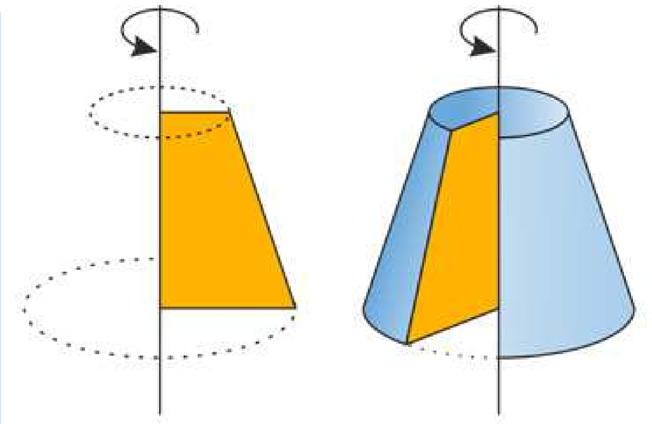
ΑΕΝ Ασπροπύργου Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία

Όγκοι στερεών εκ περιστροφής



Σκλαβενίτης Γεώργιος (ΑΜ 8975)

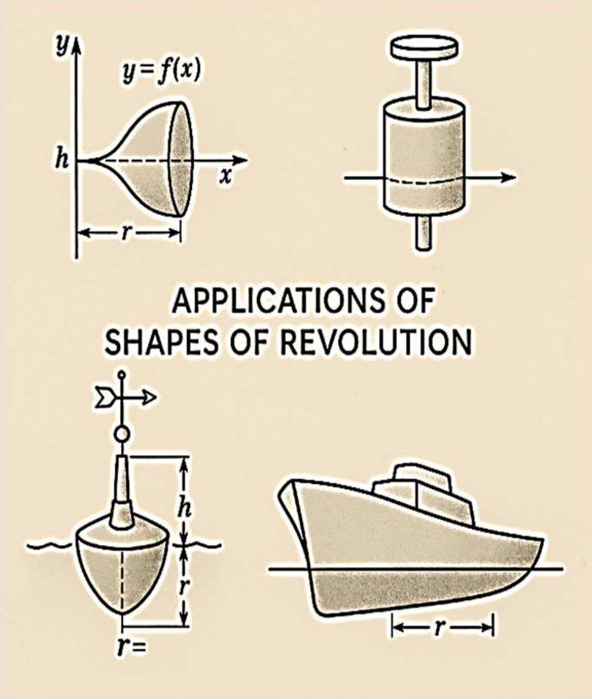
02.03.2026

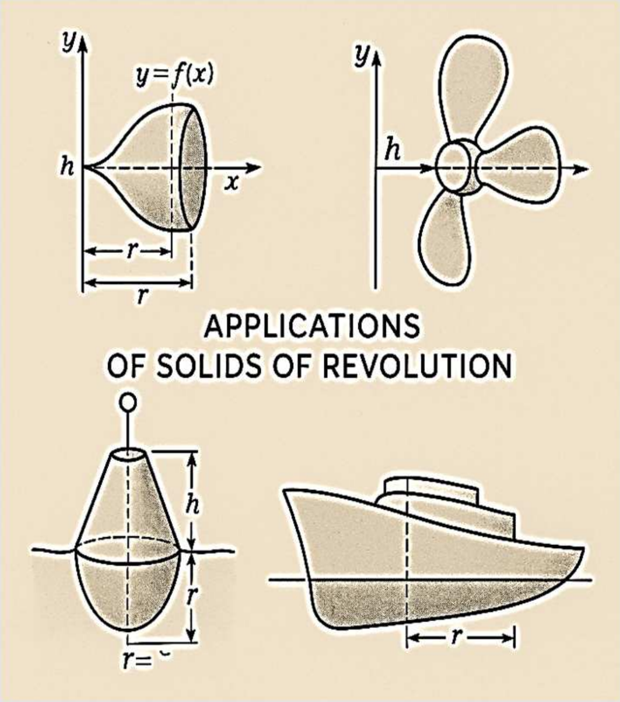
Εφαρμογές των όγκων των στερεών εκ περιστροφής, στη ναυτιλία 1/2

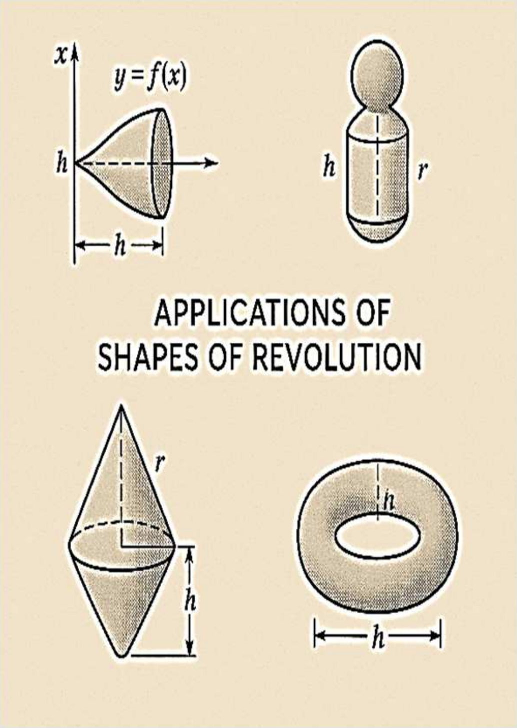
- Υπολογισμός της χωρητικότητας των δεξαμενών
- Σχεδιασμός των σκαφών και υπολογισμός της χωρητικότητας του φορτίου
- Ανάλυση και βελτιστοποίηση του σχήματος της πρύμνης και του κύτους
- Σχεδιασμός των εξαρτημάτων και του εξοπλισμού του πλοίου
- Αποθήκευση και μεταφορά των αερίων και των υγρών, σε κυλινδρικές δεξαμενές
- Διαχείριση των καυσίμων και αποθήκευση τους
- Αναλυτική μελέτη της σταθερότητας του πλοίου
- Σχεδίαση των σωληνώσεων (piping design)
- Υπολογισμός του όγκου του έρματος (ballast water)
- Υπολογισμός της φόρτωσης των σιλό και των κυλινδρικών δοχείων
- Σχεδιασμός της προπέλας και των εξαρτημάτων της έλικας
- Σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες στη ναυτική χαρτογραφία

Εφαρμογές των όγκων των στερεών εκ περιστροφής, στη ναυτιλία 2/2

- Σχεδιασμός των δεξαμενών πίεσης
- Προσομοίωση πλημμύρας (damage stability)
- Κατασκευή των αντλιών και των συστημάτων ροής

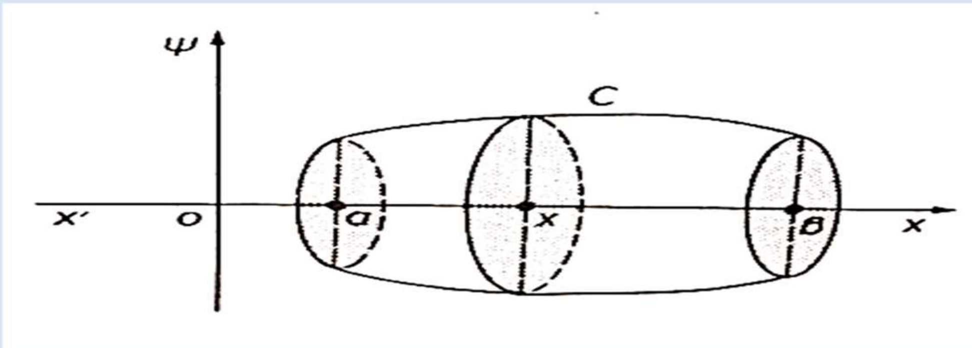






$1^{η}$ περίπτωση

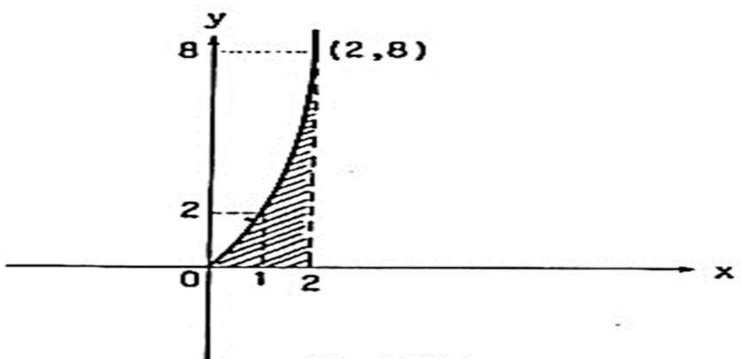
Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$, έστω η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f, όπου η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$. Αν η f στραφεί, περί τον άξονα xx', τότε το επίπεδο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ τον άξονα xx' και τη C, θα σχηματίσει ένα «στερεό εκ περιστροφής». Κάθε τομή αυτού του στερεού με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα xx' στο $[\alpha,\ \beta]$ είναι κύκλος ακτίνας $y = f(x)$, άρα το εμβαδόν είναι $E(x) = \pi f^2(x)$ για $x \in [\alpha,\ \beta]$. Ο όγκος αυτού του στερεού εκ περιστροφής, είναι $V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi f^2(x)dx$



Εφαρμογή της περίπτωσης 1

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = 2x^2$ περί τον άξονα xx' και περικλείεται από τις ευθείες $x = 0,\ x = 2$

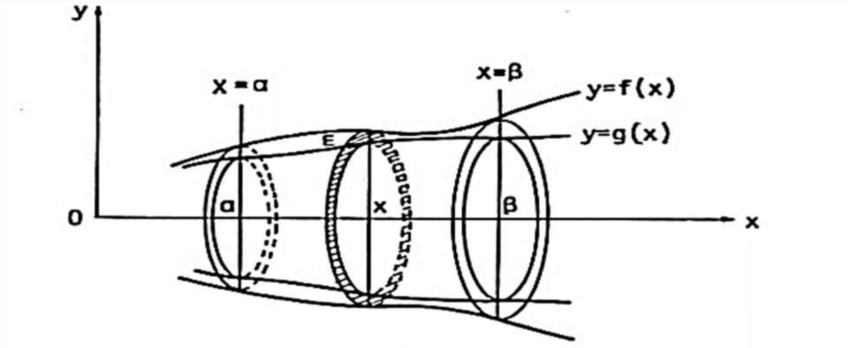
Λύση



Σχ.8.17

Ο όγκος του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης περί τον xx' άξονα, δίνεται από τον τύπο $V = \pi \int_0^2 \left(2x^2\right)^2 dx = 4\pi \int_0^2 x^4 dx = 4\pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{5}$

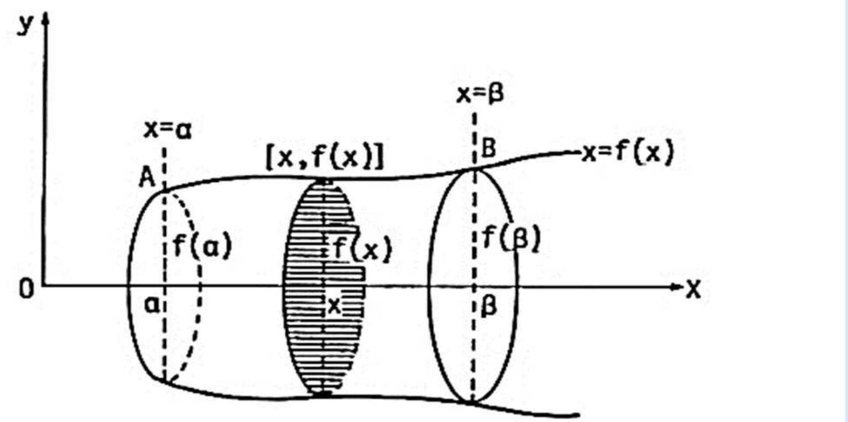
$2^{η}$ περίπτωση



Σχ.8.16

να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή, περί τον άξονα xx', δύο καμπυλών $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ ορισμένων και συνεχών στο $\left[\alpha,\ \beta\right]$ με $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$, $\forall x\in\left[\alpha,\ \beta\right]$ και από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ Ο xx' άξονας δεν ανήκει στο χωρίο Ε (Σχήμα 8.16) Αν φέρω ένα επίπεδο κάθετο στον xx' άξονα, τότε η τομή του στερεού σώματος και του επιπέδου είναι από κυκλικός δακτύλιος εμβαδού $\mathrm{A}(x)=\pi\left(f^{2}(x)-g^{2}(x)\right)$

Άρα, $V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left[f^{2}(x)-g^{2}(x)\right]dx$



Εφαρμογή της περίπτωσης 2

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την πλήρη περιστροφή, περί τον άξονα xx', της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y = -x^2 - 3x + 6$ και από την ευθεία $x + y = 3$

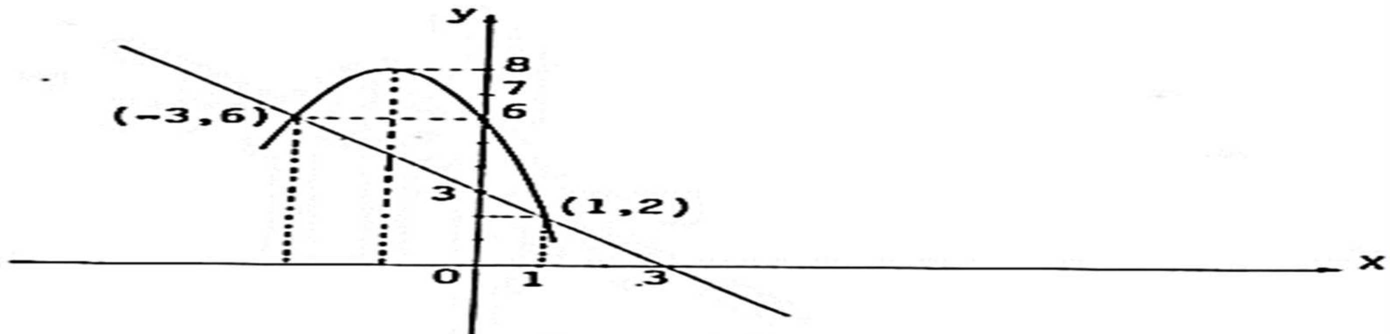
Λύση

Τα σημεία τομής της καμπύλης με την ευθεία είναι τα $(-3,\ 6)$ και $(1,\ 2)$

$\forall x \in [-3,\ 1]$ η παραβολή είναι πάνω από την ευθεία. Άρα,

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \left[\left(-x^2 - 3x + 6\right)^2 - (x-3)^2 \right] dx =$$

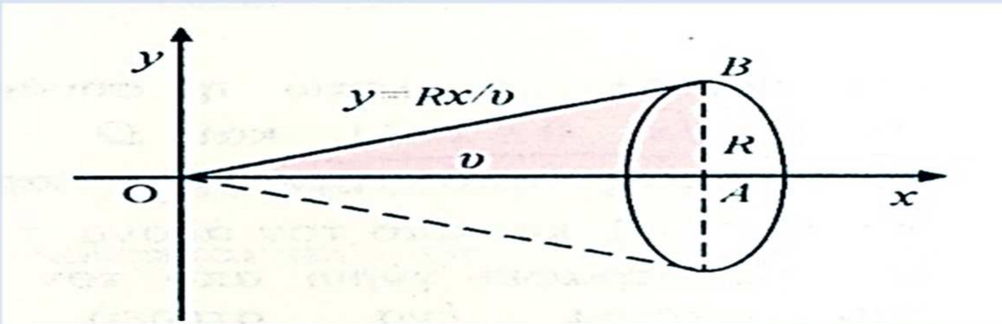
$$\pi \int_{-3}^{1} \left(x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27 \right) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{6x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{30x^2}{2} + 27x \right]_{-3}^{1} = 119,5\pi$$



Σχ.8.20

Όγκος του ορθού κώνου

Εύρεση του όγκου V του κώνου που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα xx' του ορθογωνίου τριγώνου OAB , αν $\upsilon = \mathrm{OA}$ και $\mathrm{AB} = R$



Λύση

Τα σημεία $\mathrm{O}(0,\ 0)$ και $\mathrm{B}(\upsilon,\ R)$ ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα OB που έχει κλίση $\lambda = \dfrac{R}{\upsilon}$ Συνεπώς, το ευθύγραμμο τμήμα OB περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{R}{\upsilon}x$ με $x \in [0,\ \upsilon]$

Άρα, $V = \pi \int_0^{\upsilon} \left(\dfrac{R}{\upsilon}x\right)^2 dx = \pi \dfrac{R^2}{\upsilon^2}\int_0^{\upsilon} x^2\ dx = \pi \dfrac{R^2}{\upsilon^2}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{\upsilon} = \pi \dfrac{R^2}{\cancel{\upsilon^2}}\dfrac{\upsilon^3}{3} = \dfrac{\pi R^2 \upsilon}{3}$

Όγκος του κόλουρου κώνου

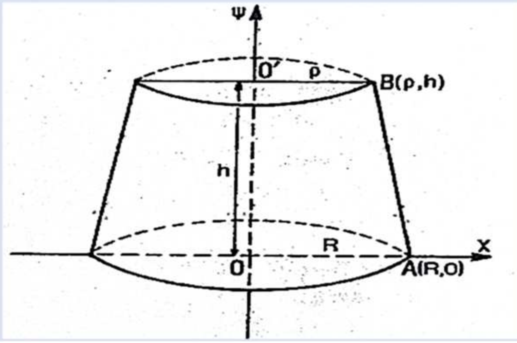
Εύρεση όγκου του ορθού κυκλικού κόλουρου κώνου με ακτίνες βάσεων R, r και ύψος h

Λύση

Το στερεό σώμα, παράγεται από την περιστροφή του τραπεζίου ΟΑΒΟ΄ περί τον κατακόρυφο άξονα yy'. Είναι $A(R,0), B(\rho,h)$. Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι $\frac{x-R}{\rho-R}=\frac{y-0}{h-0} \Leftrightarrow x=\frac{Rh-(\rho-R)y}{h}$ ή διαφορετικά $y=\frac{(x-R)h}{\rho-R}$ και για $y_1=0$, $y_2=h$ ισχύει ότι $V=\pi\int_0^h \frac{(Rh-(R-\rho)y)^2}{h^2}dy=$

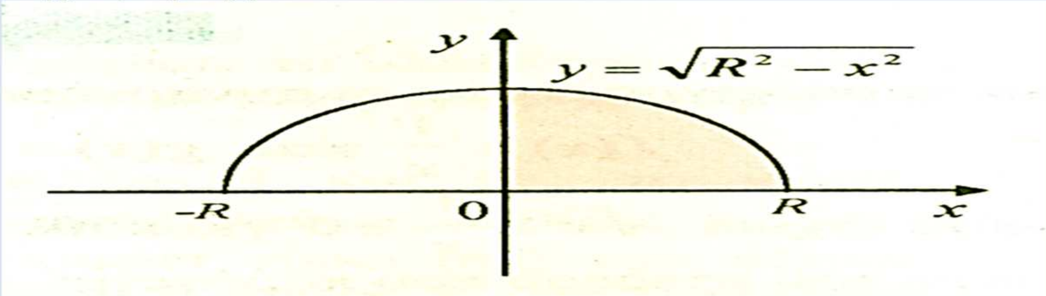
$$\frac{\pi}{h^2}\int_0^h\left(R^2h^2-2Rh(R-\rho)y+(R-\rho)^2y^2\right)dy=$$

$$=\cdots=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+\rho^2+R\rho\right)$$



Όγκος της σφαίρας

Εύρεση του όγκου V της σφαίρας με ακτίνα R



Λύση

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ με $x\in[-R,\ R]$

Έστω Ω το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, από τον άξονα xx' και από τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=R$

Το στερεό σώμα που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου Ω, περί τον άξονα xx', έχει όγκο

$$V'=\pi\int_0^R\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx=\pi\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{2\pi R^3}{3}$$

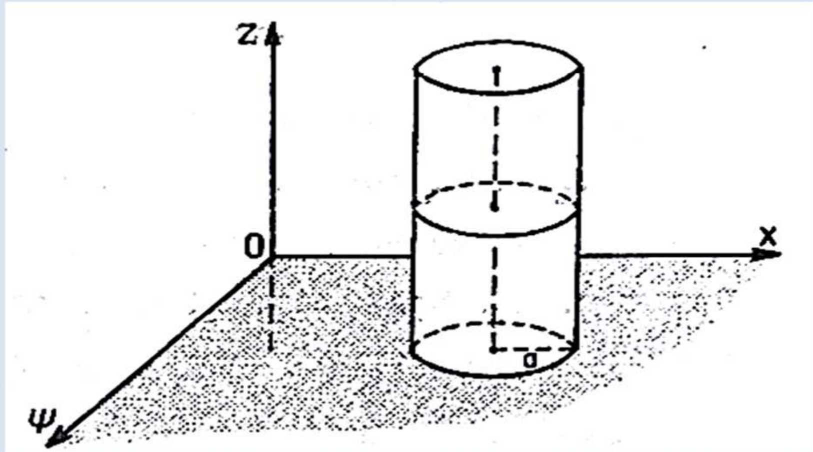
Συνεπώς, ο ζητούμενος όγκος V της σφαίρας είναι $V=2V'=\dfrac{4\pi R^3}{3}$

Όγκος του κυλίνδρου

Εύρεση όγκου του κυλίνδρου με ακτίνα βάσης r και ύψος h

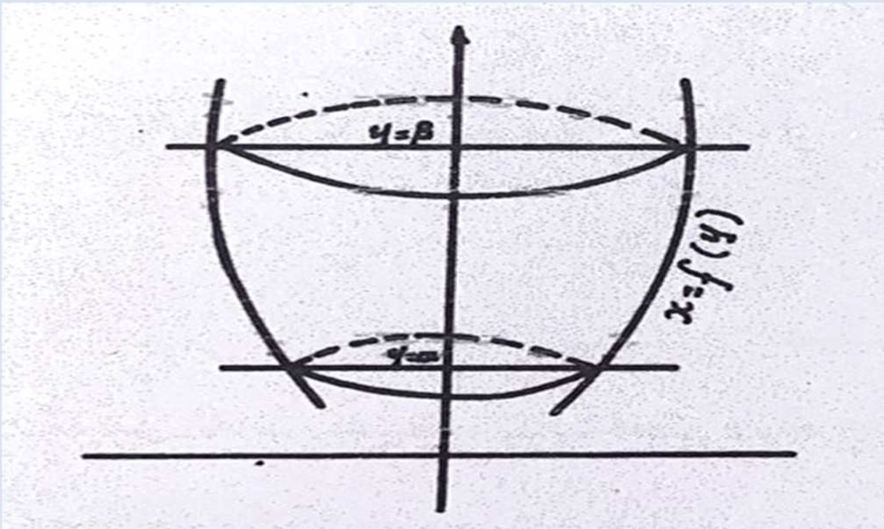
Λύση

Θεωρώ το επίπεδο xOy ως επίπεδο της μιας βάσης του κυλίνδρου. Ο τύπος $V=\int_{\alpha}^{\beta}E(t)\,dt$ δίνει $V=\int_{0}^{h}\pi r^2 dt=\pi r^2\int_{0}^{h}dt=\pi r^2[t]_0^h=\pi r^2 h$



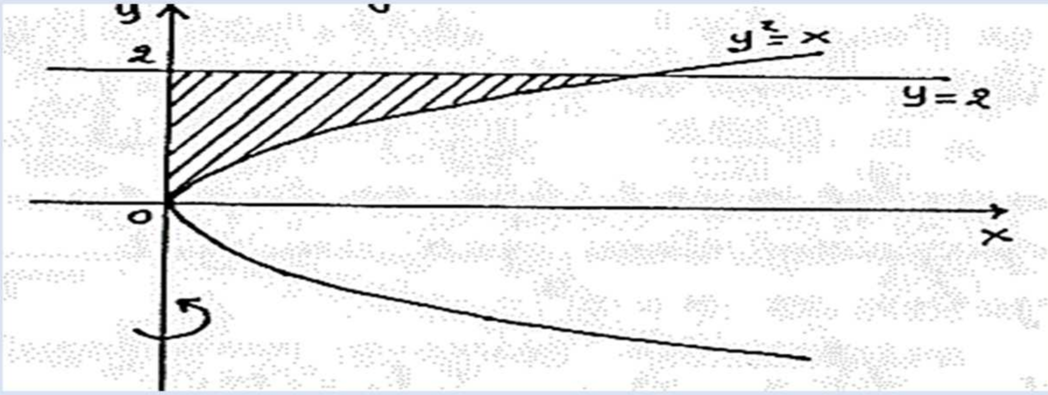
$3^{η}$ περίπτωση

Αν το χωρίο που ορίζεται από την καμπύλη $x=f\left(y\right)$ και από τις ευθείες $y=\alpha$ και $y=\beta$ περιστραφεί περί τον άξονα yy', τότε σχηματίζεται ένα στερεό σώμα εκ περιστροφής με όγκο $V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}x^2dy$



Εφαρμογή της περίπτωσης 3

Εύρεση του όγκου V του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα yy', του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y^2 = x$, από την ευθεία με εξίσωση $y = 2$ και από τον άξονα yy'



Λύση

Είναι $V = \pi \int_0^2 x^2 \, dy = \pi \int_0^2 y^4 \, dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^5 = \frac{32\pi}{5}$

4^{η} περίπτωση σε πολικές συντεταγμένες

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται όταν η κυκλοειδή καμπύλη $x=\theta-sin\theta,\ y=1-cos\theta$, περιστραφεί περί τον άξονα xx'

Λύση

Η μεταβολή της γωνίας είναι από 0 έως 2π και ο όγκος δίνεται από τον τύπο

$$V=\pi\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{2\pi}\left(1-cos\theta\right)^2 d\left(\theta-sin\theta\right)=\pi\int_0^{2\pi}\left(1-cos\theta\right)^2(1-cos\theta)\,d\theta=$$

$$\pi\int_0^{2\pi}\left(1-cos\theta\right)^3 d\theta=\pi\int_0^{2\pi}\left(1-3cos\theta+3cos^2\theta-cos^3\theta\right)\,d\theta=5\pi^2$$

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας