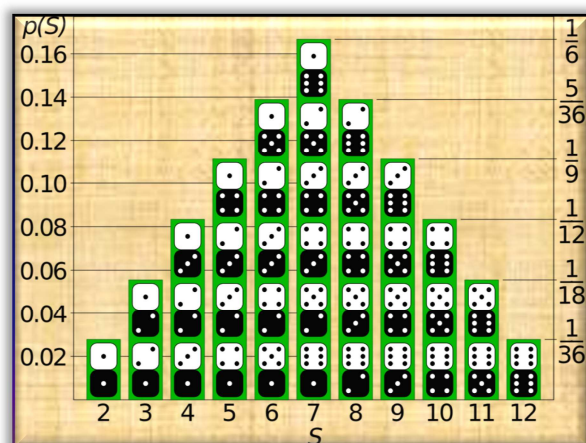


ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ



ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ: ΚΩΤΣΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ (Α.Μ. 7338)

ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ 2016 – 2017

ΘΕΜΑ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ: ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ
ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

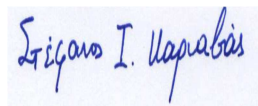
ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ: ΚΩΤΣΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ (Α.Μ. 7338)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός
(Μ.Εδ.), Επίκουρος Καθηγητής.

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ: 15 / 06 / 2016

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΤΑΘΕΣΗΣ: 13 / 06 / 2017

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: / 06 / 2017

A/A	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ	ΥΠΟΓΡΑΦΗ
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.), Επίκουρος Καθηγητής.	Πολύ Ικανοποιητική	
2	Αντωνάτος Χαράλαμπος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Καθηγητής		
3	Φραγκιαδάκης Νικόλαος Δρ. Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Αναπληρωτής Καθηγητής		

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

- 1.1 ΟΙ ΠΡΟΔΡΟΜΟΙ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
- 1.2 Η ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
- 1.3 Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
- 1.4 Μια πρόσφατη ιστορία πιθανοτήτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΤΥΧΗ

- 2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ
- 2.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ
- 2.3 ΙΣΟΠΙΘΑΝΑ ΣΥΜΒΑΝΤΑ
- 2.4 ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΜΗ ΠΡΟΦΑΝΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

- 3.1 ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ
- 3.2 ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ
- 3.3 ΑΛΛΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ
- 3.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΣΕ ΜΙΑ ΣΦΑΙΡΑ
- 3.5 ΠΑΛΙΟΙ ΓΑΜΟΙ
- 3.6 ΝΙΚΗ ΣΤΟ ΤΕΝΙΣ
- 3.7 ΕΝΑ ΣΤΟΙΧΗΜΑ: ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΚΑΡΤΕΣ
- 3.8 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΠΑΛΤΩΝ
- 3.9 ΣΥΛΛΟΓΕΣ ΑΥΤΟΚΟΛΛΗΤΩΝ ΚΑΡΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο ΚΛΗΡΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΑΧΕΙΟΦΟΡΕΣ ΑΓΟΡΕΣ

- 4.1 ΚΛΗΡΩΣΕΙΣ ΜΕ ΚΑΛΠΙΚΟ ΝΟΜΙΣΜΑ
- 4.2 ΚΛΗΡΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΡΙΑ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΑΤΟΜΑ
- 4.3 ΚΛΗΡΩΣΕΙΣ ΜΕ ΠΟΛΛΟΥΣ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ
- 4.4 ΛΑΧΕΙΟΦΟΡΕΣ ΑΓΟΡΕΣ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΔΟΚΙΑ
- 4.5 ΤΑ ΛΟΤΤΟ

Κεφάλαιο 5 ΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΣΤΗΝ ΚΟΙΝΩΝΙΑ

- 5.1 ΠΙΝΑΚΕΣ ΖΩΗΣ
- 5.2 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΙΑΤΡΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ
- 5.3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ DNA

ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΚΑΤΑΚΤΗΘΗΚΕ ΤΕΛΙΚΑ ΤΟ ΤΥΧΑΙΟ;

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Papoulis A.: Πιθανότητες και τυχαίες μεταβλητές και στοχαστικές διαδικασίες, Τρίτη έκδοση.
- Spiegel Murray R.: Πιθανότητες και στατιστική, Shaum's outline series.
- Ζαχαροπούλου Χρυσούλα: Στατιστική, Μέθοδοι, τόμος Α', εκδόσεις ζυγός.
- Κάκουλος Θεόφ.: Μαθήματα θεωρίας πιθανοτήτων, Αθήνα 1975.
- Σταματέλου Γεωργ.: Ασκήσεις Πιθανοτήτων Στατιστικής.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- Feller W.: An introduction to Probability theory and its applications, volume I and II, Wiley International edition.
- ADAMS, W.J., The life and times of the central limit theorem. (Η ζωή και η εποχή του θεωρήματος κεντρικού ορίου), Νέα Υόρκη, American Mathematical society, 2009
- Barroq, J.D., El salto del tigre, Las matematicas de la vida cotidiana, 2009
- Fermat, P. Pascal, B, La geometria del azar, A camunez Madrid, Nivola, 2007.
- Holland, B., K., what are the chances? Voodoo deaths, office gossip, other adventures in probability.
- Engel, A., Probabilidad estadística (πιθανότητες και στατιστική), 1998.
- Hopkins University Press, 2002.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από την πρώτη κιόλας εμφάνιση του ανθρώπου στη Γη, οι έννοιες της τάξεως και του χάους, του προβλέψιμου και του απρόβλεπτου, του καθοριστικού και του τυχαίου έπαιξαν σημαντικό ρόλο στο τρόπο που ο άνθρωπος αντιλαμβανόταν την φύση γύρω του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Η προέλευση των μαθηματικών χρονολογείται από την κλασική Ελλάδα, όπως σχεδόν όλος ο πολιτισμός μας. Τα θεμέλια αυτού που έγιναν αργότερα τα μαθηματικά τοποθετήθηκαν στην αρχαία Ελλάδα πριν από 2.300 χρόνια στο έργο του Ευκλείδη «Στοιχεία». Ο στόχος του Ευκλείδη με τη συγγραφή του βιβλίου ήταν διττός: από τη μια μεριά, να συγκεντρώσει τα μαθηματικά αποτελέσματα που ήταν γνωστά στην εποχή του και από την άλλη μεριά, να αποκτήσει ένα μοντέλο δράσεων για την απόδειξη αποτελεσμάτων και τη δημιουργία μιας μαθηματικής θεωρίας με αξιώματα και κανόνες επαγωγής.

Έτσι κατόρθωνε να διαχωρίσει την μαθηματική αλήθεια από τη φυσική πραγματικότητα που την περιέβαλλε. Ολόκληρο το οικοδόμημα της σκέψεως του στηριζόταν στα αξιώματα, έτσι ώστε αν αυτά άλλαζαν θα προέκυπταν καινούργια μαθηματικά. Αυτό συνέβη όταν τον 19^ο αιώνα τέθηκε υπό αμφισβήτηση ένα από τα λιγότερο προφανή αξιώματα, το **πέμπτο**, το οποίο λέει ότι **«από ένα σημείο μπορεί να περάσει μία, και μόνο μία παράλληλη σε μια δεδομένη ευθεία»** και η αντίκρουσή του οδήγησε σε άλλες γεωμετρίες που ονομάζονται **«Μη-Ευκλείδειες»**.

Ο απώτερος στόχος των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, το μεγαλύτερο επίτευγμα των οποίων ήταν η γεωμετρία, ήταν να ανακαλύψουν αλήθειες, βεβαιότητες. Γι' αυτό δεν ακολουθούσαν τον πιο κατάλληλο δρόμο για να ανακαλύψουν αποτελέσματα που σχετίζονται με την αβεβαιότητα. Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν ότι η θέληση των θεών αποκαλύπτεται με διάφορες μεθόδους που περιλαμβάνουν τα αποτελέσματα των ριζιμάτων των ζαριών έτσι ώστε αν ερχόταν ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα, αυτό ήταν η ρητή βούληση των θεών, και δεν είχε κανένα νόημα να επιχειρεί κάποιος να κατανοήσει αυτό που θα συνέβαινε, την τυχαιότητα. Έτσι φαίνεται σε ορισμένα από τα γραπτά και του Πλάτωνα.

Την εποχή των ρωμαίων, η αντίληψη των μαθηματικών μετατοπίστηκε, παρόλο που ο ελληνικός πολιτισμός ήταν το υπόβαθρο της ρωμαϊκής σκέψεως. Γι αυτούς το σημαντικότερο στα μαθηματικά ήταν η χρησιμότητά τους για τη μέτρηση, την καταμέτρηση και τον υπολογισμό, και η χρησιμοποίησή τους για να ζήσουν πιο άνετα και να επιτύχουν την στρατιωτική υπεροχή. Οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά ως εργαλεία για την ανάπτυξη των τεχνικών που απαιτούνταν για την πραγματοποίηση των εντυπωσιακών δημόσιων έργων που διασκορπίζονται στην τεράστια επικράτειά τους, πολλά από τα οποία εξακολουθούν να στέκονται όρθια στην Ευρώπη, την Ασία και την Βόρεια Αφρική.

Κατά το Μεσαίωνα εξακολουθούσε να μην υπάρχει μελέτη του τυχαίου. Επικρατούσε η αντίληψη ότι ο θεός είναι πανταχού παρών και οι θρησκευτικές ιδέες ήταν καθοριστικές στη μικρή ανάπτυξη της σκέψης στην διάρκεια εκείνης της εποχής. Επιπλέον, η πεποίθηση ότι κάθε γεγονός, σημαντικό ή ασήμαντο, εμφανίζεται κάτω από τη θεία πρόνοια ήταν ένα σοβαρό εμπόδιο για την ανάπτυξη του υπολογισμού των πιθανοτήτων.

Για παράδειγμα τον 13^ο αιώνα ο **βασιλιάς Λουδοβίκος XI** της Γαλλίας, ακολουθώντας αυτή τη γραμμή σκέψεως, καταδίκασε όχι μόνο τα τυχερά παιχνίδια

αλλά και την κατασκευή των ζαριών, εξισώνοντάς τα με άλλα αμαρτήματα κοινής αποδοκιμασίας, όπως η συχνή επίσκεψη σε ταβέρνες και η μοιχεία.

1.1 ΟΙ ΠΡΟΔΡΟΜΟΙ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Τα πρώτα θεμέλια στην προσέγγιση αυτού που αργότερα θα ονομαζόταν πιθανότητα οφείλονται σε μεγάλες μορφές της ιταλικής Αναγέννησης, όπως οι Tartaglia, Peverone, Γαλιλαίος και Gardano. Οι συλλογισμοί τους εμφανίζονται στον τομέα των παιχνιδιών, όπως στο λεγόμενο «πρόβλημα της διαίρεσης ή της διανομής». Ο **Luca Pacioli**, (περίπου 1445-περίπου 1517) το 1494 το διατυπώνει ως εξής: «Δύο ομάδες παίζουν μπάλα έτσι ώστε να χρειάζονται 60 πόντους για να κερδίσουν το παιχνίδι και κάθε "γκολ" αξίζει 10 πόντους. Τα στοιχήματα είναι 10 δουκάτων. Λόγω ενός περιστατικού δε μπορούν να τελειώσουν το παιχνίδι και η μία ομάδα μένει με 50 πόντους και η άλλη με 20. Θέλομε να μάθομε τι ποσοστό των χρημάτων του στοιχήματος ανήκει σε κάθε ομάδα».

Ο **Niccolo Fontana**, επονομαζόμενος **Tartaglia**, (1499-1557), αιτιολογεί τη λύση του προβλήματος: «Αν υποθέσουμε ότι πρέπει να φτάσουμε στα 6 γκολ και η Α έχει ήδη 5 και η Β έχει πετύχει 3, λέω ότι η πιο δίκαιη μοιρασιά είναι 2 προς 1, αφού η Α είναι δύο παιχνίδια μπροστά από τη Β. Αυτό αντιστοιχεί στο $\frac{1}{3}$ του συνόλου των παιχνιδιών που απαιτούνται για τη νίκη. Επομένως, η Α θα έπρεπε να πάρει το $\frac{1}{3}$ των στοιχημάτων. Το υπόλοιπο διαιρείται ισόποσα, δίνοντας στην Α ένα πλεονέκτημα σε σχέση με τη Β σε αναλογία 2 προς 1».

Όμως ο ίδιος ο Tartaglia δεν ήταν πολύ ευχαριστημένος με το σκεπτικό του, αναγνωρίζοντας ότι: «Η επίλυση ενός τέτοιου ερωτήματος πρέπει να είναι περισσότερο δικαστική παρά μαθηματική, αφού ανεξάρτητα από το πώς θα γίνει η διαίρεση, θα υπάρχει λόγος για αντιδικία».

Το 1558, ο **Giovanni Francesco Peverone**, στο βιβλίο του *Due brevi e facile trattati, il primo d' Arithmetica l'altro di Geometria*, το λύνει με πιο σωστό τρόπο: «Ας υποθέσουμε ότι η Α χρειάζεται να κερδίσει μόνο ένα παιχνίδι ακόμα για να κερδίσει το έπαθλο και στοιχηματίζει μία μονάδα. Αν στη Β μένει επίσης μόνο ένα παιχνίδι, θα στοιχηματίσει επίσης μία μονάδα. Τότε το βραβείο θα πρέπει να μοιραστεί ισομερώς. Αν στην Β μένουν δύο παιχνίδια, θα πρέπει να πληρώσει 2 μονάδες περισσότερες για να φθάσει στη θέση στην οποία της μένει μόνο ένα παιχνίδι. Επομένως, το έπαθλο θα έπρεπε να μοιραστεί με την μορφή 3 προς 1. Αν στην Β μένουν τρία παιχνίδια, θα έπρεπε να πληρώσει διπλάσια και πάλι και έτσι στο πρόβλημα του Pacioli το βραβείο θα μοιραζόταν 7 προς 1».

Η εφεύρεση της τοπογραφίας με κινητούς χαρακτήρες έκανε να εμφανιστούν πραγματείες μικρής ακρίβειας για τα διάφορα παιχνίδια της μόδας, οι κανόνες των οποίων διαδίδονταν μέχρι τότε με την προφορική παράδοση. Ο **Girolamo Cardano**, (1501-1576) είναι ο συγγραφέας του **Liber de ludo aleae**, του πρώτου βιβλίου που σχετίζεται με τον κόσμο του τυχαίου. Ο στόχος του είναι να υπολογίσει τις διαφορετικές δυνατότητες του ριξίματος διαφόρων ζαριών, καθώς και να επιλύσει προβλήματα διαίρεσης παρτίδων.

Επειδή δεν έχει τα κατάλληλα σύμβολα, καταφεύγει συνεχώς σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Σε όλη την πραγματεία δεν χρησιμοποιεί τα τρέχοντα αποτελέσματα για την ένωση και την τομή των γεγονότων, αλλά αρκείται σε δύο κυρίως μεθόδους: απαρίθμηση των διαφόρων δυνατοτήτων και την έννοια του μέσου κέρδους. Το έργο αρχίζει, περιέργως, με μια σειρά από ηθικοπλαστικές συμβουλές σχετικά με τους κινδύνους του τζόγου. Ο Cardano εργάστηκε με τις έννοιες του σήμερα γνωστού ως κλασικού ορισμού της πιθανότητας, αν και δεν τις όρισε.

Εισήγαγε την ιδέα της αντιστοιχίας ενός αριθμού (πιθανότητας) p μεταξύ 0 και 1 σε ένα γεγονός του οποίου το αποτέλεσμα είναι άγνωστο, λαμβάνοντας υπόψη τον συνολικό αριθμό αποτελεσμάτων και τον αριθμό των ευνοϊκών αποτελεσμάτων. Επίσης, έφτασε να διακρίνει αυτό που είναι σήμερα γνωστό ως «νόμος των μεγάλων αριθμών» λέγοντας ότι εάν η πιθανότητα ενός γεγονότος είναι p , μετά από ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων N το λογικό είναι να στοιχηματίσει κανείς ότι θα συμβεί περίπου Np φορές.

Όμως ο Cardano απέτυχε να αναγνωρίσει τη θεωρητική σημασία αυτών των εννοιών, επειδή θεωρούσε αυτές τις σχέσεις απλά αριθμητικές παρά ως ένα μέτρο της πιθανότητας εμφάνισης ενός τυχαίου γεγονότος. Αργότερα, ο Γαλιλαίος (1564-1642) μελέτησε και έλυσε μερικά από τα προβλήματα που είχαν ήδη τεθεί από τον Cardano και μεταξύ 1613 και 1624 έγραψε μια πραγματεία για το θέμα, η οποία στη συλλογή των έργων του, που δημοσιεύθηκε το 1718, εμφανίζεται με τον τίτλο *Considerazione Sopra il Gioco dei Dadi*.

Σε αυτή περιλαμβάνεται το ακόλουθο πρόβλημα: «Στο ρίξιμο ενός ισορροπημένου ζαριού, λαμβάνονται 1, 2, 3, 4, 5 ή 6 πόντοι με ίσες πιθανότητες. Στην περίπτωση ριξίματος δύο ζαριών, το άθροισμα των πόντων που θα έχουμε είναι μεταξύ 2 και 12. Τόσο το 9 όσο και το 10, από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6 μπορούν να ληφθούν με δύο διαφορετικούς τρόπους : $9 = 3 + 6 = 4 + 5$ και $10 = 4 + 6 = 5 + 5$. Στο πρόβλημα με τρία ζάρια, τόσο το 9 όσο και το 10 λαμβάνονται με διάφορους τρόπους, που είναι οι ακόλουθοι: άθροισμα 10 λαμβάνεται σε οποιοδήποτε από τα γεγονότα (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4) και (3, 3, 4), ενώ οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το άθροισμα 9 είναι { (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4) και (3, 3, 3)}.

Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν 6 ευνοϊκά γεγονότα. Έτσι δημιουργήθηκε το ερώτημα πώς είναι τότε δυνατό όταν ρίχνοντας πολλές φορές τα τρία ζάρια να έρχεται περισσότερες φορές το άθροισμα 10 παρά το 9».

Για να επιλύσει το πρόβλημα ο Γαλιλαίος πραγματοποιεί μια προσεκτική ανάλυση όλων των αθροισμάτων πόντων που μπορούν να έρθουν ρίχνοντας τρία ζάρια, η οποία τον οδηγεί στην διαπίστωση ότι υπάρχουν 216 δυνατές περιπτώσεις. Από αυτές, οι 27 είναι ευνοϊκές για να έρθει άθροισμα 10 και 25 για να έρθει 9

Γαλιλαίος θεώρησε ως κατάλληλο δειγματικό χώρο το τριπλό καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ με τον εαυτό του, που δίνει :

$$\begin{array}{llll}
 9 = 6 + 2 + 1 & 6 \text{ τρόποι} & 10 = 6 + 3 + 1 & 6 \text{ τρόποι} & = 5 + 6 \\
 3 + 1 & 6 \text{ τρόποι} & = 6 + 2 + 2 & 3 \text{ τρόποι} & = 5 + 2 + 2 \\
 & 3 \text{ τρόποι} & = 5 & + & 4 & + & 1 & 6 \text{ τρόποι} \\
 = 4 + 4 + 1 & 3 \text{ τρόποι} & = 5 & + & 3 & + & 2 & 6 \text{ τρόποι} \\
 = 4 + 3 + 2 & 6 \text{ τρόποι} & = 4 & + & 4 & + & 2 & 3 \text{ τρόποι} \\
 = 3 + 3 + 3 & 1 \text{ τρόποι} & = 4 & + & 3 & + & 3 & 3 \text{ τρόποι} \\
 & 25 \text{ τρόποι} & & & & & 27 \text{ τρόποι}
 \end{array}$$

Δηλαδή το 9 εμφανίζεται με 25 τρόπους ενώ το 10 με 27 (από τους 216)

Όμως η βασική συμβολή του Γαλιλαίου στη θεωρία των πιθανοτήτων ήταν δημιουργία της θεωρίας της μέτρησης σφαλμάτων. Ο Γαλιλαίος πίστευε ότι τα σφάλματα μέτρησης είναι αναπόφευκτα και διακρίνονταν σε δύο τύπους : «συστημικά», εξαιτίας των μεθόδων και των εργαλείων μέτρησης, και «τυχαία», που ποικίλουν με απρόβλεπτο τρόπο από τη μια μέτρηση στην άλλη. Πρόκειται για μια κατάταξη που παραμένει σε ισχύ, και με αυτές τις ιδέες ο Γαλιλαίος όχι μόνο

συνέβαλε στην ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων, αλλά έθεσε επίσης τα θεμέλια για τη γέννηση της στατιστικής.

1.2 Η ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Υπήρχαν πολλοί και επιφανείς πρόδρομοι, όμως η θεωρία πιθανοτήτων οφείλει την αναγωγή της σε επιστήμη στην αλληλογραφία μεταξύ δύο μεγάλων επιστημόνων των Pierre de Fermat και Blaise Pascal (1654), που παρακινήθηκαν από τον παίκτη Chevalier de Mere, προσπαθώντας να λύσουν τα προβλήματα που είχε προτείνει στον πρώτο ο Chevalier de Mere. Φαίνεται ότι γύρω στο 1652, στην διάρκεια ενός ταξιδιού, ο αυστηρός και πνευματικός Pascal, (1623-1662) συναντήθηκε με τον κοσμικό και τζογαδόρο Αντουάν Γκομπό, γνωστό de Mere, έναν από τους πολλούς ευγενείς με πάθος για τα παιχνίδια ζαριών και χαρτιών, ένα είδος επαγγελματία παίκτη, μορφωμένο και ευφυή άνθρωπο, κάποιον που με καλό κριτήριο κατάλαβε ότι αν σκεφτεί για τα παιχνίδια και τα γνωρίσει καλύτερα θα έχει οφέλη. Στη συνομιλία τους πρότεινε μια σειρά από προβλήματα που γοήτευσαν τον Pascal, ο οποίος προσκάλεσε και τον Fermat να συμμετέχει για την επίλυση τους.

Στην αλληλογραφία μεταξύ των δύο τους ενισχύθηκαν οι δύο μεγάλες ευφυΐες και δόθηκε ένα σοβαρό ξεκίνημα στον υπολογισμό των πιθανοτήτων. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο Fermat και ο Pascal, παρά το βάθος της επιστημονικής τους σχέσης, το γεγονός ότι ήταν και οι δύο Γάλλοι και ζούσαν στην Τουλούζη και το Παρίσι, σε απόσταση που σήμερα θα θεωρούσαμε κοντινή (600 km) δεν συναντήθηκαν ποτέ προσωπικά. Η σχέση τους ήταν μόνο αλληλογραφική.

Τα τρία προβλήματα που ο de Mere πρότεινε στον Pascal και που τόσο «παιχνίδι» έδωσαν στην ιστορία ήταν:

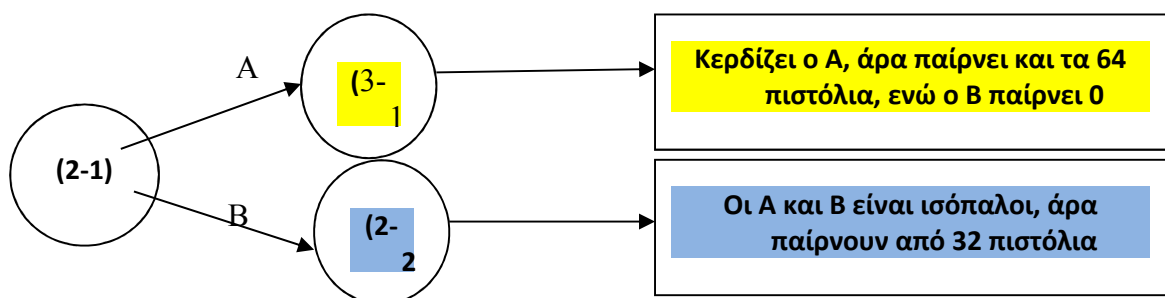
1. Ας υποθέσουμε ότι δύο παίκτες, A και B, συμμετέχουν σε ένα στοίχημα 60\$. Συμφωνούν ότι ο πρώτος που θα κάνει 3 πόντους κερδίζει όλο το στοίχημα, όμως, όταν ο A έχει κερδίσει 2 πόντους και ο B έχει κερδίσει 1, με κοινή συμφωνία αποφασίζουν να διακόψουν το παιχνίδι. Πώς πρέπει να μοιραστούν το στοίχημα των 60\$;

2. Στο παιχνίδι του ριξίματος 3 ζαριών, ποιος έχει περισσότερες πιθανότητες να κερδίσει: αυτός που ποντάρει στον αριθμό 9 ή αυτός που ποντάρει στον αριθμό 10;

3. Είναι ή όχι συμφέρον να στοιχηματίσει ότι θα έρθει τουλάχιστον ένα 6 σε τέσσερις ριξίες ενός ζαριού;

Ο συλλογισμός του Pascal, σχετικά με το πρώτο ερώτημα:

Αν συνέχιζαν, τότε στην επόμενη παρτίδα θα κέρδιζε ή ο A ή ο B.



άρα ο A παίρνει 48 (=32+16) ενώ ο B παίρνει 16 (=0+16)
(δηλαδή το στοίχημα μερίζεται με λόγο 3:1).

Αν το παιχνίδι είχε σταματήσει στο 2-0, τότε στο επόμενο παιχνίδι ο Α θα έπαιρνε και τα 64, ή θα γινότανε 2-1 δηλαδή ο Α θα έπαιρνε 48 και ο Β 16.

Άρα θα πάρει ο Α 56 ($=32+24$) και ο Β 8 ($=0+8$).

Αν το παιχνίδι είχε σταματήσει στο 1-0, τότε στο επόμενο παιχνίδι ή θα γινότανε 2-0 και θα έπαιρνε ο Α 56 και ο Β 8, ή θα γινότανε 1-1 δηλαδή ο Α θα έπαιρνε 32 και ο Β 32.

Άρα θα πάρει ο Α 44 ($=28+16$) και ο Β 20 ($=4+16$).

Στο πρώτο ερώτημα ήδη έχουμε αναφερθεί και με μια ελαφρώς διαφορετική διατύπωση, με τις απαντήσεις των Πεβερόνε και του Ταρτάλια. Για το δεύτερο, ο de Mere ομολόγησε στον Πασκάλ ότι είχε τη διαίσθηση ότι ήταν καλύτερο να ποντάρεις 10 παρά 9, αλλά διαφορετικών αναλύσεων του 10 και του 9 ως αθροίσματος 3 προσθετέων (μεταξύ 1 και 6, τα πιθανά αποτελέσματα του ζαριού) ήταν ο ίδιος. Πράγματι, υπάρχουν έξι πιθανά αθροίσματα σε κάθε περίπτωση. Η διαίσθηση του de Mere ήταν βάσιμη, επειδή κάνοντας απλούς υπολογισμούς για τις ευνοϊκές περιπτώσεις να βγει 9 ή 10, προκύπτει ότι:

- Πιθανότητα να κερδίσεις ποντάροντας στο 9 = $25/216$
- Πιθανότητα να κερδίσεις ποντάροντας στο 10 = $27/216$

Το 216 προκύπτει από το 6^3

Δηλαδή, μια μικρή διαφορά, μόνο $1/108$, υπέρ του 10 έναντι του 9. Έτσι ώστε εάν παίζει κάποιος μια φορά είναι σχεδόν ασήμαντο, όμως όχι αν παίζει με συστηματικό τρόπο. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο de Mere είχε διαίσθηση ενός μεγάλου παίκτη, σίγουρα προϊόν της μακροχρόνιας εμπειρίας του.

Η λύση που έδωσε ο Pascal στο τρίτο πρόβλημα ήταν ότι η πιθανότητα ότι ένα ριξίμο δεν φέρνει 6 είναι ίση με $5/6$. Αφού όλα τα ριξίματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, επειδή το αποτέλεσμα του ενός δεν επηρεάζει το άλλο, η πιθανότητα ότι στις τέσσερις ριζιές δεν θα έρθει κανένα 6 θα είναι :

$P(\text{κανένα } 6) = 5/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6 = 5^4/6^4 = 625/1296 = 0,482 = 48,22\%$.

Η πιθανότητα αυτή είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από το 0,5 συνεπώς είναι κάπως πλεονεκτικά να στοιχηματίζεις ότι δεν βγει κανένα έξι. Όμως χρειάζονται πολλές παρτίδες για να φανεί η μικρή διαφορά μεταξύ του 51,8% και του 48,22% για να βγει τουλάχιστον ένα 6. Για να δούμε πώς έλυναν το πρόβλημα ο Pascal και ο Fermat, θα αναλύσουμε το προβλήματα της διανομής, το οποίο είχαν μελετήσει ο Πατσόλι και ο Cardano έναν αιώνα νωρίτερα. Δεν ήταν κάτι αυτοσχέδιο, αλλά για δύο χρόνια ο Pascal σκέφτηκε για το ζήτημα και στη συνέχεια το ανακοίνωσε στον Fermat.

Σε ένα από τα πρώτα γράμματα που αντάλλαξαν (η αλληλογραφία τους διήρκεσε για περισσότερο από δύο χρόνια) ο Pascal διηγείται στον Fermat τη συνάντησή του με τον de Mere και του γνωστοποιεί τη λύση για το πρόβλημα της διανομής, που μας δίνει μια σαφή ιδέα για τον τρόπο που ενεργούσε: «Να περίπου πώς κάνω για να μάθω την αξία καθεμιάς από τις παρτίδες όταν παίζουν δύο παίκτες, για παράδειγμα, σε τρεις παρτίδες, και καθένας έχει ποντάρει 32 νομίσματα στο παιχνίδι.

Ας υποθέσουμε ότι ο πρώτος έχει δύο πόντους και ο άλλος έχει έναν. Τώρα παίζουν μια παρτίδα την οποία αν ο πρώτος κερδίσει, κερδίζει όλα τα χρήματα που είναι στο παιχνίδι, δηλαδή, 64 νομίσματα. Αν την κερδίσει ο άλλος, ο καθένας έχει δύο πόντους, και επομένως αν θέλουν να διακόψουν ο καθένας πρέπει να αποσύρει ότι στοιχημάτισε, δηλαδή 32 νομίσματα ο καθένας.

Σκεφτείτε, κύριε, ότι αν κερδίσει ο πρώτος, του ανήκουν 64, αν χάσει, του ανήκουν 32. Όμως αν δεν θέλουν να διακινδυνεύσουν αυτή την παρτίδα και να διακόψουν χωρίς να την παίξουν, ο πρώτος πρέπει να πει: «είμαι βέβαιος ότι έχω 32

νομίσματα, επειδή μου τα δίνει ακόμα και η ήττα. Όμως για τα άλλα 32, ίσως θα τα πάρω εγώ, ίσως θα τα πάρετε εσείς. Η τύχη είναι ίδια, ας μοιραστούμε λοιπόν αυτά τα 32 νομίσματα, μισά- μισά, και μου δίνετε, εκτός από αυτά τα, τα 32 νομίσματα που μου αντιστοιχούν με βεβαιότητα». Θα έχει έτσι 48 νομίσματα, και ο άλλος 16.

Η επιστολή καταλήγει με τη γνωστή φράση «Ο κύριος de Mere έχει πολύ ταλέντο αλλά δεν είναι γεωμέτρης (μαθηματικός). Αυτό είναι, όπως γνωρίζετε, ένα μεγάλο ελάττωμα». Σχεδόν ταυτόχρονα, ο Fermat έλυσε το πρόβλημα ακολουθώντας μια εντελώς διαφορετική μέθοδο και η οποία, επιπλέον, γενίκευσε τη λύση, γεγονός που ήταν πολύ συναρπαστικό για τον Pascal: «Βλέπετε (έγραψε στον Fermat) ότι η αλήθεια είναι η ίδια στην Τουλούζη (όπου ζούσε ο Fermat) όπως στο Παρίσι (όπου κατοικούσε ο ίδιος)».

Ως «παράπλευρα οφέλη» από όλους αυτούς τους στοχασμούς, ο Πασκάλ ανέπτυξε μια ολόκληρη σειρά μελετών συνδυαστικής, δημοσιεύοντας το 1665 την Πραγματεία για το αριθμητικό τρίγωνο, την πιο σημαντική συμβολή και συστηματοποίηση που είχε γίνει μέχρι τότε στη συνδυαστική. Το βιβλίο ξεκινά με την κατασκευή αυτού που είναι γνωστό από τότε ως το «τρίγωνο του Πασκάλ», που έχουμε ήδη δει. Γύρω στο 1665, ο Ολλανδός **Christiaan Huygens (1629-1695)** ήρθε σε επαφή με τις ιδέες του Πασκάλ και του Fermat, μέσω του Roberval, καθηγητή μαθηματικών στο Βασιλικό κολέγιο της Γαλλίας και άρχισε τις εργασίες του για τα προβλήματα σχετικά με τον υπολογισμό των πιθανοτήτων που μορφοποίησε στο βιβλίο *De ratiociniis in ludo aleae* (ο υπολογισμός στα τυχερά παιχνίδια) το 1657. Εκτός από την επίλυση ενδιαφερόντων προβλημάτων παιχνιδιών, χειρίζεται και εξηγεί την έννοια της «μαθηματικής ελπίδας» σε μια μεταβλητή με πεπερασμένο αριθμό τιμών. Το κάνει με τις εργασίες του για την αναμενόμενη ανθρώπινη ζωή από τα στοιχεία που συλλέχθηκαν στο Λονδίνο, σε σχέση με προβλήματα σχετικά με τα εισοδήματα και τις προσόδους.

Το πρώτο βιβλίο πιθανοτήτων ήταν του Huygens “*De Ratiociniis in ludo aleae*” που το έγραψε το 1657 στα Ολλανδικά και μεταφράστηκε στα Λατινικά από τον Van Schooten. Για 60 χρόνια μέχρι το 1700 χρησιμοποιούνταν αυτό το βιβλίο, ως το βιβλίο για τις πιθανότητες. Η κύρια ιδέα του ήταν η έννοια της μέσης τιμής και όχι η έννοια της πιθανότητας. Ο Huygens ονόμαζε “τιμή της τύχης” την μέση τιμή.

Ο Huygens έδωσε την νεότερη επιστημονική πραγματεία για την έννοια της πιθανότητας. Τα βιβλία του ενέταξαν τη Θεωρία Πιθανοτήτων στα Μαθηματικά ως ένα νέο κλάδο τους.

1.3 Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Από την αλληλογραφία των Pascal- Fermat, η θεωρία των πιθανοτήτων έγινε μέρος της γρήγορης ανάπτυξης των μαθηματικών θεωριών που συνέβαινε στην Ευρώπη εκείνης της εποχής, με τη συμβολή ενός ευρέος φάσματος ταλέντων που αφιέρωσαν τις προσπάθειες τους σε αυτή.

Ο **Jacob Bernoulli (1654-1705)** ήταν αυτός που έθεσε με σαφή τρόπο τα θεμέλια της εφαρμογής του υπολογισμού των πιθανοτήτων σε διαφορετικές κοινωνικές, ηθικές και οικονομικές απόψεις. Το έργο του *Ars Conjectandi* (Η τέχνη της εικασίας) εκδόθηκε στη Βασιλεία τον Αύγουστο του 1713, οκτώ χρόνια μετά το θάνατό του, αλλά εργάστηκε σε αυτό από το 1685, επηρεασμένος από την ανάγνωση του Χόιχενς. Όρισε τις πιθανότητες ως τον βαθμό βεβαιότητας με τον οποίο μπορεί να συμβεί ένα μελλοντικό γεγονός. Όσο για τον τίτλο του έργου του, ο συγγραφέας τον εξηγεί ως εξής: «Ορίζουμε την τέχνη της εικασίας, ή στοχαστική τέχνη, ως την τέχνη της εκτίμησης με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια των πιθανοτήτων των πραγμάτων, έτσι ώστε στις αποφάσεις και τις ενέργειες μας να

μπορούμε πάντα να βασιζόμαστε σε αυτό που έχει βρεθεί πώς είναι το καλύτερο, το πιο κατάλληλο, το πιο ασφαλές, το πιο συνιστώμενο.

Αυτό είναι το μόνο αντικείμενο της σοφίας του φιλοσόφου και η συναίνεση του ηγεμόνα». Από τα τέσσερα μέρη του *Ars Conjectandi*, τα τρία πρώτα αποτελούν συνέχεια του έργου του Χόιχενς, μια συστηματική συλλογή συνδυαστικών αποτελεσμάτων και την εφαρμογή του όλου στα τυχερά παιχνίδια, ακολουθώντας όσα είχαν ήδη πραγματοποιηθεί.

Όμως το τέταρτο μέρος είναι θεμελιωδώς διαφορετικό: εξετάζει άλλες πτυχές, αποδεικνύει το θεώρημα των μεγάλων αριθμών εισάγοντας, επιπλέον, τη σημαντική ιδέα του διαστήματος εμπιστοσύνης. Ο Bernoulli εξετάζει δύο τύπους τυχαίων καταστάσεων: πρώτα, αυτές που σχετίζονται με τυχερά παιχνίδια, όπου οι πιθανότητες είναι γνωστές εκ των προτέρων από τους κανόνες του παιχνιδιού και μπορούν να σχηματιστούν με δοχεία.

Όμως προσθέτει ένα δεύτερο είδος καταστάσεων στις οποίες οι πιθανότητες ορίζονται εκ των υστέρων, μετά από έναν μεγάλο αριθμό πειραμάτων. Ο Bernoulli θεωρούσε δεδομένο ότι η πραγματοποίηση ενός συνεχώς αυξανόμενου αριθμού δοκιμών έπρεπε να παρέχει συνεπώς καλύτερες εκτιμώμενες αξίες πιθανοτήτων. Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα που επιτεύχθηκε από τον Bernoulli είναι για τις επαναλαμβανόμενες ρίψεις ενός μη κανονικού νομίσματος, με πιθανότητα p να έρθει κορόνα και $q = 1 - p$ να έρθουν γράμματα (p και q , επομένως, διαφορετικά από $1/2$). Αν το νόμισμα ριχθεί δύο φορές, η πιθανότητα να έρθουν ακριβώς 2, 1 ή 0 κορόνες είναι p^2 , $2pq$ και q^2 , που είναι οι όροι της ανάπτυξης του $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$.

Επίσης, ρίχνοντας το νόμισμα τρεις φορές, οι πιθανότητες για 3, 2, 1 ή 0 κορόνες είναι οι αντίστοιχοι όροι του $(p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$. Ο ίδιος ο Μπερνούλι είχε συναίσθηση της σημασίας αυτού που είχε επιτύχει, και των εφαρμογών του, όταν έγραψε: « Εκτιμώ αυτήν την ανακάλυψη (την επέκταση της θεωρίας των πιθανοτήτων σε τομείς διαφορετικούς από των τυχερών παιχνιδιών) αρκετά περισσότερο από το αν είχα επιτύχει τον ίδιο τον τετραγωνισμό του κύκλου, επειδή αν αυτός είχε πράγματι βρεθεί, η ωφέλεια του θα είχε μικρή σημασία».

Μια άλλη ξεχωριστή φυσιογνωμία στην εξέλιξη της θεωρίας είναι ο Abraham De Moivre, (1667-1754), γεννημένος στη Γαλλία αλλά εξόριστος στην Αγγλία μετά από μια από τις πολλές θρησκευτικές διώξεις που καταγράφει η ιστορία της Ευρώπης (στην περίπτωση του λόγω της κατάργησης, το 1685, από τον Λουδοβίκο XIV, του Διατάγματος της Νάντης, το οποίο εγγυούταν τη θρησκευτική ελευθερία, και έτσι ο De Moivre, που ήταν ουγενότος, αναγκάστηκε να εγκαταλείψει τη χώρα του). Διετέλεσε μέλος της Βασιλικής Εταιρείας και στενός φίλος του Νεύτωνα.

Το βιβλίο του *The Doctrine of Chances* (για το οποίο έκανε διάφορες εκδόσεις ανάλογα με τις προόδους που πραγματοποιούσε) ακολουθεί την γραμμή των Χόιχενς και Bernoulli, αλλά εφαρμόζει σε αυτή τις ιδέες του απειροστικού λογισμού που αναπτύσσονταν εκείνον τον καιρό. Ο De Moivre επέκτεινε το έργο του Bernoulli στα μη κανονικά νομίσματα. Όταν ο αριθμός των ρίψεων και των κορόνων είναι μεγάλοι αριθμοί είναι δύσκολο να υπολογιστούν με ακρίβεια οι δυναμικοί συντελεστές, και ο De Moivre υπολόγισε έναν κατά προσέγγιση τύπο που σχετίζει την προηγούμενη «διωνυμική κατανομή» του Μπερνούλι με τη συνάρτηση σφάλματος ή κανονική διανομή:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}.$$

Ο **De Moivre** ήταν ο πρώτος που εξήγησε αυτή την σύνδεση, θεμελιώδη για την ανάπτυξη των πιθανοτήτων και της στατιστικής.

Ο **Pierre Simon Laplace** έγραψε το 1773 την πρώτη του έκθεση σχετικά με τις πιθανότητες, σε μία εποχή που είχε ήδη χρησιμοποιήσει εκτενώς τον απειροστικό λογισμό. Σε αυτή ασχολείται κατά κύριο λόγο με μαθηματικές πτυχές, αφήνοντας κατά μέρος τα φιλοσοφικά θεμέλια των πιθανοτήτων, που ήταν τόσο παρόντα στα έργα των προκατόχων του. Αργότερα, το 1820, στο Φιλοσοφικό δοκίμιο για τις πιθανότητες, εισαγωγή στην τρίτη έκδοση της μνημειώδους πραγματείας του Αναλυτική θεωρία των πιθανοτήτων (η πρώτη έκδοση της οποίας εμφανίστηκε το 1812), ο **Laplace** εξηγεί τη γνωστή του διακήρυξη της «αιτιοκρατικής» (ντετερμινιστικής) πίστης: «Πρέπει να βλέπουμε την παρούσα κατάσταση του σύμπαντος ως το αποτέλεσμα προηγούμενης κατάστασής του και ως την αιτία αυτής που θα ακολουθήσει.

Μια νοημοσύνη που σε μια δεδομένη στιγμή θα γνώριζε όλες τις δυνάμεις που ζωντανεύουν τη φύση και την αντίστοιχη κατάσταση των όντων που την απαρτίζουν, αν επίσης ήταν αρκετά ευρεία για να υποβάλει όλα αυτά τα δεδομένα σε ανάλυση, θα συνόψιζε σε έναν μόνο τύπο τις κινήσεις των μεγαλύτερων σωμάτων του σύμπαντος και αυτών του πιο ελαφρού ατόμου: τίποτα δεν θα ήταν αβέβαιο για αυτή και τόσο το μέλλον όσο και το παρελθόν θα βρίσκονταν αντίκρυ στα μάτια του» έγραψε.

Ωστόσο αξίζει να σημειωθεί ότι δεν επιχειρεί να βεβαιώσει ότι μια υψηλότερη νοημοσύνη θα μπορούσε να υπολογίσει όλες τις συνέπειες των νόμων της φύσης, αλλά ο στόχος του Laplace ήταν η ανάπτυξη της επιστήμης των πιθανοτήτων ώστε να έχει πιο ακριβή γνώση αυτών των νόμων της φύσης.

Έτσι φτάνει στο περίφημο συμπέρασμα του ότι «φαίνεται σε αυτή την έκθεση ότι η θεωρία των πιθανοτήτων δεν είναι κατά βάθος παρά η κοινή λογική εκφρασμένη με τον υπολογισμό: κάνει να εκτιμηθεί με ακρίβεια αυτό που τα δίκαια πνεύματα αισθάνονται από ένα είδος ενστίκτου, χωρίς να μπορούν να το συνειδητοποιήσουν». Στην πραγματεία του υπάρχουν δύο μέρη: στο πρώτο αναπτύσσει τη θεωρία των γεννητριών συναρτήσεων και τις θεωρίες που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση των εκφράσεων των τύπων των μεγάλων αριθμών, και στο δεύτερο πραγματεύεται τη γενική θεωρία των πιθανοτήτων.

Μετά από τον Laplace και τους άμεσους συνεχιστές του, ειδικά του Gauss και Legendre, η θεωρία των πιθανοτήτων φτάνει στην ενηλικίωση της και το καθήκον που απομένει είναι η συστηματοποίηση, η βελτίωση και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, που πραγματοποιούνται στη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα. Δεν αναπτύσσεται μόνο στο πλαίσιο των μαθηματικών, αλλά εφαρμόζεται όλο και περισσότερο σε άλλους τομείς, ιδιαίτερα στη στατιστική μηχανική, η οποία της ανοίγει το δρόμο της φυσικής.

Υπάρχουν πολλές ξεχωριστές προσωπικότητες σε όλον τον αιώνα, μεταξύ των οποίων αξίζει να αναφερθούν οι **Poisson, De Morgan, Cournot, Tchebycheff**, που ήταν ο εμπνευστής της Ρωσικής σχολής, στην οποία ανήκουν οι μαθητές του Markov και Liapunov), που θα άνοιγαν τον δρόμο για τον Kolmogorov, ο οποίος ήταν αυτός που διατύπωσε μια αξιωματική θεωρία των πιθανοτήτων.

Ο Κολμογκόροφ γνώριζε ότι με την εργασία του έκλεινε ένα μακροχρόνιο αγώνα κατά της αβεβαιότητας, όταν έγραφε ότι: «Η επιστημολογική αξία της θεωρίας των πιθανοτήτων βασίζεται στο γεγονός ότι τα τυχαία φαινόμενα δημιουργούν σε μεγάλη κλίμακα μια αυστηρή κανονικότητα, όπου το τυχαίο, με κάποιο τρόπο, έχει εξαφανιστεί». Περνούσαμε σε ένα άλλο ανώτερο στάδιο της κατάκτησης του τυχαίου. Μια ειδική μνεία αξίζει ο Βέλγος μαθηματικός **Adolphe Quetelet**, (1796-1874), ο οποίος ανέπτυξε ένα ενδιαφέρον για τις

εφαρμογές των πιθανοτήτων και της στατιστικής στις διαφορετικές ανθρώπινες δραστηριότητες, έτσι ώστε θεωρείται ο ιδρυτής της σύγχρονης στατιστικής.

Υπήρξε ένας συλλέκτης κοινωνικών δεδομένων και έκανε την περιγραφή τους με όρους του νόμου κανονικής κατανομής, την οποία ονόμασε «νόμος των τυχαίων αιτιών». Από το 1835 υπερασπίστηκε τη χρήση της κανονικής καμπύλης για την προσέγγιση κάθε τύπου κοινωνικών δεδομένων (γεννήσεις, θάνατοι, εγκλήματα, αυτοκτονίες). Γνώριζε ότι παρόλο που τέτοια γεγονότα είναι απρόβλεπτα για κάθε άτομο, έχουν στατιστικές κατευθυντήριες γραμμές όταν εξετάζουμε ολόκληρους πληθυσμούς. Έδωσε σχήμα σε αυτή την ιδέα μιλώντας για τον «μέσο άνθρωπο», έναν όρο που χρησιμοποιήθηκε πολύ στη συνέχεια και που απεικονίζει ένα φανταστικό χαρακτήρα που είναι ο μέσος όρος σε όλες τις απόψεις.

Όμως ο Quetelet δε θεωρούσε τον μέσο άνθρωπο μόνο ως μια μαθηματική έννοια, αλλά ότι ήταν ο στόχος της κοινωνικής δικαιοσύνης.

Το 1844 εξέπληξε όλους τους σκεπτικιστές χρησιμοποιώντας το νόμο κανονικής κατανομής για την κατανομή του ύψους των ανδρών, πράγμα που του επέτρεψε να εντοπίσει τις απάτες για την «αποφυγή» της υποχρέωσης της στρατιωτικής θητείας στη Γαλλία: οι θεωρητικές προβλέψεις του τον οδήγησαν να δείξει ότι περίπου 2000 νέοι είχαν αποφύγει τη στράτευση δηλώνοντας επίτηδες μικρότερο ύψος από εκείνο που απαιτείται για την εκπλήρωση της στρατιωτικής θητείας.

1.4 Μια πρόσφατη ιστορία πιθανοτήτων

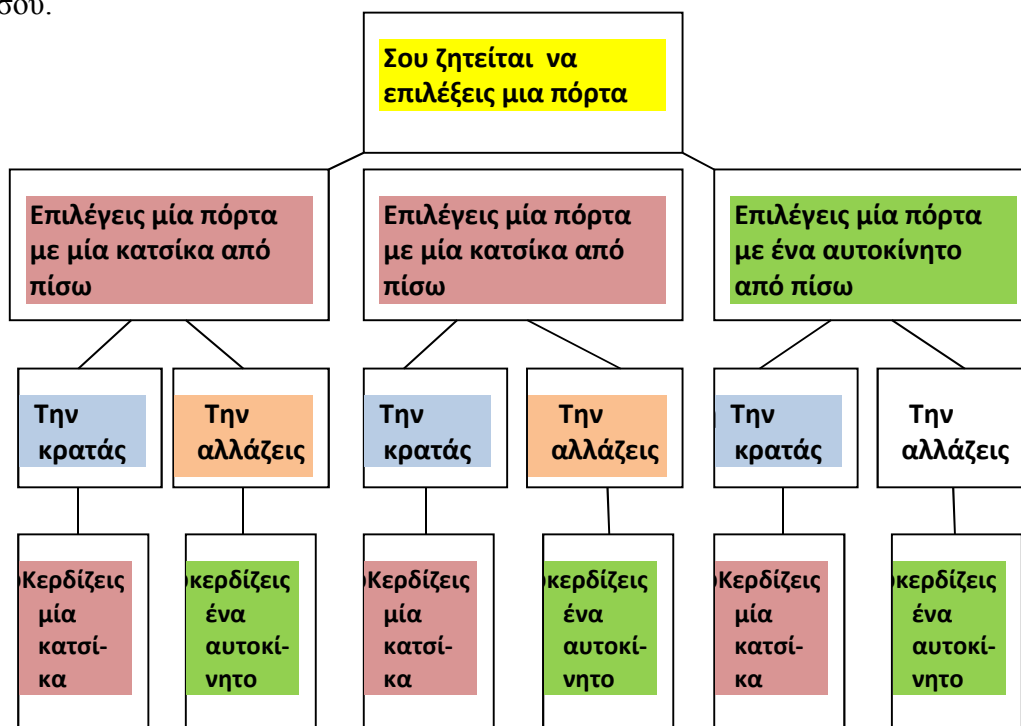
Σε έναν τηλεοπτικό διαγωνισμό που έχει φτάσει στην τελική ευθεία σε βάζουν μπροστά σε τρεις κλειστές πόρτες. Πίσω από μια από αυτές υπάρχει ένα «μεγάλο» έπαθλο, ένα αυτοκίνητο, ενώ οι άλλες δύο δεν κρύβουν τίποτα πολύτιμο. Πρέπει να επιλέξεις μόνο μια από τις πόρτες. Όταν έχεις ήδη δείξει την πόρτα που επέλεξες, ο παρουσιαστής αποφασίζει να συνεχίσει το θέαμα και σου ανοίγει μια από τις άλλες δύο, που δεν έχει έπαθλο, και σου δίνει μια νέα ευκαιρία: φυσικά, εάν θέλεις μπορείς να συνεχίσεις με την επιλογή σου, αλλά μπορείς επίσης να αφήσεις την πόρτα που έχεις επιλέξει και να διαλέξεις την άλλη κλειστή.

Ερώτημα φυσικά είναι πια κίνηση θα είναι πιο συμφέρουσα, δηλαδή αν είναι το ίδιο να συνεχίσεις με την πόρτα που επέλεξες ή να αλλάξεις. Φαίνεται ως άσχετο ζήτημα και ότι είναι το ίδιο να κάνεις το ένα ή το άλλο. Ωστόσο, αυτό το πρόβλημα (γνωστό ως «**πρόβλημα του Μόντι Χολ**») οδήγησε σε κάμποσες συζητήσεις σχετικά πρόσφατα, με τη συμμετοχή εξαιρετικών μαθηματικών, γεγονός που αποδεικνύει ότι οι πιθανότητες απέχουν πολύ από το να είναι θέμα που έχει κατανοηθεί καλά.

Από το 1963 έως 1990 μεταδιδόταν στην τηλεόραση των Ηνωμένων Πολιτειών ένας τηλεοπτικός διαγωνισμός με τίτλο let's Make a Deal, το παραπάνω πρόβλημα βασίζεται στην δυναμική του διαγωνισμού. Επίσης για πολλά χρόνια, σε περισσότερες από τριακόσιες εφημερίδες της ίδιας χώρας υπήρχε μια στήλη με τίτλο «ρωτήστε τη Μέριλιν», στην οποία υπήρχαν ερωτήσεις και απαντήσεις.

Η γυναίκα που ήταν υπεύθυνη για τη στήλη, η **Marilyn Vos Savant**, είναι διάσημη επειδή εμφανίζεται στο βιβλίο των ρεκόρ Γκίνες ως το άτομο με τον υψηλότερο δείκτη ευφυΐας στον κόσμο, με τιμή 228, και προσθέτει στη φήμη της το γεγονός ότι είναι παντρεμένη με τον γιατρό και επιστήμονα Ρόμπερτ Τζάρβικ, ο οποίος ανέπτυξε την τεχνητή καρδιά. Ήταν μια Κυριακή του 1990 όταν δημοσίευσε στη στήλη της την ερώτηση του προβλήματος: «Είναι πλεονέκτημα για τον διαγωνιζόμενο να αλλάξει την πόρτα που είχε επιλέξει αρχικά;».

Η Μέριλιν έγραψε στη στήλη της ότι ήταν καλύτερο να αλλάξει πόρτα. Αυτό έγινε αφορμή για μια πλημμύρα επιστολών από τους αναγνώστες της (περίπου 10000) που ήταν σχεδόν ομόφωνες: το 92% της έλεγε ότι έκανε λάθος, προσθέτοντας ότι ήταν απογοητευμένοι από το γεγονός ότι ένα άτομο σαν αυτή έδωσε μια λανθασμένη απάντηση σε μια τόσο απλή ερώτηση. Της έγραψαν ακόμη και πολλοί καθηγητές μαθηματικών, που ήταν αγανακτισμένοι. Οι απαντήσεις συνέχισαν να φτάνουν σε βιομηχανικές ποσότητες για μεγάλο χρονικό διάστημα έως ότου, αφού αφιέρωσε περισσότερο χώρο στη στήλη της, η συγγραφέας αποφάσισε να επιλύσει το θέμα. Η αλήθεια είναι ότι η Βος Σάβαντ είχε δίκιο και όλοι όσοι της έγραψαν, μαθηματικοί ή όχι έκαναν λάθος. Στη συνέχεια φαίνεται το σχήμα με το αρχικό πρόβλημα, που πίσω από τις πόρτες χωρίς το μεγάλο έπαθλο υπάρχει μια κατσίκα της παρηγοριάς, που δείχνει ότι αν συνεχίσεις με την πόρτα που έχεις επιλέξει οι πιθανότητες σου είναι προφανές $1/3$ εφόσον υπήρχαν τρεις πόρτες και επέλεξες μια, ενώ αν αλλάξεις γίνεται $2/3$, διπλασιάζεις τις πιθανότητές σου.



Είναι εκπληκτικό το γεγονός ότι δεν υπήρχαν αντιρρήσεις μόνο από τους μαθηματικούς του «σωρού», αλλά ότι ακόμη και ο Ούγγρος **Πολ Έρντος** ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 20^{ου} αιώνα, είπε ότι αυτή η λύση ήταν αδύνατη και παραδέχτηκε το λάθος του μόνο μετά από μια προσομοίωση σε υπολογιστή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΤΥΧΗ

Στην καθημερινή ζωή μας περιβαλλόμαστε από πληροφορίες που μας μιλούν για πιθανότητες ότι θα συμβεί κάτι, πιθανότητες να κερδίσουμε ένα έπαθλο, περιέργες συμπτώσεις, πιθανότητα ότι μια λάμπα θα διαρκέσει πάνω από 1.000 ώρες, πιθανότητες μιας ομάδας να κερδίσει το πρωτάθλημα ή απλά δεκάδες δημοσκοπήσεις που μας λένε αυτό που πιστεύουμε για πολλά θέματα, χωρίς ποτέ να ρωτήσουν εμάς τους ίδιους, αν και, περιέργως, έχουν «καλό μάτι» και συνήθως «πέφτουν μέσα». Τα περισσότερα από τα παραπάνω σχόλια σχετίζονται με

γεγονότα ή συμβάντα για τα οποία μπορούμε να γνωρίζουμε όλες τις πιθανές εκβάσεις, αλλά το συγκεκριμένο αποτέλεσμα τους, όταν συμβαίνει, δεν είμαστε σε θέση να προβλέψουμε.

Είναι φαινόμενα ή πειράματα που υπόκεινται στην «τύχη». Όμως μερικά από τα συμβάντα που αναφέρθηκαν δεν ταιριάζουν σε αυτή την κατηγορία. Έτσι, είναι δύσκολο να πιστέψει κανείς ότι όταν σε έναν ποδοσφαιρικό αγώνα βρίσκονται αντιμέτωπες η καλύτερη ομάδα στην Ευρώπη με μια ερασιτεχνική ομάδα, το αποτέλεσμα του αγώνα υπόκειται στην τύχη. Θα αναλυθούν μόνο τα πειράματα ή τα γεγονότα που μπορούν να θεωρηθούν «τυχαία» ή ότι υπόκεινται στους κανόνες της τύχης.

Το λεξικό της Βασιλικής Ισπανικής Ακαδημίας της Γλώσσας ορίζει το τυχαίο ως κάτι απρόβλεπτο, ένα συμπτωματικό γεγονός, και δηλώνει ότι ο όρος «στην τύχη» σημαίνει «χωρίς τάξη». Πιθανόν αν σε καθέναν από εμάς ζητήσουν να πούμε τι εννοούμε με τον όρο «τυχαίο», θα βρεθούμε χωρίς σαφή απάντηση και θα πρέπει να ψάξουμε να δώσουμε παραδείγματα αυτού που αποκαλούμε «τυχερά παιχνίδια». Αυτό δείχνει ότι το τυχαίο είναι κάπως δύσκολο να προσδιοριστεί, αλλά το νόημα του μπορούμε να το αναγνωρίσουμε και να το αιτιολογήσουμε, ώστε να ξέρουμε αν πρέπει να συμμετέχουμε ή όχι σε ένα συγκεκριμένο τυχερό παιχνίδι και υπό ποιες προϋποθέσεις. Η ιδέα της πιθανότητας είναι στενά συνδεδεμένη με την ιδέα του τυχαίου και μας βοηθά να κατανοήσουμε τις δυνατότητες μας για να κερδίσουμε ένα τυχερό παιχνίδι ή να αναλύσουμε τις δημοσκοπήσεις.

Ο **Laplace** δήλωσε: «Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι μια επιστήμη που ξεκίνησε με εκτιμήσεις για τα τυχερά παιχνίδια έχει γίνει το πιο σημαντικό αντικείμενο της ανθρώπινης γνώσης». Δύο αιώνες αργότερα, η δήλωση αυτή είναι όλο και πιο εμφανής, όχι μόνο στην καθημερινή ζωή, αλλά και στον τομέα της επιστήμης, της τεχνολογίας και των κοινωνικών επιστημών. Η κατανόηση και η μελέτη του τυχαίου είναι απαραίτητη, επειδή οι πιθανότητες είναι μια αναγκαία υποστήριξη για τη λήψη αποφάσεων σε οποιονδήποτε τομέα.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα σε τι καταστάσεις αναφερόμαστε, θα παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν φαινόμενα που συμβαίνουν γύρω μας και τα αποτελέσματα είναι εύκολα προβλέψιμα: τα ντετερμινιστικά (αιτιοκρατικά) φαινόμενα. Όταν διεξάγεται ένα ντετερμινιστικό πείραμα, το αποτέλεσμα του μπορεί να προβλεφτεί κατηγορηματικά από ορισμένα αρχικά δεδομένα.

Απλά αλλάζει το αποτέλεσμα αν αλλάξει κάποιο από τα αρχικά δεδομένα από τα οποία εξαρτάται. Έτσι αν αφήσουμε να πέσει ένα αντικείμενο από ένα συγκεκριμένο ύψος μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι θα πέσει στο έδαφος, να υπολογίσουμε την ταχύτητα με την οποία θα φτάσει ή τον χρόνο που θα κάνει για να φτάσει. Υπάρχουν πολλά άλλα φαινόμενα στα οποία δεν συμβαίνει αυτό, αλλά από την ίδια αρχική κατάσταση μπορούν να αποκτηθούν διαφορετικά και απρόβλεπτα αποτελέσματα: τα τυχαία φαινόμενα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το ρίξιμο ενός ζαριού (από αυτό προέρχεται ο όρος «αλεατορικό» : aleas = «ζάρι»): αν και προσπαθούμε να το ρίξουμε πάντα με τον ίδιο τρόπο, κάθε φορά υπάρχει ένα απρόβλεπτο αποτέλεσμα.

Το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης εξαρτάται από την τύχη. Θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ότι μετρώντας με ακρίβεια μια ολόκληρη σειρά δεδομένων της αρχικής κατάστασης του ζαριού, την γωνία και την δύναμη με την οποία το ρίχνουμε, την τριβή του αέρα, κλπ., και γνωρίζοντας τις εξισώσεις της κίνησης θα μπορούσαμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα. Υπό αυτή την έννοια, ο Laplace έλεγε ότι η πιθανότητα είναι η μέτρηση της άγνοιάς μας. Όμως η αλήθεια είναι ότι μικρές αποκλίσεις (δύσκολα μετρήσιμες) οδηγούν σε διαφορετικά

αποτελέσματα. Αυτό είναι το τυχαίο. Όμως, το ότι ένα φαινόμενο είναι τυχαίο και επομένως απρόβλεπτο στα συγκεκριμένα αποτελέσματα του, δεν σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε κάποια γνώση για αυτό, και εδώ επεμβαίνει η μελέτη των πιθανοτήτων, η οποία βρήκε σιγά-σιγά μια θέση στην ιστορία της ανθρωπότητας. Όπως διαπιστώνεται σε πολλές περιπτώσεις και παιχνίδια, όταν επαναλαμβάνεται πολλές φορές το ίδιο πείραμα τύχης παρατηρούνται πολλές κανονικότητες.

Το αποτέλεσμα του ριξίματος ενός ζαριού είναι αδύνατο να καθοριστεί, αλλά το συνολικό αποτέλεσμα αρκετών χιλιάδων ριξιμάτων μπορεί να είναι γνωστό με σχεδόν απόλυτη βεβαιότητα. Μπορούσαμε να πούμε ότι «στην τυχειότητα η τάξη εμφανίζεται με την πάροδο του χρόνου, με τις επαναλήψεις». Όπως έλεγε ο **Άρθουρ Κόναν Ντόιλ (1859 – 1930)**, ο δημιουργός του Σέρλοκ Χολμς, αναφερόμενος στην κοινωνία: «Ενώ κάθε άτομο είναι ένα άλυτο αίνιγμα, συλλογικά μεταμορφώνεται σε μια μαθηματική βεβαιότητα. Τα άτομα αλλάζουν, τα ποσοστά παραμένουν». Το ίδιο συμβαίνει με το ζάρι και άλλες τυχαίες καταστάσεις: κάθε ρίξιμο ποικίλλει, οι αναλογίες διατηρούνται.

Όταν επαναλαμβάνεται ένα πείραμα τύχης μπορεί να διαπιστωθεί επιπλέον ότι, γενικά, δεν εμφανίζονται όλα τα αποτελέσματα με την ίδια αναλογία: υπάρχουν γεγονότα που συμβαίνουν πιο συχνά από άλλα. Αν ρίξουμε ένα «κανονικό» ζάρι όλες οι έδρες εμφανίζονται στην ίδια αναλογία, αλλά αν ρίξουμε δύο «κανονικά» κέρματα και δούμε τον αριθμό των κορόνων που εμφανίζονται (0, 1 ή 2), είναι πιο συχνό να παρατηρούμε μόνο μια κορόνα.

Αν πάρουμε ένα φύλλο από μια ισπανική τράπουλα (σαράντα κάρτες διανεμημένες σε τέσσερα χρώματα) και δούμε αν το φύλλο είναι μια φιγούρα, δεν συμβαίνει με την ίδια συχνότητα να είναι ή να μην είναι. Η πιθανότητα ενός γεγονότος θα είναι ένας δείκτης των δυνατοτήτων για να συμβεί.

2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Έχουμε ήδη πει ότι η πιθανότητα θα είναι ένας αριθμός που θα μας δείξει πόσο αληθοφανές είναι να παρατηρήσουμε ένα αποτέλεσμα ενός φαινομένου ή πειράματος τύχης. Ωστόσο, η κατανομή αυτής της πιθανότητας είναι κάτι που μπορεί να είναι διαισθητικό σε πολλές περιπτώσεις, αλλά εντελώς αινιγματικό σε άλλες.

2.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ

Στο σημείο αυτό εξετάζονται μερικές ιδέες και έννοιες που εμφανίζονται με την επανάληψη ενός πειράματος τύχης. Ρίχνουμε δύο ζάρια και υπολογίζουμε την διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων τους. Ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει την καταμέτρηση των αποτελεσμάτων, πρώτα με 189 κανονικές ριξιές και στη συνέχεια τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων με υπολογιστή για 50.000, 100.000 και 1.000.000 ριξιές δύο ζαριών:

Διαφορά	189 ρίψεις	50.000 ρίψεις	100.000 ρίψεις	1.000.000 ρίψεις
0	32	8.143	16.570	166.600
1	50	13.551	27.280	277.782
2	34	11.249	22.513	221.871
3	45	8.479	16.834	167.562
4	18	5.806	11.455	110.363
5	10	2.772	5.348	55.822

Οι απόλυτες συχνότητες (αριθμός των φορών που παρατηρείται κάθε διαφορά) του πίνακα δεν μας δίνουν πολλές πληροφορίες. Είναι καλύτερα να κάνουμε την

αναλογία μεταξύ κάθε αποτελέσματος και του συνόλου των δοκιμών που πραγματοποιήθηκαν, που είναι η λεγόμενη σχετική συχνότητα καθενός από αυτά. Αυτές οι τιμές, που εκφράζονται στον ακόλουθο πίνακα, μας δίνουν περισσότερες πληροφορίες και μας επιτρέπουν να βγάλουμε συμπεράσματα με μεγαλύτερη σαφήνεια:

Διαφορά	189 ρίψεις	50.000 ρίψεις	100.000 ρίψεις	1.000.000 ρίψεις
0	0.169	0.163	0.166	0.167
1	0.265	0.271	0.273	0.278
2	0.180	0.225	0.225	0.222
3	0.238	0.170	0.168	0.168
4	0.095	0.116	0.115	0.110
5	0.053	0.055	0.053	0.056

Ο πίνακας είναι η επαλήθευση για μια από τις αρχές που διέπουν την συμπεριφορά του τυχαίου, τη στατιστική κανονικότητα, σύμφωνα με την οποία, με την αύξηση του αριθμού των φορών που επαναλαμβάνουμε ένα πείραμα τύχης, η σχετική συχνότητα καθενός αποτελέσματος προσεγγίζει όλο και περισσότερο μια ορισμένη τιμή.

Ονομάζουμε πιθανότητα ενός γεγονότος ακριβώς την τιμή εκείνη που πλησιάζει όλο και περισσότερο την σχετική συχνότητα όταν το πείραμα επαναλαμβάνεται για μεγάλο αριθμό φορών (που στα μαθηματικά ονομάζεται οριακή τιμή). Όπως αναφέρθηκε πριν, αυτή η πιθανότητα ενός γεγονότος είναι μια μέτρηση των δυνατοτήτων για να συμβεί.

Δεδομένου ότι η πιθανότητα είναι η οριακή τιμή της σχετικής συχνότητας, ικανοποιεί τις ιδιότητες των σχετικών συχνοτήτων:

1) Η πιθανότητα $\text{prob}(S)$ ενός γεγονότος S είναι ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1, επειδή ο αριθμός των φορών που συμβαίνει πρέπει να περιλαμβάνεται μεταξύ 0 και του συνολικού αριθμού των φορών που το εκτελούμε: $0 \leq \text{prob}(S) \leq 1$.

2) Η πιθανότητα ενός αδύνατου γεγονότος είναι 0. Η πιθανότητα ενός βέβαιου γεγονότος είναι 1. Αυτές οι δύο ιδιότητες μας επιτρέπουν να ορίσουμε μια κλίμακα πιθανοτήτων. Αν ένα αποτέλεσμα δεν συμβαίνει ποτέ έχει πιθανότητα 0. Αν συμβαίνει πάντα, έχει πιθανότητα 1. Αν συμβαίνει μερικές φορές, θα είναι ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1. Ένα συμβάν θα είναι τόσο πιο πιθανό όσο πιο κοντά στο 1 είναι η πιθανότητα του. Όταν κάτι συμβαίνει πολύ συχνά λέμε ότι είναι πιθανό: Η πιθανότητα του είναι κοντά στο 1. Κάτι που συμβαίνει πολύ σπάνια λέμε είναι πολύ λίγο πιθανό: Η πιθανότητα του είναι κοντά στο 0. Όμως υπάρχει μια πολύ σημαντική διαφορά μεταξύ υψηλής πιθανότητας (ακόμα και πολύ υψηλής) και βεβαιότητας: ότι ένα γεγονός έχει πολύ υψηλή πιθανότητα δεν επιτρέπει ποτέ την επιβεβαίωση ότι λαμβάνεται από ένα συγκεκριμένο πείραμα.

3) Η πιθανότητα ενός γεγονότος που αποτελείται από πολλά διαφορετικά αποτελέσματα είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχειωδών γεγονότων (αποτελέσματα) που το απαρτίζουν.

4) Το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης (στοιχειώδη γεγονότα) είναι ίση με 1.

5) Το άθροισμα των πιθανοτήτων δύο συμπληρωματικών γεγονότων είναι ίσο με 1: $\text{prob}(S) + \text{prob}(\text{όχι } S) = 1$.

Η ιδιότητα αυτή είναι ενδιαφέρουσα επειδή σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα ενός γεγονότος όταν είναι γνωστή αυτή του αντίθετου (που μπορεί να είναι πιο εύκολο να βρεθεί). Για παράδειγμα, το γεγονός «χρειάζονται

περισσότερες από μια ριζιές ενός ζαριού για να έρθει ένα 6» αποτελεί το συμπλήρωμα του «να έρθει 6 με μια μόνο ριζιά». Αφού γνωρίζουμε ήδη ότι η πιθανότητα για να έρθει 6 με μια μόνο ριζιά είναι $p=1/6 \approx 0,167$ η πιθανότητα του συμπληρωματικού γεγονότος είναι:

$\text{Prob}(\text{να χρειαστούν περισσότερες από μια ριζιές}) \approx 1 - 0,167 \approx 0,833$.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι για να ορίσουμε πιθανότητες με αυτή τη διαδικασία επαναλαμβανόμενου πειραματισμού χρειάζεται ένας «μεγάλος» αριθμός επαναλήψεων. Δηλαδή, πρέπει να συγχέουμε αυτόν τον νόμο των μεγάλων αριθμών που αναφέρθηκε με αυτόν που μερικές φορές ονομάζεται «νόμος των μικρών αριθμών», που εφαρμόζουμε τόσες φορές στην ζωή μας εξάγοντας γενικά συμπεράσματα από ένα μικρό αριθμό εμπειριών.

Αν για παράδειγμα, ταξιδέψαμε σε μια άλλη χώρα και πέσαμε θύμα κλοπής στον δρόμο και γνωρίζουμε δύο άλλες περιπτώσεις ταξιδιωτών στους οποίους συνέβηκε το ίδιο (που μπορεί να μας το είπαν μόλις τους διηγηθήκαμε την περίπτωσή μας), χωρίς περισσότερα παραδείγματα αποφασίζουμε ότι στην χώρα αυτή είναι πολύ πιθανό να σε κλέψουν (έστω και αν η εμπειρία μεγάλων ομάδων ταξιδιωτών και οι αντικειμενικές στατιστικές αποδεικνύουν τον αντίθετο).

Μπορεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος να έχει προδιάθεση να εξάγει γενικά συμπεράσματα που του επιτρέπουν να έχει οδηγούς για την δράση και ότι η επανάληψη ορισμένων γεγονότων περιορίζεται στην εμπειρία καθενός, παρόλο που πρέπει να εξάγει γενικές κατευθυντήριες γραμμές για την δράση. Η πραγματικότητα είναι ότι εξάγονται γενικά συμπεράσματα με αρκετή ελαφρότητα εφαρμόζοντας αυτόν τον εσφαλμένο νόμο των μικρών αριθμών, και όχι μόνο σε ιδιωτικές συνομιλίες, αλλά ακόμα και στα μέσα ενημέρωσης, όπως η «αλάθητη» μέθοδος που ένας δημοσιογράφος περιέγραφε για τον υπολογισμό της έκτασης της ανεργίας:

«Ρωτήστε τον εαυτό σας πόσους άνεργους έχεις την οικογένειά σας. Στη συνέχεια ρωτήστε τους γείτονες, τους φίλους και τους γνωστούς σας και αθροίστε τα αποτελέσματα που παίρνετε. Συγκρίνεται αυτόν τον αριθμό με τον αριθμό των ατόμων που αποτελούν την οικογένειά σας και όσους γνωρίζουν όλους αυτούς που ρωτήσατε. Έτσι θα έχετε ένα αλάθητο νούμερο για τον αριθμό των ανέργων». Όπως φαίνεται μια περιορισμένη εμπειρία για να εξαχθούν γενικά συμπεράσματα συχνά οδηγεί στην εξαγωγή εσφαλμένων συμπερασμάτων.

2.3 ΙΣΟΠΙΘΑΝΑ ΣΥΜΒΑΝΤΑ

Δεν είναι πάντα απαραίτητο να καταφύγουμε στον πειραματισμό για να ορίσουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος. Στο ρίξιμο ενός κανονικού ζαριού, οι συνθήκες συμμετρίας του μας επιτρέπουν να υποθέσουμε ότι καμία από τις έδρες δεν θα έχει περισσότερες πιθανότητες να έρθει από ότι οι άλλες.

Έτσι, τα 6 πιθανά αποτελέσματα του ριξίματος ενός ζαριού είναι εξίσου πιθανά δηλαδή η πιθανότητα ενός από αυτά είναι $1/6 \approx 0.167$ (κάθε έδρα θα εμφανιστεί στο 16,7% των φορών). Αφαιρώντας ένα φύλλο από μια ισπανική τράπουλα, με 12 φιγούρες από 40 φύλλα, φαίνεται λογικό να πιστεύουμε ότι μια φιγούρα θα εμφανιστεί το 30% των φορών (12/40), έτσι ώστε θα μπορούσαμε να πούμε ότι η πιθανότητα είναι $12/40 = 0,30$.

Χρησιμοποιώντας ως αναφορά αυτά τα δύο παραδείγματα βλέπουμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις που οι πιθανότητες των διαφόρων αποτελεσμάτων είναι διαισθητικές. Οι συνθήκες συμμετρίας και η κανονικότητα του ζαριού είναι αρκετές για να ορίσουμε τις ίδιες πιθανότητες σε οποιαδήποτε από τις έδρες : $1/6$. Στην περίπτωση της τράπουλας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παρόμοιο συλλογισμό.

Έτσι, σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να ορίσουμε την πιθανότητα ως εξής: αν κατά της διεξαγωγή ενός πειράματος τύχης μπορούν να προκύψουν N διαφορετικά αποτελέσματα και μπορεί να διασφαλιστεί ότι όλα έχουν τις ίδιες δυνατότητες εμφάνισης (είναι εξίσου δυνατά) η πιθανότητα καθενός από τα αποτελέσματα είναι $p = 1/N$. Στην περίπτωση του ζαριού, το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων (ονομάζεται δειγματικός χώρος) είναι $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Αν ο κύβος είναι σωστός όλα τα στοιχειώδη γεγονότα θα είναι εξίσου δυνατά. Δηλαδή η πιθανότητα τους θα είναι:

$$P(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = 1/6 \approx 0.167 \text{ (16,7\%)}$$

Ας εξετάσουμε τώρα μερικά σύνθετα γεγονότα όπως «να έρθει ένας μονός αριθμός» ή «να έρθει ένα πολλαπλάσιο του 3». Ποιά θα είναι η πιθανότητά του; Εάν το αποτέλεσμα του ριξίματος είναι 2, 4 ή 6, θα επαληθευτεί το γεγονός «να έρθει ζυγός αριθμός». Αφού η πιθανότητα ενός σύνθετου γεγονότος ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχειωδών γεγονότων που το αποτελούν, έχουμε: $\text{Prob}(\text{ζυγός αριθμός}) = p(\{1, 3, 5\}) = p(1) + p(3) + p(5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 0,5$ ή (50%).

Η πιθανότητα να έρθει ένα πολλαπλάσιο του 3 είναι: $\text{Prob}(\text{πολλαπλάσιο του 3}) = p(\{3, 6\}) = p(3) + p(6) = 1/6 + 1/6 = 2/6 \approx 0,333$ (33,3%).

Αν προσέξουμε τα αποτελέσματα:

$$p(\text{μονός αριθμός}) = 3/6, p(\text{πολλαπλάσιο του 3}) = 2/6.$$

Αυτές οι δύο πιθανότητες επιβεβαιώνουν ότι η πιθανότητα σε κάθε περίπτωση είναι ίση με το πηλίκο μεταξύ του αριθμού των στοιχειωδών γεγονότων που αποτελούν το σύνθετο γεγονός (3 στην πρώτη περίπτωση και 2 στη δεύτερη) και του συνολικού αριθμού αποτελεσμάτων ή στοιχειωδών γεγονότων που μπορεί να προκύψουν.

Ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο συλλογισμού στη γενική περίπτωση, μπορούμε να πούμε ότι, αν σε ένα πείραμα τύχης μπορούν να συμβούν N στοιχειώδη γεγονότα, όλα εξίσου δυνατά, η πιθανότητα ενός γεγονότος S που αποτελείται από n στοιχειώδη γεγονότα θα είναι:

$$p(S) = 1/N + 1/N + \dots + 1/N \text{ (n αθροίσματα ίσα με } 1/N) = n/N,$$

δηλαδή:

$$P(S) = \frac{\text{Αρ. των στοιχειωδών διαδοχικών γεγονότων που αποτελούν το γεγονός } S}{\text{Συνολικός αριθμός στοιχειωδών γεγονότων}}$$

Με άλλα λόγια, η πιθανότητα ενός γεγονότος S είναι ίση με την αναλογία μεταξύ του αριθμού των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για να συμβεί το γεγονός και του συνολικού αριθμού των δυνατών αποτελεσμάτων. Αυτός ο ορισμός είναι γνωστός κανόνας του Laplace: «Εάν όλα τα στοιχειώδη γεγονότα είναι εξίσου δυνατά, η πιθανότητα ενός γεγονότος (S) είναι το πηλίκο μεταξύ του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων για το S και του αριθμού των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος»:

$$p(S) = \frac{\text{Αριθμός των ευνοϊκών περιπτώσεων για το } S}{\text{Αριθμός των δυνατών περιπτώσεων}}$$

Ο κανόνας ή νόμος του Laplace θεωρείται ως ο **κλασικός ορισμός της πιθανότητας**, επειδή είναι ο πρώτος γνωστός ορισμός. Είναι πολύ χρήσιμος για το υπολογισμό των πιθανοτήτων σύνθετων γεγονότων σε καταστάσεις ισοπίθανες (όταν όλα τα γεγονότα είναι εξίσου δυνατά). Το μόνο που έχουμε να κάνουμε για να βρούμε την πιθανότητα ενός γεγονότος είναι να μετρήσουμε τον συνολικό αριθμό των στοιχειωδών γεγονότων (δυνατές περιπτώσεις) και τον αριθμό των στοιχειωδών γεγονότων που αποτελούν το γεγονός (ευνοϊκές περιπτώσεις). Για να

κάνουμε τις μετρήσεις των περιπτώσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές της συνδυαστικής. Είναι τέτοια η επιρροή αυτού του ορισμού στην εξέταση των πιθανοτήτων που όταν σε ένα ζάρι, νόμισμα, ρουλέτα, κλπ.

Όλα τα αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά συνήθως τίθεται το προσδιοριστικό «του Laplace». Είναι πολύ σημαντικό να βεβαιωθούμε ότι όλα τα στοιχειώδη γεγονότα του πειράματος που εξετάζουμε είναι εξίσου πιθανά (για οτιδήποτε είναι κατάλληλο να εφαρμοστεί η κοινή λογική, αλλά με προσοχή, επειδή η πιθανότητα μας εξαπατά συχνά) και ότι υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός πιθανών αποτελεσμάτων. Ένα απλό παράδειγμα μας δείχνει ότι ένα πείραμα μπορεί να έχει άπειρο αριθμό αποτελεσμάτων.

Αν υποθέσουμε ότι ένα βέλος ρίχνεται πάνω σε ένα στόχο. Αν θεωρήσουμε ως δυνατά αποτελέσματα όλα τα σημεία του στόχου, αυτά είναι άπειρα, και έτσι ο παραπάνω κανόνας δεν είναι εφαρμόσιμος. Ωστόσο, αν απλοποιήσουμε το πείραμα και διαιρέσουμε τον στόχο σε τέσσερα τεταρτημόρια με ίση περιοχή, έχουμε λύσει το πρόβλημα, αφού ο αριθμός των πιθανών αποτελεσμάτων είναι τώρα τέσσερα, και τα τέσσερα είναι εξίσου δυνατά (αν υποθεθεί ότι ο ρίπτης δεν είναι έμπειρος παίκτης στα βελάκια και ρίχνει το βέλος τυχαία πάνω στο στόχο). Η διαίρεση σε τομείς διαφορετικής επιφάνειας, όπως συμβαίνει στους στόχους των αγώνων, δεν επιτρέπει πλέον την εφαρμογή του προηγούμενου κανόνα, αφού όλα τα αποτελέσματα (τομείς) δεν έχουν τις ίδιες δυνατότητες.

Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορεί να γίνει μια μικρή τροποποίηση του προηγούμενου κανόνα ορίζοντας ως πιθανότητα κάθε τομέα το λόγο μεταξύ του εμβαδού και του συνολικού εμβαδού του στόχου. Τα περισσότερα τυχερά παιχνίδια που μπορούμε να σκεφτούμε ακολουθούν τον κανόνα του Laplace. Στις περιπτώσεις που δεν ισχύει αυτό, πρέπει να καθοριστεί ο τρόπος ορισμού των πιθανοτήτων. Μερικά παραδείγματα θα μας επιτρέψουν να το κατανοήσουμε καλύτερα. Επιλέγοντας στην τύχη ένα φύλλο από μια ισπανική τράπουλα, ποια είναι η πιθανότητα να είναι μπαστούνι, ποια να είναι μια φιγούρα και ποια να είναι μπαστούνι και φιγούρα;

Σε αυτό το πείραμα της τύχης υπάρχουν 40 δυνατές περιπτώσεις, όσες και τα φύλλα, και όλες είναι εξίσου πιθανές σε μια καινούργια τράπουλα, χωρίς σημάδια. Από τα 40 φύλλα, 10 είναι μπαστούνια, δηλαδή υπάρχουν 10 ευνοϊκές περιπτώσεις «να είναι μπαστούνι». Η πιθανότητά τους είναι:

$$P(\text{μπαστούνι}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ή } 25\%$$

Ανάλογα οι πιθανότητες των άλλων συμβάντων είναι:

$$P(\text{φιγούρα}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ ή } 30\%$$

$$P(\text{μπαστούνι και φιγούρα}) = \frac{3}{40} = 0,075 \text{ ή } 7,5\%$$

Ένα άλλο παράδειγμα: αν τραβήξουμε ταυτόχρονα δύο φύλλα μιας ισπανικής τράπουλας, ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο να είναι χρυσά; Είναι μια κατάσταση κατά την οποία όλες οι ομάδες δύο φύλλων που έχουμε επιλέξει έχουν την ίδια πιθανότητα και σε αυτή μπορεί να εφαρμοστεί ο ορισμός του Λαπλάς. Οι δυνατές περιπτώσεις είναι οι τρόποι τραβήγματος δύο φύλλων από τις 40 του συνόλου, ο αριθμός συνδυασμών των 40 στοιχείων (τα 40 φύλλα) που λαμβάνονται ανά 2:

$$C_{40,2} = \binom{40}{2} = \frac{40!}{2! \cdot (40-2)!} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$$

Στην τράπουλα υπάρχουν 10 χρυσά φύλλα, επομένως οι ευνοϊκές περιπτώσεις θα είναι οι διαφορετικοί τρόποι να τραβήξουμε 2 από τα 10 χρυσά, δηλαδή, οι συνδυασμοί 10 στοιχείων που λαμβάνονται ανά 2:

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

Επομένως, η πιθανότητα ότι τα 2 φύλλα είναι χρυσά θα είναι:

$$P(\text{δύο χρυσά}) = \frac{C_{10,2}}{C_{40,2}} = \frac{45}{780} = 0,0577 \text{ ή } 5,77\%.$$

Η Πιθανότητα είναι η ίδια όπως αν ψάχνουμε να έχουμε δυο φύλλα οποιασδήποτε άλλης φυλής (κούπες, σπαθιά ή μπαστούνια). Αυτό μπορεί να χρησιμέψει για να απαντήσουμε σε ένα άλλο ερώτημα: ποια είναι η πιθανότητα ότι αν τραβήξουμε δυο φύλλα αυτά θα είναι διαφορετικής φυλής; Εδώ η απάντηση είναι εύκολη με έμμεσο τρόπο, με την αντίθετη περίπτωση. Αφού στην περίπτωση αυτή είναι το αντίθετο από το να είναι της ίδιας φυλής (το αθροισμά του να είναι σε μια από τις τέσσερις φυλές) έχουμε:

$$P(\text{διαφορετικής φυλής}) = 1 - p(\text{της ίδιας φυλής}) = 1 - [p(\text{δύο χρυσά}) + p(\text{δύο κούπες}) + p(\text{δύο σπαθιά}) + p(\text{δύο μπαστούνια})] \approx 1 - [0,0577 + 0,0577 + 0,0577 + 0,0577] = 1 - [4 \cdot 0,0577] = 1 - 0,2308 = 0,7692 \text{ ή } 76,92\%.$$

Μέχρι τώρα έχουμε δει περιπτώσεις όπου η πιθανότητα ενός γεγονότος λαμβάνεται με θεωρητικό τρόπο, από το κατασκευαστικό μοντέλο (ζάρια, παιγνιόχαρτα), αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις της ζωής δεν είναι δυνατόν να γίνει ένα θεωρητικό μοντέλο, ούτε επομένως να συναχθεί η πιθανότητα καθενός από τα γεγονότα, παρόλο που είναι βολικό να έχουμε μια πιθανότητα, η οποία είναι ένα μέτρο των δυνατοτήτων για να συμβεί κάτι.

Για παράδειγμα μια αρκετά πρόσφατη πρακτική είναι ότι στις σελίδες των εφημερίδων δίνονται πληροφορίες για τον καιρό με όρους πιθανοτήτων (εμφανίζεται σε ποσοστό). Έτσι μπορούμε να διαβάσουμε ότι για την επόμενη μέρα η πρόβλεψη βροχής είναι 60%. Παλιότερα έλεγαν μόνο αν θα βρέξει ή όχι.

Το ποσοστό είναι η συχνότητα των περιπτώσεων που έχει βρέξει κατά το παρελθόν σε καιρικές συνθήκες παρόμοιες που προβλέπεται για αύριο, λαμβάνοντας υπόψη τα διαθέσιμα στοιχεία. Δηλαδή μας δείχνει το ποσοστό αβεβαιότητας που συνδέεται με την δήλωση «θα βρέξει αύριο» και βασίζεται σε πολύπλοκους υπολογισμούς που εκτελούνται από μια τεράστια μάζα παρατηρούμενων δεδομένων. Υπό την έννοια αυτή, όταν μιλάμε για τον αυριανό καιρό ως πιθανότητα βροχής είναι πολύ πιο ακριβές από το να πούμε απλά αν θα βρέξει ή όχι, δεδομένου ότι περιέχει τις πληροφορίες που απαιτούνται για το προγραμματισμό των δραστηριοτήτων οποιουδήποτε προσώπου εκείνη την ημέρα.

Η διαφορά αυτής της μέτρησης της πιθανότητας σε σχέση με αυτή των τυχερών παιχνιδιών ή των λαχείων είναι ότι ο ορισμός της πιθανότητας δεν βασίζεται σε μοντέλα, αλλά σε στατιστικά δεδομένα. Αυτό συμβαίνει σε πολλές άλλες περιπτώσεις (αποτελεσματικότητα των φαρμάκων ή εμβολίων, ασφάλεια των διαφόρων μέσων μεταφοράς, κλπ), και για αυτό η στατιστική χρησιμοποιείται για την μελέτη της κοινωνίας και συνδέεται με την πιθανότητα, επειδή επιτρέπει να οριστούν πιθανότητες στα γεγονότα.

Ένα μέσο που χρησιμοποιείται συχνά για να δημιουργήσει τυχαίες καταστάσεις (εξ ου και η πληθώρα των διαφορετικών παιχνιδιών) είναι οι τράπουλες. Υπάρχουν δύο βασικού τύπου γνωστοί ως ισπανική και γαλλική. Και οι δύο έχουν διεισδύσει βαθιά στη συλλογική φαντασία, επειδή όπως όλα τα μεγάλα παιχνίδια είναι μοντέλα αναγνωρίσιμων κοινωνικών καταστάσεων.

Η ισπανική τράπουλα είναι μια σχηματοποίηση της μεσαιωνικής κοινωνίας με τέσσερις φυλές, χρυσό, κούπες, σπαθιά και μπαστούνια τα οποία αντιπροσωπεύουν τις τέσσερις βασικές τάξεις της:

αστοί (ή έμποροι, με τον χρυσό των νομισμάτων),

κλήρος (με την κούπα των λειτουργικών εορτασμών),
ευγενείς (με το σπαθί των ιπποτών) και
αγρότες (με το μπαστούνι ή την ράβδο που χρησιμοποιούν στις χειρονακτικές
εργασίες τους).

Έχει 40 κάρτες, με 10 σε κάθε φυλή, εκ των οποίων 3 (βαλές ιππότης και
βασιλιάς) είναι οι φιγούρες.



Η γαλλική τράπουλα είναι σχηματοποίηση του περάσματος του χρόνου, που
αναφέρει τι συμβαίνει μέσα σε ένα έτος. Οι 4 φυλές αντιπροσωπεύουν τις 4 εποχές.
Αφού σε κάθε μια υπάρχουν 13 φύλλα, συνολικά υπάρχουν $4 \times 13 = 52$ φύλλα, όπως
οι 52 εβδομάδες ενός έτους.

Εάν προστεθούν οι αριθμοί κάθε φυλής ($1+2+3+\dots+13=91$),
πολλαπλασιαστούν με τις 4 φυλές και προστεθεί ο μπαλαντέρ έχουμε $365 (4 \times 91 + 1 = 365)$, που είναι οι 365 ημέρες του έτους.



2.4 ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, η μαθηματική διατύπωση των πιθανοτήτων φαινόταν ως μια αναγκαιότητα για πολλούς μαθηματικούς. Ο Kolmogorov διατύπωσε κατά την δεκαετία του 1930 μια σειρά από αξιώματα που επέτρεψαν την αξιωματική οικοδόμηση των πιθανοτήτων. Αυτή η αξιωματική προσέγγιση, ικανοποιητική για την μαθηματική κοινότητα, αποφεύγει να δώσει εννοιολογικό ορισμό της πιθανότητας και να χρειάζεται να σκεφτόμαστε πάντα το πείραμα, και αναφέρεται μόνο στις ιδιότητες που πρέπει να πληρεί ο ορισμός πιθανότητας ενός γεγονότος.

Επιπλέον ο αξιωματικός ορισμός ανακτά όλες τις ιδιότητες που βρήκαμε διαισθητικά, και έτσι ο Kolmogorov κατάφερε να κάνει να συμφωνήσουν τα τυπικά μαθηματικά και τα πειράματα με τυχαία φαινόμενα. Επιπλέον, τα αξιώματα του Kolmogorov έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη ενός άλλου κλάδου των μαθητικών που συνδέεται στενά με τις πιθανότητες: η θεωρία του μέτρου.

Ξεκινώντας από τα αξιώματα του Kolmogorov και ακολουθώντας μια αυστηρή μαθηματική ανάπτυξη παρόμοια με οποιουδήποτε άλλου κλάδου των μαθητικών, καθορίζεται ένα σύνολο ιδιοτήτων και συνεπειών που δεν είναι εμφανείς και στις οποίες δεν θα είχαμε φτάσει με άλλο τρόπο. Η σημασία των πιθανοτήτων για την μελέτη άλλων επιστημονικών τομέων και ο μεγάλος αριθμός εφαρμογών τους μας ξαναφέρνουν στα λόγια του Laplace: « **Τα σημαντικότερα ερωτήματα της ζωής δεν είναι στην πλειοψηφία τους παρά ζητήματα πιθανοτήτων**». Ίσως για τον λόγο αυτό οι πιθανότητες είναι ο κλάδος των μαθηματικών με τον μεγαλύτερο αριθμό εφαρμογών.

Ο αξιωματικός ορισμός των πιθανοτήτων μπορεί να διατυπωθεί ως εξής. Έστω ένας δειγματικός χώρος E που συνδέεται με ένα πείραμα τύχης και το σύνολο των γεγονότων του F , ονομάζεται πιθανότητα οποιασδήποτε μορφής ανάθεσης σε κάθε γεγονός S , του F μιας αριθμητικής τιμής $\text{prob}(S)$, με την προϋπόθεση ότι επαληθεύονται οι ιδιότητες:

1. Για οποιοδήποτε γεγονός S του F ισχύει ότι $\text{prob}(S) \geq 0$.
2. Η πιθανότητα του βέβαιου γεγονότος είναι η μονάδα: $\text{prob}(E) = 1$.
3. Έστω μια συλλογή αμοιβαία αποκλειόμενων γεγονότων $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$, του F , τότε: $\text{Prob}(S_1 \text{ ή } S_2 \text{ ή } \dots S_n) = \text{prob}(S_1) + \dots \text{prob}(S_n) + \dots$

Λαμβάνοντας αυτές τις τρεις ιδιότητες ως αξιώματα, μέσω μιας τυπικής επαγωγικής διαδικασίας φτάνουμε σε άλλες σημαντικές ιδιότητες των πιθανοτήτων. Μερικές από αυτές που μπορούν να συναχθούν είναι:

- 1) $\text{Prob}(S_1) = 1 - \text{prob}(S_1)$, όπου S_1 το συμπληρωματικό γεγονός του S_1 .
- 2) $\text{Prob}(S_1) \leq 1$.
- 3) $\text{Prob}(\emptyset) = 0$, όπου $\emptyset$ αντιπροσωπεύει το αδύνατο γεγονός.
- 4) Έστω δύο οποιαδήποτε γεγονότα S_1 και S_2 του F επαληθεύετε ότι :
 $\text{Prob}(S_1 \cup S_2) = \text{prob}(S_1) + \text{prob}(S_2) - \text{prob}(S_1 \cap S_2)$.

Στην παραπάνω έκφραση, το σύμβολο $\cup$ δείχνει ότι πρέπει να συμβεί ένα γεγονός ή ένα άλλο και το σύμβολο $\cap$ ότι και τα δύο γεγονότα πρέπει να επαληθευτούν ταυτόχρονα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΜΗ ΠΡΟΦΑΝΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

Θα παρουσιαστούν μια σειρά από καθημερινές καταστάσεις που σχετίζονται με τις πιθανότητες στις οποίες το αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με αυτό που φαίνεται «προφανές». Σε ορισμένες περιπτώσεις δίνουμε την πιθανότητα και πρέπει να βρεθεί η κατάσταση, και σε άλλες το αντίθετο.

Το καλό είναι ότι μπορούν να γίνουν πειραματικές δοκιμές (επαληθεύσεις) που επιβεβαιώνουν τα θεωρητικά αποτελέσματα και μας δείχνουν ότι δεν είμαστε πολύ κατάλληλα εξοπλισμένοι για να διαισθανθούμε την πιθανότητα. Θα ήταν καλό ο αναγνώστης να είναι έτοιμος να εκπλαγεί, αφού είναι εύκολο να συμβεί και είναι ενδιαφέρον να μπορεί να το απολαύσει.

3.1 ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Μερικές φορές για να εμβαθύνουμε σε κάτι είναι καλό να εξετάσουμε την αντίθετη άποψη με αυτή που θα ήταν συνηθισμένο. Αυτό θα γίνει παρακάτω: θα προτείνουμε μερικές καταστάσεις στις οποίες είναι ήδη γνωστή η πιθανότητα για να εξακριβώσουμε τη σύνθεση από την οποία ξεκινάμε:

Κατάσταση Α. Σε ένα δοχείο μπάλες άσπρου και μαύρου χρώματος. Δύο παίκτες στοιχηματίζουν ότι θα βγάλουν από το δοχείο δύο μπάλες, η πρώτη, του ίδιου χρώματος, και η άλλη, διαφορετικού χρώματος. Θέλουν να έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν. Πόσες μπάλες κάθε χρώματος πρέπει να έχει στο δοχείο;

Κατάσταση Β. Ο Γιάννης και η Μπέρτα παίζουν με δύο ζάρια που δεν έχουν αριθμούς, αλλά χρωματιστές έδρες, μερικές μπλε και μερικές κόκκινες. Το παιχνίδι είναι απλό: αν οι επάνω έδρες έχουν το ίδιο χρώμα, κερδίζει ο Γιάννης, εάν είναι διαφορετικές, κερδίζει η Μπέρτα. Θέλουμε το παιχνίδι να είναι δίκαιο, δηλαδή και οι δύο παίκτες να έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν, και ένα από τα δύο ζάρια έχει πέντε μπλε έδρες και μια κόκκινη. Πως πρέπει να χρωματίσουμε τις έδρες του άλλου ζαριού;

Κατάσταση Γ. Έχουμε τον ίδιο αριθμό άσπρων και μαύρων μπαλών (για παράδειγμα 10) και δύο ίδια δοχεία. Θέλουμε να διανείμουμε τις μπάλες στα δοχεία (κανένα από τα δύο δεν μπορεί να μείνει κενό) έτσι ώστε βγάζοντας μια μπάλα από ένα από αυτά, η πιθανότητα να είναι άσπρη να είναι η μεγίστη. Ποιά είναι αυτή η πιθανότητα; Θα είναι σε κάποια περίπτωση μεγαλύτερη από $1/2$ (ή 50%);

Λύση Α. Φαίνεται ότι πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό μπαλών και χρώματος, αλλά δεν είναι έτσι, όπως φαίνεται από την εύρεση της πιθανότητας. Μια δυνατή λύση είναι 3 μπάλες ενός χρώματος (π.χ. άσπρο) και 1 του άλλου (μαύρο). Βλέπουμε ότι οι πιθανότητες είναι ίσες:

$$P(AA) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Η πιθανότητα να βγει η πρώτη άσπρη είναι $3/4$, επειδή υπάρχουν τρεις από τις τέσσερις. Ότι η δεύτερη είναι άσπρη, αν ήταν και η πρώτη, είναι $2/3$, αφού μένουν δύο άσπρες από τις τρεις που υπάρχουν. Αν η πιθανότητα να βγουν δύο άσπρες είναι $1/2$, αυτή να βγουν μπάλες διαφορετικού χρώματος (η μόνη εναλλακτική δυνατότητα) θα είναι επίσης $1/2$.

Λύση Β. Το άλλο ζάρι πρέπει να έχει τρεις έδρες κάθε χρώματος, έστω κι αν φαίνεται ψέμα! Θα βρούμε τις πιθανότητες οι έδρες να έχουν το ίδιο χρώμα, που θα είναι το άθροισμα του να είναι μπλε και στα δύο ζάρια και του να είναι κόκκινες. Καθένα από τα δύο γεγονότα, με τη σειρά του, είναι το γινόμενο του να βγεί αυτό το χρώμα σε καθένα από τα ζάρια. Τελικά:

$$p(\text{ίδιο χρώμα}) = p(\text{μπλε και στις δύο}) + p(\text{κόκκινο και στις δύο}) = p(M1 \cap M2) + p(K1 \cap K2) = p(M1) \cdot p(M2) + p(K1) \cdot p(K2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{15}{36} + \frac{3}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Και το άλλο $1/2$ είναι ότι θα βγει διαφορετικό χρώμα.

Λύση Γ. Είναι εύκολο διαβάζοντας το δεύτερο ερώτημα να έχουμε την τάση να πούμε ότι αφού υπάρχει ο ίδιος αριθμός μπαλών κάθε χρώματος (εφαρμόζοντας τη «μαθηματική» νοοτροπία, που φαίνεται χρήσιμη στην προκειμένη περίπτωση), το αποτέλεσμα θα είναι 50% ή $1/2$. Όμως το ερώτημα μπορεί να μας κάνει να σκεφτούμε πως ίσως υπάρχει κάποιος τρόπος να το ξεπεράσουμε. Η αλήθεια είναι ότι βάζοντας σε ένα από τα δοχεία (π.χ. το 1) μια άσπρη μπάλα και τις υπόλοιπες στο άλλο δοχείο, η πιθανότητα αυξάνει σημαντικά:

$$p(\text{άσπρο}) = p(\text{επιλογή δοχείου 1}) \cdot p(\text{άσπρο στο δοχείο 1}) + (p(\text{επιλογή δοχείου 2}) \cdot p(\text{άσπρο στο δοχείο 2})) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = \frac{28}{38} = 0,7368 \rightarrow 73,68\% = 0,7368 \rightarrow 73,68\%.$$

3.2 ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

ΓΕΝΕΘΛΙΑ

Κατάσταση Α. Πρώτο πρόβλημα των γενεθλίων. Μπορούμε να το διατυπώσουμε με διάφορους τρόπους, αλλά όλοι είναι ισοδυναμεί. Ο ακόλουθος ισχύει για γιορτές με πολλούς αγνώστους. «Σε μια συνάντηση υπάρχουν N άνθρωποι που έχουν μαζευτεί τυχαία.

Ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστον δύο από αυτούς γιορτάζουν τα γενέθλια τους την ίδια ημέρα (δηλαδή, ότι γεννήθηκαν την ίδια ημέρα του ίδιου μήνα); Ή πιο συγκεκριμένα, πόσα άτομα πρέπει να είναι ώστε η πιθανότητα να είναι $1/2$ (ή 50%);».

Κατάσταση Β. Ένα άλλο πρόβλημα γενεθλίων. Τώρα το ζητούμενο δεν είναι να βρεθούν δύο άτομα που γεννήθηκαν την ίδια ημέρα, αλλά να υπάρχει κάποιος του οποίου τα γενέθλια συμπίπτουν με τα δικά μου. Πόσα άτομα πρέπει να υπάρχουν, ώστε η πιθανότητα να ξεπερνά το 50%;

Λύση Α. Χρειάζεται να σκεφθούμε λίγο πόσα άτομα απαιτούνται για να είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχουν δύο των οποίων τα γενέθλια συμπίπτουν; Αρκούν 367 άτομα, επειδή καθένα από τα πρώτα 366 μπορεί να έχει γενέθλια σε μια διαφορετική ημέρα του έτους (συμπεριλαμβανομένης της 29^{ης} Φεβρουαρίου), όμως αυτό που έχει τη θέση 367 δεν έχει άλλη επιλογή παρά να έχει τα γενέθλια του την ίδια ημέρα με κάποιο από τα παραπάνω.

Χωρίς να λάβουμε υπόψη τα δίσεκτα έτη (όπως θα κάνουμε στο έξης) αρκούν 366 άτομα. Πότε η πιθανότητα θα είναι 50%; Φαίνεται «προφανές» ότι είναι με τα μισά άτομα (δηλαδή, 183), αλλά δεν μπορούμε να βρούμε λόγους που το

δικαιολογούν. Θα κάνουμε μερικούς υπολογισμούς και θα εφαρμόσουμε τον ορισμό. Αρχικά θα υποθέσουμε ότι το έτος έχει 365 ημέρες και θα βρούμε την πιθανότητα όταν δεν υπάρχουν συμπτώσεις, που είναι πιο εύκολο. Στη συνέχεια, αφαιρώντας από το 1 (ή το 100 αν είναι σε ποσοστό) θα έχουν την πιθανότητα που ζητάμε.

Ας πάρουμε μια ομάδα N ατόμων. Επιλέγουμε ένα στην τύχη, που μπορεί να έχει γενέθλια σε οποιαδήποτε από τις 365 ημέρες, όπως συμβαίνει και με το δεύτερο, με το τρίτο και με όλα τα άλλα μέχρι να συμπληρωθούν τα N άτομα. Επομένως ο αριθμός των δυνατών περιπτώσεων που μπορεί να έχουμε είναι:
 $CP(\text{δυνατές περιπτώσεις}) = 365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots = 365^N$.

Ας δούμε σε πόσες από αυτές τις 365^N δυνατές περιπτώσεις δεν υπάρχουν συμπτώσεις στα γενέθλια (θέλουμε να μην υπάρχουν τα ίδια γενέθλια). Γι' αυτό μετράμε τις περιπτώσεις στις οποίες δεν επαναλαμβάνεται μια ημερομηνία γενεθλίων. Γι' αυτό υπάρχουν 365 τρόποι επιλογής της ημερομηνίας του πρώτου ατόμου, 364 για το δεύτερο, 364 για το δεύτερο, 363 για το τρίτο... μέχρι το N-οστό άτομο που μπορεί να έχει γενέθλια σε $365 - (N - 1)$ ημέρες.

Επομένως, ο αριθμός των δυνατών τρόπων επιλογής των ημερομηνιών γέννησης N ατόμων χωρίς να συμπίπτει κανένα από τα γενέθλια είναι:

$$CF(\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}) = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - N + 1) = \frac{365!}{(365 - N)!}$$

Η πιθανότητα ότι δεν συμπίπτει κανένα ζεύγος γενεθλίων είναι

$$\frac{CF}{CP} = \frac{\frac{365!}{(365 - N)!}}{365^N} = \frac{365!}{365^N \cdot (365 - N)!}$$

Δεδομένου ότι αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η πιθανότητα του αντίθετου γεγονότος (να έχει τουλάχιστον δύο άτομα των οποίων τα γενέθλια συμπίπτουν), η τιμή θα είναι:

$$P = 1 - \frac{365!}{365^N \cdot (365 - N)!} \quad [1]$$

Υπολογίζοντας την τιμή [1] για διαφορετικές τιμές του N βλέπουμε εκπληκτικά πράγματα. Για παράδειγμα, όταν $N=50$, έχουμε $p=0,97$: Σε μια ομάδα 50 ατόμων υπάρχουν 97% πιθανότητες να υπάρχουν δύο που έχουν την ίδια μέρα γενέθλια. Για $N=23$ είναι $p=0,507$: σε μια ομάδα 23 ατόμων υπάρχει ήδη πιθανότητα μεγαλύτερη από 50% (ακριβώς 50,7%) να συμπίπτουν τουλάχιστον δύο γενέθλια.

Στον παρακάτω πίνακα εκφράζονται οι τιμές πιθανότητας (σε δεκαδικές και ποσοστιαίες μονάδες) για διαφορετικούς αριθμούς ατόμων, εφαρμόζοντας τον τύπο [1]:

N	p(N)	p(N)%	N	p(N)	p(N)%
10	0,11695	11,7	35	0,81438	81,4
15	0,2529	25,3	40	0,89123	89,1
20	0,41144	41,1	45	0,94098	94,1
22	0,4757	47,6	50	0,97037	97
23	0,5073	50,7	55	0,98626	98,6
25	0,5687	56,9	60	0,99412	99,4
30	0,70632	70,6	65	0,99768	99,8

Ο πίνακας μας δείχνει ότι με ομάδες 60 ατόμων υπάρχει η «σχεδόν» απόλυτη βεβαιότητα ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο που έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα (αν το δοκιμάσαμε σε 1.000 τυχαίες ομάδες, θα συνέβαινε σε περίπου 994). Όμως

πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί με το «σχεδόν», γιατί μπορούμε να είμαστε σίγουροι μόνο σε ομάδες 366 ατόμων. Αυτό που μας αποκαλύπτεται εδώ είναι ότι αν στοιχηματίζουμε με σταθερότητα στη δυνατότητα αυτή θα κερδίζουμε με πολύ μεγάλη συχνότητα, αλλά δεν θα ήταν καλό να παίζουμε όλη μας την περιουσία σε μια μόνο περίπτωση, αφού θα μπορούσαμε να χάσουμε.

Λύση Β. Στην περίπτωση αυτή η σύμπτωση είναι πολύ πιο δύσκολη, και απαιτούνται πολύ περισσότερα άτομα. Η πιθανότητα ότι κάποιος δεν μοιράζεται τα γενέθλια του με έναν άλλο είναι $364/365$, οπότε αν υπάρχουν N άτομα στην αίθουσα, η πιθανότητα ότι τα γενέθλια του δεν συμπίπτουν με κανενός είναι

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{N-1}$$

Επομένως, η πιθανότητα να υπάρχει κάποιος άλλος με τα ίδια γενέθλια είναι 1 μείον την τιμή αυτή:

$$p = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{N-1}$$

Θέλουμε το p να είναι 0,5, που δεν επιτυγχάνεται όταν $N=23$, όπως προηγουμένως (γι' αυτή την τιμή το $p=0,058571$, μικρότερο από 6%), αλλά ικανοποιείται για $N=254$ άτομα (στην περίπτωση αυτή $p=0,5005$), ένα αποτέλεσμα που είναι πιο κοντά στη διαίσθηση μας από ότι στην προηγούμενη περίπτωση. Ίσως είναι επειδή είμαστε πολύ εγωιστές και ασυνείδητα σκεφτήκαμε ότι ήταν τα δικά μας γενέθλια!

ΤΟ ΠΕΡΙΠΤΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΘΥΣΜΕΝΟΥ

Πριν από την εμφάνιση των αλκοομέτρων, ένα κλασικό τεστ για τον εντοπισμό των μεθυσμένων οδηγών ήταν να τους βάζουν να περπατήσουν σε ευθεία γραμμή. Είναι κάτι που οποιοσδήποτε σε κανονικές συνθήκες το κάνει με ευκολία, αλλά μπορεί να είναι προβληματικό αν το εν λόγω άτομο έχει τις ικανότητες του επηρεασμένες από την κατανάλωση αλκοόλ ή άλλων ουσιών, και επίσης εαν, λόγω κάποιας ασθένειας, έχει δυσκολία για να διατηρήσει την ισορροπία. Είναι το λεγόμενο «βράδισμα του μεθυσμένου»: μετά από ένα βήμα προς μια κατεύθυνση, το επόμενο βήμα μπορεί να γίνει, τυχαία, σε οποιαδήποτε άλλη, ακόμα και προς τα πίσω, επιστρέφοντας στο σημείο εκκίνησης.

Αν κινούμαστε σε ευθεία γραμμή και σε κάθε βήμα προχωρούμε ένα μέτρο, αν κάνουμε N βήματα θα είμαστε N μέτρα από το σημείο εκκίνησης. Αν κάνουμε τα βήματα του μεθυσμένου, πόσα θα χρειαστούν για να μετακινηθούμε για τα ίδια N μέτρα; Ή, με άλλα λόγια: μετά από N βήματα του μεθυσμένου, σε τι απόσταση θα είμαστε από το σημείο εκκίνησης;

Αξιίζει να διευκρινιστεί ότι, εκτός από ψυχαγωγία, αυτό το πρόβλημα χρησιμεύει επίσης, για παράδειγμα, για να γίνουν μοντέλα διάχυσης της θερμότητας και για να μπορούμε να καταλάβουμε γιατί ένα δωμάτιο χρειάζεται κάποιο χρόνο για να ζεσταθεί όταν ανάβει η θέρμανση, έτσι ώστε το καλοριφέρ καίει, κοντά του είμαστε σε σχετικά άνετη θερμοκρασία και λίγο πιο μακριά από αυτό κάνει κρύο. Όταν θερμαίνονται, τα μόρια του αέρα κινούνται ταχύτερα, και μετακινούνται με τυχαίο τρόπο, όπως ο μεθυσμένος.

Ας επιστρέψουμε στην ερώτηση. Για να απαντηθεί μπορούν να γίνουν απλά μοντέλα. Για παράδειγμα, ρίχνοντας ένα κέρμα γίνεται μια κίνηση προς τα εμπρός ή προς τα πίσω, ανάλογα με το αποτέλεσμα. Φαίνεται έτσι ότι, κατά μέσο όρο, για να προχωρήσει N μέτρα απαιτούνται N^2 βήματα: για να απομακρυνθούμε κατά 10 μέτρα, θα πρέπει να κάνουμε περίπου 100 βήματα ($100=10^2$). Πολλά, όπως φαίνεται, και η δυσαναλογία είναι μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση:

για 50 μέτρα είναι ήδη 2.500 βήματα. Είναι κατανοητό τώρα το βάδισμα ενός μεθυσμένου μπορούμε να αντλήσουμε θετικά συμπεράσματα γιατί αργεί τόσο να ξεσταθεί ένα δωμάτιο με καλοριφέρ; Επιπλέον, στη δυσκολία μετακίνησης πρέπει να προστεθεί το ότι με την απόσταση ψύχοντας τα μόρια. Ακόμα και με.

3.3 ΑΛΛΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ Η ΓΑΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΠΟΝΤΙΚΙ

Είναι ένα παιχνίδι τύχης, λίγο σουρεαλιστικό για τους διαγωνιζόμενους που συμμετέχουν σε αυτό. Υπάρχει μια γάτα και ένα ποντίκι στις θέσεις που σημειώνονται με το όνομά τους στον πίνακα. Ακολουθώντας το ένστικτο της, η γάτα θέλει να πιάσει το ποντίκι και αυτό προσπαθεί να ξεφύγει. Όμως στη προκειμένη περίπτωση πρόκειται για πολιτισμένα ζώα και συμφωνούν να ακολουθήσουν ορισμένους κανόνες παιχνιδιού.

Καθένας από τους δύο θα κάνει ένα βήμα τη φορά (που και στις περιπτώσεις σημαίνει ότι θα περάσει από ένα διπλανό τετράγωνο οριζόντια ή κάθετα, όχι διαγώνια), στην τύχη.

Η γάτα μετακινείται προς τα δεξιά ή προς τα πάνω. Το ποντίκι προς τα κάτω ή προς τα αριστερά. Αν σε κάποια στιγμή της διαδρομής συμπέσουν στο ίδιο τετράγωνο, η γάτα τρώει το ποντίκι. Αν ανταλλάξουν τις θέσεις τους χωρίς να έχει συμβεί ένα τέτοιο ενδεχόμενο, το ποντίκι σώζεται. Ποια είναι η πιθανότητα ότι η γάτα θα φάει μεξέ; Και ότι το ποντίκι θα σωθεί;

		ΠΟΝΤΙΚΙ
ΓΑΤΑ		

Όταν έχουμε κατανοήσει καλά το παιχνίδι, μπορούμε να επεκτείνουμε τον πίνακα, με τους ίδιους όρους παιχνιδιού και τοποθέτησης (και τα δύο στις αντίθετες γωνίες), αλλά τώρα σε τετράγωνο 4 x 4, στη συνέχεια 5 x 5 και ούτω καθεξής.

Λύση: Οι δύο πιθανότητες που προκύπτουν είναι αντίθετα γεγονότα, συνεπώς είναι συμπληρωματικές στο 1: αν p (ή $P\%$) είναι η πιθανότητα η γάτα να φάει το ποντίκι, $(1 - p)$ (ή $100 - P\%$) είναι η πιθανότητα για να σωθεί. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τις μετακινήσεις της γάτας και του ποντικιού ρίχνοντας δύο κέρματα (ένα η γάτα και ένα το ποντίκι), όπου μια από τις δυνατότητες (π.χ. κορόνα) είναι να κινηθούν οριζόντια, και η άλλη, κάθετα.

Τα μόνα σημεία συνάντησης είναι αυτά της κύριας διαγωνίου του τετραγώνου (αυτής που δεν ενώνει τις αρχικές θέσεις), και επίσης πρέπει να φτάσουν και οι δύο ταυτόχρονα.

Στην περίπτωση 3 x 3 το ποντίκι και η γάτα μπορούν να συναντηθούν σε 3 τετράγωνα. Για να φτάσουν εκεί πρέπει να κάνουν δύο βήματα, επομένως η πιθανότητα ότι καθένα θα φτάσει στα τετράγωνα των άκρων είναι $(1/2) \times (1/2) = (1/4)$. Στο κεντρικό τετράγωνο, στο οποίο μπορούν να φτάσουν με δύο τρόπους (αριστερά – κάτω και κάτω - αριστερά στην περίπτωση του ποντικιού και το αντίθετο για τη γάτα) είναι διπλή: $2/4 = 1/2$.

Η πιθανότητα να συναντηθούν σε ένα τετράγωνο των γωνιών είναι $(1/4) \times (1/4) = 1/16$. Στο τετράγωνο του κέντρου, $2/4 \times 2/4 = 4/16$. Στο σύνολο των 3 τετραγώνων δυνατής συνάντησης η πιθανότητα είναι $1/16 + 1/16 + 4/16 = 6/16 = 3/8$ (ή 37,50%). Επομένως η πιθανότητα για να σωθεί το ποντίκι είναι $10/16 = 5/8$ (ή 62,50%): τα ευγενικά συναισθήματα μας ως πολιτισμένων ανθρώπων έχουν υψηλή πιθανότητα να ικανοποιηθούν.

ΠΟΛΥΑΡΙΘΜΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ

Στη χώρα μας οι οικογένειες έχουν λίγα παιδιά, στο σημείο που είναι σπάνιο να βρεθεί κάποια με τέσσερα παιδιά. Όμως οι προηγούμενες γενιές ήταν πολύ παραγωγικές, και εξακολουθούν να είναι σε πολλά μέρη του πλανήτη. Είναι ήδη γνωστό ότι η πιθανότητα να γεννηθεί αγοράκι ή κοριτσάκι είναι σχεδόν ίδια.

Όμως μεταξύ των οικογενειών με τέσσερα παιδιά, τι είναι πιο πιθανό, να έχουν δύο παιδιά κάθε φύλου, ή τρία του ενός φύλου και ένα του άλλου;

Λύση. Μπορούμε να προσομοιώσουμε την κατάσταση με τη ρίψη τεσσάρων νομισμάτων, με την κορόνα να αντιστοιχεί στο ένα φύλο, και τα γράμματα στο άλλο. Μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα δέντρο-διάγραμμα με τις πιθανότητες κορόνας ή γραμμάτων σε καθέναν από τους τέσσερις κλάδους.

Από τους 16 κλάδους του δέντρου, σε 8 είναι 3 παιδιά του ενός φύλου και ένα του άλλου (πιθανότητα που απομένουν είναι τα τέσσερα του ίδιου φύλου (πιθανότητα $3/8 = 37,5\%$) και οι δύο που απομένουν είναι τα τέσσερα του ίδιου φύλου (πιθανότητα $1/8 = 12,5\%$). Αν κάνετε πολλές δοκιμές (π.χ. προσθέτοντας τα αποτελέσματα πολλών φύλων που το κάνουν) τα αποτελέσματα είναι πολύ κοντά σε αυτή την πιθανότητα.

3.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΣΕ ΜΙΑ ΣΦΑΙΡΑ

Επιλέγουμε τρία τυχαία σημεία πάνω σε μια σφαίρα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι τα τρία βρίσκονται στο ίδιο ημισφαίριο (υποθέτοντας ότι ο μέγιστος κύκλος που το οριοθετεί ανήκει στο ημισφαίριο);

Λύση. Ίσως το θέμα απαιτεί ορισμένες προκαταρκτικές σκέψεις σχετικά με την γεωμετρία του χώρου και της σφαίρας. Έστω τρία οποιαδήποτε σημεία, υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένα επίπεδο που περνάει από αυτά (γι' αυτό ένα τραπέζι μπορεί να σταθεί σε τρία πόδια, που δεν βρίσκονται σε ευθεία γραμμή).

Αν βρίσκονται, τότε υπάρχουν άπειρα επίπεδα, τέμνοντας μια σφαίρα καθορίζει σε αυτή έναν κύκλο, που είναι μέγιστος (με ακτίνα ίση με της σφαίρας) αν αυτό το επίπεδο περνάει από το κέντρο της και με μικρότερη ακτίνα σε άλλη περίπτωση.

Στην τελευταία περίπτωση το σύνολο του κύκλου βρίσκεται σε ένα ημισφαίριο, που αποκτάται τέμνοντας τη σφαίρα με ένα επίπεδο παράλληλο προς αυτό που διέρχεται από το κέντρο.

Επομένως, εάν το επίπεδο που περνάει από τα τρία σημεία περνάει από το κέντρο της, τα τρία σημεία είναι στον μέγιστο κύκλο που οριοθετεί το ημισφαίριο. Διαφορετικά, βρίσκονται μέσα σε αυτό. Όμως και στις δύο περιπτώσεις, τα τρία σημεία είναι στο ίδιο ημισφαίριο. Επομένως, η απροσδόκητη απάντηση είναι ότι τα τρία σημεία, με όποιον τρόπο κι αν τα επιλέξουμε, είναι πάντα στο ίδιο ημισφαίριο.

3.5 ΠΑΛΙΟΙ ΓΑΜΟΙ ΓΑΜΟΣ ΣΤΗ ΑΝΔΡΟΧΩΡΑ

Σε μια επικράτεια που ονομάζεται Ανδροχώρα (όχι κατά τύχη, και δεν βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή, αλλά εκτείνεται αρκετά στον χρόνο και τον χώρο: τη χώρα των φαλλοκρατών), όταν ένα κορίτσι ήθελε να παντρευτεί έπρεπε να ζητήσει άδεια.

Πήγαινε μαζί με το αγόρι με το οποίο είχε αρραβωνιαστεί στο παλάτι του «αρχηγού» και αυτός έβαζε στο κλειστό χέρι του κοριτσιού έξι κομμάτια λεπτό σχοινί ίσου μήκους που προεξείχαν από τις δύο πλευρές του χεριού.

Ο αρραβωνιαστικός της έπρεπε να τα ενώσει (κάνοντας κόμπους), ανά δύο σε κάθε πλευρά του χεριού, χωρίς η κοπέλα να το ανοίξει, για να μην μπορεί να ξέρει τα άκρα του καθενός. Όταν γίνονται οι έξι κόμποι η κοπέλα άνοιγε το χέρι: αν το

σχοινί έβγαине σχηματίζοντας ένα δαχτυλίδι μπορούσαν να παντρευτούν, διαφορετικά, έπρεπε να αναβάλουν τον γάμο.

Μετά από ένα έτος είχαν μια νέα ευκαιρία. Αν το αποτέλεσμα ήταν πάλι αρνητικό, δεν μπορούσαν να προσπαθήσουν ξανά, και δεν είχαν δικαίωμα να παντρευτούν. Μπορούμε να εκτιμήσουμε πόσο δύσκολο ήταν να παντρευτεί κανείς στην Ανδροχώρα;

Λύση. Προφανώς, ο «αρχηγός» της επικράτειας δεν αγαπούσε πολύ τους γάμους μεταξύ των υπηκόων του, επειδή πιθανότητα να βγει ένα δαχτυλίδι είναι, «προφανώς», πολύ μικρή. Όμως, τα φαινόμενα μπορεί να απατούν.

Ας βρούμε την πιθανότητα του πρώτου έτους υπολογίζοντας τις ευνοϊκές περιπτώσεις (CF) και τις δυνατές περιπτώσεις (CP). Δένομε όπως θέλουμε τα σχοινιά που εξέχουν από τη μια πλευρά του χεριού, εφόσον αυτό δεν συνεπάγεται κανένα περιορισμό για αυτό που θα συμβεί δένοντας στην άλλη πλευρά, και θα εξετάσουμε τη δεύτερη πλευρά.

Οι δυνατοί τρόποι δεσίματος είναι οι ακόλουθοι: για τον πρώτο κόμπο, επιλέγουμε ένα από τα άκρα, που μπορούμε να το ενώσουμε με οποιοδήποτε από τα άλλα πέντε (επομένως 5). Μόλις γίνει αυτό, επιλέγουμε το δεύτερο άκρο, έτσι ώστε μένουν μόνο τρία για να επιλέξουμε.

Μόλις δεθεί ο δεύτερος κόμπος μας μένουν μόνο δύο ελεύθερα άκρα, και η μόνη δυνατότητα να το δέσουμε μαζί. Επομένως, $CP = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$. Σε πόσες από αυτές τις περιπτώσεις βγαίνει ένα ολόκληρο δαχτυλίδι; Αυτές θα είναι οι CF.

Αφού επιλέξουμε ένα από τα άκρα, μπορούμε να κάνουμε τον πρώτο κόμπο με όλα τα σχοινιά εκτός από αυτό που συνδέεται ήδη από πάνω σε αυτό, δηλαδή, υπάρχουν τέσσερις δυνατότητες.

Για τον δεύτερο κόμπο πρέπει να αποφύγουμε το σχοινί που είναι ήδη ενωμένο από πάνω μαζί του και, αν ήταν η περίπτωση, θα δημιουργούμε έναν κύκλο με τέσσερα κομμάτια λόγω του προηγούμενου κόμπου: δύο περιπτώσεις. Στην τρίτη μένουν μόνο δύο άκρα, επομένως μια μόνο επιλογή. Αυτό σημαίνει ότι $CF = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$. Η πιθανότητα να παντρευτεί το πρώτο έτος είναι:

$$P = \frac{CF}{CP} = \frac{8}{15} \cong 0,53 \text{ (53\%)}$$

Ένα εκπληκτικό αποτέλεσμα: η πρώτη προσπάθεια είναι θετική σε περισσότερες από τις μισές περιπτώσεις.

Ας δούμε τώρα στο σύνολο των δύο ετών. Η πιθανότητα να μη βγει το δαχτυλίδι σε ένα έτος είναι: $(1-p)=1-0,53=0,47$.

Η πιθανότητα ότι δεν θα βγει σε κανένα από τα δύο έτη (ότι δεν θα βγει σε καμία από τις δύο προσπάθειες) είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων τους: $(1-p)(1-p)=0,47 \cdot 0,47=0,22$.

Αυτό δείχνει ότι κάνοντας τη δοκιμή δύο έτη στη σειρά υπάρχει πιθανότητα περίπου 22% να μη βγει ένα μοναδικό δαχτυλίδι σε κανένα από τα δύο. Δηλαδή, θα μπορέσει να παντρευτεί το 78% όσων θα προσπαθήσουν για δύο έτη.

Η πιθανότητα του δεύτερου έτους μπορεί να ειπωθεί διαφορετικά. Η δυνατότητα να γίνει ένα μοναδικό δαχτυλίδι στη δεύτερη προσπάθεια θα είναι και πάλι 53%, όμως παίρνοντας μόνο το 47% των ζευγαριών που δεν πέτυχαν το πρώτο έτος, που είναι τα μόνα που θα επαναλάβουν τη δοκιμή.

Αφού 0,47 το δεύτερο έτος θα πετύχει το δαχτυλίδι το 25% των ζευγαριών που είχαν παρουσιαστεί και αποτύχει. Επομένως θα υπάρχουν μόνο $47\%-25\%=22\%$ που δεν μπορούν να παντρευτούν.

Κοιτάζοντας οποιονδήποτε από τους δυο τρόπους, και αντίθετα σε αυτό που φαινόταν «προφανές», δεν είναι πολύ δύσκολο να παντρευτούν στην Ανδροχώρα!

ΓΑΜΟΣ ΣΤΗ ΦΑΛΛΟΚΡΑΤΟΧΩΡΑ

Η Φαλλοκρατοχώρα, επικράτεια κοντά στην Ανδροχώρα, είχε έναν αρχηγό ακόμη πιο αντιδραστικό, που ήθελε να σκληρύνει τους όρους του γάμου σε σχέση με την Ανδροχώρα: εφάρμοζε την ίδια διαδικασία, όμως, αντί για έξι, με οκτώ κομμάτια λεπτό σχοινί. Πιστεύετε ότι είναι πιο δύσκολο να παντρευτεί κανείς στη Φαλλοκρατοχώρα;

Για τον ίδιο λόγο όπως και στην Ανδροχώρα, το πρώτο έτος η θα είναι:

$$p = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{48}{105} = 0,457 \text{ (45,7\%).}$$

Σε δύο διαδοχικά έτη, η πιθανότητα να μη βγει κανείς είναι:

$$(1-p) \cdot (1-p) = 0,284 \text{ (28,4\%).}$$

Αυτό σημαίνει ότι το 71,6% θα μπορεί να παντρευτεί. Ο αρχηγός της Φαλλοκρατοχώρας ήταν σκληρός αλλά όχι πολύ ενήμερος για τις πιθανότητες!

3.6 ΝΙΚΗ ΣΤΟ ΤΕΝΙΣ

Ο Γιάννης και η Άννα είναι φίλοι, παιδιά δύο φιλικών οικογενειών, και ερασιτέχνες παίκτες του τένις. Θέλουν να τους αφήσουν να πάνε σε ένα ταξίδι, αλλά οι γονείς τους, επίσης ερασιτέχνες του τένις, δεν το βλέπουν με καλό μάτι και αποφασίζουν να το κρίνουν σε μια σειρά αγώνων: αν κερδίσουν την πρόκληση θα μπορούν να πάνε εκδρομή.

Οι μητέρες τους εξηγούν: «Διαλέξτε μεταξύ σας αυτόν που θέλει να παίξει μ' εμάς τις δύο. Όποιος επιλεγεί πρέπει να παίξει τρία παιχνίδια μ' εμάς ανταλλάζοντας αντίπαλο σε κάθε παιχνίδι. Εάν κερδίσετε δύο διαδοχικά παιχνίδια μπορείτε να πάτε σε αυτό το ταξίδι». Από τις δύο μητέρες, της Άννας είναι πολύ καλύτερη παίκτρια από τη μητέρα του Γιάννη. Απέναντι σε ποια από τις δύο μητέρες θα πρέπει να παίξει πρώτα το καλύτερο από τα παιδιά για να έχει περισσότερες πιθανότητες να κερδίσει;

Λύση. Μπορούμε να αποφασίσουμε με την «κοινή λογική» (που όπως βλέπουμε με τις πιθανότητες είναι, όπως και σε άλλου τομείς, η λιγότερο κοινή των λογικών) ή να καταφύγουμε στον υπολογισμό των πιθανοτήτων, που δεν φαίνεται περίπλοκο, αφού υπάρχουν μόνο δύο δυνατές λύσεις: είτε θα παίξουν στην αρχή με τη μητέρα του Γιάννη ή με τη μητέρα της Άννας. Φυσικά, με τη δυσκολία ότι δεν υπάρχουν αριθμοί που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε (ακόμα κι αν είναι για να κάνουμε πράξεις και να έχουμε την αίσθηση ότι κάνουμε κάτι.)

Φαίνεται ότι το «προφανές» είναι να παίξουν δύο παιχνίδια με τη μητέρα του Γιάννη, επειδή παίζει χειρότερα και έτσι είναι ευκολότερο να κερδίσουν. Ας ονομάσουμε J την πιθανότητα να κερδίσουν τη μητέρα του Γιάννη και A, να κερδίσουν τη μητέρα της Άννας.

Δεν γνωρίζουμε τις τιμές του J και A, αλλά αφού η μητέρα του Γιάννη παίζει χειρότερα, είναι πιο εύκολο να την κερδίσουν, μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι το J είναι μεγαλύτερο από το A ($J > A$). Αν κάνουμε τα δέντρα της κατάστασης, βλέπουμε τις πιθανότητες για καθεμία από τις ακολουθίες (Μητέρα του Γιάννη – Μητέρα της Άννας - Μητέρα του Γιάννη, ή Μητέρα της Άννας - Μητέρα του Γιάννη – Μητέρα της Άννας) και μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα.

Ας δούμε την σειρά παιχνιδιών Μητέρα του Γιάννη – Μητέρα της Άννας - Μητέρα του Γιάννη. Θα τους δώσουν την άδεια σε οποιαδήποτε από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Κερδίζει τη μητέρα του Γιάννη και κερδίζει τη μητέρα της Άννας (ο τρίτος αγώνας δεν χρειάζεται να γίνει επειδή έχει ήδη κερδίσει δύο στη σειρά). Η πιθανότητα P_1 για την περίπτωση αυτή είναι

$$P_1 = J \cdot A.$$
2. Χάνει με τη μητέρα του Γιάννη την πρώτη φορά, αλλά κερδίζει τα δύο επόμενα παιχνίδια. Η πιθανότητα P_2 στην περίπτωση αυτή είναι $P_2 = (1-J) \cdot A \cdot J.$
 Η πιθανότητα P της νίκης σε αυτή την περίπτωση είναι το άθροισμα των P_1 και P_2 :

$$P = P_1 + P_2 = J \cdot A + A \cdot J \cdot (1-J) = J \cdot A \cdot (1 + 1 - J) = J \cdot A (2 - J).$$

 Τώρα η σειρά παιχνιδιών Μητέρα της Άννας – Μητέρας του Γιάννη - Μητέρα της Άννας. Θα κερδίσουν τα παιδιά στις δύο ακόλουθες περιπτώσεις:
 1. Κερδίζει τη μητέρα της Άννας και κερδίζει τη μητέρα του Γιάννη (και δεν έχει σημασία τι θα συμβεί στο τρίτο παιχνίδι). Η πιθανότητα R_1 στην κατάσταση αυτή είναι $R_1 = A \cdot J.$
 2. Χάνει με τη μητέρα της Άννας στο πρώτο παιχνίδι, κερδίζει τη μητέρα του Γιάννη και κερδίζει το δεύτερο παιχνίδι με τη μητέρα της Άννας. Η πιθανότητα R_2 είναι $R_2 = (1 - A) \cdot J \cdot A.$

Η πιθανότητα R να κερδίσουν σε αυτή την περίπτωση είναι το άθροισμα των R_1 και R_2 : $R = R_1 + R_2 = A \cdot J + J \cdot A \cdot (1 - A) = J \cdot A \cdot (2 - A).$

Για να δούμε που είναι μεγαλύτερη η πιθανότητα συγκρίνουμε τα P και R , που διαφέρουν μόνο στον τελευταίο παράγοντα. Αφού $J > A$, $(2-J) < (2-A)$, έτσι ώστε $R > P$, έχουμε, επομένως, μια προφανή αντίφαση, αντίθετα με το «προφανές»: πρέπει να παίζουν δύο φορές με την καλύτερη παίκτρια (την μητέρα της Άννας)!

Σκεπτόμενοι ήρεμα και εφαρμόζοντας την κοινή λογική, χωρίς υπολογισμούς, θα το είχαμε επίσης συμπεράνει. Στη σειρά τριών παιχνιδιών το πιο βολικό για τη νίκη είναι το δεύτερο, επειδή μας χρησιμεύει για να κάνουμε τη σειρά των δύο συνεχόμενων νικών, τόσο αν κερδίσουμε το πρώτο όσο και το τρίτο. Επομένως είναι πιο βολικό να παίζουμε στο δεύτερο με την παίκτρια που είναι πιο εύκολο να κερδίσουμε.

3.7 ΕΝΑ ΣΤΟΙΧΗΜΑ: ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΚΑΡΤΕΣ

Έχουμε τρεις κάρτες σε ένα αδιαφανές κουτί: η μία είναι άσπρη και στις δύο πλευρές, η άλλη έχει ένα κόκκινο σταυρό στη μία πλευρά και είναι άσπρη από την άλλη πλευρά, και η Τρίτη έχει ένα σταυρό και στις δύο πλευρές. Κάποιος βγάζει μία από τις κάρτες και τις βάζει πάνω στο τραπέζι σε μία από τις δύο πλευρές τους, η οποία είναι άσπρη. Προτείνει το στοίχημα να μαντέψουμε την άλλη πλευρά, χωρίς να τη δούμε. Για τι είδους πλευρά είναι πιο ευνοϊκό να στοιχηματίσουμε; Ή δεν έχει σημασία;

Λύση. Φαίνεται ότι δεν σημασία αν πούμε ότι είναι επίσης άσπρη ή έχει σταυρό, ότι η πιθανότητα είναι 50%. Αλλά θα δούμε ότι δεν είναι έτσι, αλλά είναι πιο πιθανό να έχει το ίδιο χρώμα.

Θα αναλύσουμε από πού μπορεί να έρθει αυτή η άσπρη πλευρά. Μπορεί να είναι μια από τις δύο πλευρές της κάρτας που είναι άσπρη και στις δύο πλευρές, ή τη λευκή πλευρά της «μικτής» κάρτας. Από τις έξι πλευρές που μπορούσαν να εμφανιστούν, τρεις είναι άσπρες.

Μόλις δούμε μια άσπρη πλευρά, οι επιλογές εστιάζονται στις δύο κάρτες με τουλάχιστον μια άσπρη πλευρά, και σε αυτές, δύο από τις τρεις πλευρές που δεν

γνωρίζουμε (η τέταρτη είναι αυτή που φαίνεται) είναι άσπρες. Κατά συνέπεια, η πιθανότητα ότι η άλλη πλευρά είναι άσπρη είναι $2/3$, όχι $1/2$ όπως θα μπορούσαμε να σκεφτούμε (για τον ίδιο λόγο, αν βγήκε ένας σταυρός πρέπει να στοιχηματίσουμε για άλλο σταυρό). Αν παίξουμε πολλές φορές αυτό το παιχνίδι, είναι κερδοφόρο να στοιχηματίσουμε ότι η άλλη πλευρά είναι του ίδιου χρώματος με αυτή που βλέπουμε; Τελικά θα κερδίσουμε δύο από τρεις φορές.

3.8 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΠΑΛΤΩΝ

Μια ομάδα N νέων πηγαίνει σε μια ντισκοτέκ τον χειμώνα και, κατά την είσοδο, αφήνουν τα παλτά τους στο βεστιάριο, παίρνοντας ο καθένας ένα νούμερο. Υπάρχει μια εκτεταμένη διακοπή ρεύματος, γι' αυτό βγαίνουν στα σκοτεινά από την ντισκοτέκ και καθένας παίρνει ένα παλτό χωρίς να δει τον αριθμό. Ποια είναι η πιθανότητα ότι κανένας από τους νέους δεν παίρνει το παλτό του; Εξαρτάται από τον αριθμό N συμμετεχόντων;

Λύση. Μπορεί να προσομοιωθεί με διάφορους τρόπους. Μπορείτε να πάρετε κάρτες με αριθμούς (για παράδειγμα έως το 10), να τις ανακατέψετε, να τις βάλετε στη σειρά ανάποδα, να τις γυρίσετε, και να δείτε αν κάποια από αυτές είναι στη θέση που λέει η σειρά. Αν το επαναλάβετε αρκετές φορές (είναι καλύτερο να το κάνετε με παρέα για έκπληξη και για να έχετε γρήγορα πολλά πειράματα) παίρνετε μια γενική ιδέα των πιθανοτήτων.

Αλλάζοντας τον αριθμό των καρτών (15 αντί 10, για παράδειγμα) μπορεί να ελεγχθεί εάν εξαρτάται από τον αριθμό των ατόμων.

Αν ονομάσουμε A_i , το γεγονός «το αγόρι i παίρνει το παλτό του», η ένωση των γεγονότων $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ είναι το γεγονός A = κάποιος από τους νέους παίρνει το παλτό του, και αυτό που μας ζητείται είναι η πιθανότητα του αντίθετου γεγονότος: ότι δεν θα το πάρει κανείς. Αν γνωρίζουμε το $p(A)$, η πιθανότητα που ψάχνουμε είναι $1-p(A)$.

Εφαρμόζοντας τους τύπους του υπολογισμού πιθανοτήτων παίρνουμε το ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα για N άτομα:

$$P(A) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^N \frac{1}{N!}$$

Δεδομένο ότι το $p(A)$ εξαρτάται από τα αντίστροφα των παραγοντικών (που είδαμε ότι αυξάνονται πολύ γρήγορα), η τιμή του είναι σχεδόν σταθερή μόλις το N γίνει λίγο μεγάλο (θυμίζουμε, για παράδειγμα, ότι $10! = 3.628.800$, και έτσι το $1/10!$ γίνεται αμελητέο) και τείνει στο: $p(A) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,63$,

όπου e ένας αριθμός που ορίζεται ως ένα όριο: $e = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{N})^N \cong 2,71$.

Με λίγα λόγια, η πιθανότητα ότι δεν θα πάρει κανείς το παλτό του είναι πρακτικά ανεξάρτητη από τον αριθμό των νέων και είναι 0,37 (37%).

3.9 ΣΥΛΛΟΓΕΣ ΑΥΤΟΚΟΛΛΗΤΩΝ ΚΑΡΤΩΝ

Οι συλλογές αυτοκόλλητων καρτών είναι ένα χόμπι που διαρκεί στην πάροδο του χρόνου, με το οποίο ασχολούνται διαδοχικές γενιές παιδιών και νέων, αλλάζοντας μόνο το θέμα στο οποίο αφιερώνονται οι κάρτες.

Υπάρχει πάντα η υποψία ότι οι κατασκευαστές κυκλοφορούν μεγάλο αριθμό δειγμάτων για όλες τις κάρτες, εκτός από δύο ή τρεις που δεν υπάρχει τρόπος να βρείτε όσους φακέλους κι αν αγοράζετε.

Αφήνοντας κατά μέρος αυτή την υποτιθέμενη πρακτική, αν όλες οι αυτοκόλλητες κάρτες κυκλοφορούν στον ίδιο αριθμό, πόσες αναμένεται ότι πρέπει να αγοράσουμε για να ολοκληρωθεί η συλλογή;

Λύση: Ας θεωρήσουμε μια συλλογή 50 καρτών. Η πρώτη που θα αγοράσουμε είναι σίγουρο πως δεν την έχουμε, αλλά με τη δεύτερη πιθανότητα ότι είναι καινούργια είναι 49/50. Όταν έχουμε δύο, θα είναι 48/50, και ούτω καθεξής.

Εάν έχουμε ήδη 40 διαφορετικές κάρτες, η πιθανότητα ότι αγοράζοντας μια καινούργια δεν θα την έχουμε είναι 10/50 (οι 10 που μας λείπουν μεταξύ των 50)=1/5. Επομένως, στην περίπτωση αυτή είναι αναμενόμενο ότι πρέπει να αγοράσουμε $5=50/10$ κάρτες (το αντίστροφο του 10/50).

Το ίδιο συμβαίνει και στις άλλες περιπτώσεις, επομένως, διαισθητικά, ο συνολικός αριθμός των καρτών που πρέπει να αγοράσουμε είναι:

$$\frac{50}{50} + \frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \dots + \frac{50}{3} + \frac{50}{2} + \frac{50}{1} = 50 \quad \frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η προηγούμενη έκφραση μπορεί να δικαιολογηθεί με επιχειρήματα πιθανοτήτων, πράγμα που σημαίνει με όσα λένε οι πιθανότητες. Η προηγούμενη παρένθεση ονομάζεται «αρμονικός αριθμός», και μια καλή προσέγγιση της τιμής του (μπορεί να επαληθευτεί κάνοντας αθροίσματα με την αριθμομηχανή) είναι 4,5. Αυτό σημαίνει ότι χωρίς παράτυπες πρακτικές στην κατασκευή, θα έπρεπε να αγοράσουμε περίπου $50 \cdot 4,5 = 225$ αυτοκόλλητα για να ολοκληρωθεί η συλλογή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο ΚΛΗΡΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΑΧΕΙΟΦΟΡΕΣ ΑΓΟΡΕΣ

Ο σχεδιασμός δίκαιων κληρώσεων και λαχειοφόρων αγορών (στις οποίες όλοι οι συμμετέχοντες έχουν τις ίδιες πιθανότητες να κερδίσουν) είναι λίγο πιο περίπλοκος από ότι φαίνεται.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι κάτι που δεν μας επηρεάζει, εκτός αν είμαστε παίκτες, αλλά τότε δεν θα έχουμε ακριβή αντίληψη της πραγματικότητας. Στην πραγματικότητα, σε όλα μας τη ζωή συμμετέχουμε σε πολλές κληρώσεις, μερικές φορές ακόμη και χωρίς να το καταλαβαίνουμε, όπως αυτές που γίνονται για την επιλογή των μελών των εκλογικών τμημάτων ή των ενόρκων στις δίκες.

Επίσης η κατανομή των σχολικών θέσεων στα μέρη και στις ηλικίες που είναι πάντα σπάνιες, η διανομή των κοινωνικών κατοικιών, η συμμετοχή στις εξεταστικές επιτροπές διαγωνισμών (αν κάποιος είναι δημόσιος υπάλληλος) ή ο τόπος ή η σειρά συμμετοχής σε αυτές (αν είναι υποψήφιος).

Υπήρξαν ιστορικά παραδείγματα, μερικά διαβόητα, για άδικες κληρώσεις και κακοσχεδιασμένες λαχειοφόρες αγορές, σε όλες τις περιπτώσεις χωρίς προμελετημένο τρόπο, νομίζοντας ότι έκαναν το σωστό, γεγονός που δείχνει ότι ακόμη και στον τομέα αυτόν προκύπτουν δυσκολίες σύλληψης και εκτέλεσης.

Η λέξη «λοταρία» για τη λαχειοφόρο αγορά προέρχεται από το lotto, ιταλική λέξη για να περιγράψει μια παρτίδα και ταυτόχρονα τον προορισμό. Ωστόσο, υπάρχουν αναφορές για λαχειοφόρες αγορές ακόμη και στην Κίνα, όπου η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε για τη χρηματοδότηση του Σινικού Τείχους.

Στην Ευρώπη, η ιστορία της λαχειοφόρου αγοράς ξεκινά το 1498 στην Πορτογαλία, που την επινόησε για να βοηθήσει τους ανήμπορους και να ανταποκριθεί στις νομισματικές ανάγκες της χώρας. Το 1727 η Ολλανδία ίδρυσε μια από τις παλαιότερες λαχειοφόρες αγορές στον κόσμο, αφού εξακολουθεί να

λειτουργεί ακόμα. Αναζητούσαν να αποκαταστήσουν το δημόσιο ταμείο για τη χρηματοδότηση των πολέμων τους και για την κατασκευή δημόσιων έργων.

4.1 ΚΛΗΡΩΣΕΙΣ ΜΕ ΚΑΛΗΠΙΚΟ ΝΟΜΙΣΜΑ

Οι κληρώσεις με ένα νόμισμα μπορεί να μην είναι πολύ συχνές, αλλά με αυτές επιχειρούμενα πετύχουμε μια καλύτερη αντίληψη των προβλημάτων που συνδέονται με τους σχεδιασμούς κληρώσεων.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα νόμισμα και με αυτό θέλουμε να κάνουμε μια δίκαιη και αμερόληπτη κλήρωση για δύο άτομα, η πρώτη δυνατότητα είναι να θεωρήσουμε ότι το νόμισμα είναι κανονικό, δηλαδή, ότι η πιθανότητα να έρθουν κορόνα ή γράμματα είναι ακριβώς η ίδια, οπότε η λύση είναι απλή: ρίχνουμε κορόνα-γράμματα.

Όμως ότι το νόμισμα είναι κανονικό, είναι κάτι που δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων. Ωστόσο, με λίγη σκέψη μπορούμε να πετύχουμε μια κλήρωση που είναι πραγματικά δίκαιη, ανεξαρτήτως του νομίσματος. Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να βγει κορόνα (C) είναι p (την οποία δεν γνωρίζουμε και θα ήταν 0,5 αν το νόμισμα ήταν κανονικό), έτσι ώστε η πιθανότητα για γράμματα (X), το αντίθετο γεγονός με το προηγούμενο, θα είναι $(1-p)$.

Η πιθανότητα να έχουμε CX (κορόνα- γράμματα) με αυτή τη σειρά, όταν οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες και το αποτέλεσμα της μιας δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της άλλης, είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων:

$$\text{Prob}(CX) = P * (1-P).$$

Η πιθανότητα να έρθει XC με αυτή τη σειρά είναι:

$$\text{Prob}(XC) = (1-P)*P = (XC).$$

Επομένως, έχουμε τον τρόπο για να κάνουμε μια δίκαιη κλήρωση μεταξύ δύο ατόμων με οποιοδήποτε νόμισμα. Ρίχνουμε το νόμισμα δύο συνεχόμενες φορές: με XC κερδίζει ένας από τους παίκτες, με CX, ο άλλος. Το μόνο μειονέκτημα είναι ότι οι ρίξεις στις οποίες έρχεται XX ή CC είναι ακατάλληλες, δεν μπορούμε να τις λάβουμε υπόψη, και θα πρέπει να συνεχίσουμε έως ότου μια φορά θα έχουμε CX ή XC. Αγνοώντας αυτές τις περιπτώσεις δεν αλλάζει ο δίκαιος χαρακτήρας της κλήρωσης. Επομένως, οποιοδήποτε νόμισμα είναι καλό για να κάνουμε μια δίκαια κλήρωση μεταξύ δύο ατόμων.

Κάτι που δεν ισχύει μόνο για κέρματα και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε άλλο μέσο με δύο πιθανά αποτελέσματα, έστω και αν έχουν πολύ διαφορετικές πιθανότητες.

4.2 ΚΛΗΡΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΡΙΑ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΑΤΟΜΑ

Αν τα άτομα ανάμεσα στα οποία πρέπει να κάνουμε την κλήρωση είναι τρία και κάποιος προτείνει την εξής διαδικασία: ετοιμάζουμε μια τσάντα (ή αδιαφανές κουτί) με τρεις μπάλες, μια άσπρη και δύο μαύρες όλες με ίδιο σχήμα και υφή ώστε να μην μπορούν να διακριθούν με την αφή. Οι τρεις τραβούν, με τη σειρά, μια μπάλα που δεν επιστρέφουν στην τσάντα.

Κερδίζει αυτός που βγάζει την άσπρη μπάλα. Εξετάζοντας αν είναι δίκαιο ή όχι και αν κάποιος από τους τρεις έχει πλεονέκτημα μπορούμε να υποθέσουμε, για απλότητα, ότι οι μπάλες είναι αριθμημένες 0, 1, 2, και η άσπρη μπάλα είναι ο αριθμός 0.

Η σειρά τραβήγματος των τριών μπαλών θα είναι μια από τις έξι ακόλουθες, που αντιστοιχούν στις έξι δυνατές διατάξεις που μπορούν να προκύψουν:

012 021 102 120 201 210

Μια απλή οπτική παρατήρηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στις δύο από τις έξι περιπτώσεις η μπάλα 0 θα βγει πρώτη, σε άλλες δύο θα βγει δεύτερη και στις δύο υπόλοιπες Τρίτη. Με άλλα λόγια, είναι αδιάφορη η σειρά με την οποία θα τραβήξουν την μπάλα.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Laplace, είναι επίσης προφανές ότι η πιθανότητα να βγει η άσπρη μπάλα πρώτη είναι $2/6$ (δύο ευνοϊκές περιπτώσεις, σε έξι δυνατές περιπτώσεις, που αντιστοιχούν σε οποιαδήποτε από τις προηγούμενες διατάξεις), και επίσης είναι $2/6$ η πιθανότητα να βγει στη δεύτερη ή Τρίτη θέση.

Αν συλλογιστούμε το πρόβλημα με όρους δεσμευμένης πιθανότητας, εφόσον υπάρχουν τρεις μπάλες, η πιθανότητα να κερδίσει ο πρώτος είναι $\text{prob}(1^{\text{ος}}) = 1/3$. Για να κερδίσει ο δεύτερος, ο πρώτος πρέπει να έχει βγάλει μια μαύρη μπάλα και ο δεύτερος την άσπρη. Με άλλα λόγια, ο δεύτερος πρέπει να έχει τη δυνατότητα να τραβήξει (η πιθανότητα για να συμβεί αυτό είναι $2/3$, η δεσμευμένη πιθανότητα ότι ο πρώτος δεν έχει κερδίσει) και επιπλέον να βγάλει την άσπρη όταν υπάρχουν μόνο μια μαύρη και μια άσπρη. Συνολικά, $\text{prob}(2^{\text{ος}}) = 2/3 * 1/2 = 1/3$. Τέλος, $\text{prob}(3^{\text{ος}}) = 1 - 1/3 - 1/3 = 1/3$.

Αν αντί για τρεις είχε 100 ή N συμμετέχοντες, θα βάζαμε 100 (ή N) μπάλες και παρόμοιοι συλλογισμοί μας οδηγούν να βεβαιώσουμε ότι η πιθανότητα να βγει η μπάλα σε μια συγκεκριμένη θέση είναι $1/100$ (ή $1/N$).

Μια αντίστοιχη κατάσταση παρουσιάζεται όταν ο δάσκαλος θέλει να κληρώσει ένα βραβείο μεταξύ των N μαθητών του και γι' αυτό γράφει έναν αριθμό μεταξύ 1 και N σε ένα χαρτί και ζητά από κάθε μαθητή «με αλφαβητική σειρά» έναν αριθμό μεταξύ 1 και N, δίνοντας το βραβείο σε όποιον μαντέψει τον αριθμό που έγραψε. Πάλι η σειρά δεν έχει σημασία.

4.3 ΚΛΗΡΩΣΕΙΣ ΜΕ ΠΟΛΛΟΥΣ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ

Οι κληρώσεις με πολλούς συμμετέχοντες παρουσιάζουν δυσκολίες, για αυτόν τον λόγο θα γίνει αναφορά σε δύο ιστορικά γεγονότα, που και τα δύο σχετίζονται με στρατούς. Και στις δύο περιπτώσεις οργανώθηκαν με την εντύπωση ότι ήταν δίκαιες, ότι όλοι οι συμμετέχοντες είχαν τις ίδιες πιθανότητες να επιλεγούν ή να αποκλεισθούν.

Στις Ηνωμένες Πολιτείες το 1970, με τον πόλεμο του Βιετνάμ στο απόγειό του, την ανάγκη για στρατιώτες και μια ατμόσφαιρα απόρριψής του, οργανώθηκε τότε μια στρατιωτική κλήρωση για να επιλέξουν τους νέους που έπρεπε να αποσταλούν. Για να οργανώσουν την κλήρωση τοποθέτησαν τις 366 πιθανές ημερομηνίες ενός έτους (από 1 Ιανουαρίου έως 31 Δεκεμβρίου, συμπεριλαμβανομένης της 29^{ης} Φεβρουαρίου), καθεμιά σε μια κάψουλα και όλες τραβήχτηκαν στην τύχη. Η πρώτη που βγήκε ήταν η 14^η Σεπτεμβρίου, μετά η 24^η Απριλίου και με τον τρόπο αυτό στρατολογήθηκαν στρατιώτες, που γεννήθηκαν μεταξύ 1941 και 1952, ακολουθώντας τη σειρά των ημερομηνιών που εμφανίστηκαν στην κλήρωση (πρώτα αυτοί της 14^{ης} Σεπτεμβρίου, στη συνέχεια αυτοί της 24^{ης} Απριλίου κλπ.)

Στην κλήρωση του Βιετνάμ το αποτέλεσμα αποκάλυψε ότι εκείνοι που γεννήθηκαν στους τελευταίους μήνες του έτους ήταν πολλοί περισσότεροι από εκείνους που γεννήθηκαν στους υπόλοιπους μήνες. Δεδομένου ότι η ημερομηνία γέννησης θεωρείται τυχαία ήταν αναμενόμενο ότι η κατανομή των ημερομηνιών θα ήταν επίσης τυχαία. Όμως οι κάψουλες με τις ημερομηνίες γέννησης μπήκαν στο δοχείο αρχίζοντας από την 1^η Ιανουαρίου και έπειτα, με αυστηρή σειρά ημερομηνιών μέχρι να φτάσουν στις 31 Δεκεμβρίου. Χωρίς να τις αναμείξουν ιδιαίτερα άρχισαν να τραβούν, έτσι ώστε αυτές του τέλους του έτους που ήταν

επάνω, βγήκαν σε πολύ υψηλότερο ποσοστό από το αναμενόμενο. Με πιο απλό και πιο δίκαιο τρόπο θα μπορούσαν να τραβήξουν μία ημερομηνία στην τύχη, μετά να γυρίσουν κατάλληλα το δοχείο, και να επιλέξουν τους απαιτούμενους άνδρες που γεννήθηκαν μετά την ημερομηνία αυτή.

Η επόμενη περίπτωση αφορά την Ισπανία το 1997, όπου η στρατιωτική θητεία ήταν υποχρεωτική για τους άνδρες μιας συγκεκριμένης ηλικίας. Οι στρατεύσιμοι ήταν 165.342, αλλά οι ανάγκες του στρατού ήταν λιγότερες, έτσι ώστε 16.442 από αυτούς δεν έπρεπε να πάνε στρατό.

Στην περίπτωση αυτή η επιλογή στην κλήρωση ήταν κάτι επιθυμητό. Οργανώθηκαν με τον ακόλουθο τρόπο: πρώτα δόθηκε με τυχαίο τρόπο ένας αριθμός σε καθέναν από τους 165,342 στρατεύσιμους.

Για να γίνει η κλήρωση τοποθετήθηκαν έξι δοχεία με μπάλες για καθένα από τα έξι ψηφία του αριθμού που θα επιλεγόταν και από τον οποίο θα αποδεσμεύονταν τα 16.442 «αγόρια» που είχαν αριθμούς συνεχόμενους με αυτόν που βγήκε και αν έφταναν στο τέλος θα ξανάρχιζαν από τον αριθμό 1 μέχρι να ολοκληρωθεί η απαιτούμενη ποσότητα). Στο πρώτο δοχείο είχε πέντε μπάλες με το 1 και πέντε με 0 (αντιστοιχούσε στις εκατοντάδες χιλιάδες).

Σε όλα τα άλλα είχε 10 μπάλες αριθμημένες από το 0 έως το 9. Είχε προβλεφτεί ότι εάν στο δεύτερο δοχείο (με τις δεκάδες χιλιάδες) έβγαινε μια μπάλα μεγαλύτερη από το 6 όπως συνέβηκε στην πραγματικότητα, θα επαναλαμβανόταν το τράβηγμα στο δοχείο αυτό. Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να εξεταστεί κατά πόσο ήταν δίκαια ή όχι η κλήρωση.

Στην περίπτωση αυτή το γεγονός ότι στο πρώτο δοχείο υπήρχε η ίδια πιθανότητα να βγει 0 ή 1, αφού υπήρχαν πέντε μπάλες για το καθένα, έκανε την πιθανότητα να βγει ένας αριθμός με συνέπεια να βρεθεί εκτός στρατολόγησης, να εξαρτάται από τον αριθμό που είχε. Έτσι, αγνοώντας το θέμα της ενδεχόμενης επανάληψης του αριθμού που βγήκε στο δεύτερο δοχείο, για τους αριθμούς μεταξύ 1 και 99.999, η πιθανότητα να βγουν είναι:

$$P(P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{99.999} = 0,000005$$

Ενώ για τους υπόλοιπους αριθμούς η πιθανότητα είναι:

$$P(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{65.343} = 0,00000765.$$

Δηλαδή, οι αριθμοί της τελευταίας ομάδας είχαν πιθανότητα να εκλεγούν σημαντικά μεγαλύτερη από τους πρώτους, κατά περίπου 50% περισσότερο. Ο αριθμός που βγήκε στην κλήρωση ήταν το 155.611. Στην περίπτωση του πρώτου 5, χρειάστηκε να επαναληφθεί το τράβηγμα, επειδή αρχικά βγήκε ένα 8 (επειδή είναι μεγαλύτερο από 6). Απαλλάχθηκαν από τη στρατιωτική υπηρεσία από τον αριθμό αυτόν μέχρι το τέλος και στη συνέχεια από το 1 έως να ολοκληρωθούν οι 16.442 απαλλαγέντες.

4.4 ΛΑΧΕΙΟΦΟΡΕΣ ΑΓΟΡΕΣ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΔΟΚΙΑ

Στις κοινωνίες μας υπάρχει αντίσταση στην πληρωμή φόρων, εκτός από έναν που καταβάλλεται οικειοθελώς και με ευχαρίστηση: οι επίσημες λαχειοφόρες αγορές. Επειδή σε αυτές, χωρίς καμία αμφιβολία, αυτός που κερδίζει πάντα είναι το κράτος. Η ανάλυση των τυχερών παιχνιδιών έχει αναμφισβήτητο μαθηματικό ενδιαφέρον, αλλά επίσης και κοινωνικό. Λαμβάνοντας υπόψη τον μεγάλο αριθμό ανθρώπων και τις οικονομικές ποσότητες που διακινούνται, είναι ένα σημαντικό θέμα σε όλες τις χώρες.

Δεδομένου ότι σε πολλά παιχνίδια όπως η λαχειοφόρος αγορά υπάρχει η δυνατότητα να αποκτηθούν διάφορα βραβεία, μια σημαντική έννοια είναι της μαθηματικής ελπίδας του κέρδους, η οποία μας παρέχει πληροφορίες σχετικά με το μέσο κέρδος που θα μπορούσαμε να αποκτήσουμε. Για τον υπολογισμό του καθορίζονται, αρχικά, οι πιθανότητες κάθε βραβείου με την κλασική μέθοδο: ο λόγος μεταξύ του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων να πάρουμε ένα βραβείο και του συνόλου των πιθανών περιπτώσεων.

Για παράδειγμα, σε μια κλήρωση με 100 λαχνούς ή αριθμούς, ένα πρώτο βραβείο και δύο δεύτερα, η πιθανότητα να κερδίσουμε το πρώτο βραβείο παίζοντας ένα λαχνό είναι $1/100 = 0,01$ ή 1%, και ένα δεύτερο, $2/100 = 0,02$ ή 2%. Η πιθανότητα να μην κερδίσουμε είναι $97/100 = 0,97$ ή 97%. Η μαθηματική προσδοκία του κέρδους σε ένα παιχνίδι είναι το άθροισμα των γινομένων των δυνατών κερδών επί της πιθανότητας απόκτησής τους μείον τα χρήματα που καταβλήθηκαν για την συμμετοχή.

Στην προηγούμενη λοταρία, αν κάθε λαχνός κοστίζει 5 €, το πρώτο βραβείο είναι 100 € και τα δύο δεύτερα 40 €, η ελπίδα του κέρδους είναι $100 * 0,01 + 40 * 0,02 - 5 = 1 + 0,8 - 5 = -3,2$ €. Αν η ελπίδα είναι αρνητικός αριθμός, όπως στην περίπτωση αυτή, το παιχνίδι είναι **δυσμενές** για τον παίκτη. Αν ήταν θετικός, κάτι που συμβαίνει συχνά, εκτός από λάθος στον σχεδιασμό, θα ήταν **ευνοϊκό** και αν ήταν μηδέν, θα ήταν ένα **αμερόληπτο ή δίκαιο παιχνίδι** για τα δύο μέρη.



4.5 ΤΑ ΛΟΤΤΟ

Οι λαχειοφόρες αγορές με το όνομα λόττο, στις οποίες πρέπει να επιλεγούν m αριθμοί μεταξύ 1 και N είναι πολύ δημοφιλείς σε πολλές χώρες. Στην Ισπανία υπάρχουν τρεις: η Loteria Primitiva και το Lotto 6/49 στην Καταλονία, στις οποίες πρέπει να επιλεγούν 6 αριθμοί μεταξύ 1 και 49, και το 7/39 της ONCE. Στο Ηνωμένο Βασίλειο υπάρχει επίσης το 6/49.

Στην Ελβετία, το 6/45, στη Νέα Ζηλανδία, το 6/40 και στην Σουηδία υπάρχουν δύο δυνατότητες, 7/35 ή 6/48.

Σε όλες τις περιπτώσεις, με μικρές παραλλαγές υπάρχει βραβείο αν βρεθούν όλοι ή διάφοροι από τους αριθμούς που κληρώνονται. Στην περίπτωση του Ισπανικού Λόττο πρέπει να βρεθούν 6, 5 + ένας άλλος αριθμός που κληρώνεται ξεχωριστά, συμπληρωματικός, 5, 4, 3. Σύμφωνα με το Ισπανικό Λόττο το πρώτο βραβείο είναι 6 αριθμοί που κληρώνονται μεταξύ 1 και 49.

Ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να βγουν 6 αριθμοί από τους 49 δυνατούς, εφόσον η σειρά με την οποία επιλέγονται δεν έχει σημασία, είναι συλλογισμένοι ως εξής:

$$\binom{49}{6} = C_{49}^6 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6} = 13.983.816$$

Σχεδόν 14 εκατομμύρια είναι οι συνδυασμοί που υπάρχουν. Έτσι η πιθανότητα να πετύχουμε τους 6 κάνοντας ένα μόνο στοίχημα είναι ένας πραγματικά μικρός αριθμός.

$$p = \frac{1}{13.983.816} = 0,000007\%.$$

Σχετικά με τις πιθανότητες των άλλων βραβείων, σε κάθε περίπτωση θα είναι:

$$p = \frac{\text{πιθανές περιπτώσεις}}{13.983.816}$$

γι' αυτό θα πρέπει να υπολογιστούν οι δυνατές περιπτώσεις για κάθε αριθμό επιτυχιών. Μπορεί να μη βρεθεί κανένας από τους έξι αριθμούς και με κάθε «αποτυχία» μπορεί να ληφθεί οποιοσδήποτε από τους άλλους αριθμούς $49 - 6 = 43$, επομένως υπάρχουν $6 \cdot 43 = 258$ δυνατότητες να υπάρξουν 5 επιτυχίες, αλλά ε'δω περιλαμβάνονται οι περιπτώσεις στις οποίες συμπίπτει ο συμπληρωματικός αριθμός και εκείνες που δεν συμπίπτει. Με παρόμοιους συλλογισμούς, οι ευνοϊκές περιπτώσεις για 4 επιτυχίες είναι $C_6^3 \cdot C_{43}^3 = 246.820$. Έτσι οι πιθανότητες επιτυχίας είναι:

$$5 + C: p = 6 / 13.983.816 = 1 / 2.330.636$$

$$5 \quad p = 252 / 13.983.816 = 1 / 1.032$$

$$4 \quad p = 13.545 / 13.983.816 = 1 / 57$$

$$3 \quad p = 246.820 / 13.983.816 = 1 / 57$$

Αθροίζοντας όλα αυτά, παίρνουμε ότι η πιθανότητα βραβείου είναι 1,86%. Είναι όλοι πάρα πολύ μικροί αριθμοί. Αν είμαστε σταθεροί είναι εύκολο, αφού το έτος έχει 52 εβδομάδες, περίπου μια φορά ανά έτος να έχουμε ένα δελτίο με τρεις επιτυχίες. Οι υπόλοιπες πιθανότητες είναι τόσο μικρές που δεν μπορούμε να αναμένουμε βραβεία με μεγαλύτερη συχνότητα, ακόμα και για τις 4 επιτυχίες θα πρέπει να περιμένουμε μερικά χρόνια.

Κεφάλαιο 5 ΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΣΤΗΝ ΚΟΙΝΩΝΙΑ

5.1 ΠΙΝΑΚΕΣ ΖΩΗΣ

Οι πίνακες ζωής ή θνησιμότητας είναι ένα στατιστικό εργαλείο που επιτρέπει την μελέτη της θνησιμότητας σε διάφορους πληθυσμούς σε μια χρονική περίοδο. Μία από τις πιο κοινές εφαρμογές τους είναι οι ασφάλειες.

Οι πρώτοι πίνακες ζωής ή θνησιμότητας οφείλονται στον Τζον Γκράουντ ο οποίος, μαζί με τον William Petty, επεξεργάστηκε στο δεύτερο μισό του 17^{ου} αιώνα τις πρώτες στατιστικές για τον πληθυσμό, γεγονός που τους καθιστά προδρόμους της σύγχρονης δημογραφίας.

5.2 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΙΑΤΡΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ

Με τα αποτελέσματα μερικών κλινικών αναλύσεων, ο γιατρός συμβουλευεται μια σειρά στοιχείων τα οποία, σύμφωνα με διαδικασίες πιθανοτήτων και στατιστικής, του παρέχονται με κατανοητό τρόπο ώστε να λάβει μέτρα που θεωρεί κατάλληλα. Η τελική απόφαση είναι για τον γιατρό. Τα στοιχεία, η επεξεργασία τους και ο τρόπος με τον οποίο του παρέχονται είναι ένα μεγάλο εργαλείο υποστήριξης για την απόφασή του. Όμως μερικές πληροφορίες μπορεί να έχουν αποφασιστική σημασία ώστε ο γιατρός να πάρει αποφάσεις ή να μας επιβάλει πρότυπα συμπεριφοράς.

Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι ορισμένες «συστάσεις» μαζί με τις αγωγές, δείχνουν ότι κάτι είναι «εκτός των κανονικών ορίων». Στην ιατρική ως κανονικά όρια ενός συγκεκριμένου χαρακτηριστικού εννοούνται αυτά μεταξύ των οποίων βρίσκεται η πλειοψηφία του πληθυσμού στον οποίο ανήκομε και καθορίζονται με βάση το **θεώρημα κεντρικού ορίου** και την **κανονική κατανομή**. Η διαδικασία για να γίνει αυτό είναι να προσδιοριστεί μεταξύ ποιων τιμών θα βρίσκεται η μέση τιμή με ορισμένη πιθανότητα, το πρόβλημα που ήδη μελέτησε ο Laplace.

Οι τιμές μεταξύ των οποίων θα πρέπει να είναι ο μέσος όρος είναι αυτό που στη σημερινή στατιστική ονομάζεται **διάστημα εμπιστοσύνης**. Μια παρόμοια περίπτωση είναι όταν ένας παιδίατρος λέει ότι το εκατοστημόριο στο οποίο βρίσκεται ένα παιδί από την άποψη του βάρους και του ύψους είναι 85% ή 95%. Τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τις διαφορετικές ηλικίες που χρησιμοποιούν οι παιδίατροι αναφέρονται στα βάρη και στα ύψη μεταξύ των οποίων είναι ο πληθυσμός των παιδιών που αποτελούν τον πληθυσμό αναφοράς. Ότι ένα παιδί είναι στο εκατοστημόριο 80 του ύψους και 75 του βάρους σημαίνει ότι το 80% των παιδιών της ίδιας ηλικίας θα είναι, το πολύ, του ίδιου ύψους με αυτό και το ίδιο για το εκατοστημόριο 75% όσον αφορά το βάρος. Είναι σημαντικό να έχουμε έναν καλό πληθυσμό αναφοράς: αν αυτός που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό της κανονικότητας του ύψους και του βάρους ήταν πολύ διαφορετικός από αυτόν που αντιστοιχεί, τα αποτελέσματα δεν θα είχαν καμιά εγκυρότητα.

5.3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ DNA

Από τα μέσα της δεκαετίας του 1980, η χρήση των προφίλ δεσοξυριβονουκλεϊκού οξέος (DNA) χρησιμοποιείται σε δικαστικές υποθέσεις για την απόδειξη της πατρότητας, της οικογενειακής σχέσης μεταξύ διαφορετικών ατόμων ή της αθωότητας ή ενοχής ποινικών υπόπτων.

Η ιδέα είναι η σύγκριση του DNA των παιδιών με αυτό των θεωρούμενων πατέρων στην περίπτωση των τεστ πατρότητας, ή του DNA που προέρχεται από δείγματα που συλλέχτηκαν στη σκηνή ενός εγκλήματος με αυτό που λαμβάνεται από τους υπόπτους. Αυτά τα τεστ έχουν βελτιωθεί και σήμερα αποτελούν μια βασική απόδειξη σε πολλές νομικές διαδικασίες, λόγω της μεγάλης ποικιλίας μεταξύ των προφίλ DNA των διαφορετικών ατόμων, ακόμα και αν ανήκουν στην ίδια εθνική ομάδα.

Διάφορα γεγονότα, όπως η φήμη ορισμένων νομικών υποθέσεων στις οποίες έχει χρησιμοποιηθεί αυτός ο τύπος τεστ ή οι τηλεοπτικές σειρές όπως το CSI, έχουν κάνει γνωστές αυτές τις τεχνικές. Αυτό που είναι λιγότερο γνωστό είναι ότι πίσω από την ανάπτυξη αυτών των προφίλ DNA βρίσκονται ισχυρά εργαλεία πιθανοτήτων, τα οποία έχουν οδηγήσει στη δικαστική στατιστική.

Μία από τις πρώτες δίκες στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν τεστ DNA έγινε στην Αγγλία το 1987, όπου ένας νεαρός δεκαεπτά ετών κατηγορήθηκε για τον βιασμό

και τη δολοφονία δύο κοριτσιών, ενός το 1983 και του άλλου το 1987. Ορισμένες περιστασιακές ενδείξεις και το ιστορικό του νεαρού έμοιαζαν να τον δείχνουν ένοχο χωρίς πολλές αμφιβολίες.

Ο νεαρός ζήτησε η ανάλυση του αίματος και το DNA να συγκριθούν με τα δείγματα σπέρματος που βρέθηκαν στα δύο κορίτσια. Το συμπέρασμα ήταν πειστικό: τα δύο κορίτσια είχαν βιαστεί από το ίδιο άτομο, αλλά δεν ήταν ο κατηγορούμενος. Στις νομικές υποθέσεις στις οποίες επιχειρείται να προσδιοριστεί ο δράστης ή οι δράστες ενός εγκλήματος μετριέται κάποιο χαρακτηριστικό που επιτρέπει τον καθορισμό της πιθανής σχέσης του κατηγορούμενου με το έγκλημα. Η ιδέα είναι απλή, αλλά το πρόβλημα είναι η πρακτική εφαρμογή της.

Το θέμα είναι να οριστεί κάποιο χαρακτηριστικό που επιτρέπει να αναγνωριστεί με ακρίβεια ένα άτομο. Δεν θα αναλυθεί ο τρόπος ανάλυσης DNA, αλλά θα περιγράψουμε πως ο υπολογισμός των πιθανοτήτων συμβάλλει στη λήψη αποφάσεων σχετικά με το θεωρούμενο έγκλημα. Για να το απεικονίσουμε, θα θεωρήσουμε μια απλοποιημένη περίπτωση, λίγο ρεαλιστική αλλά χρήσιμη για τους σκοπούς μας.

Έχει διαπραχτεί ένα έγκλημα και η αστυνομία συλλέγει δείγματα DNA στο χώρο που έγινε και έχει συλλάβει έναν ύποπτο, από τον οποίο έχει πάρει το DNA του. Αν υποθέσουμε ότι κάθε δείγμα DNA παράγει ένα απλό δεδομένο, ανεξάρτητα από το αν στη δίκη εμφανίζονται και άλλες δυνατότητες, θα θεωρήσουμε ότι υπάρχουν μόνο δύο επιλογές: ο ύποπτος είναι ένοχος (C) ή αθώος (I), και η απόφαση θα βασιστεί στα τεστ DNA. Ο σκοπός επομένως είναι η διάκριση μεταξύ των δύο ακόλουθων υποθέσεων:

- 1) Τα δείγματα προέρχονται από το ίδιο άτομο (C).
- 2) Τα δείγματα προέρχονται από διαφορετικά άτομα (I).

Συμβολίζουμε με Ev (ένδειξη) τη σύμπτωση των δειγμάτων που προέρχονται από το DNA που συλλέχτηκαν στον τόπο του εγκλήματος και του υπόπτου και με S τις άλλες περιπτώσεις. Εδώ θα πρέπει να προσφύγουμε στο θεώρημα του Bayes, που αναφέρει ότι για δύο γεγονότα A και B και συμβολίζοντας με $\text{prob}(A|B)$ την δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος A με δεδομένο το γεγονός B, υπό την προϋπόθεση ότι $\text{prob}(B) \neq 0$, επαληθεύεται ότι:

$$\text{Prob}(A|B) = (\text{prob}(A|B) \cdot \text{prob}(A)) / \text{prob}(B).$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και το θεώρημα του Bayes, η αναλογία της ενοχής προς την αθωότητα δίνεται από:

$$\frac{\text{prob}(C|Ev,C,S)}{\text{prob}(I|Ev,S)} = \frac{\text{prob}(Ev|C,S)}{\text{prob}(Ev|I,S)} \cdot \frac{\text{prob}(C|S)}{\text{prob}(I|S)}$$

Από αυτή την έκφραση φαίνεται ότι οι δύο βασικές πιθανότητες που πρέπει να καθοριστούν είναι η πιθανότητα της ένδειξης Ev εάν ο ύποπτος είναι ένοχος και εάν είναι αθώος. Δεν αρκεί να εξεταστεί μόνο η πιθανότητα της ένδειξης όταν ο ύποπτος είναι αθώος και να βγει το συμπέρασμα ότι μια μικρή τιμή αυτής της πιθανότητας είναι ισχυρή απόδειξη υπέρ της ενοχής.

Η πιθανότητα της ένδειξης εάν ο ύποπτος είναι ένοχος θα πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη. Σημειώστε ότι αυτές οι δύο πιθανότητες δεν είναι συμπληρωματικές και θα μπορούσαν να είναι και οι δύο πολύ μικρές. Σε τέτοιες λεπτές διακρίσεις παίζουν δικηγόροι και εισαγγελείς και μια παρερμηνεία αυτών των λεπτών εννοιών των πιθανοτήτων μπορεί να σημαίνει την καταδίκη ενός αθώου ή την αθώωση ενός ενόχου.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΚΑΤΑΚΤΗΘΗΚΕ ΤΕΛΙΚΑ ΤΟ ΤΥΧΑΙΟ;

Φτάσαμε εδώ στο τέλος του χρονικού μας για την κατάκτηση του τυχαίου, της μετάβασης από την υπερφυσική εξήγηση των πραγμάτων που δεν είναι κατανοητά στην εξημέρωση των πολύπλοκων γεγονότων με τη μετατροπή τους σε παραμέτρους για να τα έχουμε υπό έλεγχο, για να κατανοήσουμε τις βασικές κατευθυντήριες γραμμές. Όπως λέει ο Ινδός στατιστικολόγος **C.R.Rao**, «το τυχαίο ασχολείται με τη τάξη μέσα στην αταξία, ενώ το χάος ασχολείται με την αταξία μέσα στην τάξη».

Ήταν μια μακριά και πολύπλοκη διαδρομή για την ανθρωπότητα, που δεν έχει τελειώσει ακόμη. Μάλλον ισχύει ότι σχεδόν τίποτα από όσα σχετίζονται με την πιθανότητα δεν είναι διαισθητικό. Αντιμετωπίζουμε μια διαφορετική λογική από αυτή του «ναι ή όχι», του «όλα ή τίποτα», την οποία λόγω γενετικού κώδικα ή πολιτιστικού περιβάλλοντος κατανοούμε καλύτερα. Δεχόμαστε και κατανοούμε χωρίς προβλήματα πως όταν πατάμε ένα διακόπτη ανάβει το φως και όταν τον πατήσουμε ξανά σβήνει, όμως δεν είναι τόσο κατανοητό ότι πατώντας τον μερικές φορές το φως ανάβει και άλλες όχι, και ότι θα πρέπει να αξιολογήσουμε αυτήν την αβεβαιότητα.

Επειδή το τυχαίο συνίσταται στην αβεβαιότητα, στο να μη γνωρίζουμε τι θα συμβεί, σε αυτή την ανασφάλεια που τόσο λίγο εκτιμάται στις «αναπτυγμένες» κοινωνίες μας, στις οποίες μας αρέσει να έχουμε τα πάντα υπό έλεγχο. Τόσο που ενώ βρισκόμαστε σε μια εποχή της ιστορίας στην οποία ελέγχουμε τις περισσότερες κοινωνικές μεταβλητές, μας ενοχλούν περισσότερο οι αβεβαιότητες (κλίμα, μεταδοτικές ασθένειες, ατυχήματα...), οι οποίες σε κάποιο βαθμό είναι χαρακτηριστικά της ζωής.

Είναι αλήθεια ότι θα ήταν δύσκολο να ζήσουμε αν συνέβαιναν υπερβολικά πολλά φαινόμενα με εντελώς απρόβλεπτο τρόπο, όμως, στο άλλο άκρο, θα υπήρχε μικρό ενδιαφέρον εάν όλα ήταν ντετερμινιστικά και απολύτως προβλέψιμα. Ευτυχώς, η εξέλιξη της ζωής, σε μια οργανωμένη κοινωνία αποτελεί ένα μοναδικό μίγμα των δύο, γεγονός που σημαίνει ότι, όπως συνήθιζε το λέει ένας κορυφαίος στατιστικολόγος, «η ζωή είναι περίπλοκη, αλλά όχι χωρίς ενδιαφέρον».