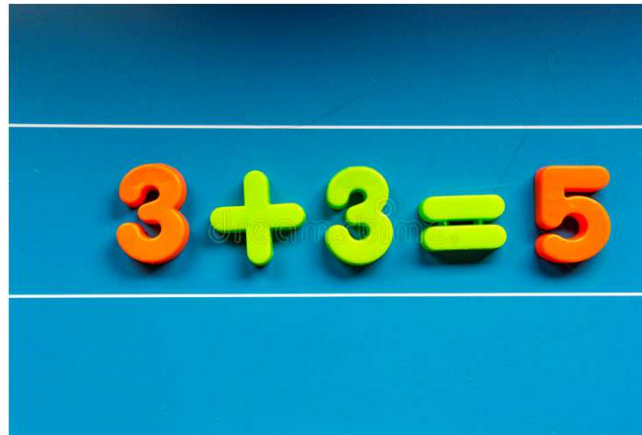


Λογισμός σφαλμάτων, είδη & μέτρηση τους



Άμπντι Ιωσήφ (ΑΜ 8800)
Αμπντελναμπί Μοχάμεντ (ΑΜ 8852)

Τα συστηματικά σφάλματα:

- οφείλονται κυρίως στην ακρίβεια των οργάνων που χρησιμοποιούνται & δεν είναι πάντα σταθερά. (π.χ. ο μηχανισμός ρολογιού που «τρέχει» πιο γρήγορα από το κανονικό & προκαλεί σφάλμα, συνεχώς αυξανόμενο με την πάροδο του χρόνου).
- οφείλονται σε μόνιμο αίτιο & επηρεάζουν τη μέτρηση πάντα κατά την ίδια φορά, δίνοντας π.χ. τιμή πάντα μικρότερη από την πραγματική, λόγω ανακριβούς κλίμακας ή μετατόπισης του μηδέν του οργάνου μέτρησης, ή ανακριβών σταθμών ή μη σωστά βαθμολογημένου θερμόμετρου, κ.ο.κ.
- παρουσιάζονται και στο στάδιο του υπολογισμού, είτε λόγω ανεπαρκούς θεωρίας ή προσεγγιστικού τύπου, είτε λόγω ανακριβούς σταθεράς π.χ. $g = 10$ αντί του $g = 9,81$.

Βασικοί ορισμοί

- Τα **τυχαία** σφάλματα δεν είναι δυνατό να τα αποφύγω αλλά μόνο να τα περιορίσω, κάνοντας πολλές μετρήσεις και εξάγοντας το μέσο όρο αυτών.
- Ο μέσος όρος διαφέρει από την πραγματική τιμή X του μετρούμενου μεγέθους, κατά μία ποσότητα που ονομάζεται **απόλυτο σφάλμα σ** .
- Προκειμένου να ελέγχω την ακρίβεια των μετρήσεων, χρησιμοποιώ το λόγο $\Sigma = \sigma/X$ που ονομάζεται **σχετικό σφάλμα**

Σφάλματα μέτρησης (ή παρατήρησης)

Διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες οι οποίες είναι τα:

- χονδροειδή σφάλματα
- συστηματικά σφάλματα
- τυχαία σφάλματα

Οφείλονται σε διάφορους λόγους, με βασικότερους:

- κακή οργάνωση ή κακή εκτέλεση των παρατηρήσεων,
- ατέλειες των οργάνων που χρησιμοποιούνται
- δυσμενής επίδραση των εξωτερικών συνθηκών, π.χ. των μετεωρολογικών συνθηκών κλπ.

Τα υπολογιστικά σφάλματα διακρίνονται σε

- **Σφάλματα αποκοπής (ή διακριτοποίησης).** Είναι η διαφορά του αληθούς αποτελέσματος (για πραγματικά δεδομένα εισόδου) από το αποτέλεσμα που θα παραγόταν από ένα δοσμένο αλγόριθμο, που χρησιμοποιεί ακριβή αριθμητική.
- **Σφάλματα στρογγυλοποίησης.** Είναι η διαφορά του αποτελέσματος που παράγεται από ένα δοσμένο αλγόριθμο που χρησιμοποιεί ακριβή αριθμητική & του αποτελέσματος που παράγεται από τον ίδιο αλγόριθμο, όταν χρησιμοποιεί πεπερασμένης ακρίβειας, στρογγυλευμένη αριθμητική.

Σημαντικά ψηφία

Επειδή οι μετρήσεις ποτέ δε δίνουν την πραγματική τιμή του μετρούμενου φυσικού μεγέθους, αλλά μία κατά προσέγγιση τιμή, πρέπει να φαίνεται ο βαθμός προσέγγισης.

Στις τιμές που προκύπτουν από μετρήσεις, δίνονται μόνο τα σημαντικά ψηφία, δηλαδή μόνο τόσα ώστε το τελευταίο ψηφίο να διαφέρει από την πραγματική τιμή περίπου κατά μονάδα.

Ο νόμος των σφαλμάτων

Τον 18^ο αιώνα, οι επιστήμονες που εργάζονταν στη φυσική, τα μαθηματικά & την ουράνια μηχανική βρίσκονταν συχνά αντιμέτωποι με το πρόβλημα των αποκλίσεων στις παρατηρήσεις.

Η κανονική κατανομή, εμφανίστηκε δυναμικά όταν ο **Gauss** την θεώρησε ως την κατάλληλη κατανομή για τα σφάλματα, σε σχέση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, που αναπτύχθηκε ως μέθοδος για την προσαρμογή μετρήσεων στην αστρονομία.

Η κανονική κατανομή, αναγνωρίστηκε τελικά ως σημαντική κατανομή στη μελέτη σφαλμάτων & η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων υιοθετήθηκε στην αστρονομία & τη γεωδαισία. Επιπλέον από τις αστρονομικές μετρήσεις εξακριβώθηκε η συμφωνία μεταξύ των παρατάσεων & του νόμου της κανονικής κατανομής.

Η υπόθεση των στοιχειωδών σφαλμάτων

Ο **Bessel** ο οποίος χρησιμοποίησε τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων σε πολλές εφαρμογές & παρείχε εμπειρικά στοιχεία για την υποστήριξη του νόμου της κανονικής κατανομής, ως νομού των σφαλμάτων, όπως είχε προτείνει ο Gauss.

Σύμφωνα με τον **Bessel**:

«Ένα σφάλμα παρατήρησης είναι το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού στοιχειωδών λαθών, που οφείλονται σε διαφορετικές & ανεξάρτητες μεταξύ τους αιτίες.

Κανένα στοιχειώδες σφάλμα δεν υπερβαίνει σημαντικά τα άλλα & τα θετικά & αρνητικά σφάλματα του ίδιου μεγέθους εμφανίζονται με την ίδια συχνότητα.

Επιπλέον, οι νόμοι που διέπουν τα στοιχειώδη σφάλματα δεν είναι απαραίτητα οι ίδιοι».

Κεντρικό οριακό θεώρημα (ΚΟΘ)

Τα τυχαία σφάλματα έχουν αποτέλεσμα ότι οι τιμές που βρίσκω για το μετρούμενο μέγεθος, είναι άλλοτε μεγαλύτερες & άλλοτε μικρότερες από την αληθή τιμή. Τα τυχαία σφάλματα είναι αναπόφευκτα σε όλες τις μετρήσεις.

Το **ΚΟΘ** αναφέρει ότι αν μία μέτρηση είναι το αποτέλεσμα του αθροίσματος ενός μεγάλου αριθμού παραγόντων (επιρρεπών σε σφάλματα), οι οποίοι ενεργούν ανεξάρτητα & κανένας από αυτούς δεν κυριαρχεί στο συνολικό άθροισμα, ο νόμος πιθανοτήτων του συνολικού αθροίσματος κατανέμεται σύμφωνα με το νόμο κανονικής κατανομής, ανεξάρτητα από το νόμο πιθανοτήτων που ελέγχει τους παράγοντες.

Οι συχνότεροι τύποι σφαλμάτων μέτρησης

1/3

Υπάρχουν 3 πηγές συστηματικών & τυχαίων σφαλμάτων σε αριθμητικές (υπολογιστικές) διαδικασίες:

- **Το ανθρώπινο σφάλμα** (ολίσθημα ή λάθος). Μπορεί να προκύψει σε κάθε στάδιο που έρχεται σε επαφή ο χρήστης με το υπολογιστικό εργαλείο. Περιορίζεται με σωστή κατάρτιση των μελετητών, οργάνωση του χώρου & του τρόπου εργασίας & με χρήση κατάλληλων εργαλείων.
- **Το σφάλμα κατά τον προγραμματισμό του αλγορίθμου.** Οφείλεται κατά κανόνα σε προσεγγίσεις που γίνονται, όταν το αρχικό πρόβλημα αντικαθίσταται από κάποιο μαθηματικό ανάλογο.

Οι συχνότεροι τύποι σφαλμάτων μέτρησης 2/3

- Το σφάλμα προσέγγισης της ακριβούς λύσης (ή σφάλμα αποκοπής). Προσπαθώ να υπολογίσω το άνω όριό του.

ακριβής τιμή = προσεγγιστική τιμή + σφάλμα

- **Τυχαίο σφάλμα.** Συμβαίνει όταν γίνονται διαδοχικές μετρήσεις του ίδιου αντικειμένου ή φαινομένου, επιτυγχάνοντας διαφορετικές τιμές σε κάθε περίπτωση.
- **Συστηματικό σφάλμα.** Σε αντίθεση με τα τυχαία, τα συστηματικά σφάλματα εξαρτώνται άμεσα από το σύστημα που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση. Για αυτό, είναι συνεχή σφάλματα. Αν χρησιμοποιούνται βαθμονομημένα όργανα, θα δώσουν λάθος μετρήσεις. Το σφάλμα θα παρουσιαστεί ακόμα και αν η διαδικασία μέτρησης επαναληφθεί.

Οι συχνότεροι τύποι σφαλμάτων μέτρησης 3/3

- **Περιττό σφάλμα.** Είναι το λάθος που είναι ελάχιστο και δεν αποτελεί πρόβλημα για τις μετρήσεις που πραγματοποιούνται. Π.χ. Αν εργάζεστε σε m και η μέτρηση ποικίλει κατά 1 mm.
- **Σημαντικό σφάλμα.** Είναι αυτό που αντιπροσωπεύει ένα πρόβλημα για το έργο που γίνεται.
- **Σφάλμα λόγω ελαττωμάτων στο χρησιμοποιούμενο όργανο.**
- **Σφάλμα προκληθέν από το άτομο που έλαβε τη μέτρηση.**
- **Σφάλμα λόγω περιβαλλοντικών συνθηκών.** Οι θερμοκρασίες, ο ήχος & άλλα περιβαλλοντικά ερεθίσματα, επηρεάζουν τις μετρήσεις.

Απόλυτο σφάλμα, διόρθωση & σχετικό σφάλμα

Απόλυτο σφάλμα ϵ . Η ποιότητα μιας προσεγγιστικής τιμής α εκτιμάται από την απόκλιση της από την πραγματική τιμή x . Η διαφορά $\alpha - x$ ονομάζεται απόλυτο σφάλμα .

Διόρθωση. Για να ληφθεί από την προσεγγιστική τιμή α η αληθινή τιμή x ενός μεγέθους, πρέπει να προστεθεί στο α η διόρθωση $-\epsilon$.

Σχετικό σφάλμα. Αντί του απόλυτου σφάλματος ϵ της προσεγγιστικής τιμής α , χρησιμοποιείται συχνά το σχετικό σφάλμα $|\epsilon|/|x|$, το οποίο συνήθως εκφράζεται σε ποσοστά.

Στρογγυλοποίηση του αριθμού

Είναι μια συνήθης μέθοδος για τη σύντμηση δεκαδικών ψηφίων.

Παραμένει αμετάβλητο το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο, αν ακολουθεί κάποιος από τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4 (στρογγυλοποίηση προς τα κάτω).

Το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο αυξάνεται κατά 1, αν ακολουθεί κάποιος από τους αριθμούς 5, 6, 7, 8, 9 (στρογγυλοποίηση προς τα άνω).

Αξιόπιστα ψηφία

Τα ψηφία ενός στρογγυλοποιημένου αριθμού δεν είναι απαραίτητα όλα έγκυρα, διότι ίσως προέρχονται από στρογγυλοποίηση.

Ένας σωστά στρογγυλοποιημένος αριθμός περιέχει μόνο αξιόπιστα ψηφία.

Τα ψηφία ενός αριθμού ονομάζονται αξιόπιστα, αν το απόλυτο σφάλμα της προσεγγιστικής τιμής δεν υπερβαίνει τη μισή μονάδα της τάξης του τελευταίου ψηφίου.

Αρχικά & υπολογιστικά σφάλματα

Αν διεξαχθεί υπολογισμός με προσεγγιστικές αρχικές τιμές, το αποτέλεσμα θα είναι επίσης προσεγγιστικό, η δε ακρίβεια του εξαρτάται από τα σφάλματα των υπολογισμών των εισερχομένων τιμών των προσεγγιστικών τιμών.

Το προκαλούμενο με τον τρόπο αυτό σφάλμα του αποτελέσματος, ονομάζεται **αρχικό σφάλμα**.

Εκτός από αυτό, προκύπτουν κατά την πορεία του υπολογισμού σφάλματα από την στρογγυλοποίηση των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων.

Αυτά καλούνται **υπολογιστικά σφάλματα**.