή νερού με 3 στρόφιγγες	31
Γράφημα 20 Περιστροφή δοχείου με υγρό, περί κατακόρυφο άξονα	34
Γράφημα 21 Εξασθένηση ακτίνων X	36
Γράφημα 22 Γραφική παράσταση συνάρτησης.....	37
Γράφημα 23 Οι 2 βάρκες κινδυνεύουν να συγκρουσθούν μεταξύ τους.....	38
Γράφημα 24 Εξαεριστήρας πλοίου.....	38
Γράφημα 25 Ευσταθής πλεύση.....	39
Γράφημα 26 Ασταθής πλεύση	39
Γράφημα 27 Ότι ισχύει για τα πλοία, ισχύει και για τα υποβρύχια.....	40
Γράφημα 28 Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που ακινητεί	42
Γράφημα 29 Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που περιστρέφεται.....	42
Γράφημα 30 Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση	43
Γράφημα 31 Στα σημεία 1 και 2, το ρευστό έχει την ίδια ταχύτητα	43
Γράφημα 32 Βολβός πλοίου. Η διαφορά ταχυτήτων στην πάνω και στην κάτω επιφάνεια, προκαλεί την εμφάνιση της δυναμικής άνωσης.....	43
Γράφημα 33 Στο κουτάλι ασκείται οριζόντια δύναμη προς τη βρύση	44
Γράφημα 34 Στην πίσω πλευρά της κινούμενης σανίδας, σχηματίζονται στρόβιλοι..	44
Γράφημα 35 Η ροή του καπνού αρχικά είναι στρωτή και μετά τυρβώδης.....	44
Γράφημα 36 Στη δεξιά μεριά της πλάκας και μέσα στον αύλακα η ροή είναι τυρβώδης.....	45
Γράφημα 37 Στρόβιλος που αποσπάται από το πίσω μέρος σφαίρας κατά τη ροή πραγματικού ρευστού	45
Γράφημα 38 Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ανακλώνται στην ιονόσφαιρα και επιστρέφουν στη Γη.....	46

Περίληψη

Οι διαφορικές εξισώσεις, είναι κλάδος των μαθηματικών που οφείλει τη γέννηση του στη μηχανική, στην αστρονομία και στη θεωρητική φυσική. Αρχίζουν να κάνουν την εμφάνισή τους από την εποχή των Newton (1642–1727) και Leibniz (1646–1716). Ο Newton είναι ο 1^{ος} που χρησιμοποίησε διαφορική εξίσωση, για τη

μελέτη της κίνησης των σωμάτων, περιοριζόμενος στις απλές μορφές $\frac{dy}{dx} = f(y)$,

$\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Ο Leibniz προχώρησε περισσότερο, αναπτύσσοντας τη

μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών, των ομογενών διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης και των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης. Στον Leibniz

οφείλονται οι συμβολισμοί της παραγώγου $\frac{dy}{dx}$ και του ολοκληρώματος

$\int f(x) dx$. Σκοπός της επιστήμης είναι η κατανόηση της φύσης, μέσα στην οποία

ζούμε και μπορεί να επιτευχθεί με τη μελέτη των φαινομένων (φυσικών, χημικών, κοινωνικών, οικονομικών,...). Στη μελέτη αυτή, πρωταρχικό ρόλο παίζουν τα μαθηματικά. Από αρχαιοτάτων ετών, είχε γίνει αντιληπτό ότι τίποτα δεν παραμένει σταθερό, όλα αλληλένδετα μεταβάλλονται, όπως επιγραμματικά εκφράζει το ρητό του Ηράκλειτου (544–484 π.Χ.), *Πάντα ρει, πάντα χωρεί και ουδέν μένει*.

Η ταχύτητα ενός σώματος, που πέφτει υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας, αλλάζει με τον χρόνο. Η αεροδυναμική αντίσταση ενός σώματος, αυξάνεται με την ταχύτητα, όχι όμως πάντα γραμμικά. Η θέση της Γης και των άλλων πλανητών, αλλάζει με τον χρόνο, σε σχέση με τον Ήλιο. Το κύρτωμα μιας δοκού, εξαρτάται από το βάρος που την καταπονεί. Ο όγκος μιας σφαίρας, μεταβάλλεται με την ακτίνα του. Επειδή τα περισσότερα φαινόμενα είναι πολύπλοκα, είναι πρακτικά αδύνατο να θεμελιωθούν και να περιγραφούν πλήρως, με μαθηματικό τρόπο.

Για αυτό προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την πραγματικότητα με μαθηματικά πρότυπα, (μοντέλα), κάνοντας ορισμένες υποθέσεις που απλοποιούν τα φαινόμενα και τους νόμους που τα διέπουν. Οι απλοποιήσεις αυτές ανάγονται συνήθως στην παράλειψη ορισμένων στοιχείων, που θεωρούμε ότι επιδρούν λίγο, ή και καθόλου, στην εξέλιξη του φαινομένου. Η δημιουργία του μαθηματικού προτύπου γίνεται με μια μαθηματοποίηση των αντιστοιχών νόμων, που επειδή συνήθως περιέχουν ρυθμούς μεταβολής ενός μεγέθους, (ποσοτικά άγνωστου), εκφράζονται με παραγώγους του άγνωστου αυτού μεγέθους, οπότε το μαθηματικό πρότυπο παίρνει τη μορφή μιας συναρτησιακής σχέσης που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση και ορισμένες παραγώγους της. Η συναρτησιακή αυτή σχέση ονομάζεται διαφορική εξίσωση.

Λέξεις κλειδιά

Συντεταγμένες (πολικές, ορθογώνιες), τροχιές (ορθογώνιες, ισογώνιες), γραμμικός συντελεστής εξασθένησης, καμπύλες (ισοθερμικές, ισοδυναμικές), ρευματικές γραμμές, υποεφαπτομένη, υποκάθετος, ακτίνα (πολική, επιβατική), κλίση της εφαπτομένης, πολική υποεφαπτομένη, εξίσωση εφαπτομένης, διχοτόμος, παραβολή, έλλειψη, οικογένεια (καμπυλών, καρδιοειδών), πρόβλημα του Biot, λημνίσκος του Bernoulli

1. Γεωμετρικές εφαρμογές

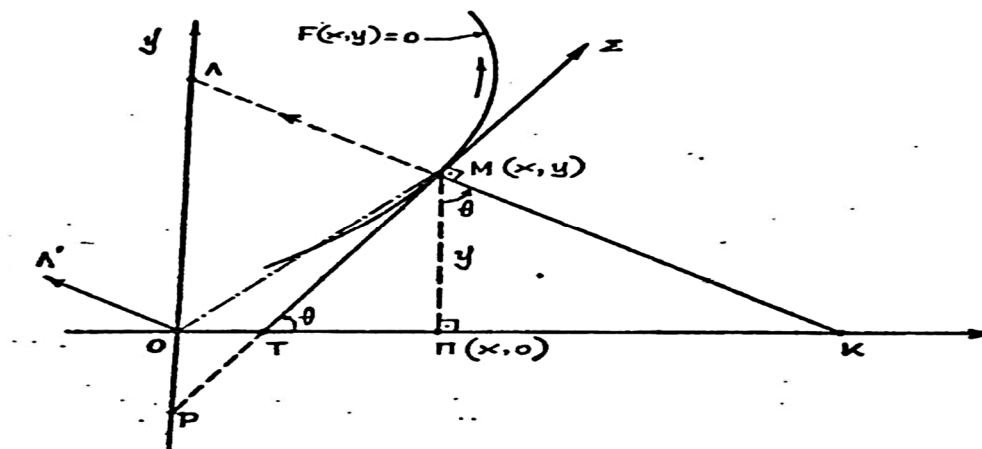
Οι διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης και 1^{ου} ή ανώτερου βαθμού, της γενικής μορφής $F(x, y, y') = 0$ έχουν ως γενικές λύσεις, τις οικογένειες των καμπυλών $f(x, y, c) = 0$. Η κάθε μια από τις οικογένειες της μορφής $f(x, y, c) = 0$, περιλαμβάνει ένα πλήθος ολοκληρωτικών καμπυλών που ξεχωρίζουν μεταξύ τους από τις πρόσθετες ιδιότητες, που δίνονται από την εφαρμογή, που κάθε φορά μελετώ όπως είναι εκείνη όπου ζητείται ποια από τις ολοκληρωτικές καμπύλες του προβλήματος διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο. Παρακάτω, αναφέρω μερικές γνωστές από τη γεωμετρία ιδιότητες των καμπυλών που περιέχουν παράγωγους 1^{ης} τάξης και αναφέρονται σε σύστημα ορθογωνίων ή πολικών συντεταγμένων.

1.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Έστω τυχόν σημείο $M(x, y)$ μιας καμπύλης $F(x, y) = 0$, που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για την τιμή που αντιστοιχεί στο $M(x, y)$. Αν στο $M(x, y)$ η εφαπτομένη δεν είναι παράλληλη προς κανέναν άξονα, δηλαδή, αν $y' \neq 0$ και $y' \neq \pm\infty$ τότε η εφαπτομένη και η κάθετος της, θα τέμνει τον άξονα xx' στα σημεία T και K, αντίστοιχα. Με τον τρόπο αυτό, ορίζονται τα παρακάτω διανύσματα.

$\overline{TM}$	η εφαπτομένη	$\overline{PT}$	η υποεφαπτομένη
$\overline{KM}$	η κάθετος	$\overline{PK}$	η υποκάθετος

Πίνακας 1



Γράφημα 1 Καμπύλη σε ορθογώνιες συντεταγμένες

Άρα, στο $M(x, y)$ (θεωρώντας (X, Y) τυχαίο σημείο της καμπύλης $F(x, y) = 0$) έχω:

- Κλίση της επιβατικής ακτίνας OM , $\frac{y}{x}$
- Κλίση της εφαπτομένης $\overline{TM}$, y' ή $\frac{dy}{dx}$
- Κλίση της καθέτου $\overline{KM}$, $\frac{-1}{y'}$ ή $\frac{-dx}{dy}$
- Εξίσωση της εφαπτομένης $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

- Εξίσωση της καθέτου $y - y_0 = \frac{-dx}{dy}(x - x_0)$
- Τομή της εφαπτομένης με τον άξονα xx' ή με τον άξονα yy' , δηλαδή $\left(X = x - y \frac{dx}{dy}, Y = 0\right)$ ή $\left(X = 0, Y = y - x \frac{dy}{dx}\right)$
- Τομή της καθέτου με τον άξονα xx' ή με τον άξονα yy' , δηλαδή $\left(X = x + y \frac{dy}{dx}, Y = 0\right)$ ή $\left(X = 0, Y = y + x \frac{dx}{dy}\right)$
- Μήκος του διανύσματος της εφαπτομένης από το $M(x, y)$ μέχρι τον άξονα xx' , $|\overline{TM}| = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ και μέχρι τον άξονα yy' , $|\overline{PM}| = x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$
- Μήκος του διανύσματος της καθέτου από το $M(x, y)$ μέχρι τον άξονα xx' , $|\overline{KM}| = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ και μέχρι τον άξονα yy' , $|\overline{ML}| = x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$
- Μήκος της υποεφαπτομένης $|\overline{PT}| = y \frac{dx}{dy}$
- Μήκος της υποκαθέτου $|\overline{PK}| = y \frac{dy}{dx}$
- Μήκος του στοιχειώδους τόξου στο $M(x, y)$, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$
- Στοιχειώδες εμβαδόν, $ds = y dx = x dy$

1.2 Πολικές συντεταγμένες

Έστω τυχαίο σημείο $M(\rho, \theta)$ μιας καμπύλης $F(\rho, \theta) = 0$ ή $\rho = f(\theta)$ με τις ίδιες προϋποθέσεις όπως και στην περίπτωση των ορθογώνιων συντεταγμένων. Αν ω είναι η γωνία της εφαπτομένης $\overline{M\Sigma}$ και της πολικής ακτίνας $\overline{OM}$, τότε:

- Η ω δίνεται από τις σχέσεις $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\rho}{\rho'} = \rho \frac{d\theta}{d\rho}$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{d\rho}{ds}$ ή $\eta\mu\omega = \rho \frac{d\theta}{ds}$
- Μήκος πολικής υποεφαπτομένης $|\overline{OT}| = \frac{\rho^2}{\rho'} = \left| \frac{1}{(\rho^{-1})'} \right| = \rho \cdot \varepsilon\varphi\omega = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$
- Μήκος πολικής υποκαθέτου $|\overline{OK}| = \rho' = \rho \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{d\rho}{d\theta}$
- Μήκος της πολικής καθέτου $|\overline{KM}| = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$

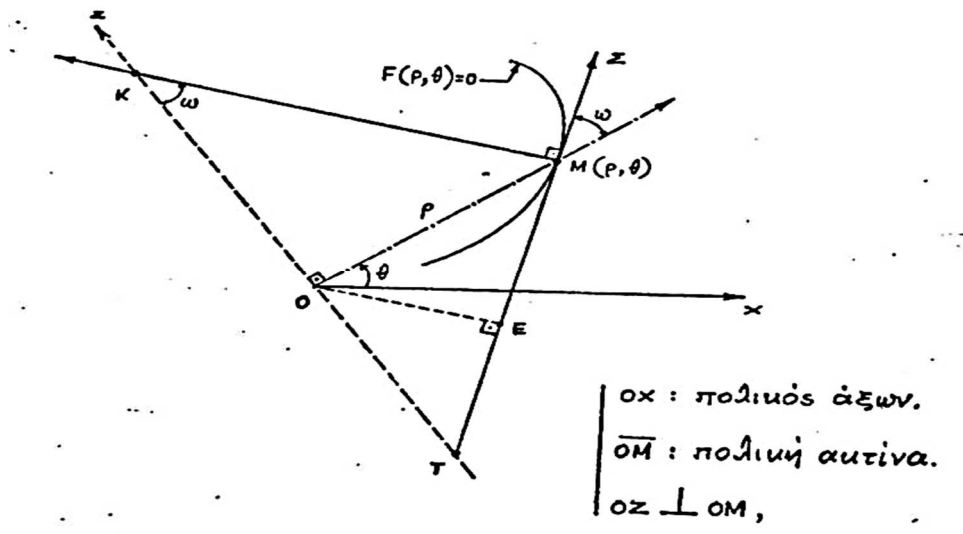
- Στοιχειώδεις εμβαδόν $dS = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$

- Απόσταση του πόλου από την εφαπτομένη $\overline{ME}$, $|\overline{OE}| = \rho \cdot \eta\mu\omega = \rho^2 \cdot \frac{d\theta}{ds}$

- Μήκος της πολικής εφαπτομένης $|\overline{TM}| = \rho \sqrt{1 + \rho^2 \frac{1}{(\rho')^2}} = \rho \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}$

- Μήκος του στοιχειώδους τόξου στο σημείο $M(\rho, \theta)$

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2} = d\theta \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2} = d\theta \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2}$$



Γράφημα 2 Καμπύλη σε πολικές συντεταγμένες

Εφαρμογή 1

Να βρεθεί η καμπύλη (c) , που η εφαπτομένη σε τυχόν σημείο της $M(x, y)$, είναι ανάλογη της $v^{\eta\varsigma}$ δύναμης της τετμημένης.

Λύση

Επειδή το μήκος της εφαπτομένης είναι $y \frac{dx}{dy}$, η διαφορική εξίσωση που ζητώ είναι η

$$y \frac{dx}{dy} = kx^v \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{k} \cdot \frac{dx}{x^v} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{k} \int x^{-v} dx \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{k} \cdot \frac{x^{1-v}}{1-v} + c \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| = \frac{1}{k} \cdot \frac{x^{1-v}}{1-v} + \ln c_1 \Leftrightarrow \ln \frac{|y|}{c} = \frac{1}{k} \cdot \frac{x^{1-v}}{1-v} \Leftrightarrow y = c \cdot e^{\frac{x^{1-v}}{k(1-v)}}$$

Εφαρμογή 2

Να βρεθεί η καμπύλη (c) , που η υποκάθετος, σε τυχόν σημείο της $M(x, y)$, είναι ανάλογη της τετμημένης.

Λύση

Επειδή το μήκος της υποκαθέτου είναι $y \frac{dy}{dx}$, η διαφορετική εξίσωση που ζητώ είναι η $y \frac{dy}{dx} = kx$, που είναι χωριζομένων μεταβλητών. Η $y \frac{dy}{dx} = kx$ γίνεται $y \, dk = kx \, dx \Leftrightarrow \int y \, dy = k \int x \, dx \Leftrightarrow y^2 = kx^2 + c_1$

Εφαρμογή 3

Να βρεθεί καμπύλη (c) του μέσου N του τμήματος TM , όπου M τυχόν σημείο της (c) και T το σημείο τομής της εφαπτομένης της (c) στο M με τον άξονα xx' , να βρίσκεται επί της διχοτόμου $y = x$

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $Y - y = y'(X - x)$

Στο T , για $Y = 0 \Rightarrow X = x - y \frac{dx}{dy}$, άρα οι συντεταγμένες του μέσου N είναι

$$\left(x - \frac{y \, dx}{2 \, dy}, \frac{y}{2} \right)$$

Επειδή το N βρίσκεται επί της διχοτόμου $y = x$, έχω $\frac{y}{2} = x - \frac{y \, dx}{2 \, dy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y}$ Η $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y}$ είναι ομογενής διαφορική

εξίσωση και θέτοντας $\begin{cases} x = x \\ \frac{y}{x} = u \end{cases}$ προκύπτει

$$x \frac{du}{dx} + u \frac{dx}{dx} = \frac{u}{2 - u} \Leftrightarrow x \frac{du}{dx} + u = \frac{u}{2 - u} \Leftrightarrow$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - u}{2 - u} \Leftrightarrow \frac{2 - u}{u(u - 1)} du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$-2 \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u - 1} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|u - 1| - 2 \ln|u| = \ln|x| + \ln c_1 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \frac{1}{c_1} (y - x)$$

Εφαρμογή 4

Να βρεθεί καμπύλη (c) , που το μέσον N του τμήματος KM , όπου M τυχαίο σημείο της (c) και K το σημείο τομής της καθέτου της (c) στο M με τον άξονα xx' , να βρίσκεται επί της παραβολής $y^2 = 2ax$

Λύση

Η εξίσωση της καθέτου είναι $Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$

Στο K , για $Y = 0 \Leftrightarrow X = x + y \frac{dy}{dx}$, οπότε οι συντεταγμένες του μέσου N είναι $\left(x + \frac{y}{2} \frac{dy}{dx}, \frac{y}{2}\right)$

Επειδή το N βρίσκεται επί της παραβολής $y^2 = 2ax$, έχω $\left(\frac{y}{2}\right)^2 = 2a\left(x + \frac{1}{2}y \frac{dy}{dx}\right) \Leftrightarrow y' - \frac{y}{4a} + 2xy^{-1} = 0$ που είναι διαφορική εξίσωση τύπου Bernoulli, με $g(x) = \frac{-1}{4a}x^0$, $h(x) = 2x$ και $\rho = -1$

Θέτω $\begin{cases} x = x \\ z = y^2 \end{cases}$ οπότε παίρνω τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$z' - \frac{z}{2a} + 4x = 0$ που έχει γενική λύση $z = c_1 e^{\frac{x}{2a}} + 8ax + 16a^2$ οπότε η γενική λύση της

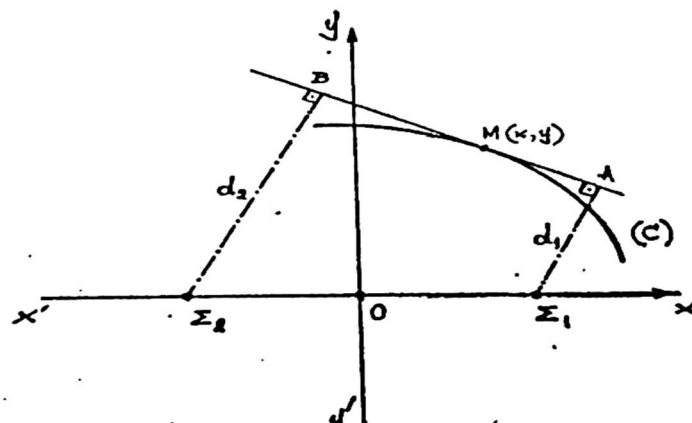
$y' - \frac{y}{4a} + 2xy^{-1} = 0$ είναι $y^2 = c_1 e^{\frac{x}{2a}} + 8ax + 16a^2$

Εφαρμογή 5

Έστω δύο σημεία Σ_1, Σ_2 που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $2c$. Να βρεθεί καμπύλη (c) , τέτοια που οι αποστάσεις d_1, d_2 των σημείων Σ_1, Σ_2 από όλες τις εφαπτόμενες της (c) να πληρούν τη σχέση $d_1 \cdot d_2 = b^2$ όπου b σταθερά.

Λύση

Έστω ως άξονας xx' η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Σ_1, Σ_2 και ως άξονας yy' η κάθετη στο μέσον O του τμήματος $\Sigma_1 \Sigma_2$. Οι συντεταγμένες αυτών των δυο σημείων είναι $\Sigma_1(c, 0), \Sigma_2(-c, 0)$



Γράφημα 3 Τόξο έλλειψης

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (c) στο $M(x, y)$ είναι $Y - y = y'(X - x) \Leftrightarrow$

$$y'X - Y + y - xy' = 0 \quad \text{οπότε οι αποστάσεις } d_1, d_2 \quad \text{είναι} \quad d_1 = \frac{cy' + y - xy'}{\sqrt{(y')^2 + 1}},$$

$$d_2 = \frac{-cy' + y - xy'}{\sqrt{(y')^2 + 1}} \quad \text{οπότε η } d_1 \cdot d_2 = b^2 \quad \text{δίνει} \quad \frac{cy' + y - xy'}{\sqrt{(y')^2 + 1}} \cdot \frac{-cy' + y - xy'}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = b^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(y - xy')^2 - c^2(y')^2}{(y')^2 + 1} = b^2 \Leftrightarrow$$

$$(y - xy')^2 - c^2(y')^2 = b^2(y')^2 + b^2 \Leftrightarrow$$

$$y = xy' + \sqrt{(b^2 + c^2)(y')^2 + b^2} \quad \text{η οποία για } b^2 + c^2 = a^2, \quad \text{δίνει την διαφορική εξίσωση} \quad y = xy' + \sqrt{a^2(y')^2 + b^2}, \quad \text{που είναι του τύπου Clairaut με } g(y') = \sqrt{a^2(y')^2 + b^2}$$

Η γενική λύση της $y = xy' + \sqrt{a^2(y')^2 + b^2}$ είναι $y = c_1x + \sqrt{a^2c_1^2 + b^2}$ και η ιδιάζουσα λύση της, είναι η $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ που είναι έλλειψη, με ημιάξονες a και b

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που το πρόβλημα μας έδινε τη σχέση $d_1 \cdot d_2 = -b^2$, αντί της $d_1 \cdot d_2 = b^2$, τότε η ιδιάζουσα λύση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης θα ήταν η καμπύλη $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ που είναι υπερβολή.

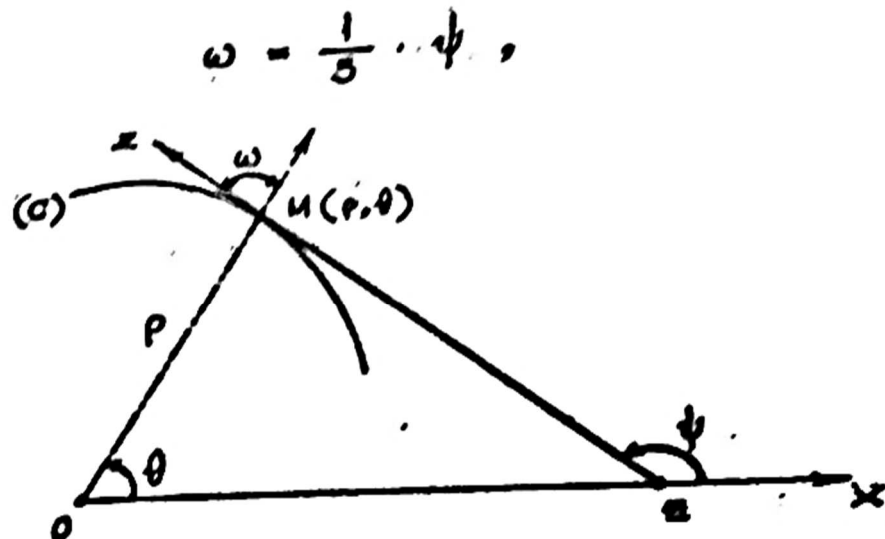
Εφαρμογή 6

Να βρεθεί η καμπύλη (c) , που σε κάθε σημείο της η γωνία της επιβατικής ακτίνας και της αντίστοιχης στο σημείο αυτό εφαπτομένης, είναι ίση με το $\frac{1}{3}$ της γωνίας κλίσης της εφαπτομένης.

Λύση

Έστω θ η γωνία κλίσης της επιβατικής ακτίνας, γ η γωνία κλίσης της εφαπτομένης και ω η γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο $M(\rho, \theta)$ της καμπύλης (c) , από την επιβατική ακτίνα και με την εφαπτομένη, στο ίδιο σημείο της καμπύλης. Επειδή, από το πρόβλημα, έχω $\omega = \frac{\gamma}{3}$ και από το σχήμα έχω $\gamma = \theta + \omega$,

$$\text{είναι } \omega = \frac{\theta + \omega}{3} = \frac{\theta}{2}$$



Γράφημα 4

Επειδή $\varepsilon\varphi\omega = \rho \frac{d\theta}{d\rho}$, από την $\omega = \frac{\theta}{2}$ παίρνω $\varepsilon\varphi\left(\frac{\theta}{2}\right) = \rho \frac{d\theta}{d\rho} \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \sigma\varphi\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$

Ολοκληρώνοντας την χωριζομένων μεταβλητών $\frac{d\rho}{\rho} = \sigma\varphi\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$, έχω την γενική της λύση που είναι μια οικογένεια καρδιοειδών.

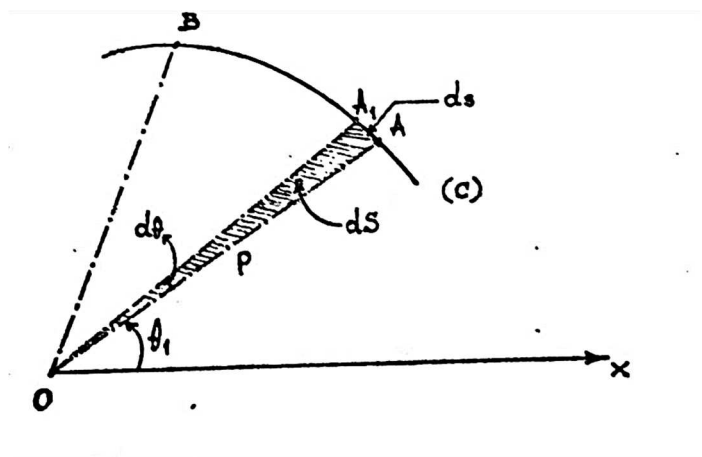
$$\ln \rho = 2 \ln \left(\eta \mu \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \ln c_1 \Leftrightarrow$$

$$\rho = c_1 \eta \mu^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = c_2 (1 - \sigma \nu \theta)$$

Εφαρμογή 7

Να προσδιοριστεί η καμπύλη (c), όταν ο κυκλικός τομέας, που σχηματίζεται από ένα τόξο της και από τις πολικές (επιβατικές) ακτίνες στα άκρα του, έχει μέτρο εμβαδού ίσο προς το μισό του μέτρου του μήκους, του αντίστοιχου τόξου.

Λύση



Γράφημα 5 Κυκλικός τομέας

Έστω ότι οι πολικές ακτίνες ορίζονται από θ_1 έως θ . Από τους τύπους $ds = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2} d\theta$ και $dS = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$ προκύπτει ότι $S = \frac{1}{2} s$ δηλαδή, $\frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2} d\theta \Leftrightarrow \rho^2 = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2} \Leftrightarrow d\rho = \pm \rho \sqrt{\rho^2 - 1} d\theta$

- Αν $\rho^2 - 1 \neq 0$, δηλαδή αν $\rho^2 \neq 1$, παίρνω την διαφορική εξίσωση $\frac{d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - 1}} = \pm d\theta$ της οποίας η γενική λύση είναι $\rho = \text{τεμ}(c \pm \theta)$

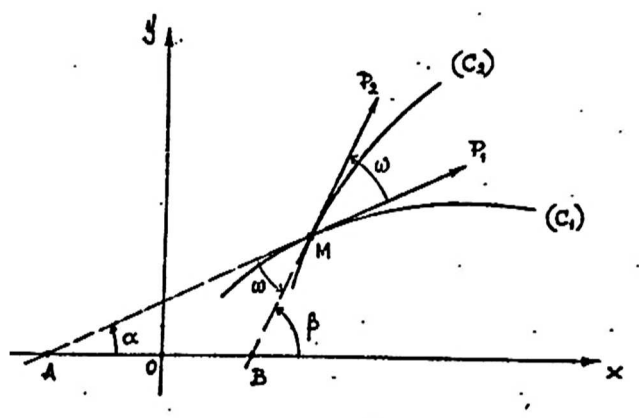
- Αν $\rho^2 - 1 = 0$, δηλαδή αν $\rho^2 = 1$, η $d\rho = \pm \rho \sqrt{\rho^2 - 1} d\theta$ γίνεται $d\rho = 0$ δηλαδή ο κύκλος $\rho = 1$ είναι λύση του προβλήματος,

Άρα, οι όροι του προβλήματος πληρούνται, από την οικογένεια $\rho = \text{τεμ}(c + \theta)$, που είναι η ίδια με την $\rho = \text{τεμ}(c - \theta)$ και από τον κύκλο $\rho = 1$.

1.3 Ισογώνιες και ορθογώνιες τροχιές

- Θα μελετήσω το ακόλουθο πρόβλημα «Να βρεθεί η οικογένεια των καμπυλών, που τέμνει την οικογένεια $f(x, y, c_1) = 0$ υπό σταθερή γωνία ω »

Έστω (C_1) , μια από τις καμπύλες της οικογένειας $f(x, y, c_1) = 0$, που τέμνει στο σημείο M την (C_2) , δηλαδή μια από τις καμπύλες της οικογένειας που ζητάμε, υπό τη γωνία $\omega = \angle(\overrightarrow{MP_1}, \overrightarrow{MP_2})$ όπου $\overrightarrow{MP_1}$ και $\overrightarrow{MP_2}$, είναι οι εφαπτόμενες των δυο αυτών καμπυλών (C_1) , (C_2) , στο σημείο M. Έστω ότι η $F(x, y, y') = 0$ είναι η διαφορική εξίσωση της οικογένειας $f(x, y, c_1) = 0$, που δόθηκε. Αρκεί να βρω μια διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης, που το γενικό της ολοκλήρωμα, θα δώσει τη ζητούμενη οικογένεια.



Γράφημα 6 Ισογώνιες τροχιές

Στο σχήμα, οι εφαπτόμενες $\overrightarrow{MP_1}$ και $\overrightarrow{MP_2}$ στο σημείο M, τέμνουν τον άξονα xx' αντίστοιχα, στα σημεία A, B. Από το τρίγωνο MAB, έχω ότι

$$\omega + \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta - \omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi(\beta - \omega) = \frac{\varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\omega}{1 + \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\omega}$$

Αν x_1, y_1 είναι οι συντεταγμένες των σημείων της ζητούμενης οικογένειας, προς διάκριση εκείνων των σημείων της $f(x, y, c_1) = 0$ που στο σημείο Μ είναι

$$x = x_1, y = y_1 \text{ έχω, στο σημείο ακριβώς αυτό ότι } \varepsilon\varphi\alpha = y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = k_1,$$

$\varepsilon\varphi\beta = y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = k_2$ είναι οι κλίσεις (οι συντελεστές κατεύθυνσης) των εφαπτομένων $\overrightarrow{MP_1}, \overrightarrow{MP_2}$

$$\text{Άρα, η } \varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi(\beta - \omega) = \frac{\varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\omega}{1 + \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\omega} \text{ από τις } \varepsilon\varphi\alpha = y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = k_1$$

$$\text{και } \varepsilon\varphi\beta = y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = k_2 \text{ γίνεται } y' = \frac{y'_1 - \varepsilon\varphi\omega}{1 + y'_1 \varepsilon\varphi\omega}$$

$$\text{Άρα, από την } F(x, y, y') = 0 \text{ προκύπτει } F\left(x_1, y_1, \frac{y'_1 - \varepsilon\varphi\omega}{1 + y'_1 \varepsilon\varphi\omega}\right) = 0 \text{ η οποία}$$

λόγω των $x = x_1, y = y_1$ γίνεται $F\left(x, y, \frac{y' - \varepsilon\varphi\omega}{1 + y' \varepsilon\varphi\omega}\right) = 0$ που είναι μια διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης, από την οποία, ολοκληρώνοντας, παίρνω την οικογένεια καμπυλών, που τέμνει την $f(x, y, c_1) = 0$ υπό σταθερή γωνία ω . Αν η σταθερή αυτή γωνία ω , που τέμνονται οι δυο οικογένειες, είναι $\omega = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, τότε $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{2} = \infty$.

$$\text{Επειδή } \omega = \beta - \alpha \Leftrightarrow \omega = \beta - \alpha \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(\beta - \alpha) = \frac{\varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\alpha} \text{ και από}$$

$$\varepsilon\varphi\alpha = y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = k_1, \quad \varepsilon\varphi\beta = y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = k_2 \text{ και } \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{2} = \infty \text{ προκύπτει}$$

$$\text{ότι } \infty = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}, \text{ η οποία για να ισχύει, πρέπει } 1 - k_2 \cdot k_1 = 0 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ δηλαδή}$$

$$(\text{πάλι από τις } \varepsilon\varphi\alpha = y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = k_1 \text{ και } \varepsilon\varphi\beta = y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = k_2)$$

$$y' \cdot y'_1 = -1 \Leftrightarrow y' = \frac{-1}{y'_1} \text{ Άρα, η } F(x, y, y') = 0 \text{ παίρνει τη μορφή } F\left(x_1, y_1, \frac{-1}{y'_1}\right) = 0$$

ή τελικά $F\left(x, y, \frac{-1}{y'}\right) = 0$, η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης, που ολοκληρώνοντας την, προκύπτει η οικογένεια των καμπυλών, που θα τέμνει την $f(x, y, c_1) = 0$ υπό γωνία ορθή. Οι γραμμές της οικογένειας αυτής, που θα

προκύψουν από την ολοκλήρωση της εξίσωσης $F\left(x, y, \frac{-1}{y'}\right) = 0$ ονομάζονται

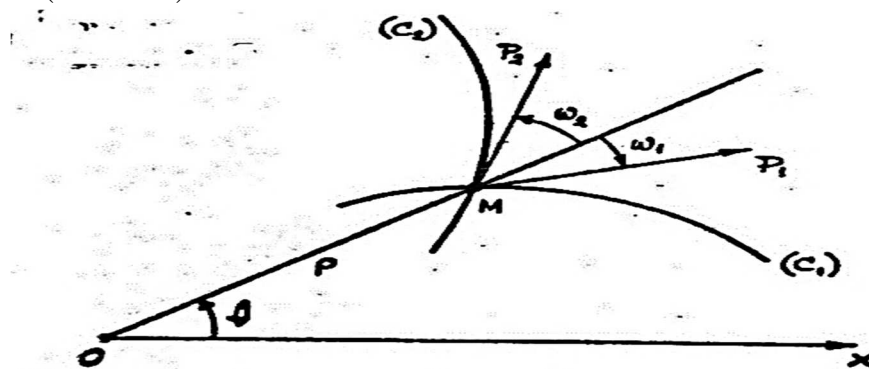
ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας $f(x, y, c_1) = 0$

- Θα μελετήσω το ίδιο πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες

Όπως με τις ορθογώνιες συντεταγμένες, έχω τη συνάρτηση $f(\rho, \theta, c_1) = 0$ που είναι η οικογένεια καμπυλών, η προερχόμενη από τη διαφορική εξίσωση $F(\rho, \theta, \theta') = 0$

Μία από αυτές τις καμπύλες είναι η (C_1) , η οποία τέμνεται υπό γωνία $\omega = \angle(\overline{MP_1}, \overline{MP_2}) = \omega_2 - \omega_1$ από την (C_2) , μια από τις καμπύλες της ζητούμενης οικογένειας $f(\rho_1, \theta_1, c_1) = 0$ η οποία προέρχεται από την διαφορική εξίσωση

$$F(\rho_1, \theta_1, \rho'_1) = 0 \quad \text{όπου} \quad \rho_1 = \rho, \quad \theta_1 = \theta$$



Γράφημα 7 Καμπύλη οικογένειας

Ακριβώς στο σημείο M της τομής, είναι $\varepsilon\varphi\omega_1 = \rho \frac{d\theta}{d\rho}$ και $\varepsilon\varphi\omega_2 = \rho_1 \frac{d\theta_1}{d\rho_1}$. Από το σχήμα προκύπτει ότι $\omega = \omega_2 - \omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2 - \omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi(\omega_2 - \omega) \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi\omega_1 = \frac{\varepsilon\varphi\omega_2 - \varepsilon\varphi\omega}{1 + \varepsilon\varphi\omega_2 \cdot \varepsilon\varphi\omega} \Leftrightarrow \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho_1 \frac{d\theta_1}{d\rho_1} - \varepsilon\varphi\omega}{1 + \rho_1 \frac{d\theta_1}{d\rho_1} \varepsilon\varphi\omega} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho_1 \frac{d\rho_1 + \rho_1 \cdot \varepsilon\varphi\omega \frac{d\theta_1}{d\rho_1}}{\rho_1 \cdot d\theta_1 - \varepsilon\varphi\omega d\rho_1} \quad \text{οπότε} \quad \eta \quad F(\rho_1, \theta_1, \rho'_1) = 0 \text{ γίνεται}$$

$$F\left(\rho_1, \theta_1, \rho_1 \frac{d\rho_1 + \rho_1 \cdot \varepsilon\varphi\omega \frac{d\theta_1}{d\rho_1}}{\rho_1 d\theta_1 - \varepsilon\varphi\omega d\rho_1}\right) = 0 \quad \text{η οποία, λόγω των } \rho_1 = \rho, \theta_1 = \theta, \text{ γίνεται}$$

$$F\left(\rho, \theta, \rho \frac{d\rho + \rho \cdot \varepsilon\varphi\omega \frac{d\theta}{d\rho}}{\rho d\theta - \varepsilon\varphi\omega d\rho}\right) = 0 \quad \text{που είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης}$$

με πολικές συντεταγμένες. Ολοκληρώνοντας την $F\left(\rho, \theta, \rho \frac{d\rho + \rho \cdot \varepsilon\varphi\omega \frac{d\theta}{d\rho}}{\rho d\theta - \varepsilon\varphi\omega d\rho}\right) = 0$,

παίρνω την οικογένεια καμπυλών, που τέμνει την $f(\rho, \theta, c_1) = 0$ υπό σταθερή γωνία ω . Αν αυτή η σταθερή γωνία ω , κατά την οποία τέμνονται οι δύο οικογένειες, είναι

$\omega = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ δηλαδή στην περίπτωση, που ζητώ τις ορθογώνιες τροχιές της

οικογένειας $f(x, y, c_1) = 0$, σε πολικές συντεταγμένες, έχω

$$\omega = \omega_2 - \omega_1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \omega_2 - \omega_1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\pi}{2} = \varepsilon\varphi(\omega_2 - \omega_1) \Leftrightarrow$$

$$\infty = \frac{\varepsilon\varphi\omega_2 - \varepsilon\varphi\omega_1}{1 + \varepsilon\varphi\omega_2 \cdot \varepsilon\varphi\omega_1} \Leftrightarrow 1 + \varepsilon\varphi\omega_2 \cdot \varepsilon\varphi\omega_1 = 0 \quad \text{οπότε λόγω των} \quad \varepsilon\varphi\omega_1 = \rho \frac{d\theta}{d\rho},$$

$$\varepsilon\varphi\omega_2 = \rho_1 \frac{d\theta_1}{d\rho_1} \text{ προκύπτει ότι } 1 + \rho_1 \frac{d\theta_1}{d\rho_1} \rho \frac{d\theta}{d\rho} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho_1}{d\theta_1} = -\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}, \quad \text{όποτε η}$$

$$F(\rho_1, \theta_1, \rho'_1) = 0 \text{ γίνεται } F = \left(\rho, \theta, -\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} \right) = 0 \text{ που είναι η διαφορική εξίσωση}$$

1^{ης} τάξης, από το γενικό ολοκλήρωμα της οποίας, θα πάρω την οικογένεια καμπυλών, που θα τέμνει την $f(\rho, \theta, c_1) = 0$ υπό ορθή γωνία.

Συμπέρασμα

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να βρω την οικογένεια των καμπυλών, σε ορθογώνιες (ή σε πολικές) συντεταγμένες, που τέμνουν τις καμπύλες μιας άλλης οικογένειας υπό σταθερή γωνία ω , διακρίνω τις εξής περιπτώσεις

- Αν η γωνία ω είναι τυχούσα, βρίσκω τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας που μου δίνεται, αντικαθιστώ σε αυτήν όπου y' (ή ρ') το $\frac{y' - \varepsilon\varphi\omega}{1 + y' \cdot \varepsilon\varphi\omega}$ (ή το

$\rho \frac{d\rho + \rho \cdot \varepsilon\varphi\omega \frac{d\theta}{d\rho}}{\rho \frac{d\theta}{d\rho} - \varepsilon\varphi\omega \frac{d\theta}{d\rho}}$) και τέλος ολοκληρώνω τη διαφορική εξίσωση που έχει προκύψει.

- Αν η γωνία ω είναι ορθή, βρίσκω τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας που μου δίνεται, αντικαθιστώ σε αυτήν όπου y' (ή ρ') το $\frac{-1}{y'}$ (ή το $-\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$) και τέλος ολοκληρώνω τη διαφορική εξίσωση που έχει προκύψει.

1.3.1 Εφαρμογές των ορθογώνιων τροχιών

Σε αρκετά προβλήματα φυσικής, εμφανίζονται δύο οικογένειες καμπυλών τέτοιες ώστε κάθε καμπύλη της μιας οικογένειας να τέμνει κάθετα, κάθε καμπύλη της άλλης οικογένειας. Π.χ. σε αστρόβιλο δυναμικό πεδίο (π.χ. πεδίο βαρύτητας ή ηλεκτροστατικό πεδίο) δυο διαστάσεων (δηλαδή πάνω σε ένα επίπεδο), οι τομές των ισοδυναμικών επιφανειών, αποτελούν μια οικογένεια καμπυλών που τέμνουν κάθετα τις δυναμικές γραμμές. Σε δισδιάστατα προβλήματα αστρόβιλης ροής ασυμπίεστου ρευστού, οι καμπύλες κατά μήκος των οποίων η ρευματική συνάρτηση είναι σταθερή, (δηλαδή οι ρευματικές γραμμές), τέμνουν κάθετα τις καμπύλες κατά μήκος των οποίων το δυναμικό της ταχύτητας είναι σταθερό.

Θεωρώ μια μονοπαραμετρική οικογένεια επιπέδων καμπυλών $F(x, y, c) = 0$ και αναζητώ μια άλλη μονοπαραμετρική οικογένεια επιπέδων καμπυλών $G(x, y, k) = 0$ με την ιδιότητα κάθε καμπύλη της οικογένειας $G(x, y, k) = 0$ να τέμνει κάθετα κάθε καμπύλη της οικογένειας $F(x, y, c) = 0$. Οι ζητούμενες καμπύλες, ονομάζονται ορθογώνιες τροχιές των καμπυλών της οικογένειας $F(x, y, c) = 0$. Βρίσκω πρώτα τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τις καμπύλες της αρχικής οικογένειας. Παραγωγίζοντας την $F(x, y, c) = 0$ ως προς x και

απαλείφοντας τη σταθερά c μεταξύ της $F(x, y, c) = 0$ και της εξίσωσης από την παραγωγή, παίρνω την $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Οι ορθογώνιες τροχιές της $F(x, y, c) = 0$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x, y)}$.

Ηλεκτρομαγνητισμός

Σε ένα δυσδιάστατο ηλεκτρικό (ή μαγνητικό) πεδίο, οι ισοδυναμικές του καμπύλες είναι εκείνες σε κάθε σημείο των οποίων το δυναμικό έχει σταθερή τιμή. Οι ορθογώνιες τροχιές, οι κάθετες στις ισοδυναμικές καμπύλες, δίνουν το ηλεκτρικό πεδίο. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο των ορθογωνίων τροχιών και κάθετο στις ισοδυναμικές καμπύλες.

Μηχανική των ρευστών

Θεωρώ τις ισοδυναμικές καμπύλες ενός ρευστού, δηλαδή εκείνες τις καμπύλες, σε κάθε σημείο των οποίων το δυναμικό του ρευστού παραμένει σταθερό. Οι ορθογώνιες τροχιές των ισοδυναμικών καμπυλών είναι οι ρευματικές γραμμές, οι οποίες αποτελούν τις τροχιές που ακολουθούν τα μόρια του ρευστού κατά τη διάρκεια της ροής του ρευστού.

Θερμική αγωγιμότητα

Έστω μεταλλική πλάκα, της οποίας τα σημεία δεν έχουν την ίδια θερμοκρασία. Οι καμπύλες σε κάθε σημείο των οποίων η θερμοκρασία έχει την ίδια τιμή, λέγονται ισοθερμικές. Η οικογένεια των ορθογωνίων καμπυλών, είναι οι καμπύλες κατά μήκος των οποίων διαδίδεται η θερμότητα.

Εφαρμογή 8

Να βρεθεί η οικογένεια των καμπυλών, που τέμνει τις ευθείες $y = cx$ υπό γωνία $\omega = 90^\circ$.

Λύση

Βρίσκω τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας $y = cx$. Δηλαδή παραγωγίζω την $y = cx$ ως προς x και έχω $y' = c$. Από τις $y = cx$ και $y' = c$ παίρνω την $y' = \frac{y}{x}$, που

είναι ζητούμενη διαφορική εξίσωση. Στην $y' = \frac{y}{x}$ αντικαθιστώ όπου y' , το

$$\frac{y' - \varepsilon\varphi\omega}{1 + y' \cdot \varepsilon\varphi\omega} \quad \text{και} \quad \text{γίνεται} \quad \frac{y' - \varepsilon\varphi 30^\circ}{1 + y' \cdot \varepsilon\varphi 30^\circ} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$y' = \frac{y + x \cdot \varepsilon\varphi 30^\circ}{x - y \cdot \varepsilon\varphi 30^\circ} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3\frac{y}{x} + \sqrt{3}}{3 - \frac{y}{x}\sqrt{3}} \quad \text{που είναι ομογενής διαφορική εξίσωση η οποία}$$

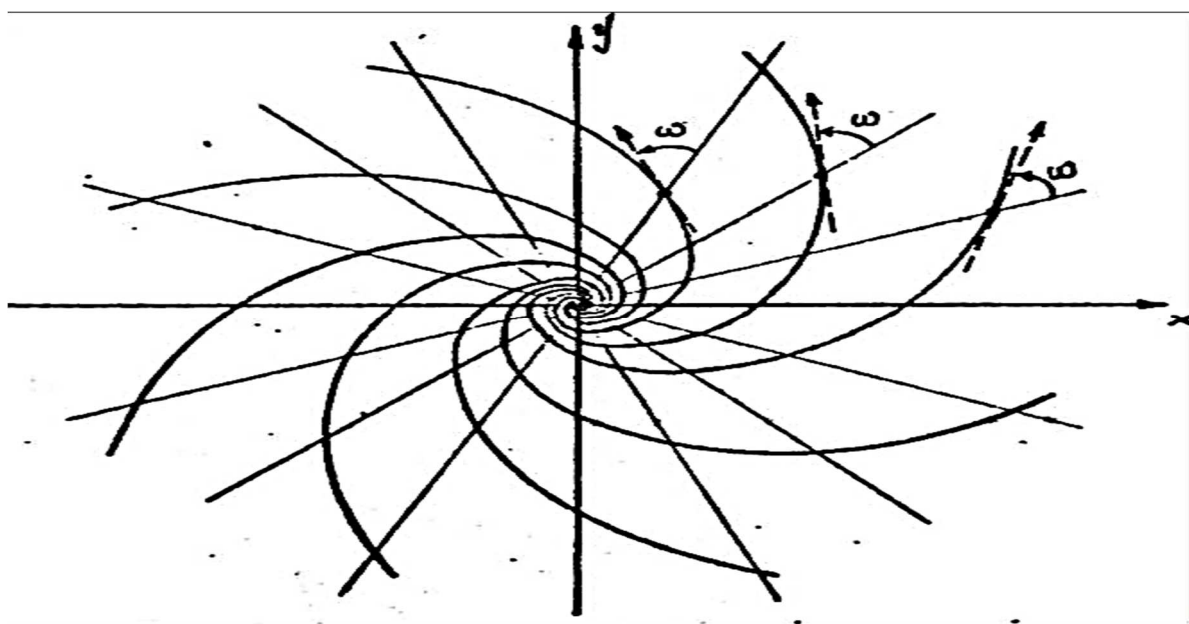
με την αντικατάσταση $x = x, \frac{y}{x} = u$ μετατρέπεται στη διαφορική εξίσωση

χωριζομένων μεταβλητών, $\frac{dx}{x} + \frac{(u - \sqrt{3}) du}{u^2 + 1} = 0$, που έχει γενική λύση

$$\ln(x\sqrt{u^2 + 1}) = \sqrt{3}\tau o \xi(\varepsilon \varphi u) + \ln c_1$$

Η $\ln(x\sqrt{u^2 + 1}) = \sqrt{3}\tau o \xi(\varepsilon \varphi u) + \ln c_1$, από την αντικατάσταση $x = x$, $\frac{y}{x} = u$,

γίνεται $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}\tau o \xi \varepsilon \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \ln c_1$ που είναι μία οικογένεια των καμπυλών, που τέμνει τις ευθείες $y = cx$ κατά γωνία 30°



Γράφημα 8 Οικογένεια καμπυλών

Παρατήρηση

Αν αντικαταστήσω με $\tau o \xi \varepsilon \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \theta \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \varepsilon \varphi \theta$ και $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ δηλαδή

με πολικές συντεταγμένες το (x, y) , τότε η $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}\tau o \xi \varepsilon \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \ln c_1$ γίνεται

$\ln \rho = \sqrt{3} \cdot \theta + \ln c \Leftrightarrow \rho = c \cdot e^{\sqrt{3} \cdot \theta}$ Άρα, η ζητούμενη οικογένεια των καμπυλών είναι μια οικογένεια λογαριθμικών ελίκων (του παραπάνω σχήματος).

Εφαρμογή 9

Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των παραβολών $y = cx^2$

Λύση

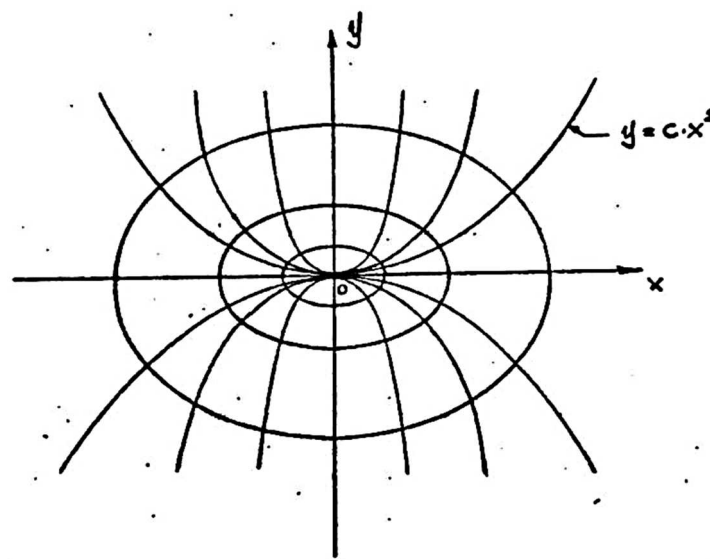
Βρίσκω τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας $y = cx^2$. Παραγωγίζοντας την $y = cx^2$ ως προς x , έχω $y' = 2cx$ οπότε, $c = \frac{y'}{2x}$ άρα, $y = cx^2 = \frac{y'}{2x} x^2 = \frac{y'}{2} x$ δηλαδή,

$y' = \frac{2y}{x}$ Στην $y' = \frac{2y}{x}$ αντικαθιστώ όπου y' , το $\frac{-1}{y'}$ και γίνεται

$$\frac{-1}{y'} = \frac{2y}{x} \Leftrightarrow \frac{-1}{y'y} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{-dx}{y dy} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow$$

$$y dy = \frac{-x dx}{2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{-1}{2} \frac{x^2}{2} + c_1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = c_2 \text{ όπου } c_2^2 = c_1$$

Η $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = c_2^2$ είναι η γενική λύση της $y dy = \frac{-x dx}{2}$, δηλαδή είναι η οικογένεια των καμπυλών, που τέμνει ορθογώνια την οικογένεια των παραβολών $y = cx^2$. Η οικογένεια $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = c_2^2$ όπως δείχνει το σχήμα, είναι μια οικογένεια ελλείψεων με $a = 2c_2$, $b = c_2\sqrt{2}$



Γράφημα 9 Οικογένεια ελλείψεων

Εφαρμογή 10

Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας $x^2 + y^2 = cx$

Λύση

Βρίσκω τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας $x^2 + y^2 = cx$.

Παραγωγίζω την $x^2 + y^2 = cx$ ως προς x και έχω $2x + 2y \cdot y' = c$ άρα,

$$x^2 + y^2 = (2x + 2y \cdot y')x \Leftrightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Για να βρω τις ορθογώνιες τροχιές της $x^2 + y^2 = cx$, αντικαθιστώ στην

$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ όπου y' , το $\frac{-1}{y'}$ και προκύπτει η ομογενής διαφορική εξίσωση

$$\frac{-1}{y'} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \text{ η οποία μετά από την αντικατάσταση } x = x, u = \frac{y}{x}$$

ανάγεται στη διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1-u^2)du}{u(1+u^2)} = \frac{du}{u(1+u^2)} - \frac{u \cdot du}{1+u^2} \text{ και επειδή}$$

$$\frac{1}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + \Gamma}{1+u^2} = \frac{1}{u} + \frac{(-1)u + 0}{1+u^2} \text{ προκύπτει ότι}$$

$$\frac{du}{u} - \frac{u \cdot du}{1+u^2} - \frac{u \cdot du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{du}{u} - \frac{2u \cdot du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} - \int \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

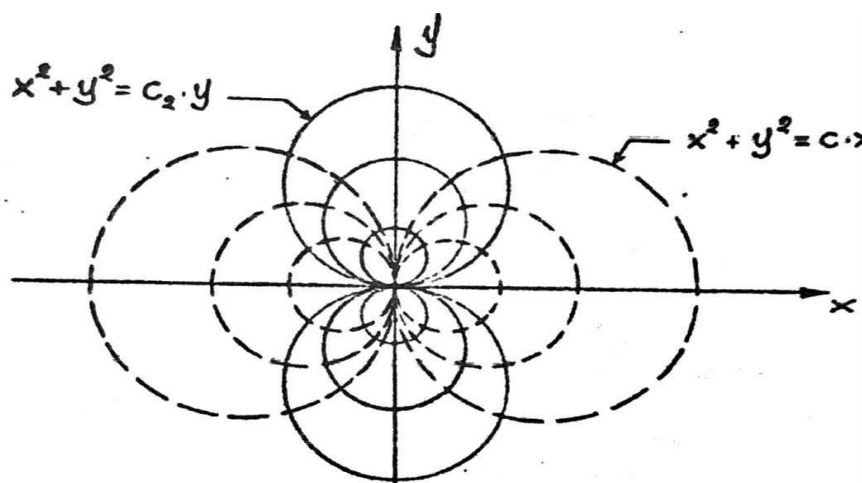
$$l\eta|u| - l\eta|u^2+1| = l\eta|x| + l\eta c_1 \Leftrightarrow$$

$$l\eta|u| - (l\eta|u^2+1| + l\eta|x|) = l\eta c_1 \Leftrightarrow l\eta \left| \frac{u}{x(u^2+1)} \right| = l\eta c_1 \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{u}{x(u^2+1)} \right| = c_1 \text{ η οποία μετά από την αντικατάσταση } x=x, u=\frac{y}{x} \text{ γίνεται}$$

$$x^2 + y^2 = c_2 y \text{ η οποία είναι η γενική λύση της } \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \text{ δηλαδή η οικογένεια}$$

των καμπυλών (κύκλων), η οποία τέμνει ορθογώνια την οικογένεια των κύκλων $x^2 + y^2 = cx$



Γράφημα 10 Οικογένεια κύκλων

Εφαρμογή 11

Να βρεθεί η οικογένεια των καμπυλών, που τέμνει τις καμπύλες $\rho = c \cdot e^{\frac{\theta}{2}}$ υπό σταθερή γωνία $\omega = 45^\circ$

Λύση

Βρίσκω τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας $\rho = c \cdot e^{\frac{\theta}{2}}$, των λογαριθμικών ελίκων. Παραγωγίζω δηλαδή την $\rho = c \cdot e^{\frac{\theta}{2}}$ ως προς θ και έχω $\rho' = \frac{c}{2} e^{\frac{\theta}{2}}$

Απαλείφοντας το c μεταξύ των $\rho = c \cdot e^{\frac{\theta}{2}}$ και $\rho' = \frac{c}{2} e^{\frac{\theta}{2}}$, παίρνω $\rho' = \frac{\rho}{2}$ που είναι η

ζητούμενη διαφορική εξίσωση που ζητώ. Στην $\rho' = \frac{\rho}{2}$ αντικαθιστώ όπου ρ' το

$$\rho \frac{d\rho + \rho \cdot \varepsilon\varphi\omega d\theta}{\rho d\theta - \varepsilon\varphi\omega d\rho} \text{ και } \text{όπου } \omega = 45^\circ, \text{ τότε προκύπτει}$$

$$\rho \frac{d\rho + \rho \cdot \varepsilon\varphi 45^\circ d\theta}{\rho d\theta - \varepsilon\varphi 45^\circ d\rho} = \frac{1}{2} \rho \Leftrightarrow$$

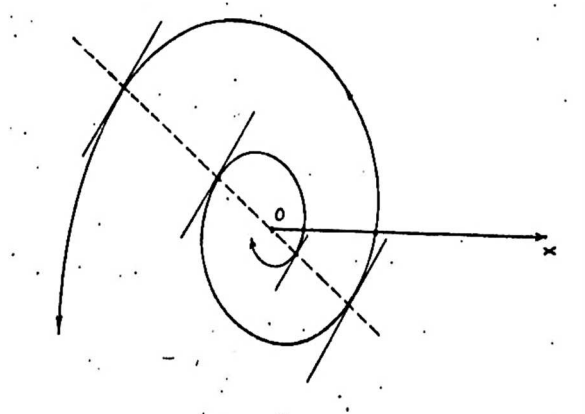
$$\frac{d\rho + \rho d\theta}{\rho d\theta - d\rho} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$d\theta = -3 \frac{d\rho}{\rho} \Leftrightarrow \int d\theta = -3 \int \frac{d\rho}{\rho} \Leftrightarrow \theta = -3 \ln|\rho| - 3c = \ln(c_1 \cdot \rho)^{-3} | \ln c_1 = c_1$$

Άρα, $c_1^{-3} \rho^{-3} = e^\theta \Leftrightarrow \rho^3 = c_1^{-3} e^{-\theta} \Leftrightarrow \rho = c_2 e^{\frac{-\theta}{3}}$ που είναι η γενική λύση της

$$\rho \frac{d\rho + \rho \cdot \varepsilon\varphi 45^\circ d\theta}{\rho d\theta - \varepsilon\varphi 45^\circ d\rho} = \frac{\rho}{2} \text{ δηλαδή η οικογένεια των καμπυλών (λογαριθμικών}$$

ελίκων), η οποία τέμνει την οικογένεια των ελίκων $\rho = c \cdot e^{\frac{\theta}{2}}$, υπό γωνία $\omega = 45^\circ$.



Γράφημα 11 Οικογένεια λογαριθμικών ελίκων

Εφαρμογή 12

Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας $\rho = c\sqrt{\eta\mu(2\theta)}$ με $c > 0$ και $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ των ανοικτών λημνίσκων του Bernoulli.

Λύση

Βρίσκω τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας $\rho = c\sqrt{\eta\mu(2\theta)}$, δηλαδή παραγωγίζω ως προς θ την εξίσωση $\rho^2 = c^2 \cdot \eta\mu(2\theta)$ που προέκυψε από την $\rho = c\sqrt{\eta\mu(2\theta)}$ και έχω $\rho \cdot \rho' = c^2 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\theta)$. Απαλείφοντας το c μεταξύ των $\rho^2 = c^2 \cdot \eta\mu(2\theta)$ και $\rho \cdot \rho' = c^2 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\theta)$, προκύπτει $\rho' = \rho \cdot \sigma\varphi(2\theta)$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση. Για τον υπολογισμό των ορθογώνιων τροχιών $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$ της

οικογένειας $\rho = c\sqrt{\eta\mu(2\theta)}$, αν αντικαταστήσω στην $\rho' = \rho \cdot \sigma\varphi(2\theta)$ όπου ρ' το

$$-\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} \text{ προκύπτει ότι } -\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} = \rho \cdot \sigma\varphi(2\theta) \Leftrightarrow$$

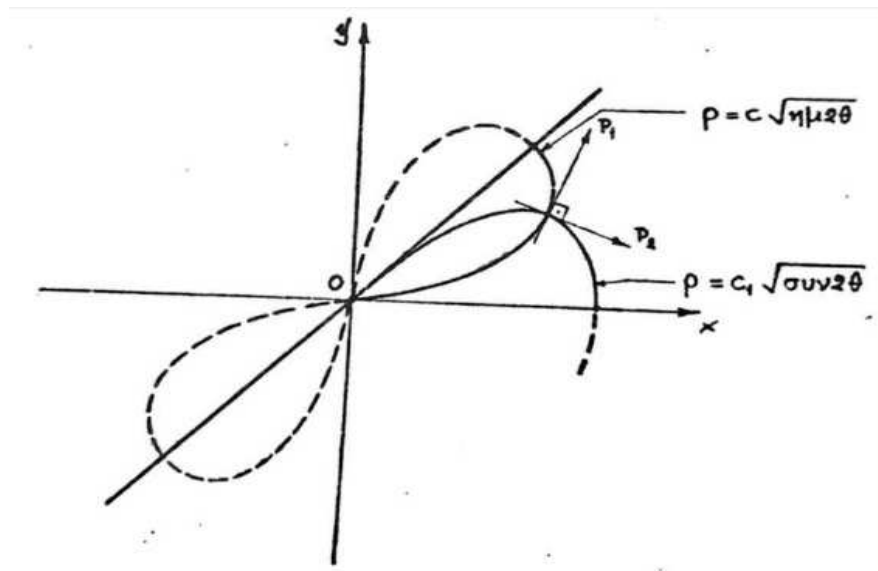
$$\varepsilon\varphi(2\theta) d\theta = -\frac{d\rho}{\rho} \Leftrightarrow \int \varepsilon\varphi(2\theta) d\theta = -\int \frac{d\rho}{\rho} \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{2} \ln(\sigma\upsilon\nu(2\theta)) = -\ln\rho - c \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{2} \ln(\sigma\upsilon\nu(2\theta)) = -\ln\rho + \ln c_1 \text{ όπου } -c = \ln c_1$$

$$\text{Άρα, } \rho = c_1 \sqrt{\sigma\upsilon\nu(2\theta)} \text{ που είναι η γενική λύση της } \varepsilon\varphi(2\theta) d\theta = -\frac{d\rho}{\rho}$$

δηλαδή είναι μια οικογένεια ανοικτών τετάρτων λημνίσκων του Bernoulli.



Γράφημα 12 Λημνίσκος του Bernoulli

2. Τεχνολογικές εφαρμογές

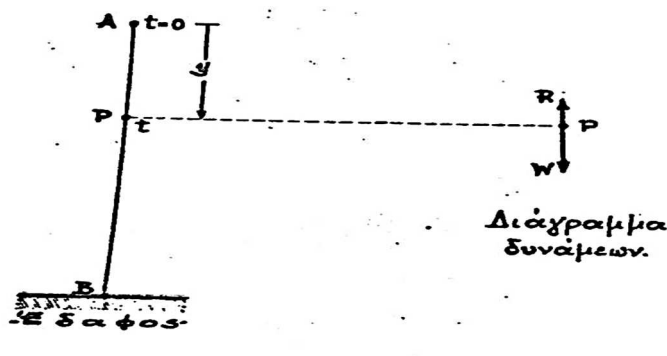
2.1 Μηχανική

Εφαρμογή 13

Αλεξιπτωτιστής πέφτει, ξεκινώντας από κατάσταση ηρεμίας. Το σύστημα αλεξιπτωτιστή – αλεξιπτωτου έχει βάρος W kg. Στο αλεξιπτωτο ενεργεί δύναμη, που οφείλεται στην αντίσταση του αέρα, ανάλογη κάθε στιγμή με την ταχύτητα, κατά τη διάρκεια της πτώσης. Αν ο αλεξιπτωτιστής πέφτει κατακόρυφα προς τα κάτω και το αλεξιπτωτο είναι ήδη ανοιχτό όταν αρχίζει το πήδημα, περιγράψτε την κίνηση που επακολουθεί.

Μαθηματική διατύπωση

Αρχικά, σχεδιάζω το φυσικό διάγραμμα.



Γράφημα 13 Πτώση αλεξιπτωτιστή

Έστω A η αρχή της κίνησης και AB η κατεύθυνση κατά τη θετική φορά του κατακόρυφου άξονα y . Οι δυνάμεις, που ενεργούν είναι το βάρος του συστήματος W (προς το έδαφος) και η αντίσταση R του αέρα (προς τα πάνω). Η συνισταμένη δύναμη, με κατεύθυνση θετική (προς τα κάτω), είναι ίση με $W - R$. Επειδή η R είναι ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητας, είναι $R = \beta \cdot |v|$ όπου β είναι η σταθερά της αναλογίας. Η ταχύτητα v είναι πάντοτε θετική, δηλαδή $|v| = v$, άρα η $R = \beta \cdot |v|$ γράφεται ως $R = \beta \cdot v$

Συνεπώς, η συνισταμένη δύναμη είναι $W - R = W - \beta \cdot v$. Από τον 2^ο νόμο του Newton, παίρνω $\frac{W}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = W - \beta \cdot v$. Επειδή ο αλεξιπτωτιστής ξεκινά από την ηρεμία (χωρίς αρχική ταχύτητα), δηλαδή $v = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, η πλήρης μαθηματική έκφραση της κίνησης του είναι $\frac{W}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = W - \beta \cdot v$ με $v = 0, t = 0$

Λύση

Η διαφορική εξίσωση $\frac{W}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = W - \beta \cdot v$ είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε έχω

$$\frac{W dv}{W - \beta \cdot v} = g \cdot dt \text{ και ολοκληρώνοντας προκύπτει } \frac{-W}{\beta} \cdot \ln(W - \beta \cdot v) = g \cdot t + c_1$$

$$\text{Όταν } v = 0, \text{ κατά τη χρονική στιγμή } t = 0, \text{ παίρνω } c_1 = \frac{-W \cdot \ln W}{\beta}$$

$$\text{Άρα, η } \frac{-W}{\beta} \cdot \ln(W - \beta \cdot v) = g \cdot t + c_1 \text{ γίνεται } \frac{-W}{\beta} \cdot \ln(W - \beta \cdot v) = g \cdot t - \frac{W}{\beta} \cdot \ln W \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{W}{W - \beta \cdot v} = \frac{\beta \cdot g \cdot t}{W} \Leftrightarrow v = \frac{W}{\beta} \left(1 - e^{-\beta \cdot g \cdot t / W} \right)$$

Από τη σχέση αυτή παρατηρώ ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{W}{\beta}$ (σταθερά)

Επίσης μπορώ να ορίσω το διάστημα πτώσης s , που διένυσε ο αλεξιπτωτιστής με το αλεξίπτωτο του, ως συνάρτηση του χρόνου. Επειδή $v = \frac{ds}{dt}$, η

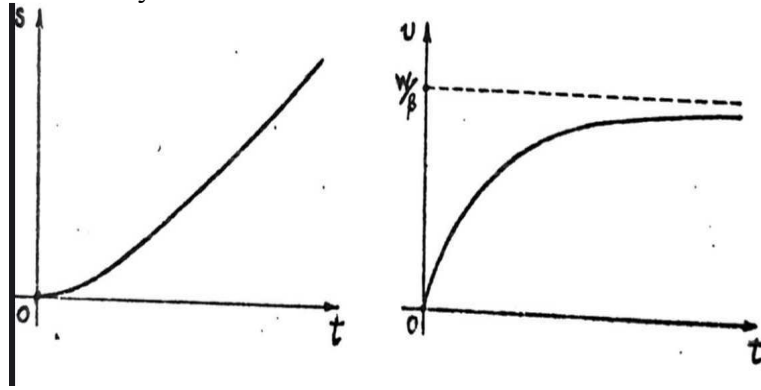
$$v = \frac{W}{\beta} \left(1 - e^{-\beta \cdot g \cdot t / W} \right) \text{ γίνεται } \frac{ds}{dt} = \frac{W}{\beta} \left(1 - e^{-\beta \cdot g \cdot t / W} \right) \Leftrightarrow ds = \frac{W}{\beta} \left(1 - e^{-\beta \cdot g \cdot t / W} \right) dt \text{ της οποίας}$$

$$\text{το ολοκλήρωμα είναι } s = \frac{W}{\beta} \left(t + \frac{W}{\beta \cdot g} e^{-\beta \cdot g \cdot t / W} \right) + c_2$$

Όταν $s = 0$, κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, η $s = \frac{W}{\beta} \left(t + \frac{W}{\beta \cdot g} e^{-\beta \cdot g \cdot t / W} \right) + c_2$

δίνει $c_2 = \frac{-W^2}{\beta^2 \cdot g}$ και γίνεται $x = \frac{W}{\beta} \cdot \left(t + \frac{W}{\beta \cdot g} \cdot e^{-\frac{\beta \cdot g \cdot t}{W}} - \frac{W}{\beta \cdot g} \right)$

Οι γραφικές παραστάσεις των συντεταγμένων $s = f_1(t)$, $v = f_2(t)$ είναι οι ακόλουθες.



Γράφημα 14 Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων

Εφαρμογή 14

Υλικό σημείο αφήνεται να πέσει μέσα σε υγρή μάζα με αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν. Η αντίσταση της μάζας είναι τέτοια, που η επιτάχυνση γ και η ταχύτητα v συνδέονται με τη σχέση $\gamma = g - 4v$. Ποια είναι η εξίσωση της κίνησης;

Μαθηματική διατύπωση

Επειδή ισχύει ότι $\gamma = \frac{dv}{dt}$, η $\gamma = g - 4v$ γίνεται $\frac{dv}{dt} = g - 4v \Leftrightarrow \frac{dv}{g - 4v} = dt$

Ολοκληρώνοντας, έχω $\ln(g - 4v) = -4t + g \Leftrightarrow$

$$g - 4v = g \cdot e^{-4t} \Leftrightarrow v = \frac{g}{4} (1 - e^{-4t})$$

Επειδή ισχύει ότι $v = \frac{ds}{dt}$, η $v = \frac{g}{4} (1 - e^{-4t})$ δίνει τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{ds}{dt} = \frac{g}{4} (1 - e^{-4t})$$

Λύση

Η διαφορική εξίσωση $\frac{ds}{dt} = \frac{g}{4} (1 - e^{-4t})$ όπως και η $\frac{dv}{g - 4v} = dt$, είναι χωριζόμενων

μεταβλητών. Ολοκληρώνοντας την, παίρνω $s = \frac{g}{16} (4t + e^{-4t} + c)$

Υποθέτοντας ότι $s = 0$ κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρίσκω $c = -1$ οπότε η εξίσωση της κίνησης είναι $s = \frac{g}{16} (4t + e^{-4t} - 1)$ Από την $v = \frac{g}{4} (1 - e^{-4t})$

παρατηρώ ότι, όταν $t \rightarrow \infty$, τότε η ταχύτητα έχει $\lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{g}{4}$

Εφαρμογή 15

Μια δύναμη F εφαρμόζεται σε ένα υλικό σημείο M μάζας m και το αναγκάζει να κινείται ευθύγραμμα πάνω στη διεύθυνση επενέργειας της. Στο M εφαρμόζεται επίσης μια αντίδραση R , ανάλογη με της ταχύτητάς του. Με τις αρχικές συνθήκες $v(0) = 0$ να βρεθεί η ταχύτητα του M για κάθε χρονική στιγμή t .

Λύση

Το M δέχεται μια δύναμη $F_{ολ}$ που είναι η συνισταμένη της F και της R . Δηλαδή $F_{ολ} = F - \alpha v$ όπου $\alpha = 0$ συντελεστής αναλογίας της ταχύτητας.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής είναι $m \frac{dv}{dt} = F - \alpha v$. Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, και γίνεται $m \frac{dv}{F - \alpha v} = dt$.

$$\text{Ολοκληρώνοντας έχω } \frac{-m}{a} \int \frac{d(F - \alpha v)}{F - \alpha v} = \int dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{-m}{a} \ln(F - \alpha v) = t + c \Leftrightarrow \ln(F - \alpha v) = \frac{-at}{m} - \frac{ac}{m} \Leftrightarrow$$

$$F - \alpha v = e^{\frac{-a}{m}(t+c)} \Leftrightarrow v = \frac{F - e^{\frac{-a}{m}(t+c)}}{a}$$

Για να προσδιορίσω τη σταθερά c , αντικαθιστώ τις αρχικές συνθήκες στη $v = \frac{F - e^{\frac{-a}{m}(t+c)}}{a}$ και βρίσκω $c = \frac{-m}{a} \ln F$. Την τιμή αυτή, την αντικαθιστώ στη $v = \frac{F - e^{\frac{-a}{m}(t+c)}}{a}$ και παίρνω τη ζητούμενη συνάρτηση της ταχύτητας.

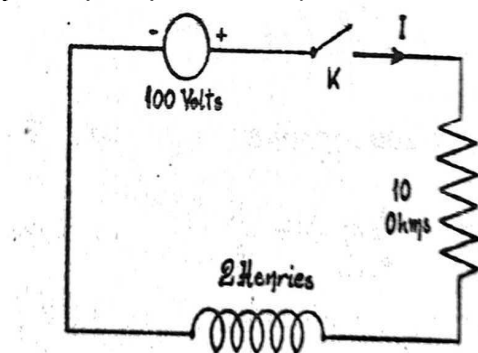
2.2 Ηλεκτρικά κυκλώματα

Εφαρμογή 16

Μια γεννήτρια έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) 100V και συνδέεται σε σειρά, με μια αντίσταση 10Ω και με μια επαγωγική αντίσταση 2 H . Αν ο διακόπτης K είναι κλειστός κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, να βρεθεί η διαφορική εξίσωση του ρεύματος και να προσδιοριστεί η ένταση ως προς το χρόνο t .

Μαθηματική διατύπωση

Σχεδιάζω το ηλεκτρικό κύκλωμα



Γράφημα 15 Ηλεκτρικό κύκλωμα RL

Αν I το ρεύμα (σε Α) που διατρέχει το κύκλωμα, έχω

- Τάση τροφοδοσίας 100V
- Πτώση τάσης από την ωμική αντίσταση $E_R = I \cdot R = 10 \cdot I$
- Πτώση τάσης από την επαγωγική αντίσταση $E_L = L \frac{dI}{dt} = 2 \frac{dI}{dt}$.
- Από τον αντίστοιχο κανόνα του Kirchhoff $E = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I \Leftrightarrow$

$$100 = 2 \frac{dI}{dt} + 10I \Leftrightarrow 50 = \frac{dI}{dt} + 5I \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} + 5I - 50 = 0$$

Εφόσον ο διακόπτης είναι κλειστός τη χρονική στιγμή $t = 0$, πρέπει να είναι $I = 0$

Λύση

Η $\frac{dI}{dt} + 5I - 50 = 0$ είναι γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με $g(t) = 5t^0$,

$$h(t) = -50t^0 \text{ οπότε } \int g(t) dt = 5 \int dt = 5t + c_1 \Leftrightarrow e^{\int g(t) dt} = e^{5t}, \quad e^{-\int g(t) dt} = e^{-5t},$$

$$\int h(t) e^{\int g(t) dt} dt = - \int 50 e^{5t} dt = -10 e^{5t} + c_2$$

Άρα, η γενική λύση της $\frac{dI}{dt} + 5I - 50 = 0$ είναι $I = (10e^{5t} + c_2)e^{-5t} = ce^{-5t} + 10$

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $I = 0$, η $I = ce^{-5t} + 10$ δίνει $c = -10$ Άρα, $I = 10(1 - e^{-5t})$

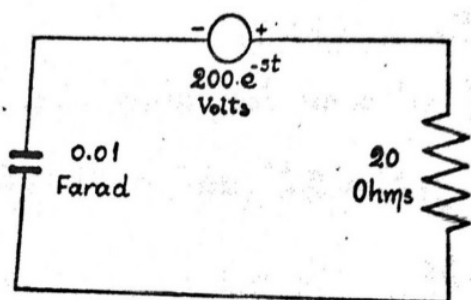
Εφαρμογή 17

Ένας τροφοδότης, που έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) $E = 200 \cdot e^{-5t}$ συνδέεται σε σειρά, με μία αντίσταση 200Ω και έναν πυκνωτή $0,001 \text{ F}$. Υποθέτοντας ότι $Q = 0$ όταν $t = 0$, να βρεθεί το φορτίο και η ένταση του ρεύματος την κάθε χρονική στιγμή. Δείξτε ότι το φορτίο λαμβάνει μια μέγιστη τιμή, υπολογίστε την και βρείτε πότε γίνεται αυτό.

Μαθηματική διατύπωση

Όπως φαίνεται στο σχήμα, έχω ρεύμα τροφοδοσίας $E = 200e^{-5t}$, πτώση τάσης από ωμική αντίσταση $E = 200e^{-5t}$, πτώση τάσης από τον πυκνωτή

$$E_c = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{0,01} = 100Q$$



Γράφημα 16 Ηλεκτρικό κύκλωμα RC

Άρα, ο κανόνας του Kirchhoff $I \cdot R + \frac{Q}{C} = E$ γίνεται $20I + 100Q = 200e^{-5t}$
 και επειδή $I = \frac{dQ}{dt}$ η $20I + 100Q = 200e^{-5t}$ γίνεται $20\frac{dQ}{dt} + 100Q = 200e^{-5t} \Leftrightarrow$
 $\frac{dQ}{dt} + 5Q - 10e^{-5t} = 0$

Λύση

Η $\frac{dQ}{dt} + 5Q - 10e^{-5t} = 0$ είναι γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με
 $g(t) = 5t, h(t) = -10e^{-5t}$ οπότε παίρνω $\int g(t) dt = 5 \int dt = 5t + c_1 \Leftrightarrow e^{\int g(t) dt} = e^{5t}$ και
 $e^{-\int g(t) dt} = e^{-5t}$
 $\int h(t) e^{\int g(t) dt} dt = - \int 10e^{-5t} e^{5t} dt = -10t + c_2$

Άρα, η γενική λύση της $\frac{dQ}{dt} + 5Q - 10e^{-5t} = 0$ είναι $Q = (c + 10t)e^{-5t}$
 Εφόσον κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $Q = 0$, από την $Q = (c + 10t)e^{-5t}$ παίρνω
 $c = 0$ άρα τότε είναι $Q = 10te^{-5t}$ και επειδή $I = \frac{dQ}{dt}$, είναι

$I = \frac{d(10te^{-5t})}{dt} = 10e^{-5t} - 50te^{-5t}$ που είναι η τιμή της έντασης του ρεύματος σε
 σχέση με τον χρόνο t . Για να βρω το $\max$ του Q , θέτω $\frac{dQ}{dt} = 0 \Leftrightarrow I = 0$ οπότε από

την $I = 10e^{-5t} - 50te^{-5t}$ έχω $10e^{-5t} - 50te^{-5t} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}$

Για $t = \frac{1}{5}$ η $Q = 10te^{-5t}$ δίνει $Q = 10 \frac{1}{5} e^{-5 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{2}{e} \approx 0,74 \text{ C}$

Εφαρμογή 18

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα περιλαμβάνει σε σειρά πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L , ωμική αντίσταση R , ηλεκτρική πηγή ΗΕΔ E και διακόπτη Δ . Να βρεθεί το ρεύμα i που διαρρέει το κύκλωμα κάθε χρονική στιγμή, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

Λύση

Μόλις κλείσει ο διακόπτης, δηλαδή μόλις κυκλοφορήσει ρεύμα στο κύκλωμα, τότε εμφανίζονται οι παρακάτω τάσεις:

α) στα άκρα του πηνίου $L \frac{di}{dt}$

β) στα άκρα της αντίστασης Ri

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Kirchhoff για τη τάση, έχω $L \frac{di}{dt} + Ri = E \Leftrightarrow$

$\frac{di}{dt} = \frac{-R}{L}i + \frac{E}{L}$ Η $\frac{di}{dt} = \frac{-R}{L}i + \frac{E}{L}$ είναι γραμμική, οπότε η γενική της λύση είναι

$$i = e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left[c + \int \frac{E}{L} e^{\int \frac{R}{L} dt} dt \right] \quad \text{ή} \quad i = e^{\frac{-R}{L}t} \left(c + \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} \right)$$

Για να προσδιορίσω τη σταθερά c , αντικαθιστώ στην $i = e^{\frac{-R}{L}t} \left(c + \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} \right)$ τις

αρχικές συνθήκες που είναι $c(0) = 0$ και παίρνω $c = -\frac{E}{R}$. Άρα, η μερική λύση της

$$\frac{di}{dt} = \frac{-R}{L}i + \frac{E}{L} \text{ είναι } i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{\frac{-R}{L}t} \right)$$

2.3 Γεωμετρική οπτική

Εφαρμογή 19 (Πρόβλημα του Biot)

Να βρεθεί καμπύλη (C) του επιπέδου έτσι που όλες οι φωτεινές ακτίνες, που εκπέμπονται από σταθερό σημείο O, αφού ανακλαστούν δύο φορές επί της (C), να διέρχονται και πάλι από το O.

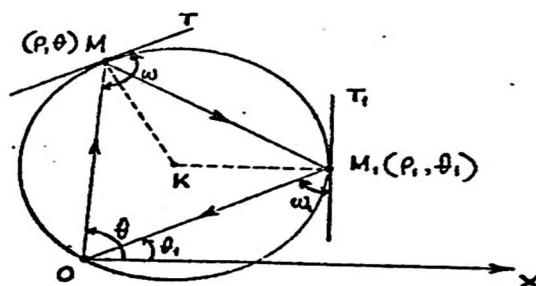
Μαθηματική διατύπωση

Λαμβάνοντας ως πόλο το σταθερό σημείο O, εργαζόμαστε σε πολικές συντεταγμένες, ως εξής: Έστω $M(\rho, \theta)$, $M_1(\rho_1, \theta_1)$ τα σημεία πρόσπτωσης μιας φωτεινής ακτίνας από το O και ω , ω_1 οι γωνίες που σχηματίζονται στα σημεία M , M_1 αντίστοιχα, από τις εφαπτόμενες της (C) στα σημεία αυτά και από τις πολικές ακτίνες OM, OM_1 , όπως στο παρακάτω σχήμα.

Είναι $\theta - \theta_1 = \omega - \omega_1 \Leftrightarrow \omega - \theta = \omega_1 - \theta_1 = \text{σταθερή} = \varphi$

Αν $\varepsilon\varphi\varphi = k$, τότε $\varepsilon\varphi(\omega - \theta) = k \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\omega - \varepsilon\varphi\theta}{1 + \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta} = k$ Από τη θεωρία ισχύει ότι

$$\varepsilon\varphi\omega = \rho \frac{d\theta}{d\rho}$$



Γράφημα 17 Πρόβλημα του Biot

$$\text{Συνεπώς, η } \frac{\varepsilon\varphi\omega - \varepsilon\varphi\theta}{1 + \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta} = k \text{ γίνεται } \frac{\rho \frac{d\theta}{d\rho} - \varepsilon\varphi\theta}{1 + \rho \frac{d\theta}{d\rho} \varepsilon\varphi\theta} = k \Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho d\theta - \varepsilon\varphi\theta d\rho}{d\rho + \rho \varepsilon\varphi\theta d\theta} = k \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\theta}{k + \varepsilon\varphi\theta} d\theta$$

Λύση

Η $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\theta}{k + \varepsilon\varphi\theta} d\theta$ είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και

δίνει γενικό ολοκλήρωμα $\ln\rho = \ln(k\sigma\nu\theta + \eta\mu\theta) + \ln c_1 \Leftrightarrow \rho = c_1 (k\sigma\nu\theta + \eta\mu\theta)$

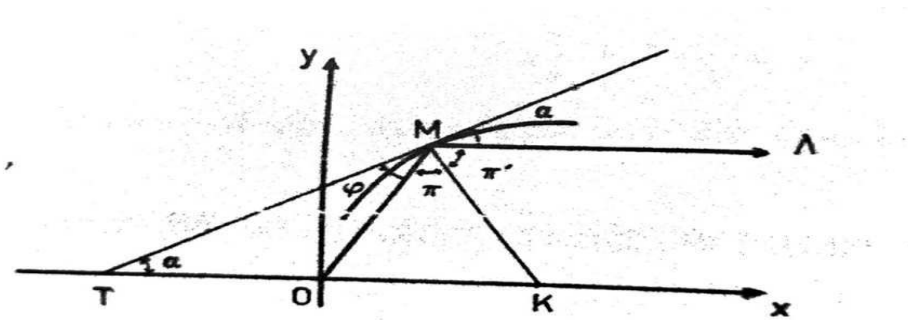
Αυτή η οικογένεια των καμπυλών είναι μια οικογένεια κύκλων, που διέρχονται από το Ο.

Εφαρμογή 20

Ένα κάτοπτρο που έχει την ιδιότητα να ανακλά τις ακτίνες μιας φωτεινής πηγής κατά παράλληλη δέσμη ορισμένες διεύθυνσης, κόβεται από ένα επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής του. Να βρεθεί η εξίσωση της τομής αυτού.

Λύση

Ζητώ την εξίσωση $y = f(x)$ της καμπύλης (τομής) του κατόπτρου. Θεωρώ τη πηγή Ο ως αρχή του ορθοκανονικού συστήματος των συντεταγμένων και ως οριζόντιο άξονα των x , τη διεύθυνση της δέσμης των παράλληλων ακτίνων. Έστω ΟΜ μια φωτεινή ακτίνα, που η ανακλώμενη της είναι η ΛΜ. Στο Μ φέρνω την εφαπτομένη της καμπύλης και την κάθετη σε αυτή ΜΚ. Επειδή η γωνία προσπτώσεως είναι ίση με τη γωνία ανακλάσεως π , θα είναι ίσες και οι συμπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή $\hat{\phi} = \hat{\alpha}$. Η $\angle xOM = 2\alpha$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΜΟΤ.



Γράφημα 18 Ανάκλαση φωτεινής ακτίνας σε κάτοπτρο

Άρα, $\varepsilon\varphi(\angle xOM) = \varepsilon\varphi(2\alpha)$. Από $\varepsilon\varphi(2\alpha) = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$, είναι $\varepsilon\varphi(\angle xOM) = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$

Από το τρίγωνο ΟΚΜ είναι $\varepsilon\varphi(\angle xOM) = \frac{y}{x}$, άρα $\frac{y}{x} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$

Είναι $y' = \varepsilon\varphi\alpha$, άρα $\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - (y')^2}$, άρα $\frac{y}{x} = \frac{1}{2y'} - \frac{y'}{2}$, άρα $y = 2xy' + y(y')^2$

Η $y = 2xy' + y(y')^2$ είναι η διαφορική εξίσωση της ζητούμενης καμπύλης. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη αυτής επί y παίρνω $y^2 = 2xyy' + (yy')^2$. Με τον μετασχηματισμό $z = y^2$, η $y^2 = 2xyy' + (yy')^2$ γίνεται $z = 2xyy' + (yy')^2$ και επειδή $z' = 2yy'$, είναι $z = xz' + (yy')^2$.

$$\text{Όμως } z = y^2 \Leftrightarrow z' = 2yy' \Leftrightarrow \frac{z'}{2} = yy' \Leftrightarrow \frac{(z')^2}{4} = (yy')^2$$

Άρα, $z = xz' + \frac{(z')^2}{4}$ η οποία είναι διαφορική εξίσωση του Clairaut με γενική λύση

$z = cx + \frac{c^2}{4}$ Από $z = y^2$ η $z = cx + \frac{c^2}{4}$ γίνεται $y^2 = cx + \frac{c^2}{4}$ η οποία είναι η εξίσωση μιας οικογένειας παραβολών.

2.4 Διαλύματα

Εφαρμογή 21

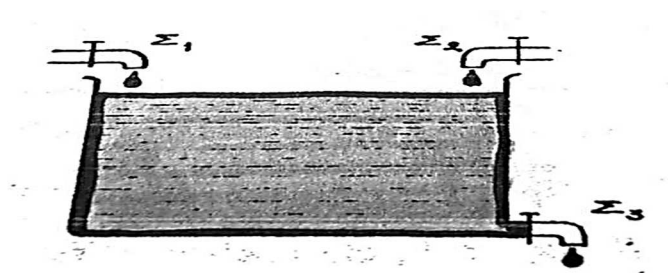
Το δοχείο του παρακάτω σχήματος, χωρητικότητας $V \text{ m}^3$ είναι γεμάτο με καθαρό νερό και οι στρόφιγγες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι κλειστές. Αν το νερό που παρέχει στο δοχείο η Σ_1 είναι καθαρό, ενώ η Σ_2 αναμειγμένο με αλάτι υπό αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ και

οι παροχές των Σ_1, Σ_2 είναι $\beta \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$ ενώ της Σ_3 είναι $2\beta \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$, να βρεθεί η ποσότητα του αλάτος στο δοχείο, μετά από χρόνο $t \text{ sec}$ από το ταυτόχρονο άνοιγμα των $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Υποθέτω ότι κάθε στιγμή η ανάμειξη αλάτος και νερού είναι τέλεια και η ροή είναι ομοιόμορφη.

Μαθηματική διατύπωση

Αν η στιγμή του σύγχρονου ανοίγματος των $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι η αρχή μέτρησης του χρόνου υποθέτω ότι μετά πάροδο $t \text{ sec}$ υπάρχουν στο δοχείο $x \text{ gr}$ αλάτι. Τότε, η ανά μονάδα όγκου περιεχόμενη στο δοχείο ποσότητα (ή συγκέντρωση) αλάτος είναι $\frac{x}{V}$. Άρα, η ζητούμενη διαφορική εξίσωση διατυπώνεται ως εξής $\frac{dx}{dt} = a - 2\beta \frac{x}{V}$,

$$0 \leq x < +\infty \text{ ή } \frac{dx}{dt} + 2\beta \frac{x}{V} - a = 0$$



Γράφημα 19 Δεξαμενή νερού με 3 στρόφιγγες

Λύση

Η $\frac{dx}{dt} + 2\beta \frac{x}{V} - a = 0$ είναι γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με

$g(t) = 2\beta \frac{1}{V} t^0$, $h(t) = -at^0$ οπότε η γενική λύση της είναι $x = \frac{aV - ce^{-\frac{2\beta}{V}t}}{2\beta}$ με

$0 \leq t < +\infty$ και $c \neq 0$ Αν $c = 0$ τότε έχω μια μερική λύση, την $x = \frac{aV}{2\beta}$. Στο παρών

πρόβλημα, πρέπει για $t = 0$ να έχω $x = 0$, οπότε η $x = \frac{aV - ce^{-\frac{2}{V}t}}{2\beta}$ δίνει $c = aV$

Αρα, η λύση του προβλήματος δίνεται από τον τύπο $x = \frac{aV}{2\beta} \left(1 - e^{-\frac{2}{V}t} \right)$

2.5 Θερμότητα – θερμοδυναμική

Εφαρμογή 22

Ένας μακρύς χαλύβδινος σωλήνας, ειδικής θερμικής αγωγιμότητας $k = 0,15$ μονάδες στο μετρικό σύστημα C.G.S (cm, gr, sec) έχει εσωτερική ακτίνα 10 cm και εξωτερική ακτίνα 20 cm . Η εσωτερική επιφάνεια, διατηρείται στους 200° C ενώ η εξωτερική επιφάνεια στους 50° C . Να βρεθούν:

- Η θερμοκρασία, ως συνάρτηση της απόστασης r από τον κοινό άξονα των ομόκεντρων κυλίνδρων.

- Η θερμοκρασία, για $r = 15 \text{ cm}$

- Η θερμότητα που χάνεται ανά λεπτό, σε ένα κομμάτι σωλήνα, μήκους 20 m .

Μαθηματική διατύπωση

Είναι φανερό ότι η ισόθερμες επιφάνειες είναι οι ομόκεντροι κύλινδροι. Το εμβαδόν της καθεμιάς τους, όταν έχει ακτίνα r και μήκος ℓ είναι $S = 2\pi r\ell$.

Η ποσότητα της θερμότητας που διέρχεται δια μέσου μίας επιφάνειας εμβαδού A , ανά μονάδα χρόνου, δίνεται από τον τύπο $Q = -kA \frac{dv}{d\eta}$ όπου:

- v , η θερμοκρασία κάθε ισόθερμης επιφάνειας και
- $d\eta$ η απόσταση των επιφανειών αυτών.

Ο τύπος $Q = -kA \frac{dv}{d\eta}$, από τον $S = 2\pi r\ell$, γίνεται $Q = -k(2\pi r\ell) \frac{dv}{d\eta}$ και με

αντικατάσταση των τιμών με $k = 0.15$ $\ell = 20 \text{ m} = 200 \text{ cm}$ $\eta = r$ προκύπτει

$$Q = -600\pi r \frac{dv}{dr}$$

Στην $Q = -600\pi r \frac{dv}{dr}$ το Q είναι σταθερό, οπότε από τα δεδομένα του προβλήματος έχω $v_1 = 200^\circ \text{ C}$, $r_1 = 10 \text{ cm}$, $v_2 = 50^\circ \text{ C}$, $r_2 = 20 \text{ cm}$

Λύση

Η διαφορική εξίσωση $Q = -600\pi r \frac{dv}{dr}$ είναι χωριζομένων μεταβλητών,

γράφεται ως $-600\pi dv = Q \frac{dr}{r}$ οπότε ολοκληρώνοντας την, παίρνω

$$-600\pi v = Q \ln r + c$$

- Αρα, λόγω των $v_1 = 200^\circ \text{ C}$, $r_1 = 10 \text{ cm}$, $v_2 = 50^\circ \text{ C}$, $r_2 = 20 \text{ cm}$, η $-600\pi \cdot v = Q \cdot \ln r + c$ δίνει

$$\begin{cases} -600\pi 200 = Q \ln 10 + c \\ -600\pi 50 = Q \ln 20 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q = 408.000 \\ c = -1.317.000 \end{cases}$$

Οπότε, από την $-600\pi v = Q \ln r + c$, βρίσκω $v = 699 - 216 \ln r$ που είναι η ζητούμενη συνάρτηση, $v = f(r)$

- Αν $r = 15 \text{ cm}$, από την $v = 699 - 216 \ln r$ βρίσκω $v = 114^\circ \text{ C}$
- Η θερμότητα που χάνεται ανά λεπτό σε κομμάτι σωλήνα μήκους 20 m είναι

$$Q = 408.000 \frac{\text{cal}}{\text{sec}} = \frac{408.000 \text{ cal}}{\frac{1}{60} \text{ min}} = 24.480.000 \frac{\text{cal}}{\text{min}}$$

Εφαρμογή 23

Έστω ότι ο συντελεστής της ειδικής θερμότητας του ατμοσφαιρικού αέρα κατά την μετατροπή υπό σταθερή πίεση, είναι $c' = a + \beta t$ όπου $a = 0,241$ και $\beta = 0,0000313$.

Ποια ποσότητα Q θερμίδων απαιτείται για την ανύψωση της θερμοκρασίας 1 kg ατμοσφαιρικού αέρα, υπό σταθερή πίεση, από $t_1 = 20^\circ \text{ C}$ σε $t_2 = 780^\circ \text{ C}$;

Μαθηματική διατύπωση

Το όριο του $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ όταν το $\Delta t \rightarrow 0$ ονομάζεται συντελεστής ειδικής θερμότητας, που σε

κάποια θερμοκρασία t , δίνεται από τον τύπο $\lambda = \frac{dQ}{dt}$

Είναι $\lambda = c' = a + \beta \cdot t$ και ο τύπος $\lambda = \frac{dQ}{dt}$ γίνεται $\frac{dQ}{dt} = a + \beta \cdot t$

Λύση

Η $\frac{dQ}{dt} = a + \beta \cdot t$ είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και η

$$\text{λύση της είναι } Q = \int_{t_1}^{t_2} (a + \beta t) dt = a(t_2 - t_1) + \frac{\beta}{2}(t_2^2 - t_1^2) = \left(a + \beta \frac{t_2 + t_1}{2}\right)(t_2 - t_1)$$

$$\text{Αν θέσω } \frac{t_2 + t_1}{2} = t_\mu, \text{ τότε η } Q = \left(a + \beta \frac{t_2 + t_1}{2}\right)(t_2 - t_1) \text{ γίνεται}$$

$Q = (a + \beta t_\mu)(t_2 - t_1) = c'_\mu(t_2 - t_1)$ όπου c'_μ ο συντελεστής της μέσης ειδικής θερμότητας και βρίσκω $c'_\mu = a + \beta t_\mu = 0,25352$ οπότε $Q = 192,675 \text{ cal}$

2.6 Μηχανική των υγρών

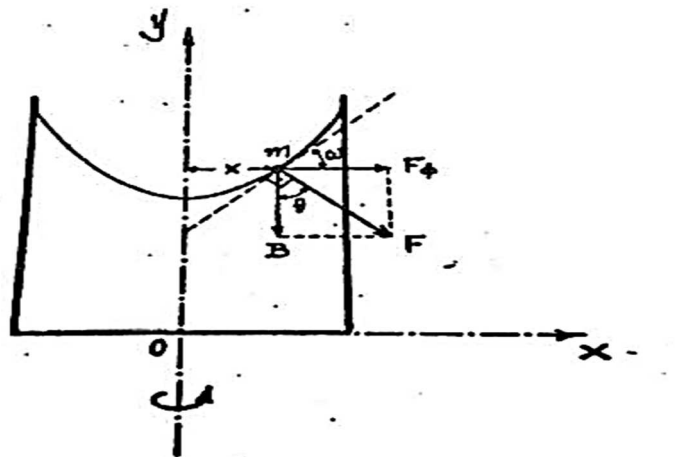
Εφαρμογή 24

Κυλινδρικό δοχείο περιέχει υγρό (νερό ή λάδι ή υδράργυρο) και περιστρέφεται περί τον άξονα του, κατακόρυφα, με μεγάλη ταχύτητα. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης της υγρής επιφάνειας του, όταν η σταθερή γωνιακή ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται το δοχείο είναι ω .

Μαθηματική διατύπωση

Κατά την περιστροφή το υγρό, στο κέντρο θα πλησιάζει προς τον πυθμένα, ενώ στα τοιχώματα θα τείνει να υψωθεί προς τα χείλη του δοχείου, λόγω της αδράνειας. Έστω μικρή μάζα m του υγρού, που απέχει από τον άξονα απόσταση x . Στη μάζα m επιδρούν δυο δυνάμεις:

- Το βάρος της $B = mg$, με διεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω και
- Η φυγόκεντρος δύναμη $F_\phi = m\omega^2 x$, με οριζόντια διεύθυνση.



Γράφημα 20 Περιστροφή δοχείου με υγρό, περί κατακόρυφο άξονα

Υπό την επενέργεια των δύο αυτών δυνάμεων η m παραμένει στη θέση αυτή (σε απόσταση x από τον άξονα και στο ίδιο ύψος από τον πυθμένα). Επίσης, λόγω της σταθερής ταχύτητας ω , η μορφή της επιφάνειας του υγρού παραμένει σταθερή. Άρα η συνισταμένη F , των δύο αυτών δυνάμεων θα είναι κάθετη επί το εφαπτόμενο, στο αντίστοιχο σημείο, επίπεδο της επιφάνειας του υγρού. Όπως προκύπτει από το σχήμα για τις γωνίες $\omega = \theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\theta$

Αν η καμπύλη επιφάνειας του υγρού είναι της μορφής $y = f(x)$, έχω $\varepsilon\varphi\omega = \frac{dy}{dx}$ και $\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_\phi}{B} = \frac{\omega^2 x}{g}$ οπότε η $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\theta$, από τις $\varepsilon\varphi\omega = \frac{dy}{dx}$ και $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\omega^2 x}{g}$, γίνεται $\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$

Λύση

Η $\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$ είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται $dy = \frac{\omega^2 x}{g} dx$ που ολοκληρώνοντας την παίρνω την $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + c$ η οποία είναι μία παραβολή με άξονα Oy .

2.7 Δημογραφία

Εφαρμογή 25

Ο πληθυσμός μιας χώρας διπλασιάζεται κάθε 50 έτη. Σε πόσα χρόνια θα τριπλασιαστεί, αν η ταχύτητα, με την οποία αυξάνεται, είναι ανάλογη προς τον αριθμό των κατοίκων αυτής της χώρας;

Μαθηματική λύση

Έστω x ο πληθυσμός της χώρας κατά τον χρόνο t και x_0 ο πληθυσμός της κατά τον χρόνο t_0 . Αν στο χρονικό διάστημα dt , η αύξηση του πληθυσμού είναι dx , τότε η ταχύτητα αύξησης είναι $\frac{dx}{dt}$. Αν k είναι ο συντελεστής αναλογίας, τότε σύμφωνα με το πρόβλημα, έχω $\frac{dx}{dt} = kx$.

Λύση

Η $\frac{dx}{dt} = kx$ είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και γίνεται $\frac{dx}{x} = k \cdot dt$, με ολοκλήρωμα $x = ce^{kt}$

Για να υπολογίσω το k , για $t = 0$ είναι $x = x_0$, άρα $x_0 = c \Leftrightarrow x = x_0 e^{kt}$

Από τα δεδομένα έχω ότι αν $t = 50$ τότε $x = 2 \cdot x_0$ άρα, από $x = x_0 e^{kt}$ έχω $2x_0 = x_0 e^{50k} \Leftrightarrow e^{50k} = 2$

Στο τέλος της ζητούμενης περιόδου t , πρέπει να είναι $x = 3x_0$ οπότε η $x = ce^{kt}$ δίνει $e^{kt} = 3 \Leftrightarrow e^{50kt} = 3^{50} \Leftrightarrow e^{(50k)t} = 3^{50}$ οπότε από την $e^{50k} = 2$ προκύπτει ότι $t \log 2 = 50 \log 3 \Leftrightarrow t = 50 \frac{\log 3}{\log 2} \Leftrightarrow t = 79$

Συνεπώς, ο πληθυσμός θα τριπλασιασθεί μετά από 79 έτη.

2.8 Χημεία

Εφαρμογή 26

Δύο χημικές ουσίες A, B αντιδρούν και δίνουν μία τρίτη ουσία Γ. Βρέθηκε ότι η ταχύτητα με την οποία δημιουργείται η Γ, εξαρτάται από το γινόμενο των συγκεντρώσεων των A, B την κάθε χρονική στιγμή. Για τη δημιουργία της Γ, απαιτούνται 2 lb από την A για κάθε lb (pound) του B.

Αν υπάρχουν αρχικά 10 lb του A και 20 lb του B και αν δημιουργούνται 6 lb από την Γ σε 20 min, να βρεθεί η ποσότητα της χημικής ουσίας Γ για κάθε χρονική στιγμή.

Μαθηματική διατύπωση

Αν x lb είναι η ποσότητα της Γ, που δημιουργείται σε χρόνο t ωρών, τότε $\frac{dx}{dt}$ είναι η ταχύτητα του σχηματισμού της. Για να πάρω x lb από την Γ, χρειάζομαι $\frac{2x}{3}$ lb της A και $\frac{x}{3}$ lb της B, διότι απαιτείται διπλάσια ποσότητα της A σε σύγκριση με τη B. Έτσι, η ποσότητα A που υπάρχει στον χρόνο t , όταν δημιουργούνται x lb από την Γ, είναι $10 - \frac{2x}{3}$ και η ποσότητα της B, την ίδια στιγμή είναι $20 - \frac{x}{3}$

Οπότε έχω $\frac{dx}{dt} = k \left(10 - \frac{2x}{3} \right) \left(20 - \frac{x}{3} \right)$ όπου k είναι η σταθερά αναλογίας.

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί και ως $\frac{dx}{dt} = \frac{2k}{9} (15 - x)(60 - x)$

Υπάρχουν δύο συνθήκες. Επειδή αρχικά δεν υπάρχει ουσία Γ, έχω $x = 0$ όταν $t = 0$.

Επίσης έχω $x = 6$ όταν $t = \frac{1}{3}$. Χρειάζονται δύο συνθήκες (εξισώσεις), μια για τον προσδιορισμό του k και άλλη μια για τον προσδιορισμό της αυθαίρετης σταθεράς c , από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης. Η πλήρης μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι

$\frac{dx}{dt} = k_1 (15 - x)(60 - x)$ με $x = 0$ όταν $t = 0$ και με $x = 6$ όταν $t = \frac{1}{3}$

Λύση

Χωρίζοντας τις μεταβλητές παίρνω $\int \frac{dx}{(15-x)(60-x)} = \frac{2}{9} \int k \, dt$

$$\int \frac{1}{45} \left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x} \right) dx = \frac{2}{9} \int k \, dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{5} \ln \left| \frac{60-x}{15-x} \right| = 2kt + c \Leftrightarrow \frac{60-x}{15-x} = ce^{10kt}$$

Με $x = 0$, όταν $t = 0$, βρίσκω $c_1 = 4$, οπότε $\frac{60-x}{15-x} = 4e^{10kt}$

Με $x = 6$, όταν $t = \frac{1}{3}$, βρίσκω $e^{\frac{30}{9}k} = \frac{3}{2}$, οπότε $\frac{60-x}{15-x} = 4 \left(e^{15 \cdot \frac{2}{9}k} \right)^{3t} = 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{3t}$

$$\text{απ' όπου} \quad x = \frac{15 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{3t} \right]}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^{3t}} \text{ και όταν } t \rightarrow \infty \text{ είναι } x \rightarrow 15 \, lb$$

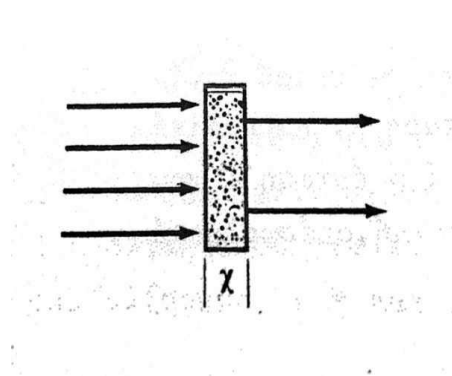
Εφαρμογή 27

Να βρεθεί η εξασθένηση της έντασης J των ακτίνων Rontgen, όταν διαπερνούν ένα σώμα πάχους x ενός ομογενούς υλικού.

Λύση

Η εξασθένηση της έντασης των ακτίνων οφείλεται στην απορρόφηση μέρους της ενέργειας τους, δηλαδή μέρους του αριθμού φωτονίων, από το υλικό. Έχει διατυπωθεί ότι η εξασθένηση των ακτίνων είναι ανάλογη με το πάχος του υλικού καθώς και με την ένταση J αυτών. Αν οι ακτίνες περάσουν από ένα στρώμα πάχους Δx του υλικού, θα μειωθεί η ένταση τους κατά ΔJ , που θα είναι

$$\Delta J = -KJ\Delta x$$



Γράφημα 21 Εξασθένηση ακτίνων X

Το K λέγεται **γραμμικός συντελεστής εξασθένησης** και εξαρτάται από τη φύση του υλικού. Το πρόσημο $-$ σημαίνει τη μείωση. Η $\Delta J = -KJ\Delta x$ γράφεται

$$\frac{\Delta J}{\Delta x} = -KJ \text{ και η οριακή της τιμή είναι } \frac{dJ}{dx} = -KJ. \text{ Η } \frac{dJ}{dx} = -KJ \text{ είναι μια διαφορική}$$

εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών οπότε γράφεται $\frac{dJ}{J} = -Kdx$ και ολοκληρώνοντας

$$\text{παίρνω } \ln J = -Kx + c \Leftrightarrow J = e^{-Kx+c} = e^{-Kx}e^c \Leftrightarrow J = c_1 e^{-Kx} \text{ όπου } c_1 = e^c \text{ Για να}$$

προσδιορίσω την σταθερά c_1 αντικαθιστώ στην $J = c_1 e^{-Kx}$ τις αρχικές συνθήκες $J(0) = J_0$ και παίρνω $c_1 = J_0$, οπότε η μερική λύση της $\frac{dJ}{dx} = -KJ$ είναι $J = J_0 e^{-Kx}$

2.9 Βιολογία

Εφαρμογή 28

Να βρεθεί η ποσότητα του υλικού που μπορεί να απομνημονεύσει ένα άτομο, σε σχέση με τον χρόνο που καταναλίσκει.

Λύση

Η ποσότητα του υλικού που απομνημονεύεται, ονομάζεται επίτευγμα και την συμβολίζω με $y(t)$. Συμβολίζω με M την ολική ποσότητα που θέλω να απομνημονευτεί και την ονομάζω μέγιστο επίτευγμα. Έστω ότι ο ρυθμός μεταβολής του επιτεύγματος σε χρόνο t είναι $y'(t)$ και είναι ανάλογος με τη ποσότητα του υλικού που μένει για απομνημόνευση.

Δηλαδή, $y' = A(M - y)$ όπου $A > 0$ είναι μια σταθερά αναλογίας και εκφράζει το μέτρο της φυσικής ικανότητας μάθησης του ατόμου. Έστω ότι στην αρχή της διαδικασίας δεν έχει απομνημονευτεί καθόλου η ύλη. Έτσι, οι αρχικές συνθήκες είναι $y(0) = 0$

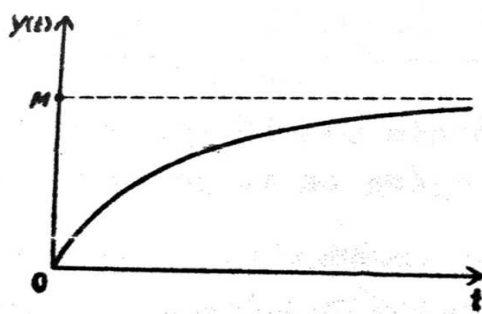
Η $y' = A(M - y)$ γράφεται $y' = -Ay + A \cdot M$ που είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης.

Η γενική λύση της $y' = -Ay + A \cdot M$ είναι $y = e^{-\int A dt} \left[c + \int A \cdot M e^{\int A dt} dt \right]$ ή $y = e^{-At} (c + M e^{At})$

Για να προσδιορίσω τη σταθερά c , αντικαθιστώ την $y(0) = 0$ στην $y = e^{-At} (c + M e^{At})$ και παίρνω $y = M(1 - e^{-At})$

Η γραφική παράσταση της $y = M(1 - e^{-At})$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι το μεγαλύτερο μέρος του υλικού απομνημονεύεται σε ένα σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα, ενώ όσο αυξάνει ο χρόνος και επομένως η κόπωση, τόσο μικραίνει ο ρυθμός μάθησης που εκφράζεται από την παράγωγό της $y = M(1 - e^{-At})$ δηλαδή από την $y'(t) = A \cdot M e^{-At}$ που είναι φθίνουσα συνάρτηση. Πρέπει να σημειωθεί ότι περισσότερα φιλοσοφημένα μοντέλα μάθησης, οδηγούν σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

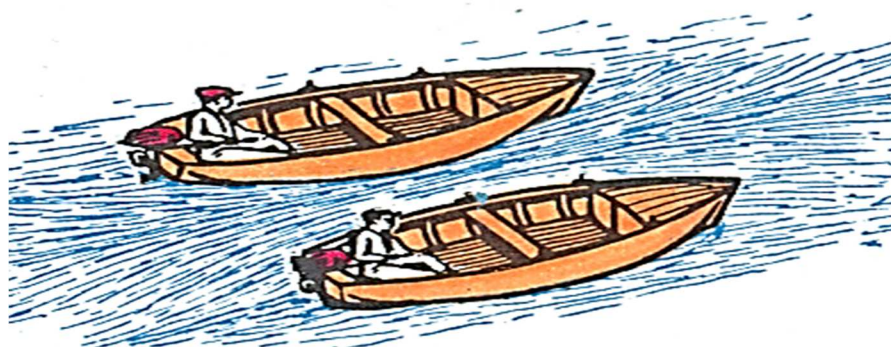


Γράφημα 22 Γραφική παράσταση συνάρτησης

3. Εφαρμογές στη ναυτιλία

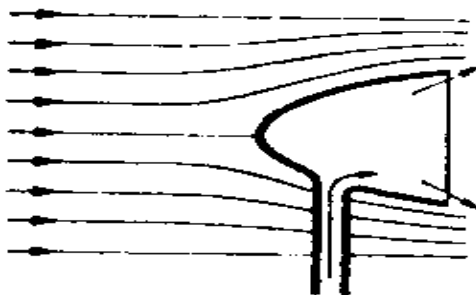
Η ναυτιλία και η ναυπηγική επιστήμη αποτελούν τομείς που συνδυάζουν την τεχνολογία, την επιστήμη και τις πρακτικές εφαρμογές σε ένα περιβάλλον με υψηλές απαιτήσεις αξιοπιστίας και ασφάλειας. Από τον σχεδιασμό και την κατασκευή των εμπορικών πλοίων, μέχρι τη λειτουργία των μηχανών τους, τη φόρτωση, την ευστάθεια και τα συστήματα επικοινωνιών, η ανάγκη για ακριβή πρόβλεψη, έλεγχο και βελτιστοποίηση, είναι συνεχής. Σε αυτό το πλαίσιο, οι διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης αποτελούν ένα θεμελιώδες εργαλείο, διότι περιγράφουν με απλό αλλά ισχυρό τρόπο τις σχέσεις που διέπουν μεταβαλλόμενα φυσικά μεγέθη και μεταβαλλόμενες διεργασίες. Δηλαδή, δεν μας λένε μόνο σε ποια κατάσταση είναι ένα σύστημα, αλλά και με ποιον τρόπο αλλάζει η κατάσταση του με τον χρόνο ή με κάποια άλλη μεταβλητή. Στα πλοία, οι εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων είναι σχεδόν παντού:

- Στη **ναυπηγική**, χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της κίνησης του πλοίου μέσα στο νερό (το πλοίο δεν είναι σταθερό, αλλά αντιδρά σε φορτίσεις, κυματισμούς και μεταβολές του φορτίου), για την εκτίμηση του κυματισμού και για τη μελέτη των δυνάμεων που αναπτύσσονται στο κύτος του πλοίου διότι μπορούν να περιγράψουν το πώς αυξάνεται (ή μειώνεται) η μετατόπιση ενός πλοίου όσο αυτό φορτώνεται (ή ξεφορτώνεται) σταδιακά.



Γράφημα 23 Οι 2 βάρκες κινδυνεύουν να συγκρουσθούν μεταξύ τους

- Στη **ναυτική μηχανολογία**, μοντελοποιούν τις θερμικές και τις μηχανικές διεργασίες στις μηχανές εσωτερικής καύσης (ΜΕΚ), στους κινητήρες AC/DC, στις γεννήτριες, στα συστήματα ισχύος, στους λέβητες, στα συστήματα ψύξης, στα συστήματα λίπανσης και δείχνουν το πώς μεταβάλλεται η πίεση στον κύλινδρο της μηχανής, κάθε χρονική στιγμή. Οι μηχανές, δεν μας ενδιαφέρουν μόνο στη σταθερή τους λειτουργία αλλά και στο πώς ανεβάζουν στροφές, πώς ψύχονται, πώς λιπαίνονται, πώς αλλάζει η πίεση του καυσίμου σε κάθε φάση της λειτουργίας τους, δηλαδή μας ενδιαφέρει η δυναμική τους.

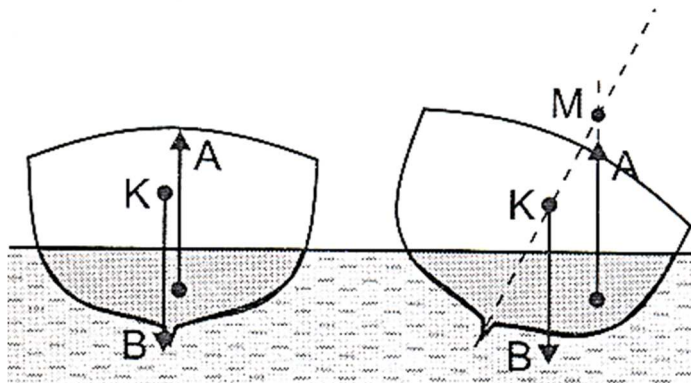


Γράφημα 24 Εξαεριστήρας πλοίου

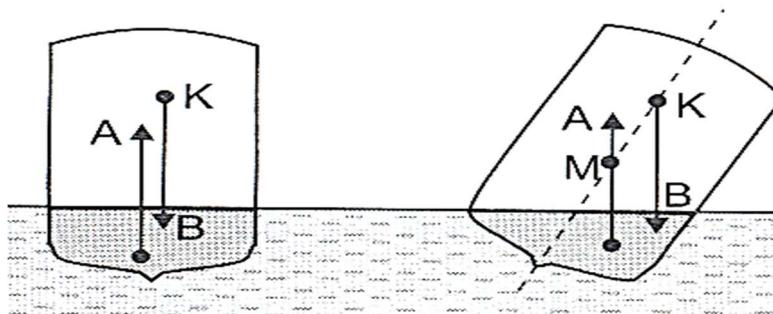
- Στην **ευστάθεια**, περιγράφουν τις μεταβολές του κέντρου βάρους (κ.β.), του κέντρου άνωσης (κ.α.), της γωνίας κλίσης και της στατικής ευστάθειας, υπό την επίδραση του φορτίου και του κυματισμού (free surface effect). Η επιτάχυνση του πλοίου, σε σχέση με την ισχύ της μηχανής, μπορεί να γραφεί ως διαφορική εξίσωση που συνδέει την ταχύτητα με την αντίσταση του νερού.

Η ευστάθεια του πλοίου, είναι ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό για τη διασφάλιση της αξιοπλοΐας του και αναφέρεται στην ικανότητα του να ανακτά τη σωστή του θέση (εμφάνιση ροπής επαναφοράς), όταν έχει πάρει κλίση λόγω των εξωτερικών δυνάμεων που του ασκούνται ή και της κατανομής του φορτίου του (μεταβάλλεται η θέση του μετάκεντρου M).

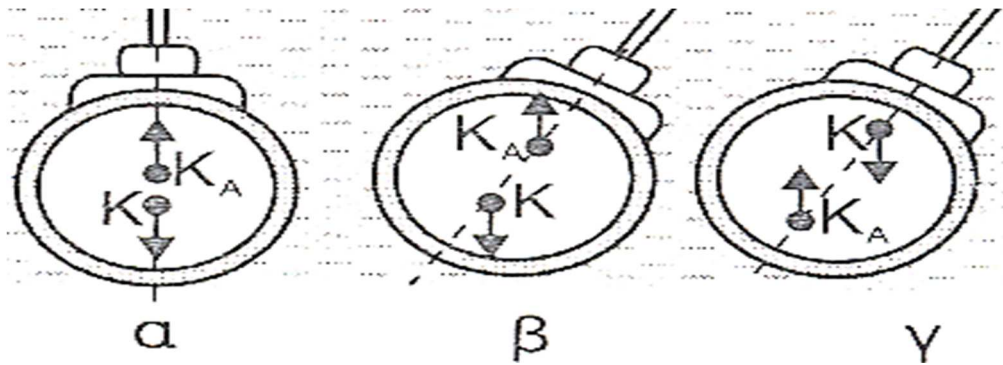
- Στη **φόρτωση** δηλαδή στη διαχείριση του φορτίου, προς αποφυγή της υπερφόρτωσης ή της ανισόρροπής κατανομής του βάρους που δύναται να προκαλέσουν την εμφάνιση ροπής ανατροπής (μετατόπιση της θέσης του μετάκεντρου M). Στην ευσταθή πλευση, το μετάκεντρο M , είναι πάνω από το κέντρο βάρους K , οπότε εμφανίζεται ροπή επαναφοράς. Στην ασταθή πλευση, το μετάκεντρο M , είναι κάτω από το κέντρο βάρους K , οπότε εμφανίζεται ροπή ανατροπής.



Γράφημα 25 Ευσταθής πλευση



Γράφημα 26 Ασταθής πλευση



Γράφημα 27 Ότι ισχύει για τα πλοία, ισχύει και για τα υποβρύχια

- Στις **επικοινωνίες** (δορυφορικές επικοινωνίες, GMDSS, GPS, radar), χρησιμοποιούνται για τη μαθηματική αναπαράσταση της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, για την εξασθένηση του σήματος και για την απόκριση των φίλτρων RC/RL. Στις επικοινωνίες, το ραδιοσήμα (ραδιοκύματα) φτάνει στο πλοίο με απώλειες που περιγράφονται από απλές διαφορικές σχέσεις.

- Στα **ηλεκτρικά συστήματα**, πρέπει να γνωρίζουμε πώς εξελίσσεται το ρεύμα σε ένα κύκλωμα όταν συμβαίνει μια διαταραχή (π.χ. βραχυκύκλωμα, εκκίνηση κινητήρα). Οι διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης χρησιμοποιούνται για την ανάλυση και για τη σχεδίαση ηλεκτρικών κυκλωμάτων που περιλαμβάνουν συστήματα επαγωγής και ροής ενέργειας.

Οι διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης, αποτελούν τη βάση για:

- Προσομοιώσεις με τη βοήθεια των υπολογιστών (π.χ. Computational Fluid Dynamics – CFD).

- Αυτόματα συστήματα ελέγχου σε μηχανές και σε ηλεκτρικές εγκαταστάσεις, διότι αναπαριστούν το πώς μεταβάλλεται το ηλεκτρικό ρεύμα σε έναν κινητήρα κατά την εκκίνηση.

- Προβλέψεις κατανάλωσης καυσίμων και βελτιστοποίησης της πορείας.

- Ανάλυση του ρίσκου, σε ακραίες καιρικές συνθήκες.

Συνεπώς, η γνώση και η κατανόηση των διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης είναι απαραίτητα για όσους ασχολούνται με την κατασκευή και τη λειτουργία των εμπορικών πλοίων.

3.1 Ορισμός και γενική μορφή

Μία διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης, είναι μία εξίσωση που συνδέει μία άγνωστη συνάντηση $y(x)$ με την 1^η παράγωγο $\frac{dy}{dx}$. Η γενική μορφή είναι

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Η εξίσωση αυτή δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους y εξαρτάται από το ίδιο το μέγεθος ή και από την ανεξάρτητη μεταβλητή x . Στη ναυτιλία το x μπορεί να εκφράζει τον χρόνο (π.χ. ώρες λειτουργίας μηχανής), ενώ το y μπορεί να είναι ένα μέγεθος όπως η θερμοκρασία ενός κυλίνδρου, η ταχύτητα του πλοίου ή η ηλεκτρική ένταση σε ένα κύκλωμα.

3.2 Διαχωρίσιμες εξισώσεις

Είναι της μορφής $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ και μπορούν να λυθούν με διαχωρισμό των μεταβλητών $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$ και ολοκλήρωση των δύο πλευρών.

Εφαρμογή

Ο ρυθμός απώλειας θερμότητας από μια μηχανή στο περιβάλλον περιγράφεται με τον νόμο του Newton. Μια διαχωρίσιμη εξίσωση εκφράζει την ψύξη μιας μηχανής ή τη διάλυση του καυσίμου. Η ψύξη μίας μηχανής περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{ΠΕΡ}})$ όπου:

T η θερμοκρασία του μετάλλου,

$T_{\text{ΠΕΡ}}$ η θερμοκρασία του περιβάλλοντος,

k μία σταθερά.

3.3 Γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Είναι της μορφής $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ και η λύση τους βασίζεται στη μέθοδο του ολοκληρωτικού παραγοντικού.

Εφαρμογή

Η φόρτιση (και η εκφόρτιση) ενός πυκνωτή σε συστήματα αυτοματισμού και η απόσβεση των ταλαντώσεων ακολουθούν μία γραμμική διαφορική εξίσωση. Η φόρτιση ενός πυκνωτή σε ηλεκτρικό κύκλωμα RC , περιγράφεται από τη σχέση $\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = \frac{E}{RC}$, όπου:

V η τάση στον πυκνωτή

R η αντίσταση

C η χωρητικότητα

E η πηγή της τάσης

3.4 Ομογενείς εξισώσεις

Είναι της μορφής $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ και μετασχηματίζονται με την αντικατάσταση $y = ux$

Εφαρμογή

Στη μηχανική των ρευστών, για να περιγραφεί η αναλογία ταχύτητας / απόστασης σε συγκεκριμένα μοντέλα ροής, γύρω από το κύτος του πλοίου.

3.5 Ακριβείς εξισώσεις

Εξισώσεις της μορφής $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ είναι ακριβείς αν ισχύει ότι $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Εφαρμογή

Δυναμικά συστήματα σε θερμοδυναμική ανάλυση (θερμοδυναμικές διεργασίες) πλοίων, όπου οι εξισώσεις της ενέργειας (ενεργειακές ισορροπίες) προκύπτουν από ακριβείς διαφορικές σχέσεις.

3.6 Φόρτωση των πλοίων

Συχνά, η φόρτωση ενός πλοίου περιγράφεται μέσω μίας κατανομής του βάρους $w(x)$ η οποία εξαρτάται από την απόσταση x από την πλώρη του πλοίου.

Αυτή η κατανομή του βάρους, περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης

$$\frac{dW(x)}{dx} = w(x), \text{ όπου:}$$

$W(x)$ το συνολικό βάρος μέχρι το σημείο x

$w(x)$ η κατανομή του βάρους, ανά μονάδα μήκους

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης, επιτρέπει τον υπολογισμό του συνολικού βάρους ανά τμήμα του πλοίου ώστε να διασφαλισθεί ότι η κατανομή του βάρους είναι ομοιόμορφη και σωστή.

3.7 Υδροδυναμική αντίσταση

Η ροή του νερού γύρω από το πλοίο, περιγράφεται από τις πολύπλοκες (διότι περιλαμβάνουν πολλές παραμέτρους) εξισώσεις Navier – Stokes, των οποίων η

γενική μορφή είναι η $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}$ όπου:

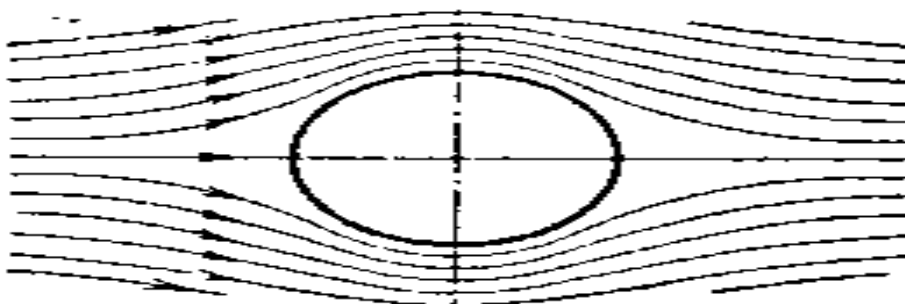
ρ η πυκνότητα του νερού

$\mathbf{v}$ το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας της ροής

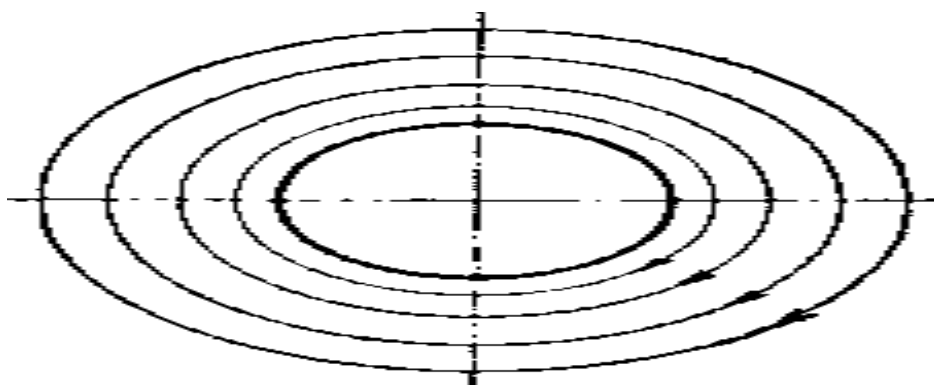
p η πίεση του νερού

μ το ιξώδες του νερού

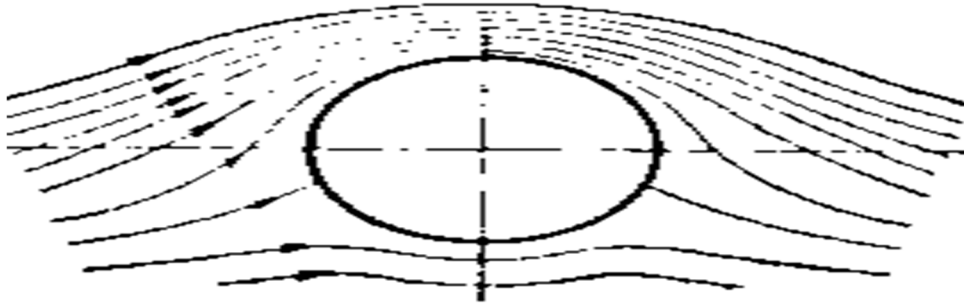
$\mathbf{f}$ οι εξωτερικές δυνάμεις (π.χ. βαρύτητα, δυνάμεις από τα κύματα)



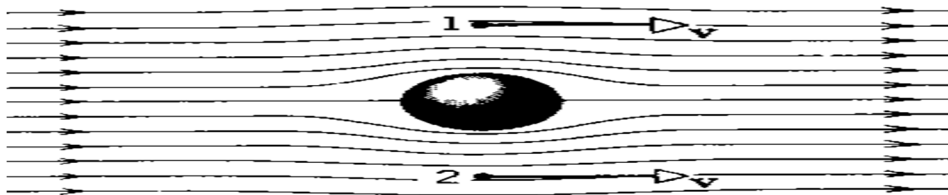
Γράφημα 28 Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που ακινητεί



Γράφημα 29 Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που περιστρέφεται



Γράφημα 30 Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση



Γράφημα 31 Στα σημεία 1 και 2, το ρευστό έχει την ίδια ταχύτητα

3.8 Υδροδυναμική βελτίωση

Η αντίσταση του νερού που ασκείται στο πλοίο εξαρτάται από το σχήμα του πλοίου και την ταχύτητα του μέσα στο νερό. Η διαφορά πίεσης μεταξύ της πλώρης και της πρύμνης του πλοίου και η αλληλεπίδραση του πλοίου με τα κύματα, επηρεάζουν την αντίσταση. Η αντίσταση περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$R = \frac{1}{2} \rho v^2 C_d A \quad \text{όπου}$$

R η αντίσταση του πλοίου

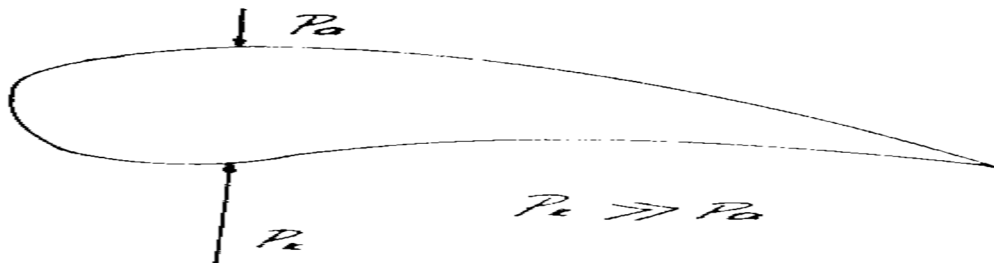
ρ η πυκνότητα του νερού

v η ταχύτητα του πλοίου

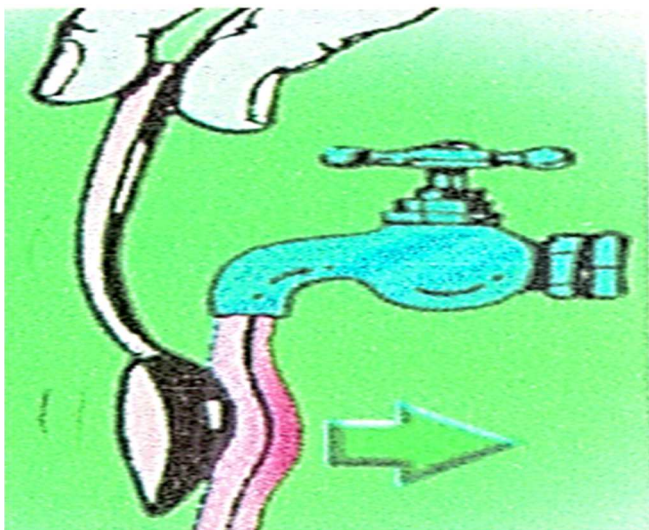
C_d ο συντελεστής της αντίστασης

A η επιφάνεια του πλοίου που έρχεται σε επαφή με το νερό

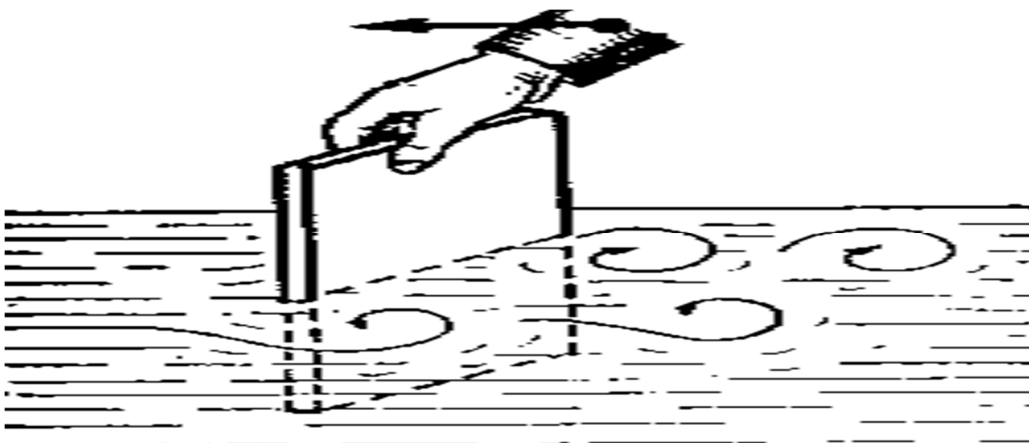
Η ελαχιστοποίηση της αντίστασης επιτυγχάνεται μέσω της βελτιστοποίησης του σχήματος του πλοίου, της κατανομής του βάρους και της χρήσης ειδικών τεχνολογιών και χρωμάτων προς μείωση των τριβών.



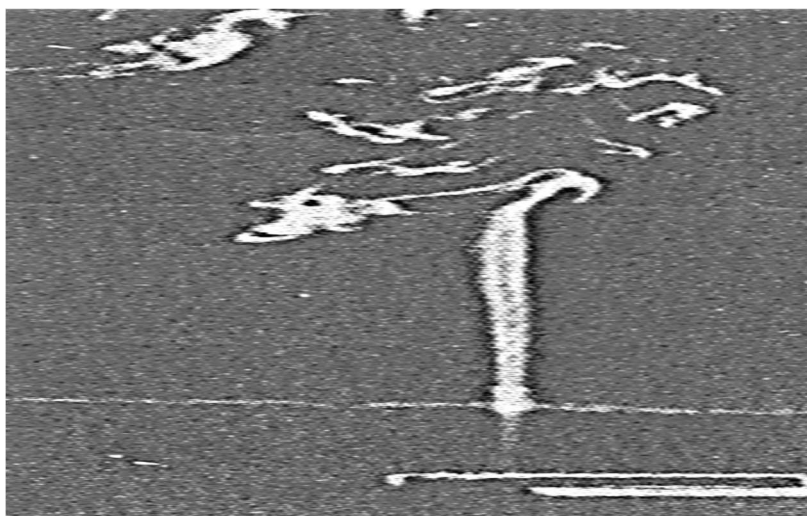
Γράφημα 32 Βολβός πλοίου. Η διαφορά ταχυτήτων στην πάνω και στην κάτω επιφάνεια, προκαλεί την εμφάνιση της δυναμικής άνωσης



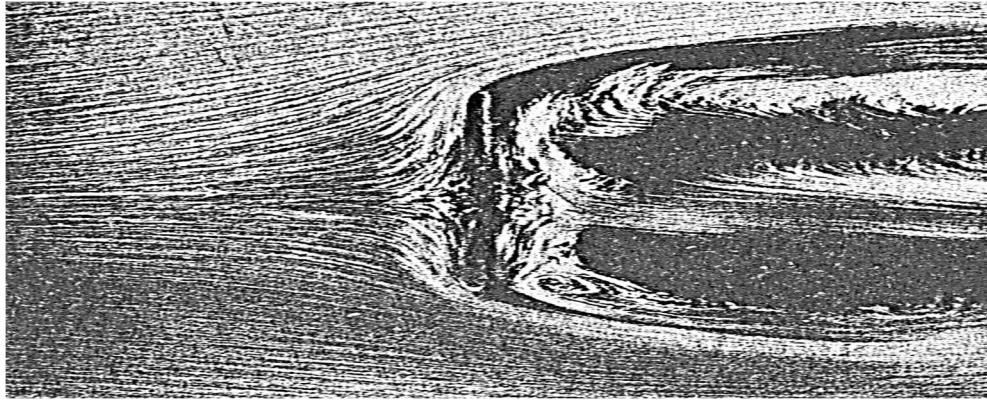
Γράφημα 33 Στο κοντάλι ασκείται οριζόντια δύναμη προς τη βρύση



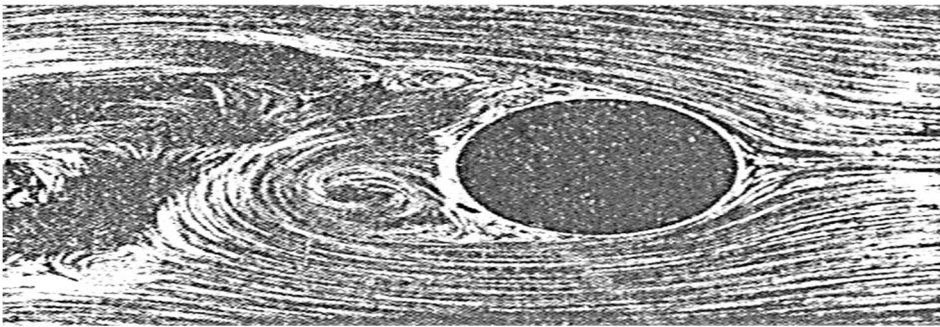
Γράφημα 34 Στην πίσω πλευρά της κινούμενης σανίδας, σχηματίζονται στρόβιλοι



Γράφημα 35 Η ροή του καπνού αρχικά είναι στρωτή και μετά τυρβώδης



Γράφημα 36 Στη δεξιά μεριά της πλάκας και μέσα στον αύλακα η ροή είναι τυρβώδης



Γράφημα 37 Στρόβιλος που αποσπάται από το πίσω μέρος σφαίρας κατά τη ροή πραγματικού ρευστού

3.9 Ανάλυση των κυκλωμάτων και ενεργειακή απόδοση

Η διάταξη ενός ηλεκτρικού κυκλώματος του πλοίου μπορεί να αναλυθεί μέσω της εξίσωσης RL που ακολουθεί $L \frac{dI}{dt} + RI = V(t)$, όπου:

L η αυτεπαγωγή του κυκλώματος

R η αντίσταση

I το ρεύμα

$V(t)$ η τάση που εφαρμόζεται

Αυτή η εξίσωση χρησιμοποιείται για την ανάλυση της συμπεριφοράς του ηλεκτρικού ρεύματος και για την εκτίμηση των απωλειών ενέργειας που προκαλούνται από την αντίσταση και από την αυτεπαγωγή.

3.10 Διαχείριση του συστήματος τροφοδοσίας

Η τροφοδοσία των διαφόρων συστημάτων του πλοίου (π.χ. φωτιστικά, μηχανές, συστήματα ελέγχου) απαιτεί τη χρήση διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης για την αποδοτική διαχείριση της ενέργειας και την εξισορρόπηση των φορτίων. Για την ανάλυση της σταθερότητας (ή της μεταβολής) της τάσης στο ηλεκτρικό σύστημα,

χρησιμοποιείται η εξίσωση $\frac{dV}{dt} = \frac{P_{in} - P_{out}}{C}$, όπου:

P_{in} η ισχύς εισόδου στο σύστημα

P_{out} η ισχύς εξόδου στο σύστημα

C η χωρητικότητα της μπαταρίας ή του συσσωρευτή

3.11 Δίκτυα επικοινωνίας και καθυστερήσεις

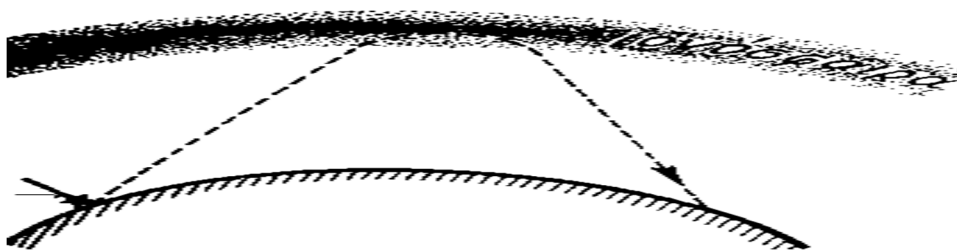
Η μετάδοση σήματος και η καθυστέρηση στα δίκτυα επικοινωνίας των πλοίων, περιγράφονται από διαφορεικές εξισώσεις που αναλύουν τη συμπεριφορά των σημάτων, κατά τη διάρκεια της μετάδοσης. Η καθυστέρηση και ο φόρτος του δικτύου, υπολογίζονται από την εξίσωση $\frac{dL}{dt} = -aL + bR$, όπου:

a, b συντελεστές

L η καθυστέρηση του δικτύου

R ο φόρτος του συστήματος

Στόχος είναι η αποφυγή καθυστερήσεων και αποτυχιών στην επικοινωνία μεταξύ των πλοίων ή μεταξύ των κεντρικών μονάδων ελέγχου.



Γράφημα 38 Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ανακλώνται στην ιονόσφαιρα και επιστρέφουν στη Γη

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

- Αναστασιάδη, Ι. και Γεωργανοπούλου, Γ. (1967). *Γενικά μαθηματικά*, τόμος Β', Θεσσαλονίκη.
- Αντωνόπουλου, Π. (1975). *Ασκήσεις διαφορικών εξισώσεων*, Πάτρα, ΟΕΔΒ.
- Αντωνόπουλου, Π. (1983). *Μαθηματικά III*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Βαρελά, Γ. (1970). *Γενικά μαθηματικά*, τόμος Α', Θεσσαλονίκη.
- Βασιλείου, Φ. (1970). *Μαθήματα ανωτέρων μαθηματικών*, τόμοι Ι και ΙΙ.
- Βουλασίκη, Σ. (1981). *Μαθηματικά III*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Γάγαλη, Ν. (1981). *Μαθηματικά II*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Γάγαλη, Ν. (1981). *Μαθηματικά III*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Γάγαλη, Ν. (1981). *Ανώτερα μαθηματικά*, τόμοι Α' και Β'
- Γκαρούτσος, Γ. (1990). *Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*, Β' έκδοση, Αθήνα, εκδόσεις spin.
- Δασκαλόπουλου, Δ. (1968). *Γενικά μαθηματικά*.
- Δασκαλόπουλου, Δ. (1967). *Ανώτερα μαθηματικά*, τόμοι Β' και Γ', Αθήνα.
- Κάππου, Δ. (1962). *Μαθήματα αναλύσεως – απειροστικός λογισμός*, Αθήνα
- Λαζαρίδη, Λ. (1974). *Στοιχεία μαθηματικής αναλύσεως*, Λάρισα.
- Λαζαρίδη, Λ. (1981). *Εφαρμοσμένα μαθηματικά*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Μακρυγιάννη, Α. (1986). *Μαθηματικά II*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Μπαρμπάνη, Β. (1970). *Μαθήματα διαφορικών εξισώσεων*, Πάτρα
- Μπίτη, Γ. (1973). *Ασκήσεις ανωτέρων μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη.
- Παντελίδη, Γ. (1974). *Σημειώσεις ανωτέρων μαθηματικών*, τόμοι Β' και Γ', Αθήνα.
- Παντελίδη, Γ. (1977). *Μαθηματική ανάλυση*, τόμοι 1, 2, Αθήνα.
- Παντελίδη, Γ. (1979). *Μαθήματα αναλύσεως*, Αθήνα, εκδόσεις Ρώσση.
- Παπαμιχαήλ, Δ. (1966). *Μαθήματα ανωτέρων μαθηματικών*, Αθήνα.
- Σοφιανός, Γ. (1984). *Μαθηματικά III*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Φλωρά, Μ. (1963). *Σημειώσεις ανωτέρων μαθηματικών*, τόμοι Α' και Β', Θεσσαλονίκη.

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία από μετάφραση

- Apostol, T.M. (1989). *Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός*, τόμοι Ι και ΙΙ, Αθήνα, εκδόσεις Πεχλιβανίδη – Blaisdell.
- Bronson, R. (1978). *Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις*, μετάφραση Περσίδης, Schaum's outline series.
- Quinet, J. (1970). *Στοιχεία ανωτέρων μαθηματικών*, τόμοι 3 και 4.

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

- Chirgwin, B. and Plumptre, C.A. (1970). *A course of mathematics for engineers and scientists*, volume 1 and 2, Pergamon press.
- Courant, R. (1934). *Differential and integral calculus*, 2nd edition, volume 1, New York University.
- Jeffrey, A. (1979). *Mathematics for engineers and scientists*, Nelson and sons Ltd.
- Lamb, C. and Tranter, C. (1967). *Differential equations for engineers and scientists*, London.
- Pipes, L. and Harvill, L. (1970). *Applied mathematics for engineers and physicists*, McGraw-Hill.
- Rainville, E. and Bedient, Ph. (1969). *Elementary differential equations*, London, Macmillan.
- Smith, P. (1986). *Calculus differential and integral*.