

Οι επιφάνειες 2^{ου} βαθμού

Καρακάσης Στυλιανός (ΑΜ 9045)

Τι είναι οι επιφάνειες 2^{ου} βαθμού

Πρόκειται για γεωμετρικές επιφάνειες που προκύπτουν από εξισώσεις 2^{ου} βαθμού, στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο και συνήθως είναι γενικευμένες παραλλαγές των κωνικών τομών.

Ο χαρακτηρισμός της κάθε επιφάνειας, έχει να κάνει με τον τύπο της τομής της, από επίπεδο **παράλληλο** (ή **κάθετο**) προς έναν ορισμένο άξονα.

Πως προκύπτουν τα ονόματα των επιφανειών

Αν η τομή της επιφάνειας 2^{ου} βαθμού με επίπεδο **παράλληλο** προς έναν άξονα είναι:

έλλειψη,

παραβολή ή

υπερβολή,

τότε η επιφάνεια 2^{ου} βαθμού ονομάζεται αντιστοίχως:

έλλειψοειδές,

παραβολοειδές ή

υπερβολοειδές.

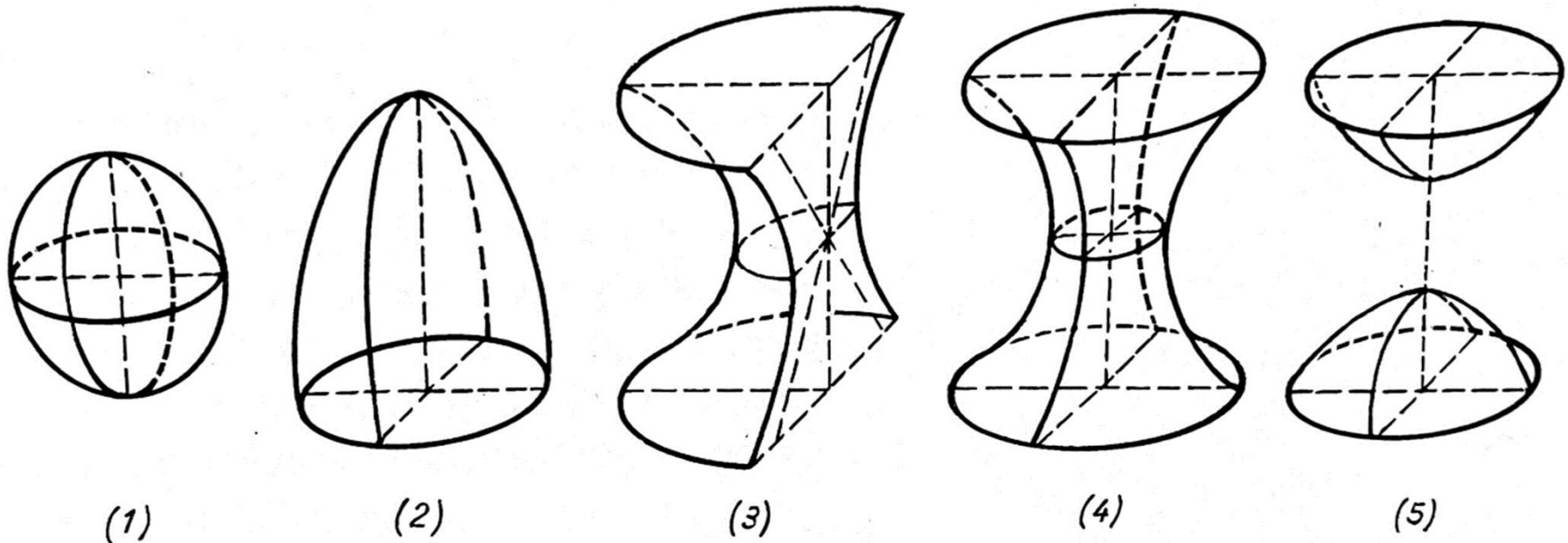
Από την τομή της επιφάνειας 2^{ου} βαθμού με επίπεδο **κάθετο** προς έναν άξονα, προκύπτουν οι τα ονόματα:

ελλειπτικό ή

υπερβολικό.

Επειδή δεν υπάρχει επιφάνεια 2^{ου} βαθμού με παραβολική τομή, δεν γίνεται χρήση του όρου **παραβολικό.**

Οι 5 περιπτώσεις επιφανειών 2^{ου} βαθμού



1 ελλειψοειδές,

2 ελλειπτικό παραβολοειδές,

4 μονόχωνο υπερβολοειδές,

3 υπερβολικό παραβολοειδές

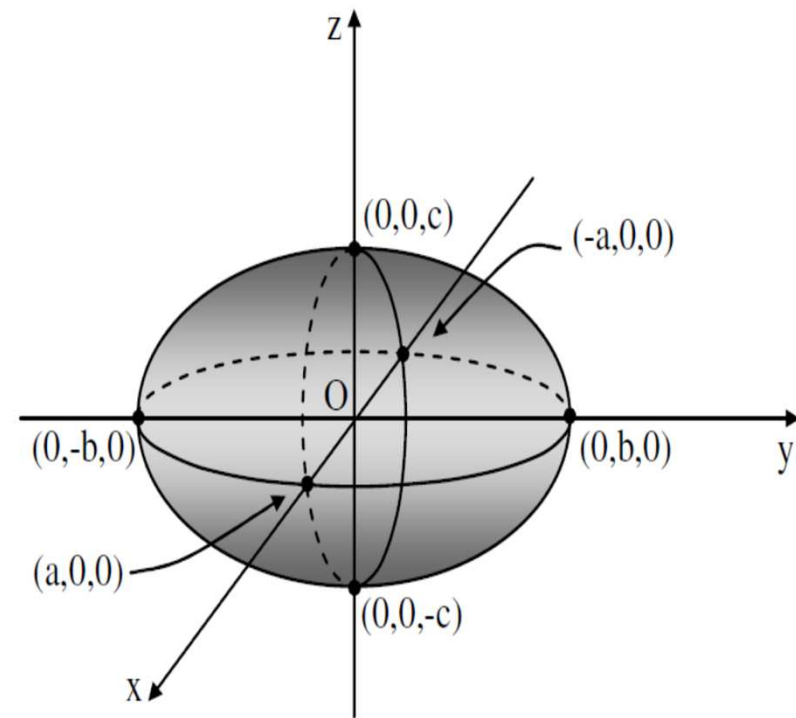
5 δίχωνο υπερβολοειδές

Ελλειψοειδές 1/3

Είναι τα στερεό που προκύπτει από περιστροφή της έλλειψης, δηλαδή είναι στερεό εκ περιστροφής.

Πρόκειται για το τρισδιάστατο αντίστοιχο της έλλειψης.

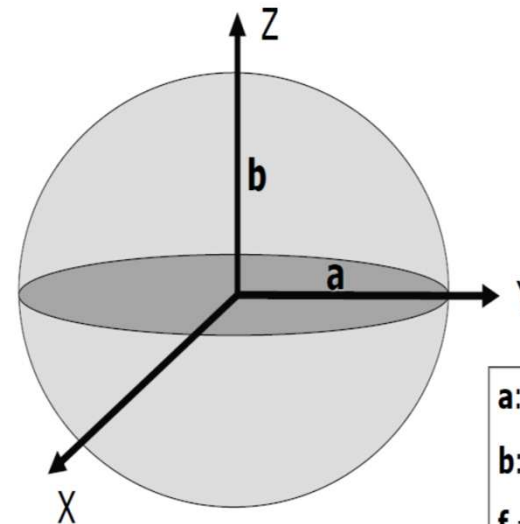
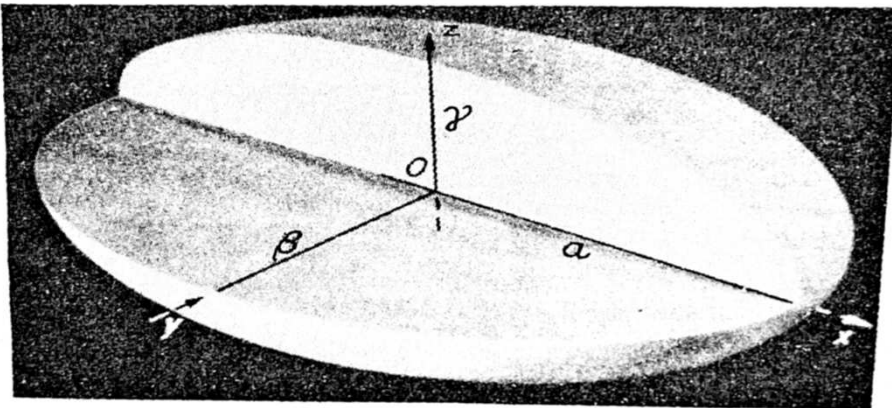
Η αρχή του συστήματος αναφοράς, ονομάζεται **κέντρο του ελλειψοειδούς**.



Ελλειψοειδές 2/3

Αν $a=b$ τότε έχω πεπλατυσμένο ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$



a: μεγάλος ημιάξονας

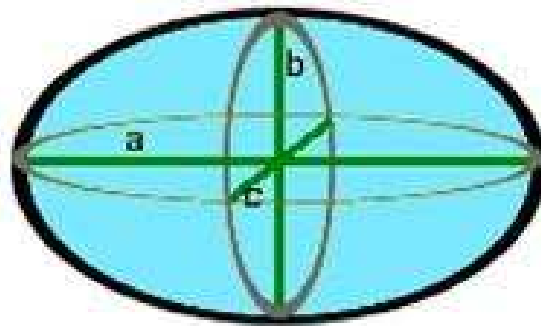
b: μικρός ημιάξονας

f = $(a-b)/a$: επιπλάτυνση

e² = $(a^2-b^2)/a^2$: εκκεντρότητα

Ελλειψοειδές 3/3

Αν $b=c$ τότε έχω επίμηκες ελλειψοειδές



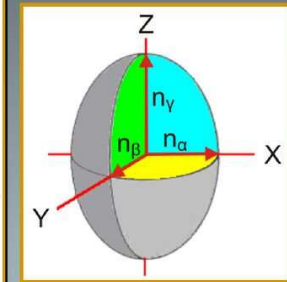
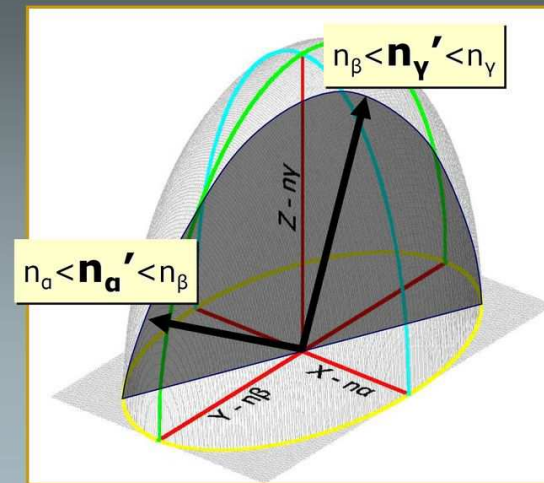
VOLUME of
ELLIPSOID

$$\frac{4}{3}\pi abc$$

Αν $a=b=c$ τότε το ελλειψοειδές είναι σφαίρα

Αν τα a, b, c είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε έχω τριαξονικό ελλειψοειδές

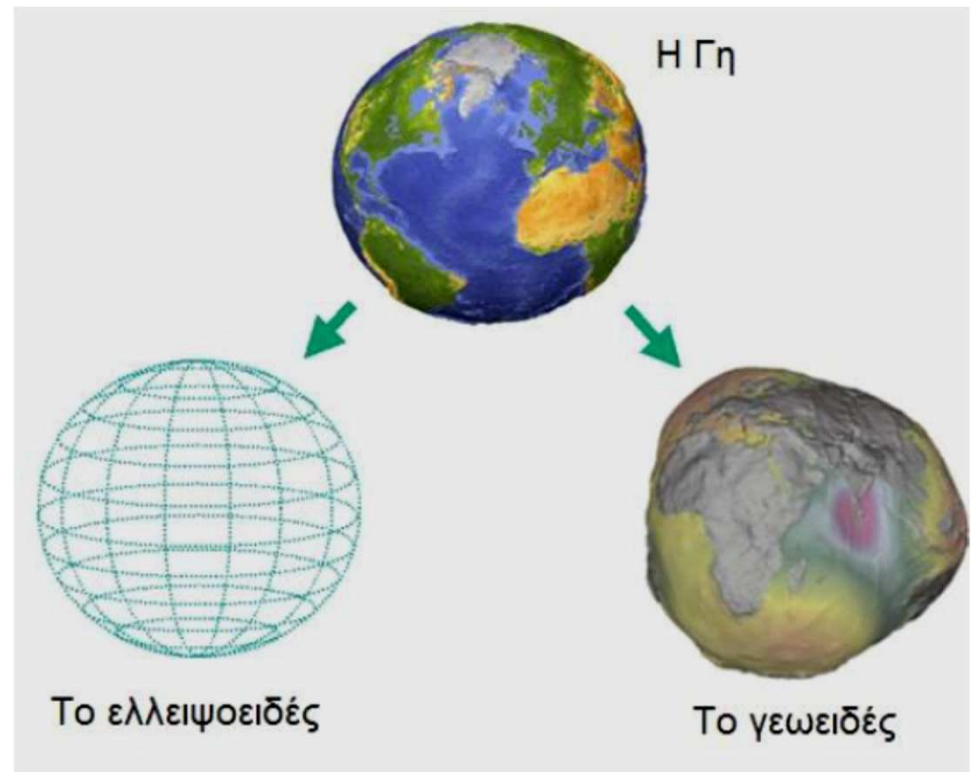
Τριαξονικό ελλειψοειδές



Ελλειψοειδές και Γη

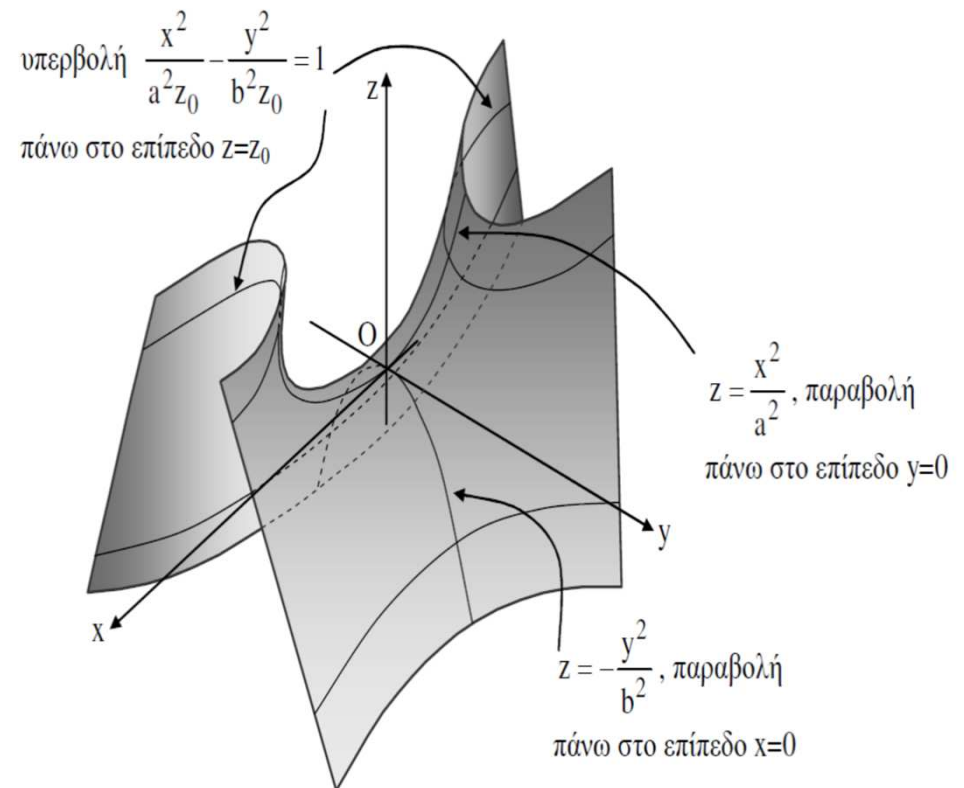
Η Γη είναι ένα ελλειψοειδές πεπλατυσμένο στους πόλους, λόγω της περιστροφικής κίνησης που εκτελεί.

Η ακτίνα του Ισημερινού (μεγάλος ημιάξονας περιστροφής $\alpha=6.380$ km) είναι περίπου **21 km** μεγαλύτερη από την πολική ακτίνα (μικρός ημιάξονας περιστροφής $\beta=6.359$ km).



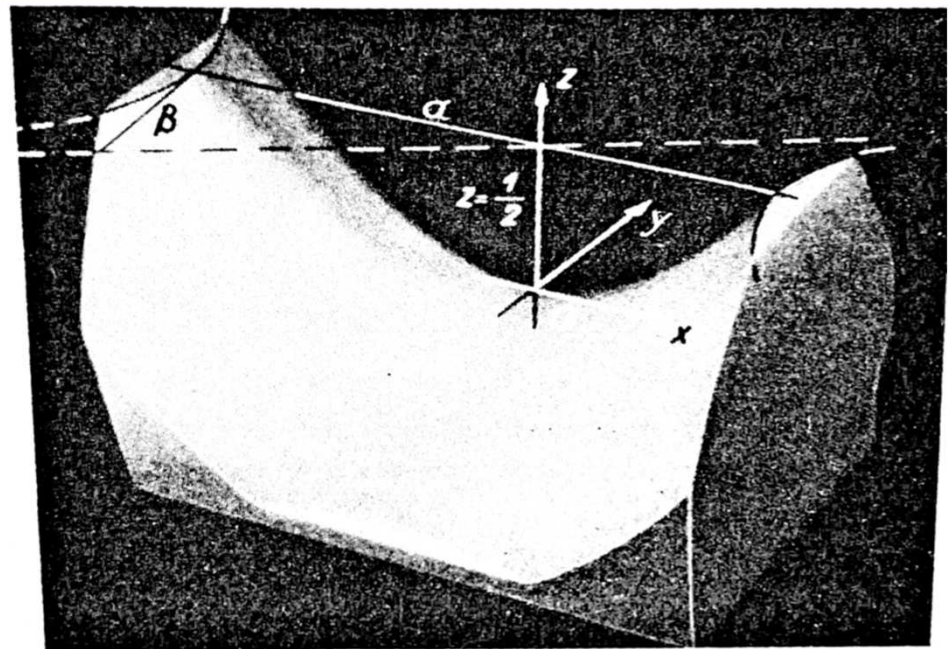
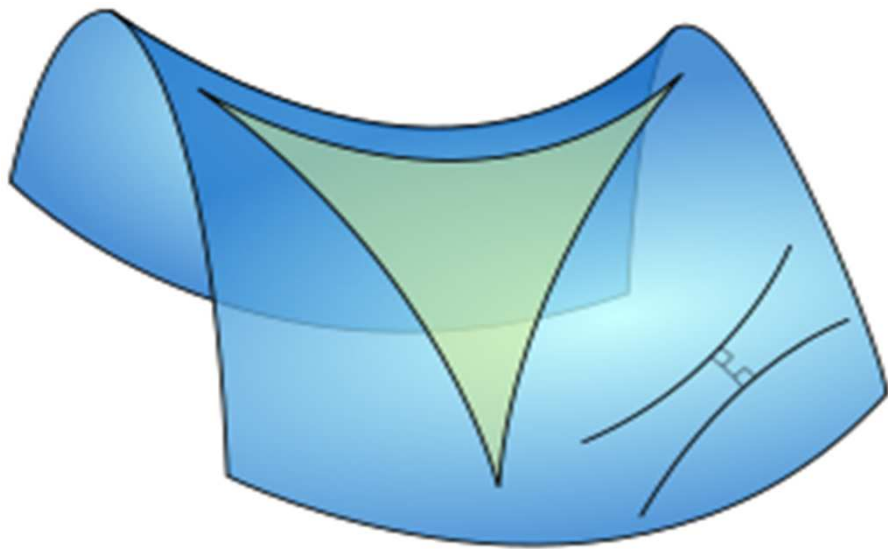
Υπερβολικό παραβολοειδές 1/3

- Η επιφάνεια του είναι απεριόριστη
- Μετά τη σφαίρα και τον κύλινδρο, είναι η πλέον εφαρμοσμένη επιφάνεια στην αρχιτεκτονική
- Έχει 2 επίπεδα συμμετρίας, κάθετα μεταξύ τους
- Κάθε επίπεδο, παράλληλο σε ένα επίπεδο συμμετρίας, τέμνει την επιφάνεια κατά παραβολή



Υπερβολικό παραβολοειδές 2/3

Μαθηματικό σάγμα (σέλα)



Υπερβολικό παραβολοειδές 3/3

- Είναι η μόνη επιφάνεια 2^{ου} βαθμού, η οποία ποτέ δεν είναι επιφάνεια εκ περιστροφής, ούτε μπορεί να μετατραπεί σε τέτοια, διότι καμία τομή του δεν είναι ελλειπτική.
- Είναι ευθειογενής επιφάνεια, δηλαδή παράγεται από ευθείες γραμμές που μετατοπίζονται, υπό συνθήκες

Από τις επιφάνειες 2^{ου} βαθμού, ευθειογενείς επιφάνειες είναι:

- ο ελλειπτικός κύλινδρος,
- ο παραβολικός κύλινδρος,
- ο υπερβολικός κύλινδρος,
- ο διπλός κώνος,
- το υπερβολικό παραβολοειδές
- το μονόχωνο υπερβολοειδές

Μονόχωνο υπερβολοειδές 1/3

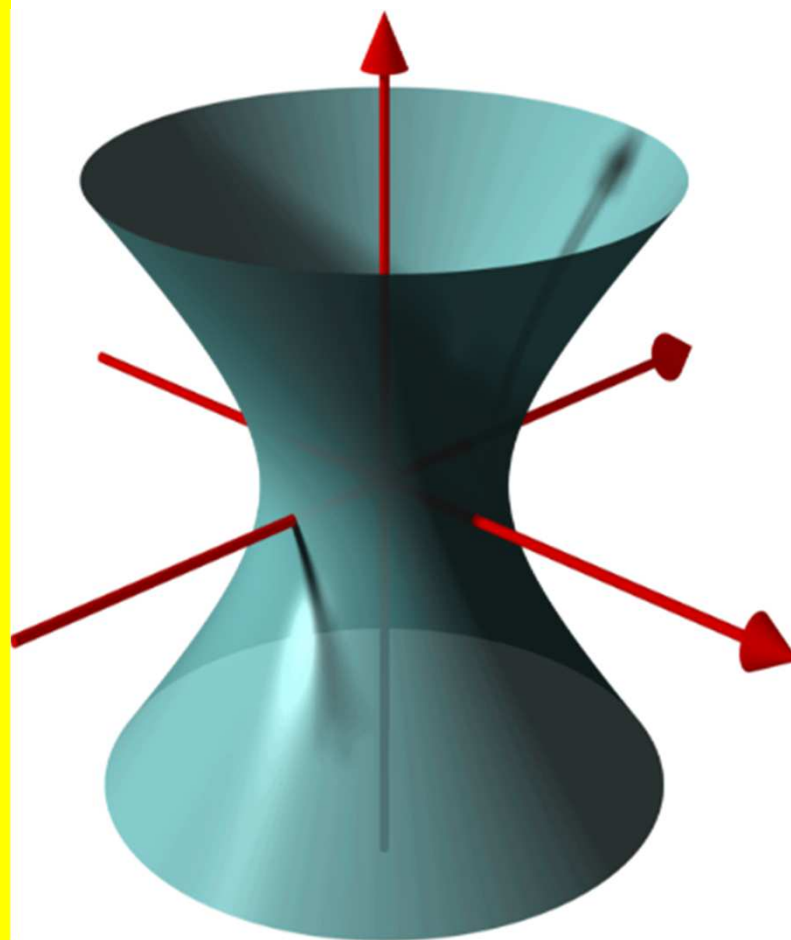
Παράγεται από την περιστροφή μίας ευθείας γραμμής γύρω από άξονα, ασύμβατο προς την ευθεία.

Ο άξονας, λέγεται άξονας του μονόχωνου υπερβολοειδούς και είναι άξονας συμμετρίας του.

Κάθε ευθεία του, είναι **γενέτειρα** της επιφάνειας.

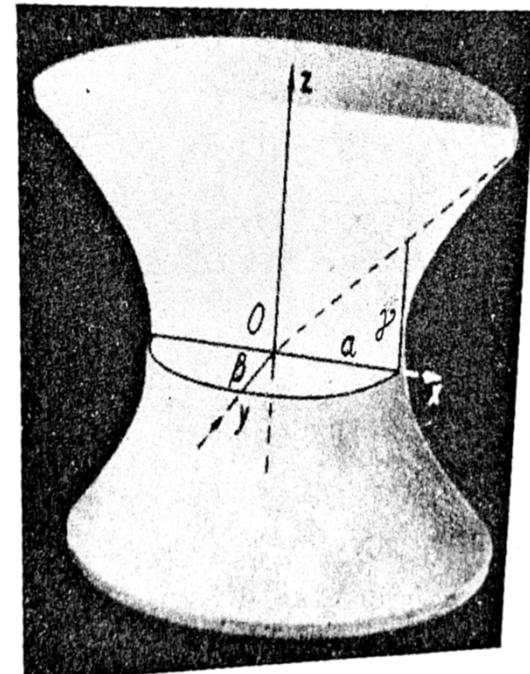
Κάθε επίπεδο κάθετο στον άξονα, το τέμνει σε **κύκλο**.

Κάθε επίπεδο, που περιέχει τον άξονα, το τέμνει σε **υπερβολή**.



Μονόχωνο υπερβολοειδές 2/3

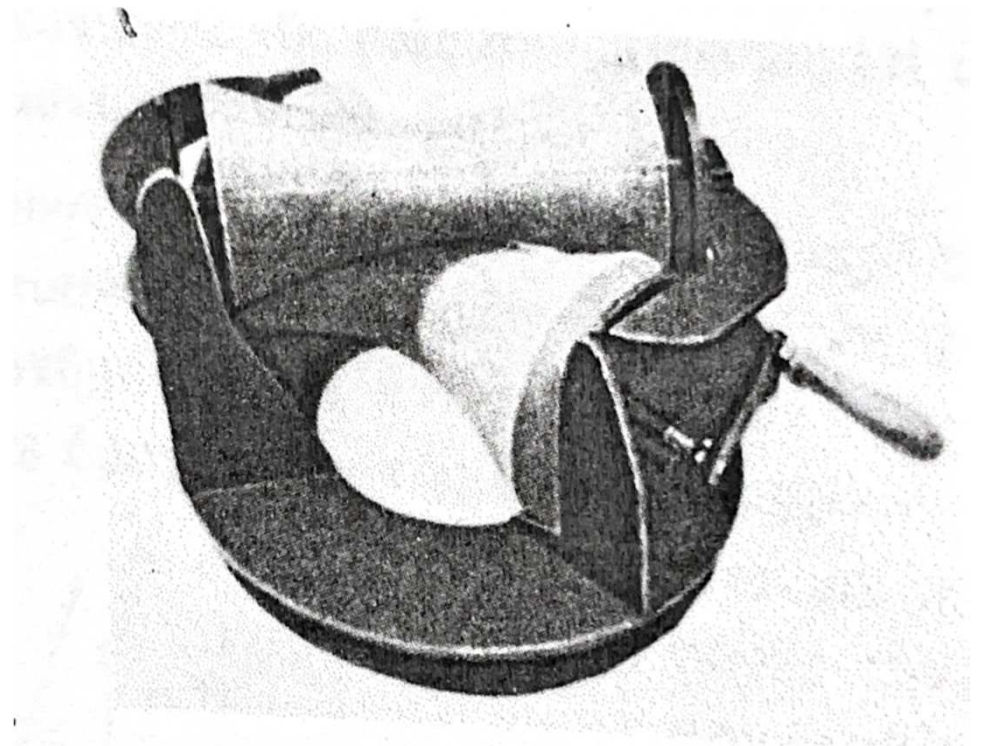
- Έχει εξίσωση
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$
- Τα a , β είναι τα μήκη των πρωτευόντων ημιαξόνων της έλλειψης, κατά την οποία το μονόχωνο υπερβολοειδές τέμνεται από το επίπεδο xy



Μονόχωνο υπερβολοειδές 3/3

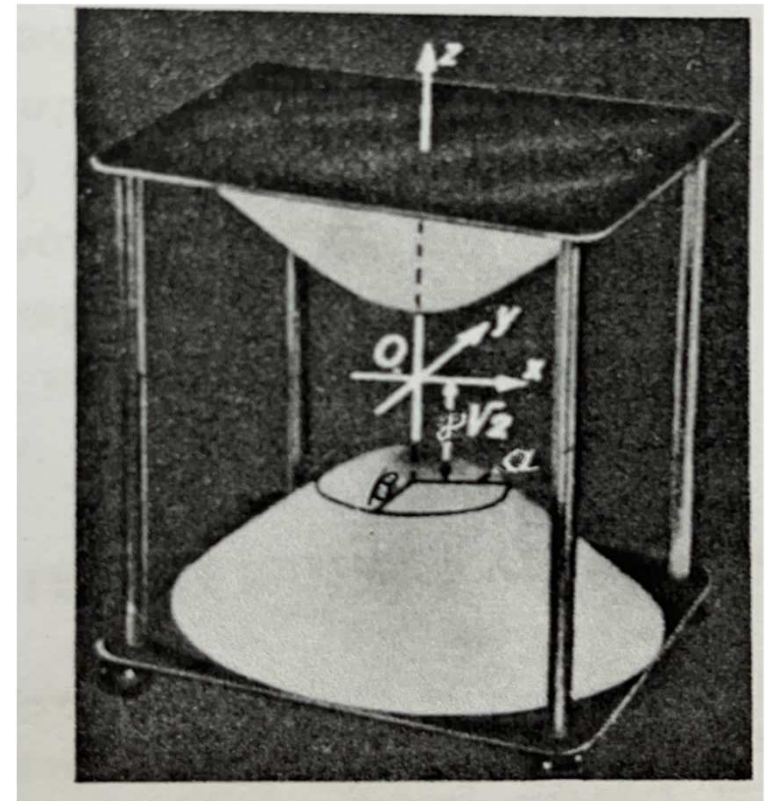
Όπως και οι κώνοι, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μετάδοση των στροφών ενός κύματος σε οποιοδήποτε άλλο κύμα (υπερβολικοί οδοντωτοί τροχοί, κωνικοί τροχοί).

Βλέπε υπόδειγμα μετάδοσης της στροφής, με χρήση 2 μονόχωνων υπερβολοειδών



Δίχωνο υπερβολοειδές

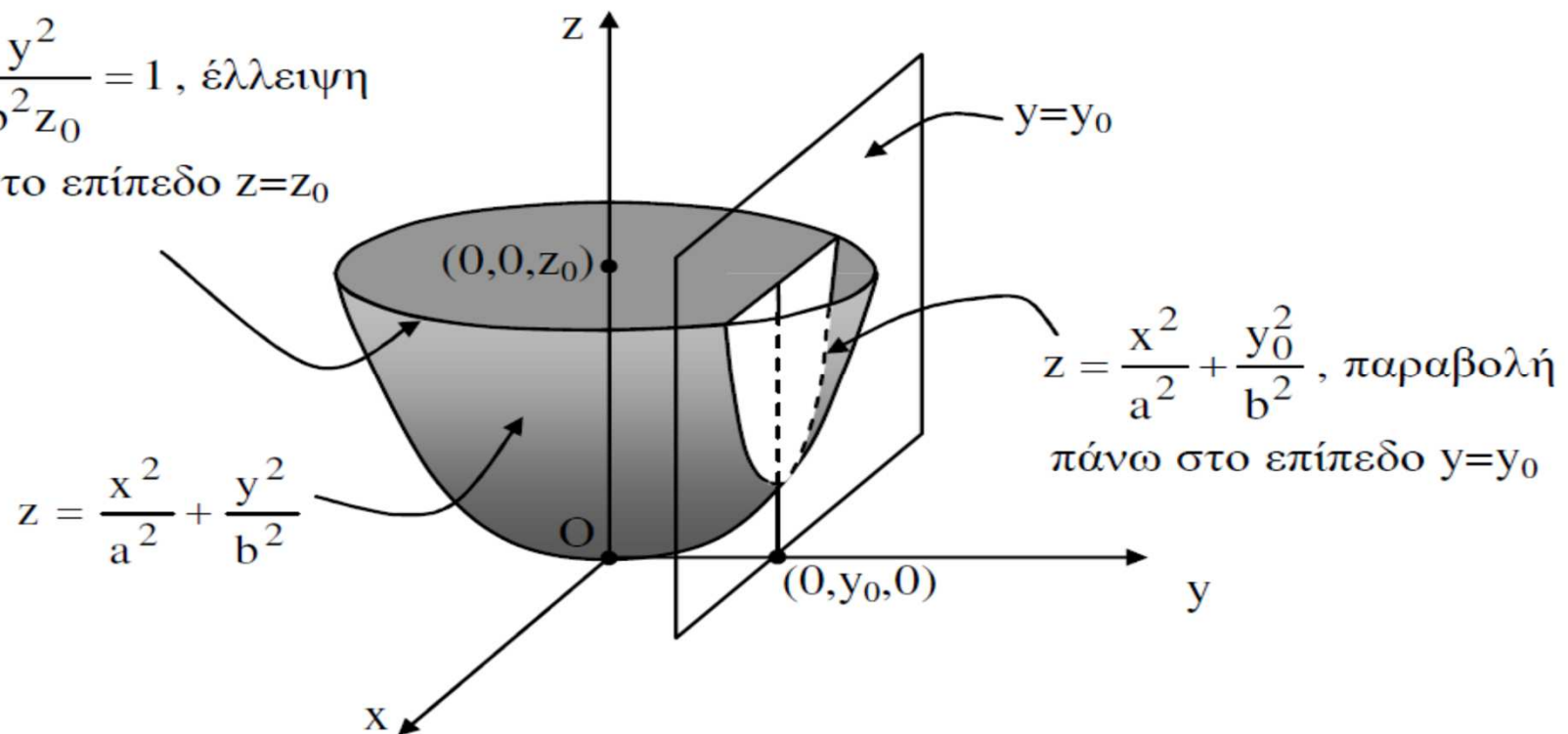
- Αποτελείται από δύο τμήματα, συμμετρικά ως προς τα επίπεδα των συντεταγμένων
- Είναι επιφάνεια με κέντρο
- Μπορεί να μετασχηματισθεί σε υπερβολοειδές εκ περιστροφής και αντιστρόφως



Ελλειπτικό παραβολοειδές 1/2

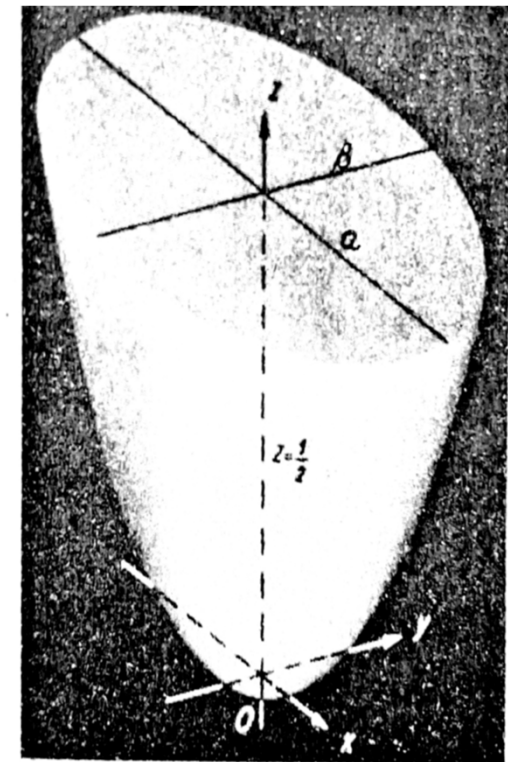
$$\frac{x^2}{a^2 z_0} + \frac{y^2}{b^2 z_0} = 1, \text{ έλλειψη}$$

πάνω στο επίπεδο $z=z_0$



Ελλειπτικό παραβολοειδές 2/2

- Κάθε τομή του από επίπεδο **παράλληλο** στον άξονα zz' είναι μία παραβολή
- Κάθε τομή του από επίπεδο **μη παράλληλο** στον άξονα zz' είναι μία έλλειψη
- Κείται συμμετρικά ως προς τα επίπεδα xOz και yOz
- Οι άξονες Ox , Oy είναι παράλληλοι των ημιαξόνων a , b της έλλειψης
- Αν $a=b$ τότε έχω παραβολοειδές εκ περιστροφής



Παραβολοειδές εκ περιστροφής

- Παράγεται υπό μια παραβολή που εκτελεί πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα της.
- Οι τομές του από επίπεδα κάθετα στον άξονα του, είναι κύκλοι, με κέντρα πάνω στον άξονα αυτόν

