

**Γραφική παράσταση καμπύλης και εμβαδόν χωρίου,
σε πολικές συντεταγμένες**

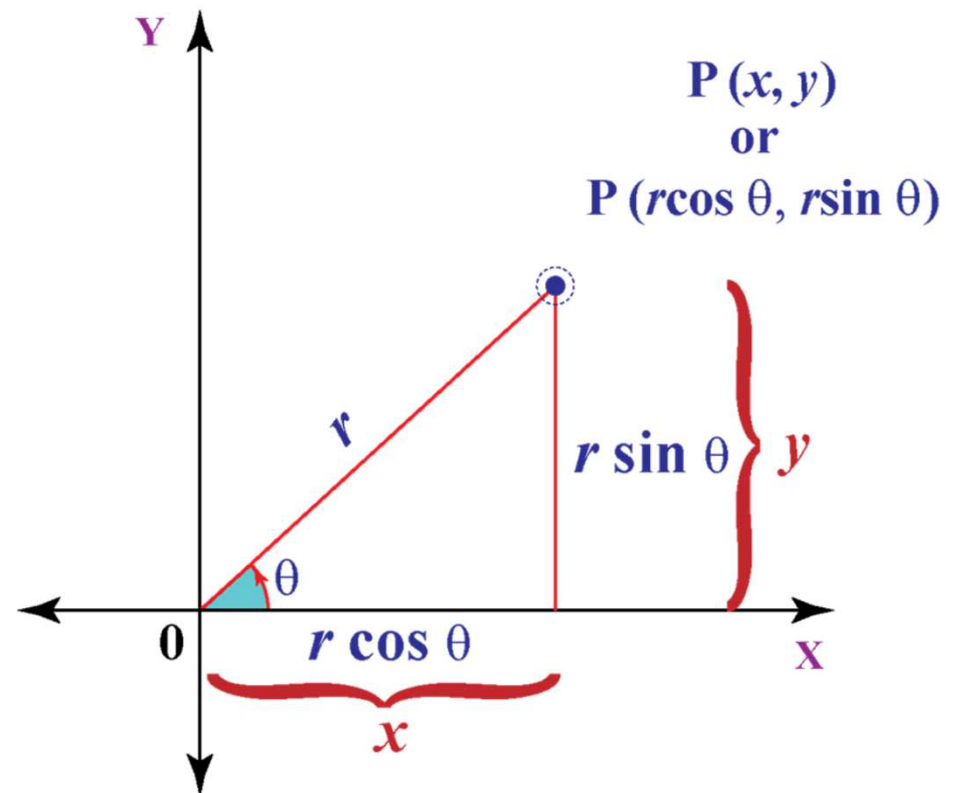
Κωνσταντής Στυλιανός (AM 9062)

Μήτσης Παύλος (AM 9074)

Ορισμός των πολικών συντεταγμένων

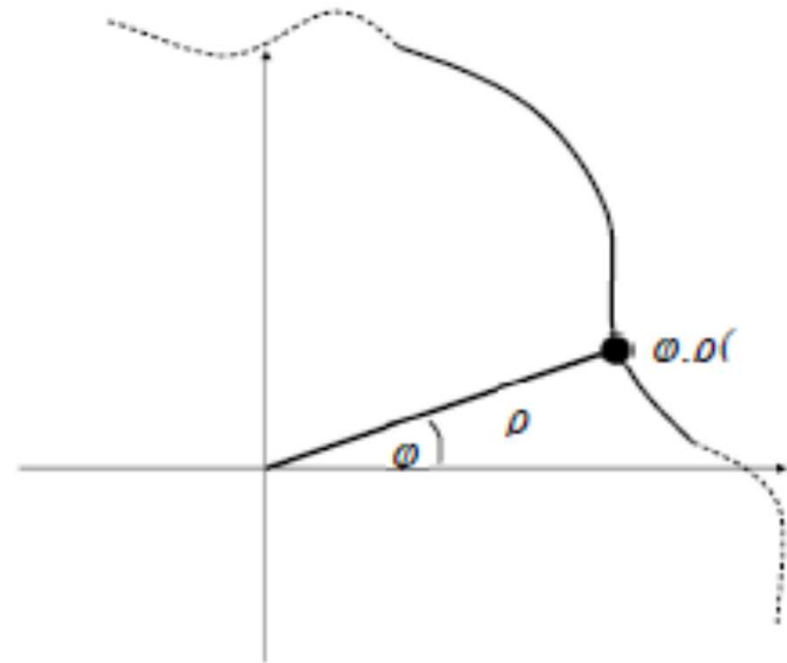
Οι πολικές συντεταγμένες είναι ένα σύστημα αναφοράς για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο επίπεδο, χρησιμοποιώντας δύο τιμές:

- τη γωνία και
- την απόσταση από μια σταθερή αρχή αναφοράς



Εξίσωση της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες

- Μια καμπύλη μπορεί να παρασταθεί από μια εξίσωση της μορφής $r = r(\varphi)$.
- Για κάθε τιμή του φ υπάρχει:
 - μια αντίστοιχη τιμή $r(\varphi)$ και
 - ένα αντίστοιχο σημείο $(\varphi, r(\varphi))$



Σχέση μεταξύ καρτεσιανών & πολικών συντεταγμένων

Η σχέση που υπάρχει μεταξύ των καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) και των πολικών συντεταγμένων (φ, r) είναι η εξής: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Πλεονεκτήματα των πολικών συντεταγμένων

Οι πολικές συντεταγμένες:

- είναι πιο κατάλληλες για την περιγραφή καταστάσεων όπου υπάρχει κυκλική συμμετρία, π.χ., κύκλοι, σφαίρες ή κυκλικές τροχιές.
- επιτρέπουν ευκολότερους υπολογισμούς σε προβλήματα με συμμετρία γύρω από έναν άξονα, όπως η κίνηση σε κυκλικές τροχιές ή η μελέτη κυκλικών αντικειμένων.

Εφαρμογές των πολικών συντεταγμένων 1/4

Μαθηματικά και γεωμετρία

Περιγράφουν καμπύλες και γεωμετρικά σχήματα που δεν περιγράφονται εύκολα σε καρτεσιανό σύστημα

(π.χ. κύκλοι, σπειροειδείς καμπύλες, ακτινικές καμπύλες)

Φυσική και μηχανική

- Περιγράφουν τη θέση ενός αντικειμένου σε κυκλικές κινήσεις, όπως η κίνηση των πλανητών ή των δορυφόρων γύρω από έναν πλανήτη
- Όταν μελετάμε τις δυνάμεις σε κυλινδρικές ή σε σφαιρικές γεωμετρίες

Εφαρμογές των πολικών συντεταγμένων 2/4

Ηλεκτρονικά και σηματοδοσία

- Περιγραφή των φάσεων και του πλάτους των κυμάτων
- Στην τεχνολογία των ραντάρ και των τηλεπικοινωνιών, για τον προσδιορισμό της θέσης και της γωνίας των εφαπτομένων σημάτων

Υπολογιστική γεωμετρία και εικόνα

- Ανάλυση εικόνας σε στρογγυλές περιοχές (αποθήκευση στρογγυλών ή κυκλικών σχημάτων σε εικόνες)
- Στα συστήματα πλοήγησης ή στη χαρτογραφία, τα πολικά συστήματα χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης και της κατεύθυνσης, με βάση το γεωγραφικό σύστημα

Εφαρμογές των πολικών συντεταγμένων 3/4

Ρομποτική

- Καθορισμός της κίνησης των ρομπότ που ακολουθούν κυκλικές ή κυλινδρικές διαδρομές
- Ανάλυση της θέσης ενός ρομπότ σε κυκλικό ή κυλινδρικό περιβάλλον

Αστρονομία

Διευκολύνει την περιγραφή της θέσης των ουράνιων σωμάτων σε κυκλικές ή ελλειπτικές τροχιές, όπως οι τροχιές των πλανητών γύρω από τον ήλιο

Εφαρμογές των πολικών συντεταγμένων 4/4

Συγκοινωνία και αρχιτεκτονική

Ανάλυση και τη σχεδίαση κυκλικών ή σφαιρικών χώρων και κτιρίων

Κεντρικά γραφεία της Aldar στο Αμπού Ντάμπι



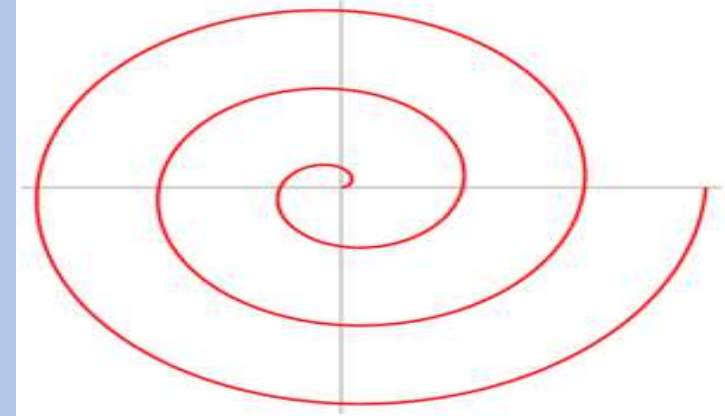
Πολικές συντεταγμένες και καμπύλες γραμμές

Κύκλος

- Στο καρτεσιανό σύστημα, ένας κύκλος με κέντρο την αρχή O και ακτίνα r , έχει εξίσωση $x^2+y^2=r_0^2$
- Στο πολικό σύστημα, ο ίδιος κύκλος έχει εξίσωση $r=r_0$ και $0<\varphi<2\pi$

Σπείρα του Αρχιμήδη

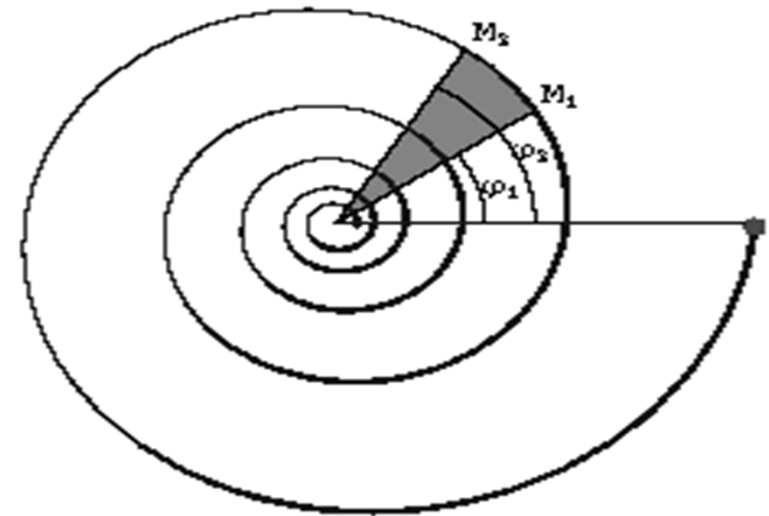
- Εξίσωση $r=a+b\varphi$ με a, b σταθερές και φ η γωνία. Όσο αυξάνεται η φ , αυξάνεται η απόσταση r από την αρχή, δημιουργώντας τη σπείρα



Λογαριθμική σπείρα (ή καμπύλη)

- Είναι μια σπείρα στην οποία η απόσταση r αυξάνεται εκθετικά με τη γωνία φ
- Έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα ότι το ποσοστό αύξησης της απόστασης r είναι σταθερό, σε όλη τη διάρκεια της σπείρας
- Εξίσωση $r=a \cdot e^{b\varphi}$ με a , b σταθερές

Logarithmic spiral: $a=1.1$



Έλλειψη (oval)

- Εξίσωση

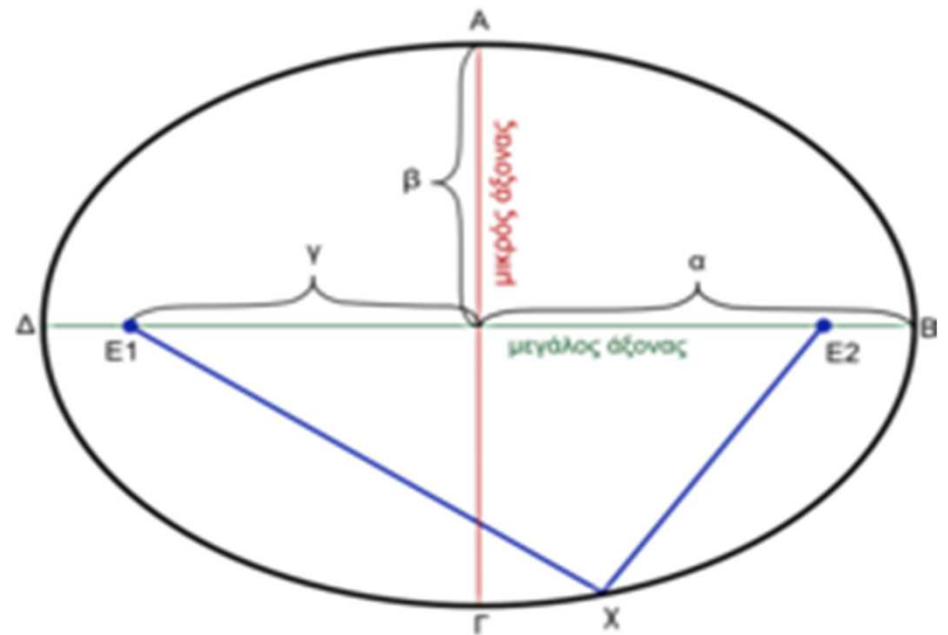
$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\theta)}$$

- ε : η εκκεντρότητα της έλλειψης παίρνει τιμές στο $[0,1]$

E_1, E_2 : εστίες της έλλειψης

Η έλλειψη περιγράφει μια τροχιά με $XE_1 + XE_2 = \text{σταθερό}$

Η καμπύλη έχει συμμετρία γύρω από τους άξονες

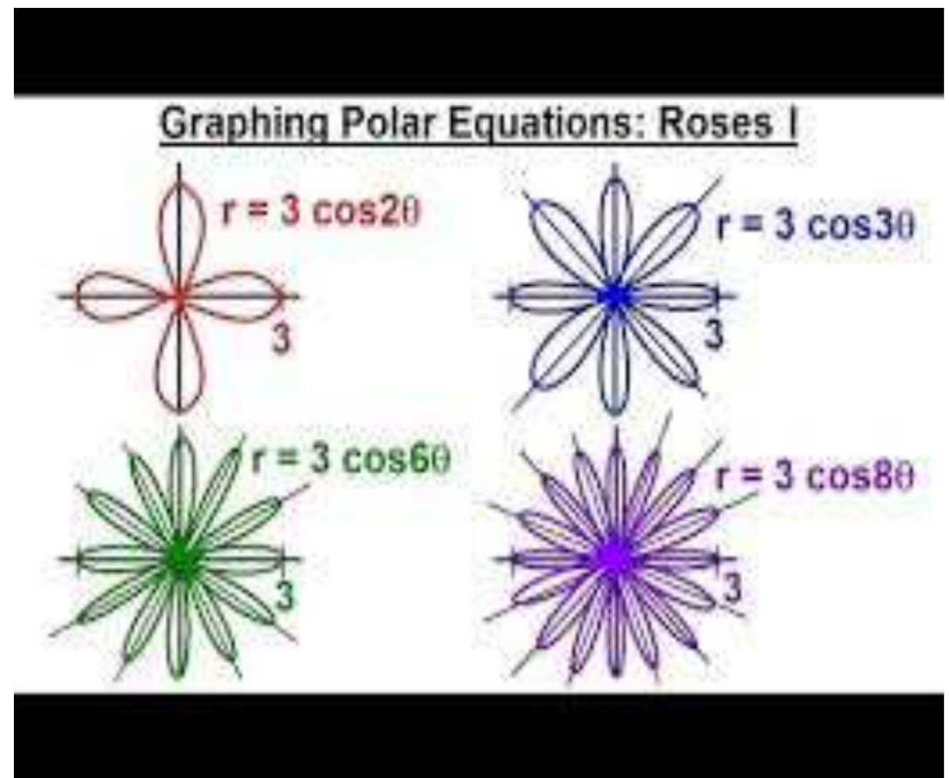


Ροζέτα ή καμπύλη ροδόσταγμα (Rose curve)

Είναι μια καμπύλη που σχηματίζει μοτίβα, που μοιάζουν με πέταλα λουλουδιών και περιγράφεται με την εξίσωση $r = a \cdot \cos(k\theta)$

a : είναι μία σταθερά

k : ακέραιος αριθμός, καθορίζει το πλήθος των πετάλων της παλέτας

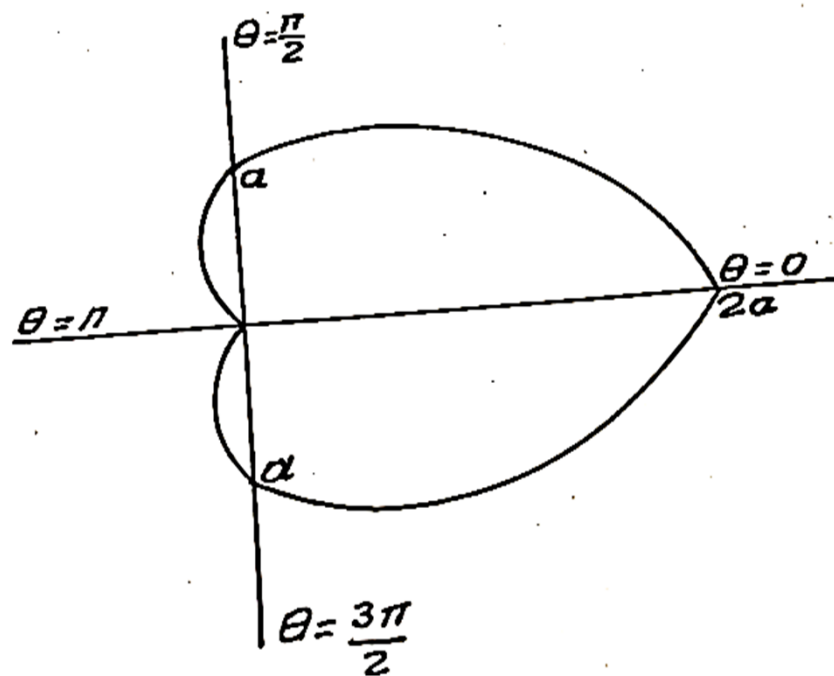


Γραφική παράσταση καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες 1/4

- Καμπύλη $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$

Πίνακας των μεταβολών

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	$2a$	a	0	a	$2a$

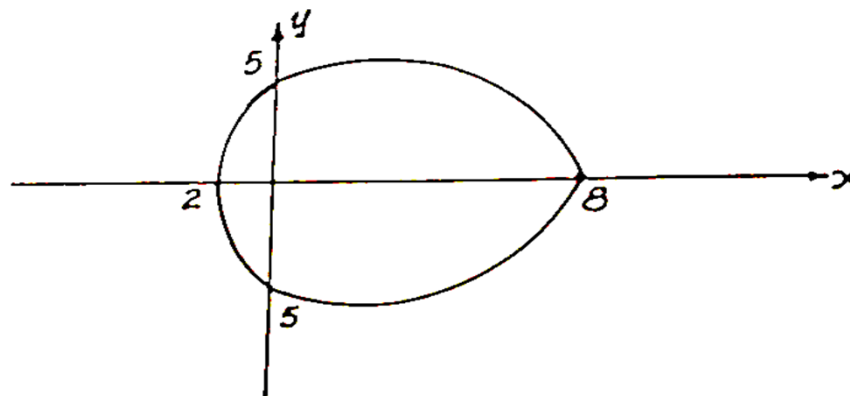


Γραφική παράσταση καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες 2/4

- Καμπύλη $\rho=5+3\cdot\cos\theta$, $0<\theta<2\pi$

Πίνακας των μεταβολών

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	a	2a	a	0	a

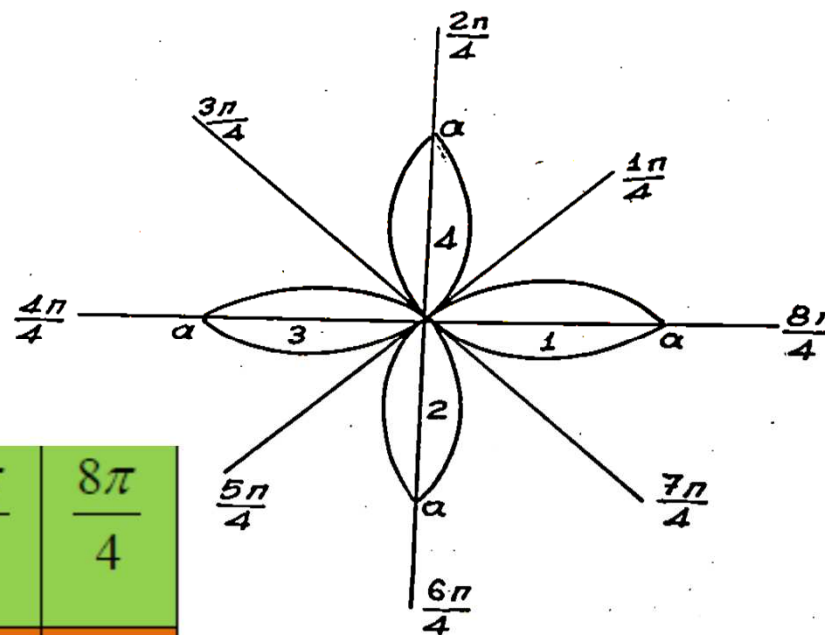


Γραφική παράσταση καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες 3/4

- Καμπύλη $\rho = a \cdot \cos(2\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$

Πίνακας των μεταβολών

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{4}$
ρ	a	0	$-a$	0	a	0	$-a$	0	a

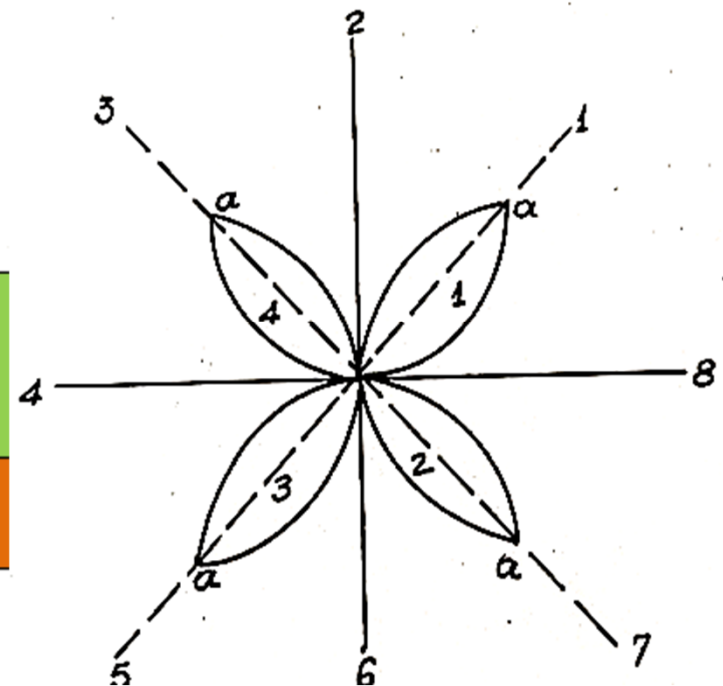


Γραφική παράσταση καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες 4/4

- Καμπύλη $\rho = a \cdot \sin(2\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$

Πίνακας των μεταβολών

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{4}$
ρ	0	a	0	$-a$	0	a	0	$-a$	0



Εμβαδόν χωρίου σε πολικές συντεταγμένες

Το εμβαδόν ενός χωρίου που ορίζεται από καμπύλη, της οποίας η εξίσωση δίνεται σε πολικές συντεταγμένες, λαμβάνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

Καμπύλες της μορφής:

1. $\rho = a \cdot \sin(k\theta)$,
2. $\rho = a \cdot \cos(k\theta)$,
3. $\rho = a + b \cdot \cos(k\theta)$
4. $\rho = a - b \cdot \cos(k\theta)$
5. $\rho = a + b \cdot \sin(k\theta)$
6. $\rho = a - b \cdot \sin(k\theta)$

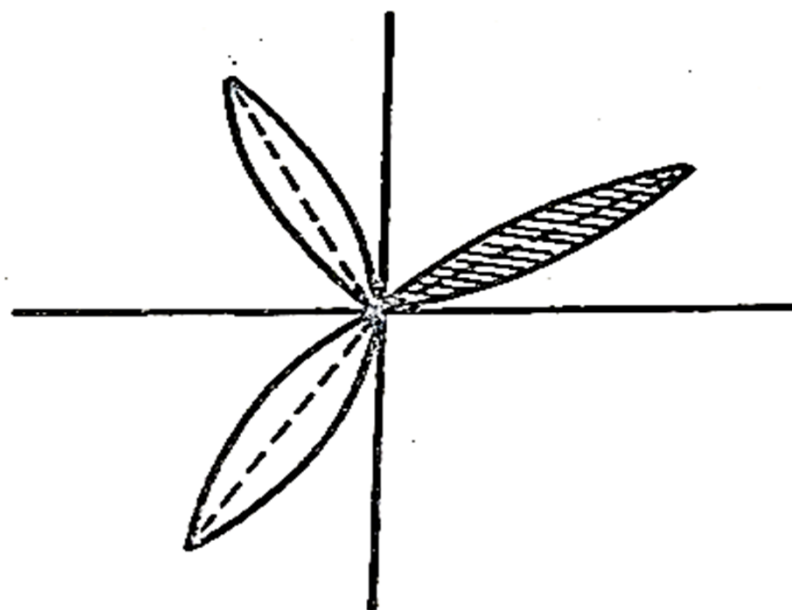
Καμπύλη της μορφής $\rho = a \cdot \sin(k\theta)$, k περιττός

- Εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $\rho = a \cdot \sin(3\theta)$ από $\theta = 0$ έως $\theta = \pi/3$

- Εμβαδόν του ενός πέταλου

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \eta \mu^2(3\theta) d\theta$$

- Ολικό εμβαδόν = $3E$

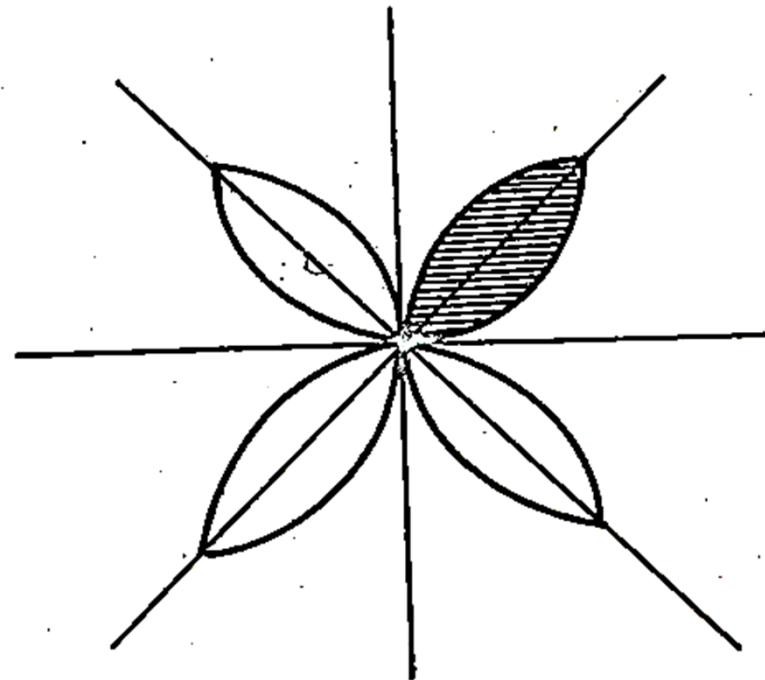


Καμπύλη της μορφής $\rho=a\cdot\sin(k\theta)$, k άρτιος

- Εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $\rho=a\cdot\sin(2\theta)$ από $\theta=0$ έως $\theta=\pi/2$
- Εμβαδόν του ενός πέταλου

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2(2\theta) d\theta$$

- Ολικό εμβαδόν=4E

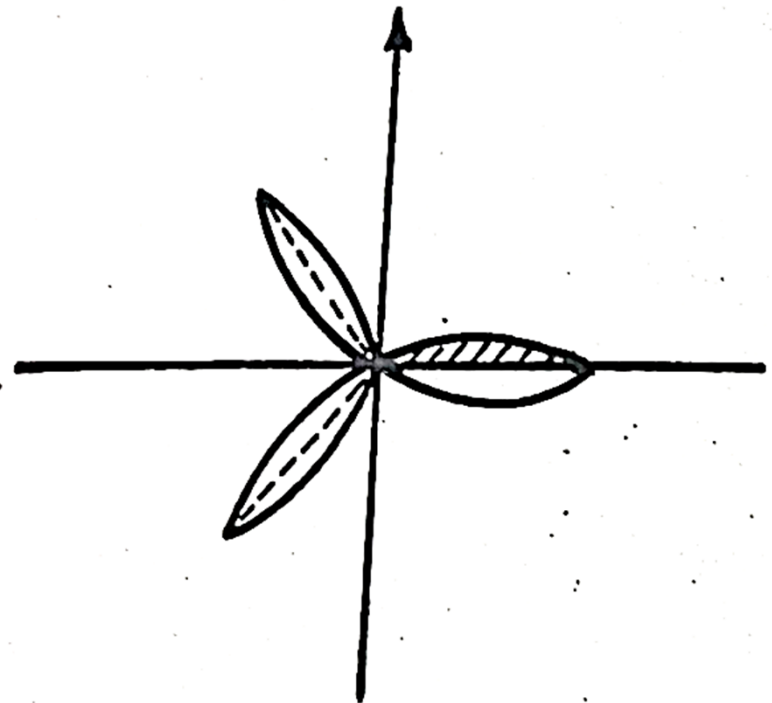


Καμπύλη της μορφής $\rho=a\cdot\cos(k\theta)$, k περιττός

- Εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $\rho=a\cdot\cos(3\theta)$ από $\theta=0$ έως $\theta=\pi/6$
- Εμβαδόν του μισού πέταλου

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \sin^2(3\theta) d\theta$$

- Ολικό εμβαδόν=6E



Καμπύλη της μορφής $\rho=a\cdot\cos(k\theta)$, k άρτιος

- Εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $\rho=a\cdot\cos(2\theta)$ από $\theta=0$ έως $\theta=\pi/4$
- Εμβαδόν του μισού πέταλου

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos^2(2\theta) d\theta$$

- Ολικό εμβαδόν=4E

