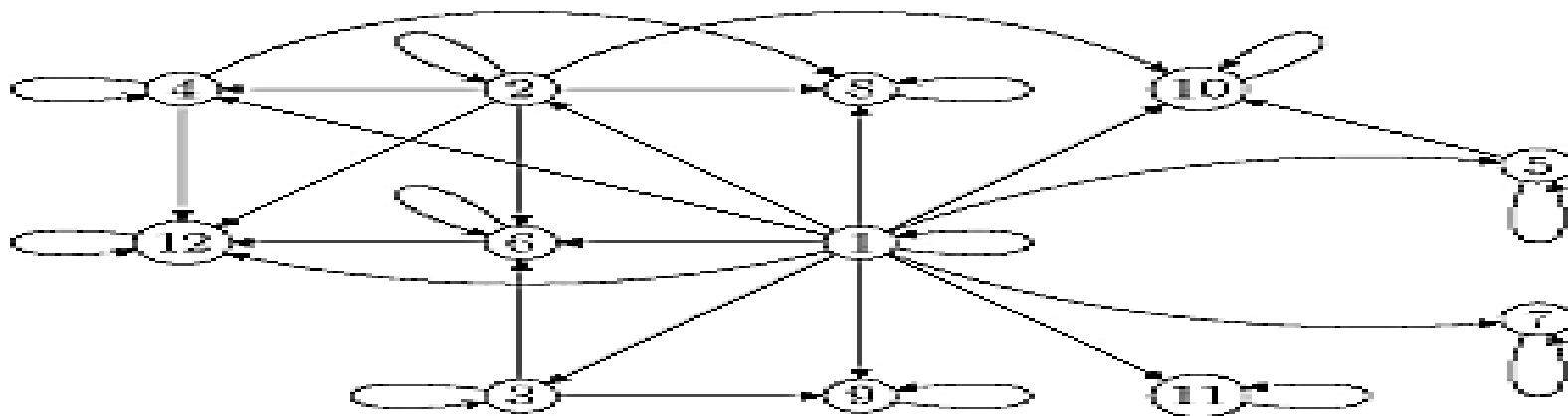




Οι διμελείς σχέσεις

Βούρος Γεώργιος (ΑΜ 8858)

Βλαστήρης Άγγελος (ΑΜ 8597)

Η έννοια της διμελούς σχέσης 1

Ορισμός. Έστω τα σύνολα A, B διάφορα του κενού συνόλου.

Διμελής σχέση από το A στο B , είναι κάθε υποσύνολο σ του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$, δηλαδή κάθε $\sigma \subseteq A \times B$.

Δηλαδή, διμελής σχέση σ από το A στο B , είναι η τριάδα (A, B, σ) .

Το σύνολο των $x \in A$ για κάθε ένα από τα οποία υπάρχει ένα τουλάχιστον $y \in B$ ώστε $x\sigma y$, λέγεται **πεδίο ορισμού** της σχέσης.

Συμβολίζεται ως $\mathcal{D}(\sigma)$, δηλαδή
$$\mathcal{D}(\sigma) = \{x \in A : \exists y \in B \text{ με } x\sigma y\} \subseteq A$$

Η έννοια της διμελούς σχέσης 2

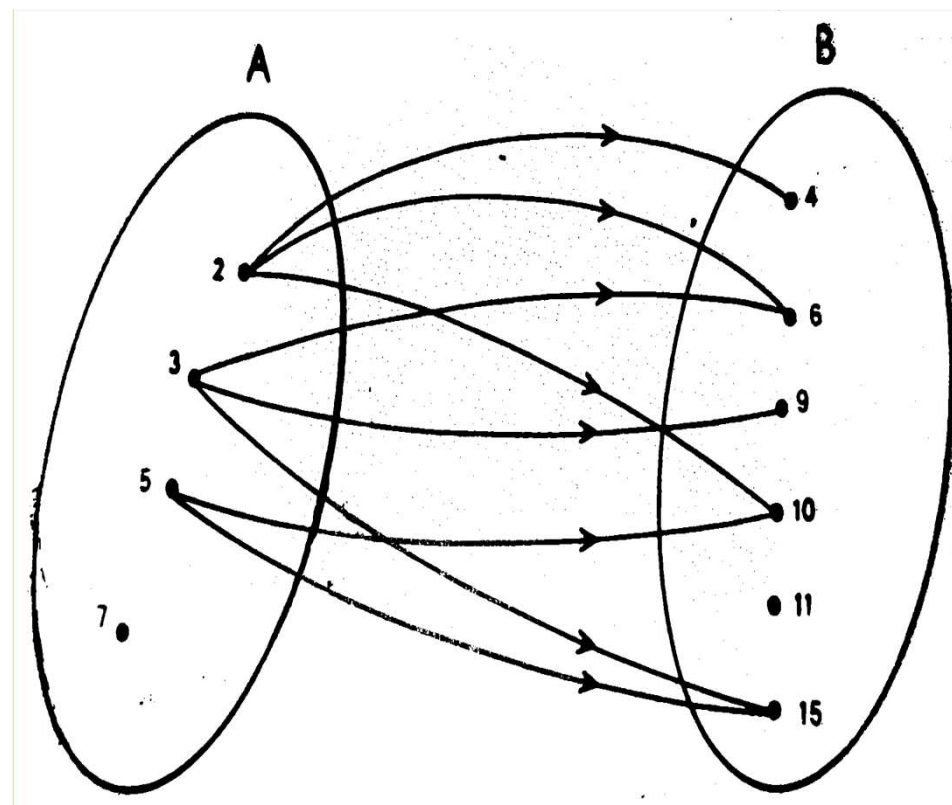
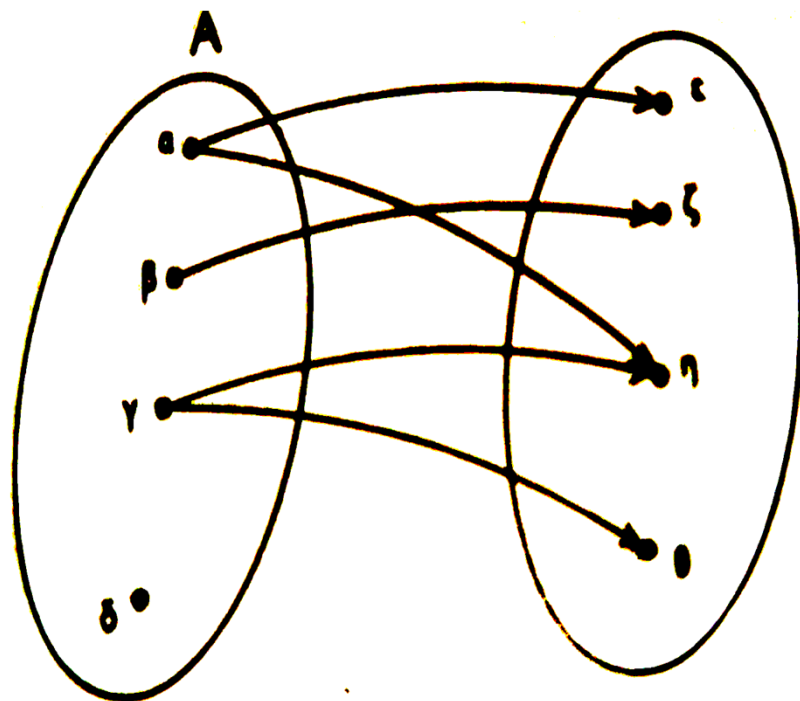
Το σύνολο των $y \in B$ για κάθε ένα από τα οποία υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in A$ ώστε $x \sigma y$ λέγεται **πεδίο τιμών** της σχέσης.

Συμβολίζεται με $\mathbb{R}(\sigma)$, δηλαδή $\mathbb{R}(\sigma) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ με } x \sigma y\} \subseteq B$

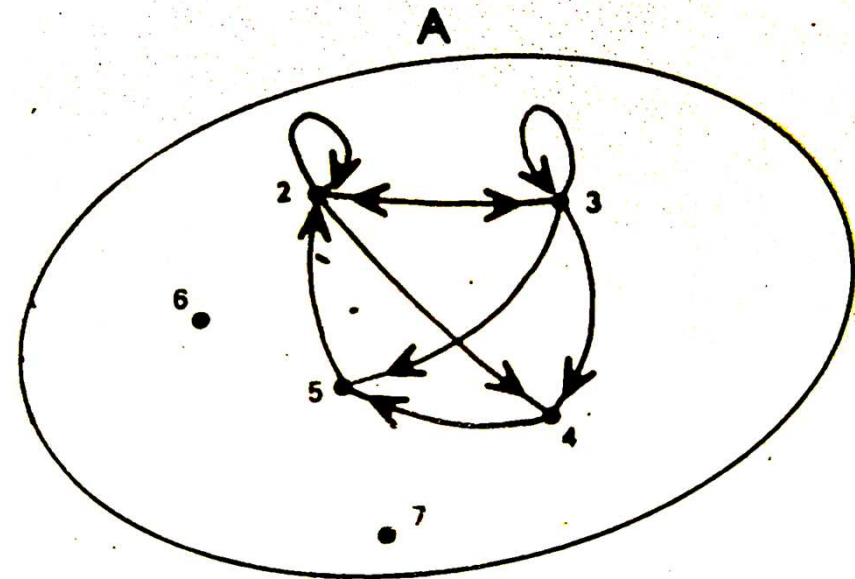
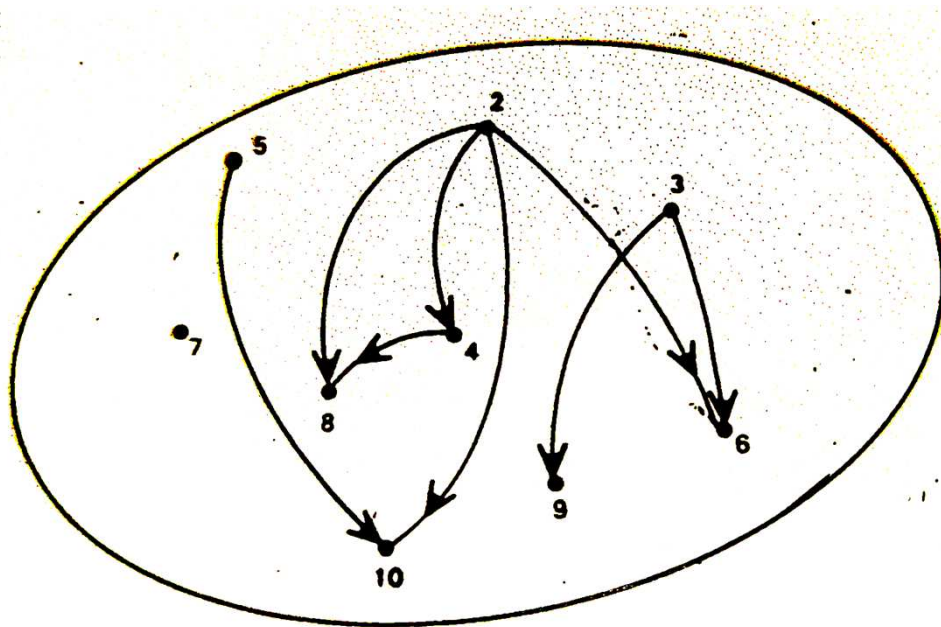
Για το σ που λέγεται **γράφημα** της σχέσης, ισχύει

$$G \text{ ή } \sigma = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B \text{ με } x \sigma y\} \subseteq A \times B$$

Απεικόνιση διμελών σχέσεων 1



Απεικόνιση διμελών σχέσεων 2



Αντίστροφη διμελής σχέση

Αντίστροφη διμελής σχέση της σ , είναι το υποσύνολο σ^{-1} του καρτεσιανού γινομένου $B \times A$, που έχει ως στοιχεία του τα αντίστροφα των ζευγών του σ .

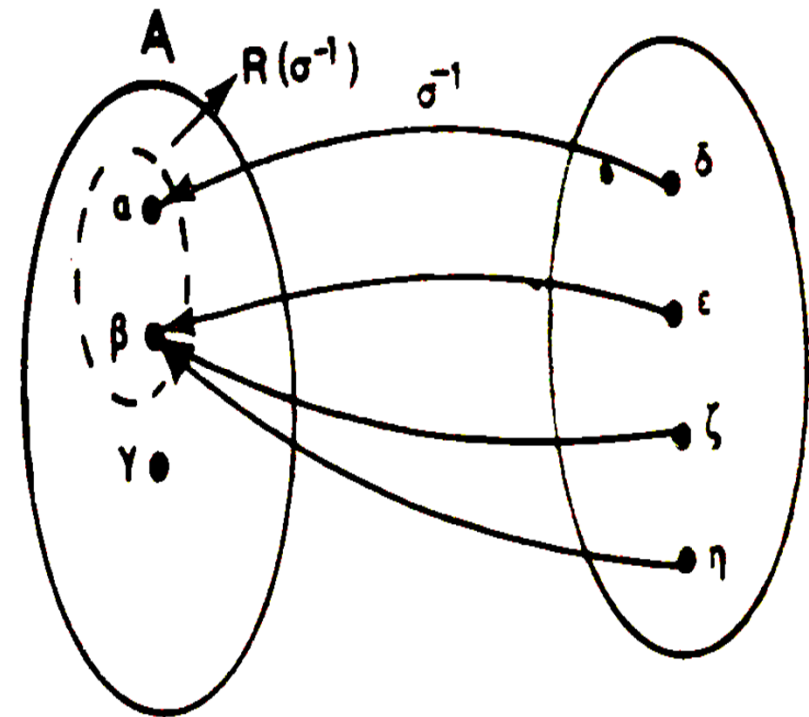
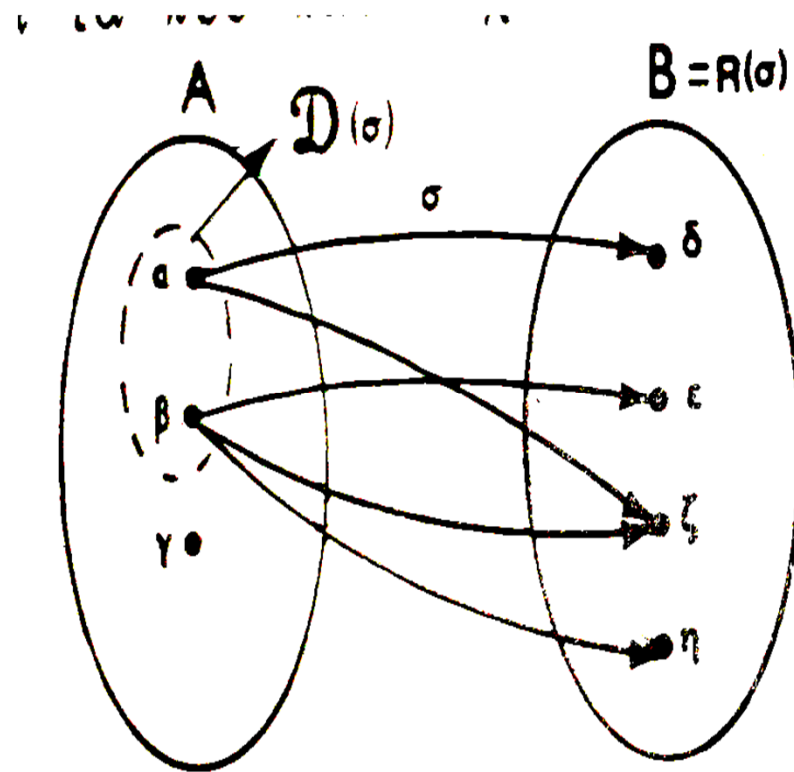
Συμβολίζεται με σ^{-1} .

Δηλαδή

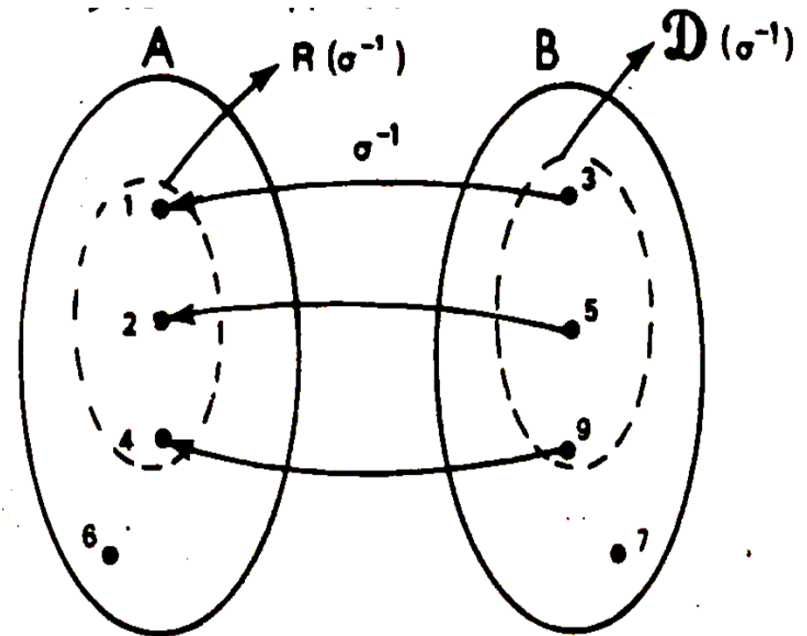
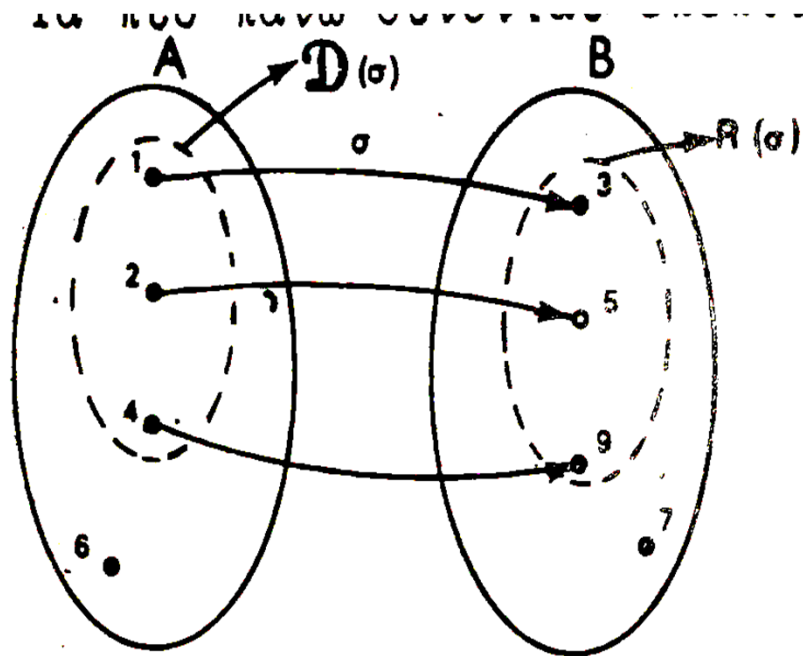
$$\sigma^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \sigma \Leftrightarrow x \sigma y\} \subseteq B \times A$$

- Ο τύπος σ^{-1} της αντίστροφης, προκύπτει από τον τύπο σ της αρχικής, με εναλλαγή των x, y
- Ισχύει ότι $\mathcal{D}(\sigma) = \mathbb{R}(\sigma^{-1})$ και $\mathbb{R}(\sigma) = \mathcal{D}(\sigma^{-1})$
- $(x, y) \in \sigma \Leftrightarrow (y, x) \in \sigma^{-1}$ ή $x \sigma y \Leftrightarrow y \sigma^{-1} x$

Απεικόνιση της αντίστροφης διμελούς σχέσης 1

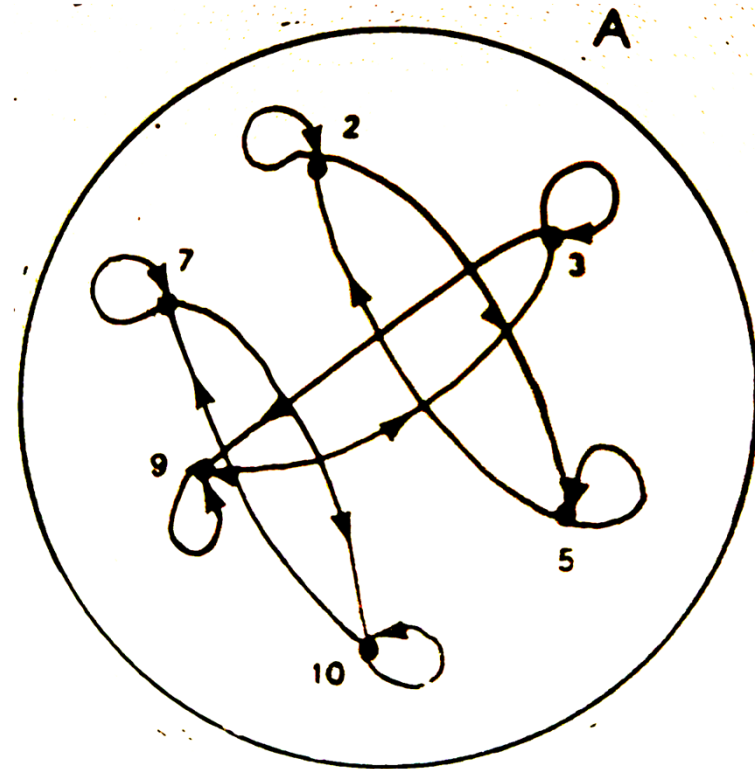


Απεικόνιση της αντίστροφης διμελούς σχέσης 2



Ανακλαστική ή αυτοπαθής διμελής σχέση

- η σ είναι ανακλαστική αν και μόνο αν $\forall x \in A, x \sigma x$, ή $\forall x \in A, (x, x) \in \sigma$
- ισχύει ότι $\mathcal{D}(\sigma) = \mathbb{R}(\sigma) = A$
- δεν είναι ανακλαστική, αν υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A$ έτσι ώστε $x \not\sigma x \Leftrightarrow (x, x) \notin \sigma$



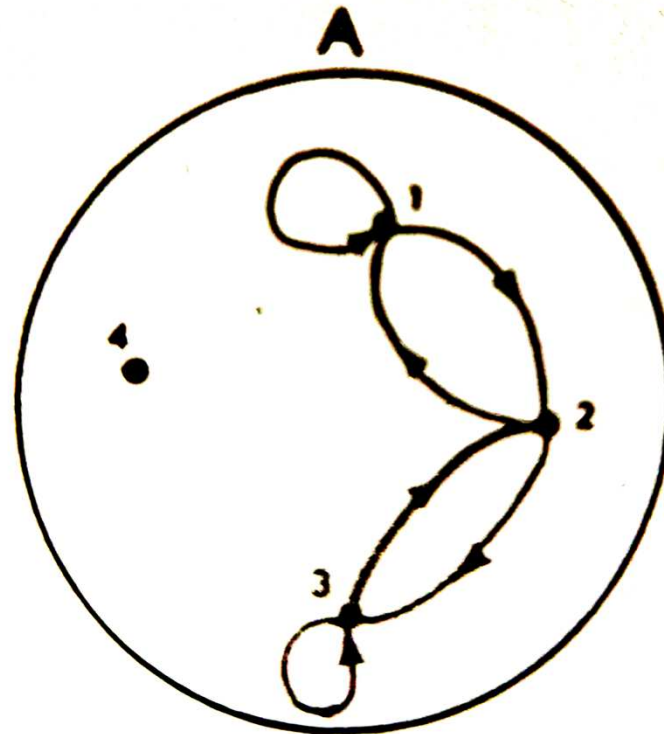
Συμμετρική διμελής σχέση

η σ είναι συμμετρική, αν και μόνο αν $\forall x, y \in A$ με $(x, y) \in \sigma \Leftrightarrow (y, x) \in \sigma$ ή $x\sigma y \Leftrightarrow y\sigma x$

δηλαδή

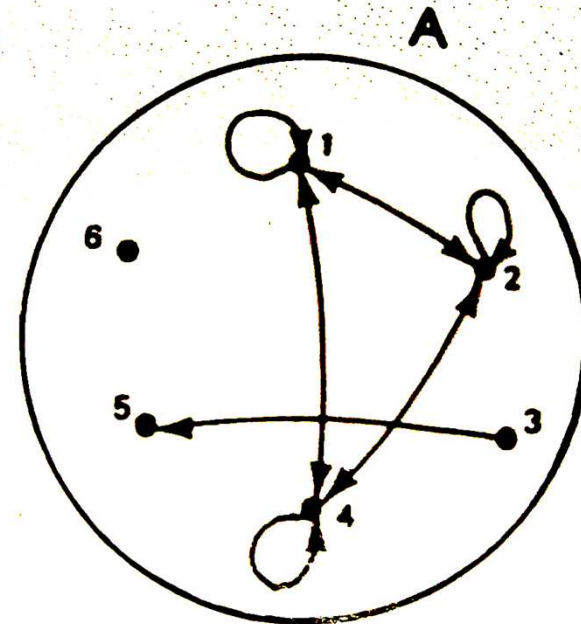
αν και μόνο αν, το συμμετρικό (αντίστροφο) κάθε ζεύγους είναι στοιχείο του γραφήματος σ της σχέσης

Π.χ. παραλληλία & καθετότητα ευθειών



Μεταβατική διμελής σχέση

η σ είναι μεταβατική αν και μόνο
αν $\forall x,y,z \in A$ με $(x,y) \in \sigma \wedge (y,z) \in \sigma$
 $\Rightarrow (x,z) \in \sigma$ ή $x\sigma y \wedge y\sigma z \Rightarrow x\sigma z$



Διμελής σχέση ισοδυναμίας/ διάταξης

η σ είναι σχέση ισοδυναμίας στο A αν και μόνο αν είναι:

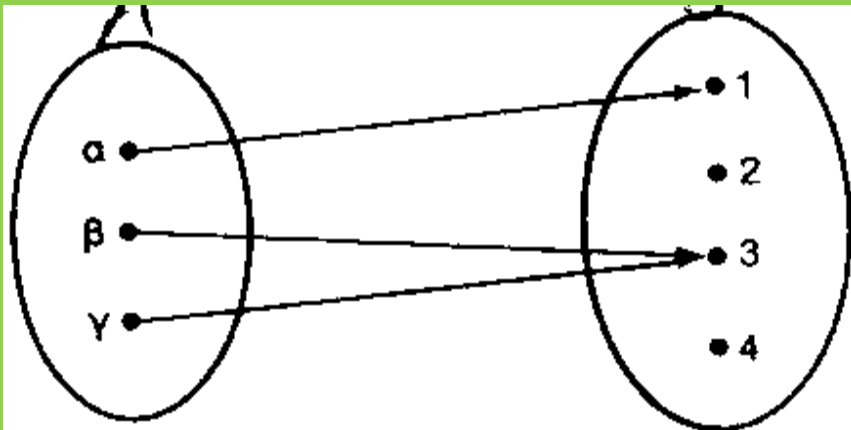
- i) ανακλαστική, $\forall x \in A, x \sigma x$
- ii) συμμετρική, $\forall x, y \in A$ με $x \sigma y \Leftrightarrow y \sigma x$.
- iii) μεταβατική, $\forall x, y, z \in A$ με $x \sigma y \wedge y \sigma z \Rightarrow x \sigma z$

η σ είναι σχέση διάταξης στο A αν και μόνο αν είναι:

- i) ανακλαστική,
- ii) αντισυμμετρική
- ii) μεταβατική

Όταν η διμελής σχέση είναι συνάρτηση

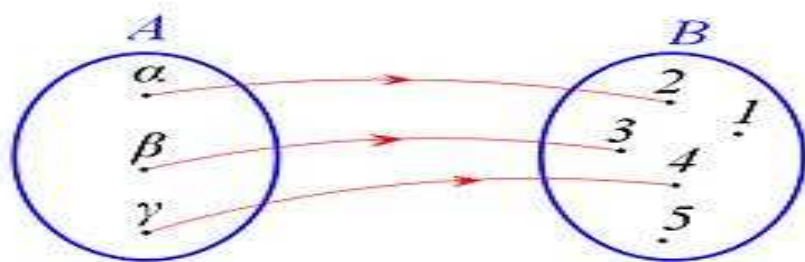
- Από κάθε στοιχείο του 1^{ου} συνόλου φεύγει βέλος και είναι μοναδικό



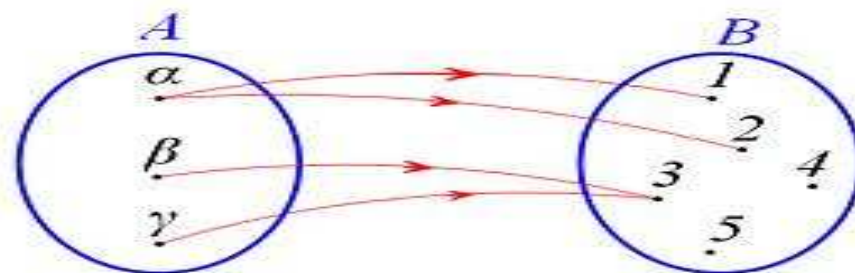
Ορισμός

Συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B είναι μία διαδικασία με την οποία **κάθε** στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχεί σε **ένα ακριβώς** στοιχείο του συνόλου B

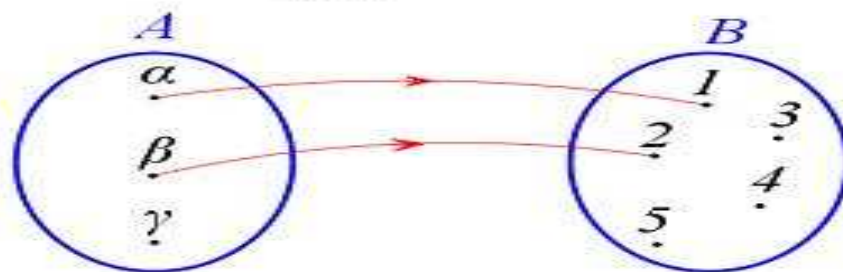
Μόνο το σχήμα 1 παριστάνει συνάρτηση



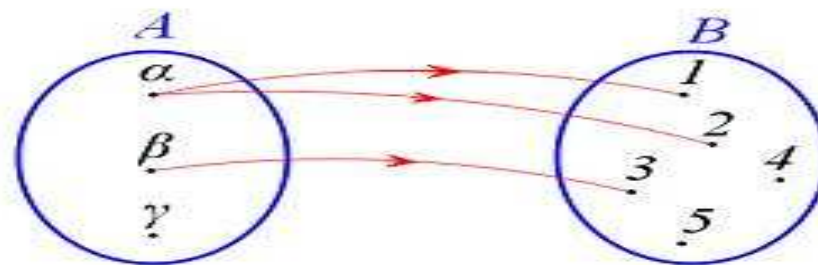
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Αμφιμονοσήμαντη ή αμφιμονότιμη ή 1 – 1 συνάρτηση

Ορισμός

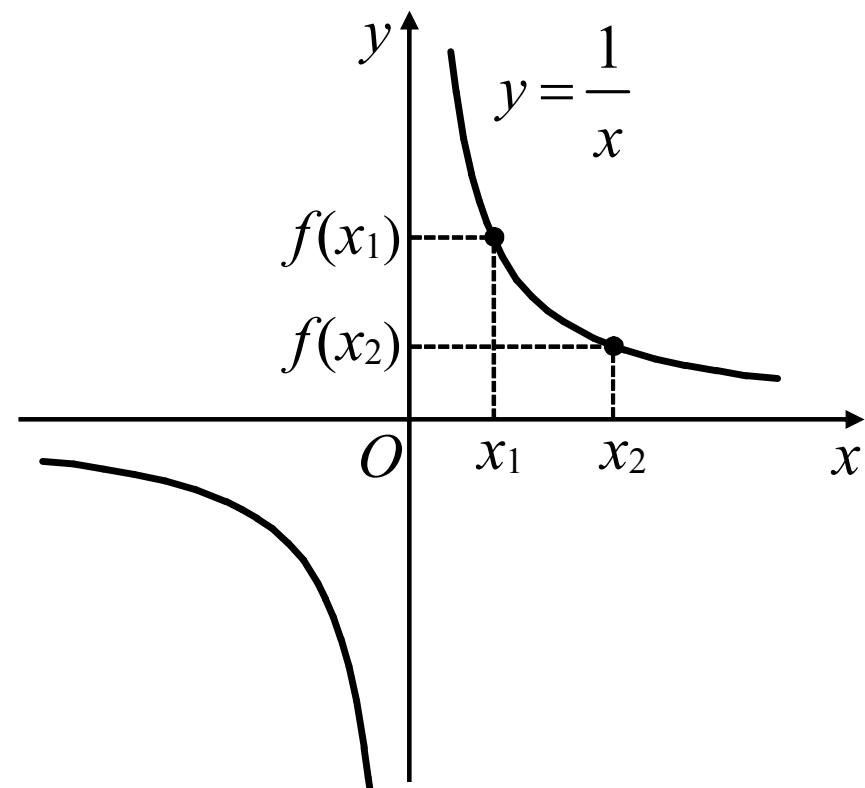
Για κάθε x_1, x_2 που ανήκουν στο πεδίο ορισμού με $x_1 \neq x_2$ έπεται $y_1 \neq y_2$

Ισοδύναμος ορισμός

Για κάθε y_1, y_2 που ανήκουν στο πεδίο τιμών με $y_1 = y_2$ έπεται $x_1 = x_2$

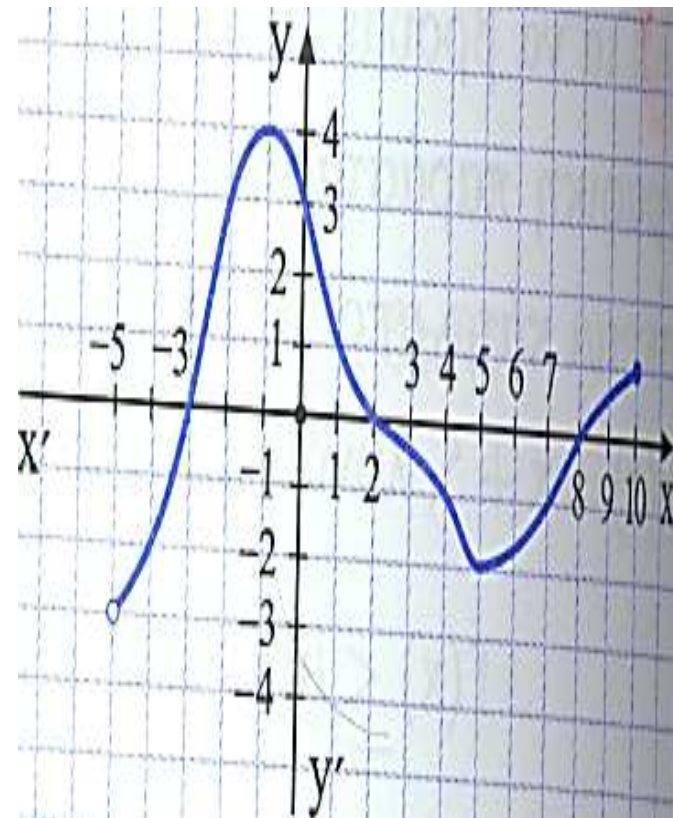
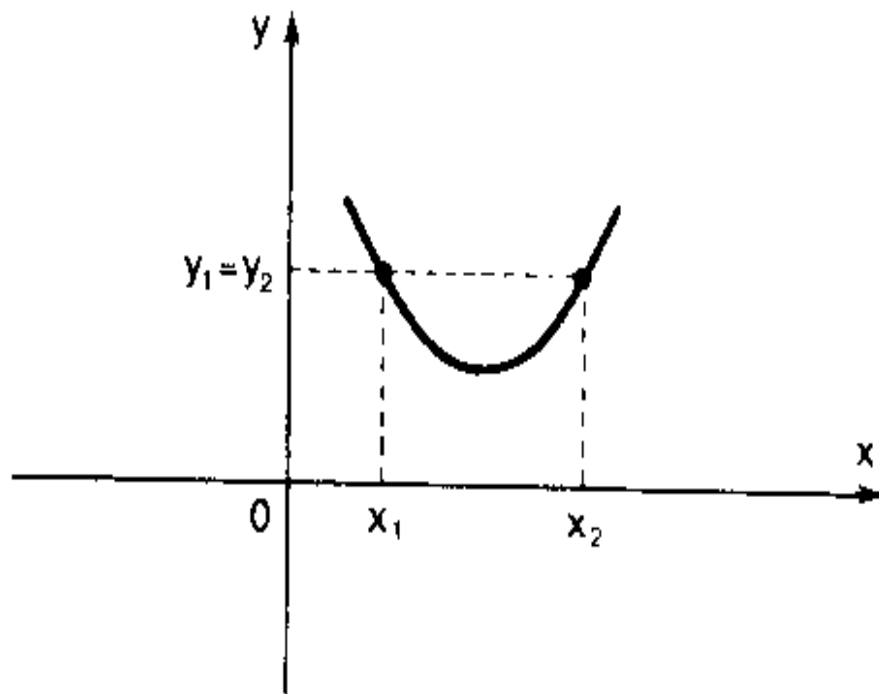
Αντιθετοαντιστροφή

Αν $(\Lambda \Rightarrow \Gamma)$ τότε $(\Gamma' \Rightarrow \Lambda')$



Όχι 1 – 1 συναρτήσεις

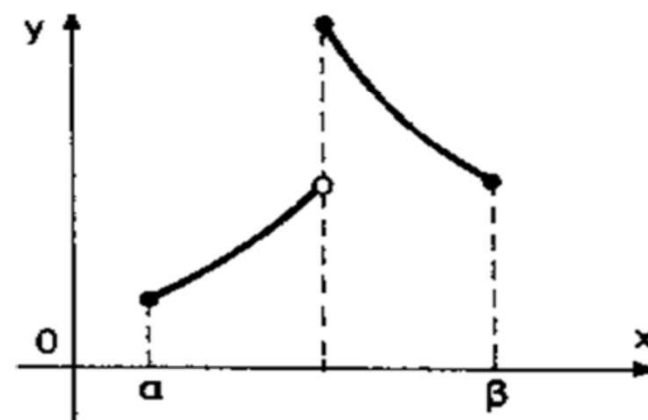
(διότι υπάρχουν διαφορετικά x που πάνε στο ίδιο y)



Παρατηρήσεις για την 1 – 1 συνάρτηση

Παρατήρηση. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι 1–1. Άρα, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση, συμβολίζετε f^{-1} και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Παρατήρηση. Αν μία συνάρτηση f είναι 1–1, δεν έπεται ότι είναι γνησίως μονότονη, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

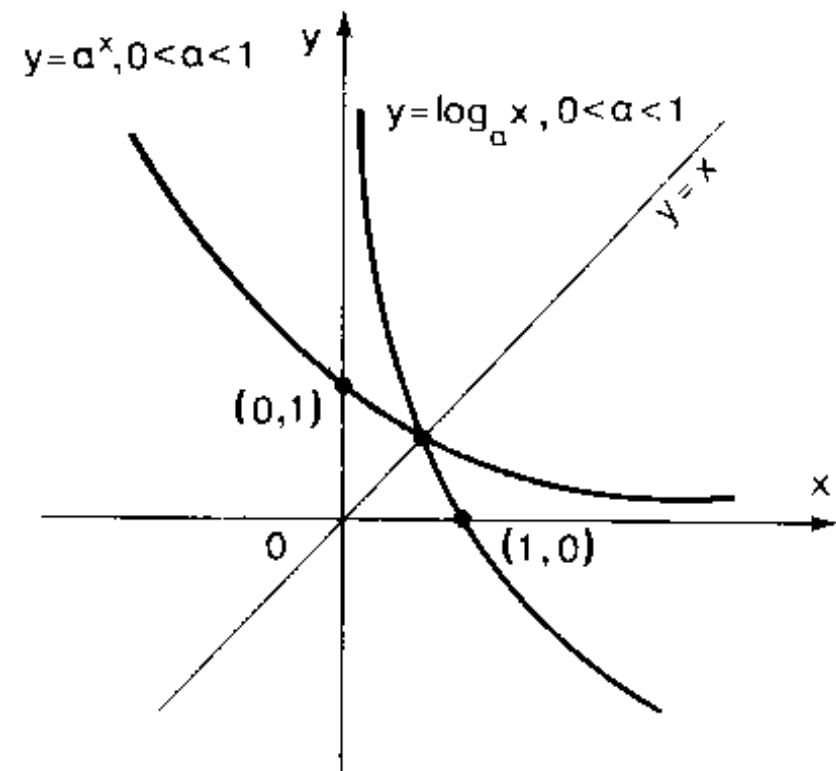
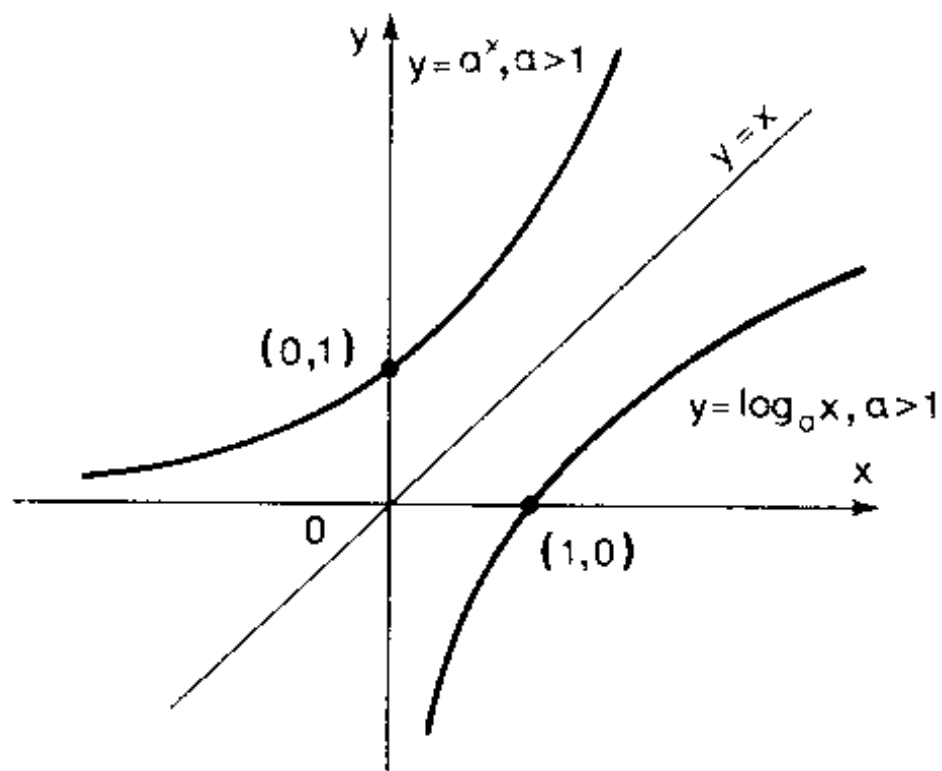


Η αντίστροφη συνάρτηση

Για να υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση μίας συνάρτησης f πρέπει και αρκεί η f να είναι 1-1. Η f^{-1} και η $\frac{1}{f}$ είναι εντελώς διαφορετικές συναρτήσεις.

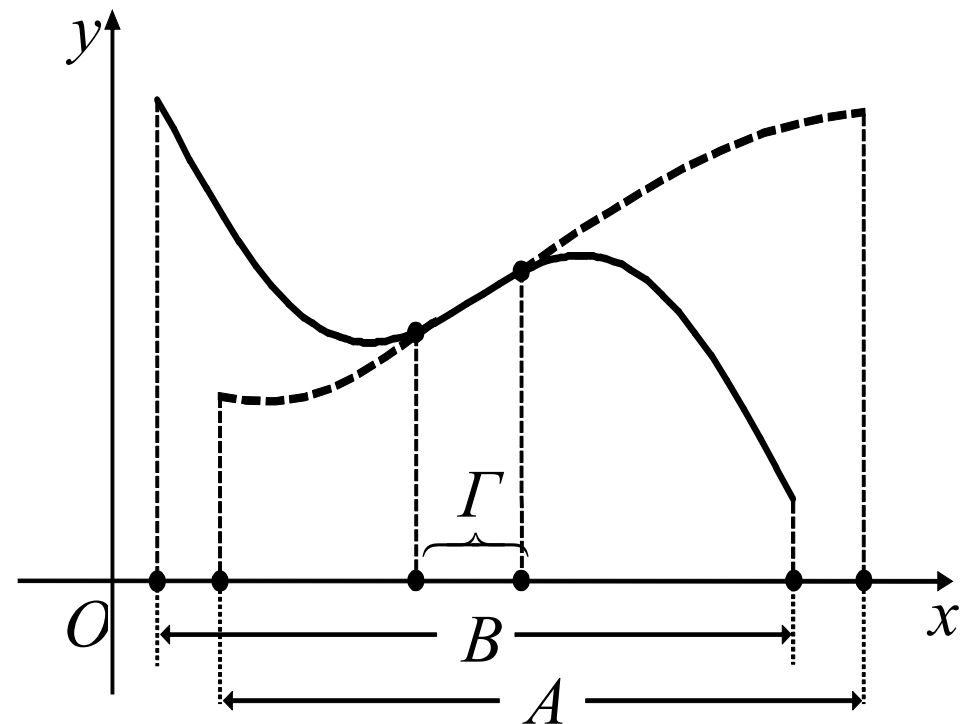
Π.χ. για τη συνάρτηση $f(x) = 2x + 3$ είναι $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{2x+3}$ και $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

**Η εκθετική συνάρτηση είναι αντίστροφη
της λογαριθμικής συνάρτησης**



Ισότητα των συναρτήσεων

$$f = g \underset{\text{ορισμ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} D(f) = D(g) \\ \text{και} \\ f(x) = g(x), \text{ για καθε } x \in D(f) = D(g) \end{cases}$$



Άρτια και περιττή συνάρτηση

Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται **άρτια** αν και μόνο αν:

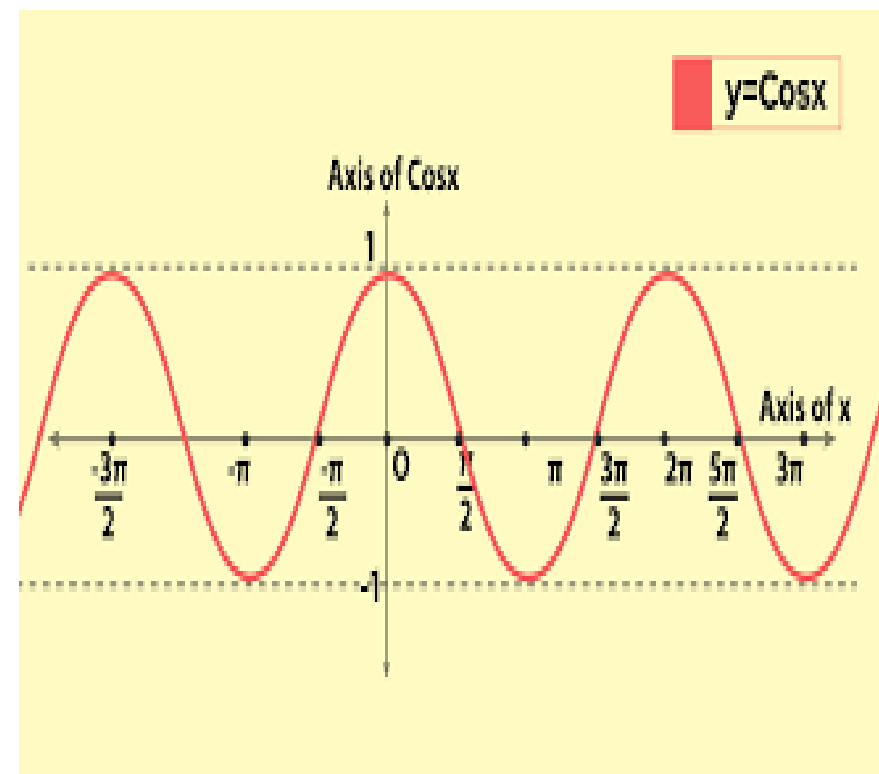
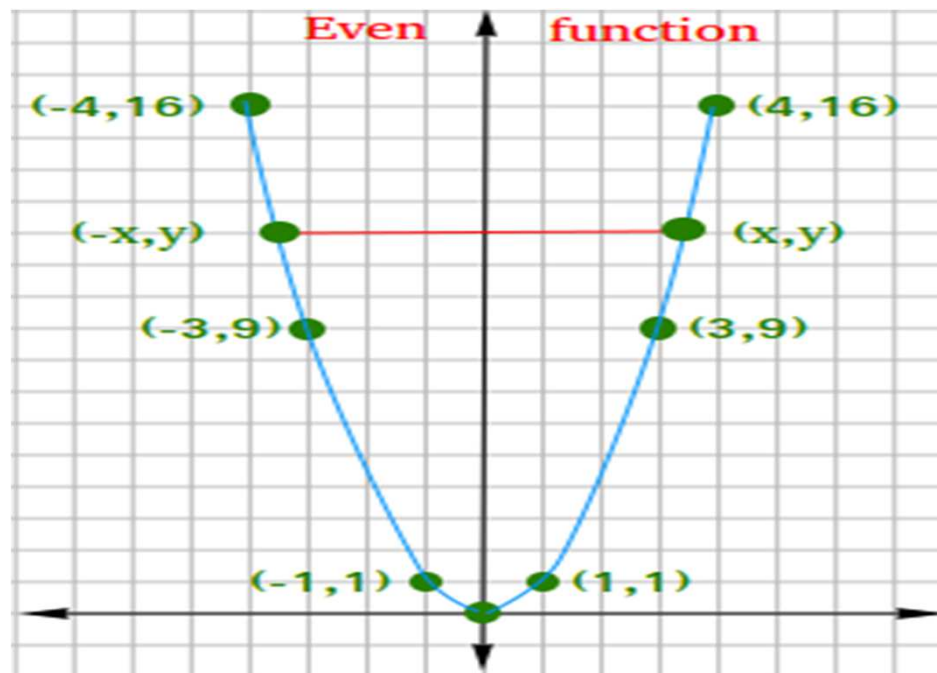
- Το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, δηλαδή $\forall x \in A$ είναι $-x \in A$ και
- $\forall x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = f(-x)$.

Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται **περιττή** αν και μόνο αν:

- Το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, δηλαδή $\forall x \in A$ είναι $-x \in A$ και
- $\forall x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = -f(-x)$.

Π.χ. άρτιων συναρτήσεων

(τα αντίθετα x πάνε στο ίδιο y)



Π.χ. περιττών συναρτήσεων

(τα αντίθετα x πάνε σε αντίθετα y)

