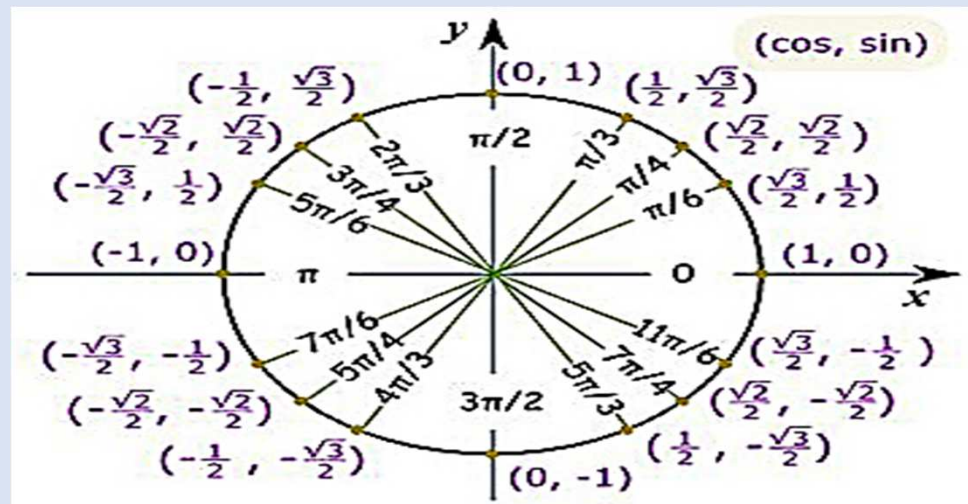




ΑΕΝ Ασπροπύργου Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς τόξων



Καρβέλης Βασίλειος (AM 9229)

Εφαρμογές των τύπων του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων

- Στη φυσική
- Στην ηλεκτροτεχνία
- Στην τεχνολογία των επικοινωνιών
- Στη μηχανική
- Στην οπτική
- Στις ταλαντώσεις
- Στην ακουστική και στη μουσική

Εφαρμογές στη ναυτιλία των τύπων του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων

- Πλοήγηση πάνω σε μέγιστο κύκλο
- Υπολογισμός της αρχικής και της τελικής πορείας
- Αστροναυτιλία
- Τριγωνισμός ραντάρ – Στίγμα από αποστάσεις / διόπτρευση
- Μετατροπές μεταξύ πλάτους, απόκλισης και ανύψωσης
- Υπολογισμοί ανέμων και ρευμάτων
- Χρήση σε ηλεκτρονικά ναυτιλιακά συστήματα

Απόδειξη ταυτοτήτων με τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου

- Υπολογισμός του $\cos(\alpha-\beta)$
- Υπολογισμός του $\cos(\alpha+\beta)$

- Υπολογισμός του $\sin(\alpha+\beta)$
- Υπολογισμός του $\sin(\alpha-\beta)$

- Υπολογισμός της $\tan(\alpha+\beta)$
- Υπολογισμός της $\tan(\alpha-\beta)$

- Υπολογισμός της $\cot(\alpha+\beta)$
- Υπολογισμός της $\cot(\alpha-\beta)$

Απόδειξη ταυτοτήτων των τριγωνομετρικών αριθμών του τόξου 2α

- Υπολογισμός του $\sin(2\alpha)$
- Υπολογισμός του $\cos(2\alpha)$
- Υπολογισμός του $\tan(2\alpha)$
- Υπολογισμός του $\cot(2\alpha)$

Απόδειξη ταυτοτήτων των τριγωνομετρικών αριθμών του τόξου 3α

- Υπολογισμός του $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$
- Υπολογισμός του $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
- Υπολογισμός της $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$
- Υπολογισμός της $\cot(\alpha+\beta+\gamma)$

Τύποι του Simpson

Από

- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha \cos\beta+\sin(\alpha-\beta)\cos\beta$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha \cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$

Προκύπτουν

- $\sin((\mu+1)\alpha)=\sin(\mu\alpha)\cos\alpha+\sin((\mu-1)\alpha)\cos\alpha$
- $\cos((\mu+1)\alpha)=\cos(\mu\alpha)\cos\alpha-\sin((\mu-1)\alpha)\sin\alpha$

Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας α από το $\cos\alpha$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}} \\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha = -\sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}} \\ \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}} \\ \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}} \end{array} \right\},$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha = -\sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}} \\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}} \end{array} \right\}$$

Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας $\alpha/2$ από το $\cos \alpha$

αντικαθιστώ την γωνία α με $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ και προκύπτουν

$$\begin{aligned} \bullet \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}} & \bullet \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} \\ \bullet \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} & \bullet \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο ομώνυμων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, σε γινόμενο ή πηλίκο

| | |
|-------------|--|
| Σε γινόμενο | <ul style="list-style-type: none"> • $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ • $\sin A - \sin B = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$ • $\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ • $\cos A - \cos B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$ |
| Σε πηλίκο | <ul style="list-style-type: none"> • $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cdot \cos B}$ • $\tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cdot \cos B}$ • $\cot A + \cot B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B}$ • $\cot A - \cot B = \frac{\sin(B-A)}{\sin A \cdot \sin B}$ |

Μετασχηματισμός των γινομένων σε αθροίσματα ή σε διαφορές

- $\sin(A+B)+\sin(A-B)= 2\sin A \cos B$
- $\sin(A+B)-\sin(A-B)= 2\sin B \cos A$

- $\cos(A+B)+\cos(A-B)= 2\cos A \cos B$
- $\cos(A-B)-\cos(A+B)= 2\sin A \sin B$

Τριγωνομετρικές σχέσεις μεταξύ των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ

$$\sin(A + B) = \sin \Gamma$$

$$\sin(B + \Gamma) = \sin A$$

$$\sin(\Gamma + A) = \sin B$$

$$\sin\left(\frac{A + B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{B + \Gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\Gamma + A}{2}\right) = \sin\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$\cos(A + B) = -\cos \Gamma$$

$$\cos(B + \Gamma) = -\cos A$$

$$\cos(\Gamma + A) = -\cos B$$

$$\cos\left(\frac{A + B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{B + \Gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\Gamma + A}{2}\right) = \sin\left(\frac{B}{2}\right)$$

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας

