

Τα 23 προβλήματα Hilbert

Νάτσος Ιωάννης
(AM 8040)

- Ο David Hilbert (1862–1943) ο μοναδικός μαθηματικός του 20ού αιώνα, στη ζωή του οποίου απεικονίζεται ολόκληρη η ιστορία των μαθηματικών της εποχής του
- Για τον Hilbert *«στα μαθηματικά δεν υπάρχει δεν θα μάθουμε ποτέ»*
- Στον τάφο του είναι γραμμένη η φράση που χαρακτήριζε τη ζωή και τη φιλοσοφία του *«Πρέπει να μάθουμε και θα μάθουμε»*

- Γεννήθηκε την 23.01.1862 και φοίτησε στο γυμνάσιο και πανεπιστήμιο της περιοχής Königsberg
- Ήταν το 1^ο από τα 2 παιδιά του Ότο και της Maria Therese (Erdtmann) Hilbert
- *«Τι ευτυχία να είναι κανείς μαθηματικός σήμερα! Παντού τα μαθηματικά ανθίζουν και καινούργιοι βλαστοί ξεπετάγονται»*

- Υποστήριζε ότι, κάθε μαθηματικό πρόβλημα έπρεπε να έχει λύση ή απόδειξη ότι είναι αδύνατο. Πίστευε ότι, στα μαθηματικά δεν υπάρχει άγνωστο.
- Ξεκίνησε την παρουσίαση των 23 προβλημάτων του με έναν μεγάλο πρόλογο, θέτοντας κάποιες ερωτήσεις:
- *«Ποιος από εμάς δεν θα ήταν ευτυχής να σηκώσει το πέπλο πίσω από το οποίο βρίσκεται κρυμμένο το μέλλον; Να ρίξει μία ματιά στην επερχομένη πρόοδο της επιστήμης και να μάθει τα μυστικά αυτής της ανάπτυξης στους επόμενους αιώνες;»*

Στις 08.08.1900, στη διάρκεια του 2^{ου} Παγκόσμιου μαθηματικού συνεδρίου στο Παρίσι (Σορβόνη), έκανε μια σημαντικότετη διάλεξη, όπου διατύπωσε τα 23 άλυτα προβλήματα

1) Το πρόβλημα του Cantor για τους πληθικούς αριθμούς του συνεχούς. Η υπόθεση του συνεχούς.

Ο Cantor, ασχολήθηκε με τον πληθάριθμο των άπειρων συνόλων. Εισήγαγε τον πληθάριθμο, για να μπορέσει να συγκρίνει το μέγεθος των άπειρων συνόλων.

Απέδειξε ότι ο πληθάριθμος του N , είναι αυστηρά μικρότερος από του R .

2) Η συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής

Ναδειχθεί ότι τα αξιώματα της αριθμητικής δεν είναι αντιφατικά, δηλαδή ότι ένα πεπερασμένο πλήθος λογικών βημάτων που βασίζεται πάνω σε αυτά, δεν θα οδηγήσει ποτέ σε αντιφατικά αποτελέσματα.

3) Η ισότητα των όγκων 2 τετράεδρων, με ίσες βάσεις και ίσα ύψη

Αναφέρθηκε στο θεώρημα του Ευκλείδη που λέει «*Δύο τριγωνικές πυραμίδες με ίσα ύψη, έχουν η μία προς την άλλη ίσους λόγους με τους λόγους των βάσεών τους*».

4) Το πρόβλημα της ευθείας γραμμής, ως η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων

Το πρόβλημα αυτό, κατηγορήθηκε ότι δεν ήταν σαφώς διατυπωμένο και ότι δεν γίνεται να πάρει μία σαφή απάντηση.

5) Η αρχή του Lie για συνεχείς ομάδες μετασχηματισμών, χωρίς την υπόθεση της διαφορισιμότητας των συναρτήσεων που ορίζουν τις ομάδες

Θέτει το ερώτημα αν μπορεί να αποφευχθεί η υπόθεση της διαφορισιμότητας, των συναρτήσεων που ορίζουν τις συνεχείς ομάδες μετασχηματισμών. Το 1952, δόθηκε θετική απάντηση.

6) Αξιοματοποίηση της μαθηματικής φυσικής

Η κλασική μηχανική αξιοματοποιήθηκε από τον **Hamel** το 1903, η θερμοδυναμική από τον **Καραθεοδωρή** το 1909, η ειδική σχετικότητα από τον **Robb** το 1914, η θεωρία πιθανοτήτων από τον **Kolmogorov** το 1930, η κβαντική θεωρία πεδίου από τον **Whiteman** στα τέλη της δεκαετίας του 1950.

7) Η αρρητότητα και η υπερβατικότητα κάποιων συγκεκριμένων αριθμών

Θέτει το ερώτημα αν μία έκφραση παριστάνει πάντα έναν υπερβατικό ή τουλάχιστον έναν άρρητο αριθμό.

Η απάντηση ήταν καταφατική και δόθηκε ανεξάρτητα από τους **Gelfond** (1934) και **Schneider** (1935).

8) Προβλήματα πρώτων αριθμών. (Η κατανομή των πρώτων και η υπόθεση του Riemann)

Είναι από τα πιο γνωστά προβλήματα και παραμένει άλυτο ως σήμερα. Η υπόθεση αυτή, έχει επαληθευτεί για περίπου 1,5 δις ρίζες, παρόλα αυτά η τελική αυστηρή απόδειξη δεν έχει δοθεί ακόμα.

Αν μπορούσε να βρεθεί η κατανομή των πρώτων αριθμών, ίσως να μπορούσαμε να αποδείξουμε αυστηρά ένα σωρό προβλήματα.

9) Η απόδειξη του γενικότερου νόμου της αντιστροφής σε κάθε αριθμητικό σώμα

Λύθηκε μερικώς, από τον **Emil Artin** το 1923.

10) Καθορισμός της επιλυσιμότητας μιας διοφαντικής εξίσωσης

Ζητούσε, αν για κάθε διοφαντική εξίσωση με ρητούς συντελεστές, υπάρχει διαδικασία σύμφωνα με την οποία καθορίζεται με πεπερασμένο πλήθος βημάτων, κατά πόσο η εξίσωση αυτή έχει ακέραιες λύσεις.

Το **1970**, αποδείχθηκε από τον **Yuri Matiyasevich** ότι δεν υπάρχει τέτοια μέθοδος.

11) Τετραγωνικές μορφές, με τυχαίους αλγεβρικούς συντελεστές

Με δεδομένη μία τετραγωνική εξίσωση με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών και με αλγεβρικούς συντελεστές, να βρεθούν οι ακέραιες ή οι κλασματικές λύσεις της, που ανήκουν στο αλγεβρικό σύνολο που καθορίζουν οι συντελεστές της.

Ο **Hasse** (1923–1924) το έλυσε για τους ρητούς αριθμούς και ο **Siegel** (δεκαετία του 1930) για τους ακεραίους.

12) Επέκταση του θεωρήματος Kronecker για τα αβελιανά σώματα σε οποιοδήποτε ρητό αλγεβρικό σύνολο

Το θεώρημα Kronecker είναι «Κάθε αβελιανό αριθμητικό σώμα που προκύπτει από το σύνολο των ρητών αριθμών, παράγεται από μία σύνθεση σωμάτων ριζών της μονάδας».

13) Αδυναμία λύσης της γενικής εξίσωσης 7^{ου} βαθμού, θεωρώντας συναρτήσεις 2 μόνο μεταβλητών

Ο Hilbert στη συνέχεια θέτει το εξής ερώτημα: *Είναι πιθανό οι λύσεις των εξισώσεων 7^{ου} βαθμού να είναι συναρτήσεις των συντελεστών τους, που να μη μπορούν να κατασκευαστούν από μία πεπερασμένη διαδοχή συναρτήσεων με 2 μόνο μεταβλητές;*

14) Απόδειξη ότι ορισμένα πλήρη συστήματα συναρτήσεων είναι πεπερασμένα

Λύθηκε το 1962, από τον **Masayoshi Nagata**.

15) Αυστηρή θεμελίωση της απαριθμητικής γεωμετρίας του Schubert

Να γίνει αυστηρός προσδιορισμός των αριθμών της απαριθμητικής γεωμετρίας, με ακριβέστερο προκαθορισμό των ορίων ισχύος τους και ιδιαίτερα των αριθμών που βρήκε ο Schubert.

Μία αυστηρά μαθηματική θεωρία οφείλεται στον **Van Der Waerden**, στα τέλη της δεκαετίας του 1930.

16) Πρόβλημα στην τοπολογία αλγεβρικών καμπυλών και επιφανειών

Χωρίζεται σε 2 επιμέρους προβλήματα.

Το 1^ο: Να ερευνηθούν οι σχετικές θέσεις των κλάδων των αλγεβρικών καμπυλών βαθμού n και των αλγεβρικών επιφανειών.

Το 2^ο: Να καθοριστεί το άνω φράγμα για τον αριθμό των οριακών κύκλων, σε πολυωνυμικά διανυσματικά σώματα βαθμού n και να μελετηθούν οι σχετικές θέσεις τους.

17) Παράσταση ορισμένων μορφών ως αθροίσματα τετραγώνων

Αν κάθε πολώνυμο πολλών μεταβλητών το οποίο παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές στους πραγματικούς, μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα τετραγώνων ρητών συναρτήσεων.

Λύθηκε για πραγματικά–κλειστά σώματα από τον **Emil Artin**, το 1927.

18) Διαμέριση του χώρου σε ίσα πολύεδρα

Είναι χωρισμένο σε 3 ερωτήματα. Το 1910, ο **Ludwig Bieberbach** απέδειξε ότι μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ομάδων, πλακοστρώνουν τον χώρο των n διαστάσεων.

Το 1928, ο **Karl Reinhardt** έλυσε το πρόβλημα των θεμελιωδών περιοχών στις 3 διαστάσεις και το 1935 ο **Kurt Hensel** στις 2 διαστάσεις.

Το 3^ο ερώτημα αφορούσε το πρόβλημα της στοίβαξης των σφαιρών ή άλλων συγκεκριμένων σχημάτων. Λύθηκε στο τέλος του 20^{ου} αιώνα με τη βοήθεια υπολογιστών.

19) Είναι πάντα οι λύσεις των κανονικών προβλημάτων του λογισμού μεταβολών αναλυτικές;

Λύθηκε για 1^η φορά από τον **Serge Bernstein** το 1904.

20) Το γενικό πρόβλημα των οριακών τιμών

Έχουν όλα τα κανονικά προβλήματα μεταβολής λύση, με την προϋπόθεση της ικανοποίησης κάποιων υποθέσεων που σχετίζονται με τις οριακές συνθήκες και ότι αν χρειαστεί θα επεκταθεί κατάλληλα η έννοια της λύσης;

21) Απόδειξη της ύπαρξης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, που έχουν προκαθορισμένη μονοδρομική ομάδα

Λύθηκε αρνητικά, από τους **Anosov** και **Bolibrukh** το 1994

22) Ομογενοποίηση των αναλυτικών σχέσεων μέσω αυτομορφικών συναρτήσεων

Λύθηκε από τον **Paul Koebe** το 1907 και ανεξάρτητα από τον **Henri Poincare** το 1907

23) Περαιτέρω ανάπτυξη των μεθόδων του λογισμού των μεταβολών

Είναι μία παρότρυνση στη μαθηματική κοινότητα να ασχοληθεί με τον λογισμό των μεταβολών, έναν κλάδο των μαθηματικών που ως τότε, δεν είχε τύχει γενικής εκτίμησης

Σας ευχαριστώ πάρα πολύ για την προσοχή σας