Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Τα συστήματα αυτόματου ελέγχου είναι ηλεκτρονικά, μηχανολογικά ή υπολογιστικά συστήματα που χρησιμοποιούνται για τον αυτοματοποιημένο έλεγχο της λειτουργίας διαφόρων τύπων μηχανών, διεργασιών ή συστημάτων. Η βασική λειτουργία τους είναι να διατηρούν ή να επιτυγχάνουν ένα επιθυμητό επίπεδο απόδοσης με τη ρύθμιση διάφορων παραμέτρων, αυτομάτως αντιδρώντας σε αλλαγές του περιβάλλοντος ή των συνθηκών λειτουργίας.

Τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου χωρίζονται κυρίως σε δύο κατηγορίες: ανοιχτού και κλειστού βρόχου. Τα συστήματα ανοιχτού βρόχου δεν λαμβάνουν υπόψη την επίδραση της εξόδου στην είσοδο, δηλαδή δεν υπάρχει ανατροφοδότηση. Αντίθετα, τα συστήματα κλειστού βρόχου χρησιμοποιούν ανατροφοδότηση, δηλαδή η πληροφορία από την έξοδο του συστήματος χρησιμοποιείται για την ρύθμιση της εισόδου, βελτιώνοντας έτσι την ακρίβεια και την σταθερότητα.

Εφαρμογές

Βιομηχανικός Αυτοματισμός

- **Συστήματα Αυτοματοποιημένης Παραγωγής**: Ρομποτικοί βραχίονες και αυτοματοποιημένες γραμμές συναρμολόγησης στην αυτοκινητοβιομηχανία και στην ηλεκτρονική βιομηχανία που προγραμματίζονται να εκτελούν συγκεκριμένες εργασίες με υψηλή ακρίβεια και ταχύτητα.
- **Συστήματα Ελέγχου Διεργασιών**: Αυτοματοποιημένος έλεγχος της ροής υλικών, της θερμοκρασίας, της πίεσης και άλλων παραμέτρων σε χημικές διεργασίες και διυλιστήρια.

Αυτοματισμοί στον Τομέα των Μεταφορών

- **Συστήματα Αυτόματου Πιλότου σε Αεροσκάφη**: Χρησιμοποιούνται για την αυτόματη πλοήγηση και έλεγχο της πτήσης, μειώνοντας το φόρτο εργασίας των πιλότων και βελτιώνοντας την ασφάλεια.
- **Συστήματα Δυναμικής Πλοήγησης για Πλοία**: Επιτρέπουν στα πλοία να διατηρούν τη θέση τους ή να κινούνται με ακρίβεια χωρίς συνεχή επέμβαση του ανθρώπου, χρησιμοποιώντας συστήματα GPS και αισθητήρες.

Εφαρμογές στον Τομέα της Ενέργειας

- **Συστήματα Ελέγχου για Αιολικά Πάρκα**: Ρυθμίζουν αυτόματα τη γωνία των πτερυγίων και τη λειτουργία της γεννήτρια ανάλογα με τις συνθήκες του ανέμου για βέλτιστη παραγωγή ενέργειας.
- **Αυτοματοποιημένοι Σταθμοί Υδροηλεκτρικής Ενέργειας**: Χρησιμοποιούν αισθητήρες και συστήματα ελέγχου για να ρυθμίζουν τη ροή του νερού και την παραγωγή ενέργειας ανάλογα με τη ζήτηση.

Εφαρμογές στον Τομέα της Υγείας

- **Συστήματα Αυτόματης Διαχείρισης Ινσουλίνης**: Φορητές συσκευές που μετρούν συνεχώς τα επίπεδα γλυκόζης στο αίμα και διοχετεύουν αυτόματα την κατάλληλη δόση ινσουλίνης.
- **Αυτοματοποιημένα Συστήματα Χορήγησης Φαρμάκων**: Συστήματα που διαχειρίζονται την ακριβή δοσολογία και χρονοπρογραμματισμό της χορήγησης φαρμάκων σε ασθενείς, βελτιστοποιώντας τη θεραπευτική αποτελεσματικότητα και μειώνοντας τα λάθη.

Εφαρμογές στην Κατοικία

- **Έξυπνα Συστήματα Κλιματισμού**: Αυτοματοποιούν τη ρύθμιση της θερμοκρασίας μέσα στο σπίτι, βασιζόμενα σε προτιμήσεις, προγράμματα και πραγματικούς μετεωρολογικούς συνθήκες, βελτιστοποιώντας την άνεση και την ενεργειακή αποδοτικότητα.
- **Αυτοματισμοί Σπιτιού για Φωτισμό και Ασφάλεια**: Συστήματα που ελέγχουν τον φωτισμό, τις κλειδαριές των πορτών, τις κάμερες ασφαλείας και άλλες ηλεκτρονικές συσκευές, βελτιώνοντας την ασφάλεια, την άνεση και την ενεργειακή αποδοτικότητα.

Εφαρμογές στα Πλοία

Στα πλοία, τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου βρίσκουν εκτενή εφαρμογή για τη βελτίωση της ασφάλειας, της αποδοτικότητας και της οικονομικότητας των λειτουργιών. Κάποιες από αυτές τις εφαρμογές περιλαμβάνουν:

1) **Συστήματα αυτόματης πλοήγησης (Autopilots)**: Χρησιμοποιούνται για την αυτόματη κατεύθυνση του πλοίου προς μια προκαθορισμένη διαδρομή, μειώνοντας την ανάγκη για συνεχή χειροκίνητο έλεγχο από τον κυβερνήτη.

2) **Συστήματα δυναμικής θέσης (Dynamic Positioning Systems)**: Επιτρέπουν στο πλοίο να διατηρεί σταθερό προσανατολισμό στη θάλασσα, χρησιμοποιώντας τα συστήματα πρόωσης και αντιδρώντας σε αλλαγές του ανέμου, του κύματος και των θαλάσσιων ρευμάτων. Τα δεδομένα αυτά λαμβάνονται συνεχώς από συστήματα GPS, γυροσκόπια και άλλους αισθητήρες.

3) **Συστήματα ελέγχου μηχανής**: Αυτοματοποιούν την λειτουργία των κινητήρων του πλοίου, βελτιστοποιώντας την κατανάλωση καυσίμου και την απόδοση, καθώς και παρέχοντας προστασία από βλάβες.

   a) ***Αισθητήρες και Μετρητές***

   Αισθητήρες τοποθετούνται σε κρίσιμα σημεία της μηχανής και του συστήματος πρόωσης για να παρέχουν συνεχή παρακολούθηση των παραμέτρων λειτουργίας όπως η θερμοκρασία, η πίεση, η ταχύτητα περιστροφής, η ροή καυσίμου και άλλες κρίσιμες μετρήσεις. Αυτά τα δεδομένα αποστέλλονται σε πραγματικό χρόνο στο σύστημα ελέγχου.

   b) ***Κεντρική Μονάδα Ελέγχου***

   Η κεντρική μονάδα ελέγχου (Control Unit) αποτελεί τον εγκέφαλο του συστήματος. Αναλύει τα δεδομένα που λαμβάνονται από τους αισθητήρες και αποφασίζει για την ανάγκη προσαρμογής των ρυθμίσεων της μηχανής για να διασφαλιστεί η βέλτιστη λειτουργία της.

   c) ***Εκτελεστικοί Μηχανισμοί***

   Με βάση τις εντολές της κεντρικής μονάδας ελέγχου, εκτελεστικοί μηχανισμοί όπως ηλεκτρονικά ελεγχόμενοι βαλβίδες, πνευματικοί ενεργοποιητές και άλλα εξαρτήματα προσαρμόζουν τη λειτουργία της μηχανής. Αυτό μπορεί να περιλαμβάνει τη ρύθμιση της παροχής καυσίμου, την προσαρμογή της ταχύτητας της μηχανής ή την ενεργοποίηση συστημάτων ψύξης.

   d) ***Ανατροφοδότηση και Προσαρμογή***

Το σύστημα διαθέτει έναν μηχανισμό ανατροφοδότησης που επιτρέπει τη συνεχή προσαρμογή των ενεργειών του βάσει των τρεχουσών συνθηκών λειτουργίας. Αυτό εξασφαλίζει ότι η μηχανή λειτουργεί αποδοτικά και με την καλύτερη δυνατή οικονομία καυσίμου, ενώ ταυτόχρονα την προστατεύει από την υπερφόρτωση (overload) και άλλες πιθανές βλάβες.

e) ***Διασύνδεση με άλλα Συστήματα***

Τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου της μηχανής συχνά διασυνδέονται με άλλα συστήματα εντός του πλοίου, όπως το σύστημα διαχείρισης της γέφυρας, παρέχοντας συνολική εποπτεία και ελέγχους για την ασφαλή και αποδοτική λειτουργία του πλοίου.

4) **Συστήματα ελέγχου φορτίου και σταθερότητας**: Αυτοματοποιούν τη διαχείριση του φορτίου και της σταθερότητας του πλοίου, διασφαλίζοντας ότι το φορτίο μεταφέρεται ασφαλώς και ότι το πλοίο διατηρεί την ισορροπία του στη θάλασσα. Αυτός ο έλεγχος επιτυγχάνεται μέσω μιας συνδυασμένης προσέγγισης που περιλαμβάνει τόσο την χειροκίνητη επιθεώρηση και εκτίμηση από το πλήρωμα όσο και τη χρήση προηγμένων συστημάτων αυτοματοποιημένου ελέγχου.

a) Αρχική Ανάλυση και Προγραμματισμός

i) **Προγραμματισμός Φορτίου**: Πριν από τη φόρτωση, γίνεται μια λεπτομερής ανάλυση του φορτίου που πρόκειται να μεταφερθεί, περιλαμβάνοντας το βάρος, τον όγκο, τον τύπο και την κατανομή του φορτίου στα διάφορα αποθηκευτικά χώρους του πλοίου.

ii) **Αξιολόγηση Σταθερότητας**: Χρησιμοποιούνται μοντέλα και λογισμικό για να υπολογιστεί η επίδραση του φορτίου στη σταθερότητα του πλοίου. Αυτό περιλαμβάνει την αξιολόγηση του κέντρου βάρους, την κατανομή του φορτίου και την επιρροή τους στην ικανότητα του πλοίου να αντέχει σε κλίσεις και να διατηρεί την ευστάθειά του.

b) Εφαρμογή Αυτοματοποιημένων Συστημάτων

i) **Συστήματα Ελέγχου Φορτίου**: Μοντέρνα πλοία είναι εξοπλισμένα με αυτοματοποιημένα συστήματα ελέγχου φορτίου που παρακολουθούν και

ρυθμίζουν την κατανομή του φορτίου στη διάρκεια της φόρτωσης, της εκφόρτωσης και της πλεύσης.

ii) **Συστήματα Διαχείρισης Σταθερότητας**: Αυτά τα συστήματα χρησιμοποιούν δεδομένα από αισθητήρες και αναλύσεις για να ελέγχουν συνεχώς τη σταθερότητα του πλοίου και να κάνουν προσαρμογές όπου χρειάζεται. Αυτό μπορεί να περιλαμβάνει τη ρύθμιση της ποσότητας των υγρών στις δεξαμενές ισορροπίας ή την αναδιαταξη του φορτίου.

c) Πρακτικές Διαχείρισης

i) **Εκπαίδευση και Διαδικασίες**: Το πλήρωμα του πλοίου εκπαιδεύεται εκτενώς στην καλή διαχείριση του φορτίου και τη σταθερότητα, με τη χρήση τόσο χειροκίνητων διαδικασιών όσο και αυτοματοποιημένων συστημάτων.

ii) **Εφεδρικά Σχέδια και Έκτακτη Ανάγκη**: Σε περίπτωση αποτυχίας των συστημάτων ή αντιμετώπισης εκτάκτων καταστάσεων, το πλοίο έχει εφεδρικά σχέδια για τη διαχείριση του φορτίου και τη διατήρηση της σταθερότητας.

d) Τεχνολογίες και Εργαλεία

i) **Λογισμικό Διαχείρισης Φορτίου και Σταθερότητας**: Ειδικευμένο λογισμικό χρησιμοποιείται για την προσομοίωση και την ανάλυση διαφόρων σεναρίων φορτίου και σταθερότητας, βοηθώντας στον σχεδιασμό της ασφαλέστερης διαχείρισης φορτίου.

5) **Αυτοματοποιημένα συστήματα πυρασφάλειας και ασφάλειας**: Παρακολουθούν συνεχώς τις συνθήκες ασφαλείας και μπορούν να ενεργοποιήσουν αυτόματα συστήματα καταστολής πυρκαγιάς ή να ειδοποιήσουν το πλήρωμα για πιθανούς κινδύνους. Η λειτουργία τους βασίζεται σε μια σειρά από συνδεδεμένα συστήματα και συσκευές που εργάζονται αρμονικά για την πρόληψη και τον έλεγχο των πυρκαγιών.

a) Ανίχνευση Πυρκαγιάς

Αισθητήρες Καπνού και Θερμότητας: Εγκαταστάθηκαν σε στρατηγικά σημεία σε όλο το πλοίο, όπως καμπίνες, κουζίνες, μηχανοστάσια και αποθηκευτικούς χώρους, αυτοί οι αισθητήρες μπορούν να ανιχνεύσουν την παρουσία καπνού ή ανώμαλα υψηλές θερμοκρασίες, που είναι δείκτες της αρχής μιας πυρκαγιάς.

b) **Συστήματα Προειδοποίησης**

Συναγερμοί και Ειδοποιήσεις: Όταν ανιχνευθεί πυρκαγιά, τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου ενεργοποιούν ηχητικούς και οπτικούς συναγερμούς για να ειδοποιήσουν το πλήρωμα και τους επιβάτες, επιτρέποντας την άμεση εκκένωση των επικίνδυνων περιοχών και την εφαρμογή διαδικασιών πυρασφάλειας.

c) **Συστήματα Καταστολής Πυρκαγιάς**

Συστήματα Αυτόματης Πυρόσβεσης: Τα πλοία εξοπλίζονται με συστήματα πυρόσβεσης που μπορεί να περιλαμβάνουν ψεκασμό νερού, αφρού ή χρήση αερίων που αποσκοπούν στην καταστολή της πυρκαγιάς χωρίς ανθρώπινη παρέμβαση. Συστήματα όπως οι εγκαταστάσεις CO2 είναι συνήθως εγκατεστημένα σε κρίσιμες περιοχές όπως το μηχανοστάσιο.

d) **Διαχείριση και Ελεγχόμενη Απελευθέρωση**

Κεντρικό Σύστημα Ελέγχου: Ένα κεντρικό σύστημα ελέγχου παρακολουθεί όλους τους αισθητήρες και τα συστήματα προειδοποίησης και πυρόσβεσης. Αυτό επιτρέπει στο πλήρωμα να αξιολογεί την κατάσταση, να παίρνει ενημερωμένες αποφάσεις και να ελέγχει την απελευθέρωση των συστημάτων καταστολής πυρκαγιάς όποτε είναι απαραίτητο.

e) **Αυτοματοποιημένη Εκκένωση**

Συστήματα Εκκένωσης και Διάσωσης: Σε περίπτωση πυρκαγιάς, τα συστήματα αυτοματοποιημένου ελέγχου μπορούν επίσης να συνδράμουν στη διαδικασία εκκένωσης, διευκολύνοντας την οργανωμένη και ασφαλή μετακίνηση ατόμων προς τις ζώνες συγκέντρωσης και τα σημεία εκκίνησης των σωσιβίων.

6) **Συστήματα αυτοματοποιημένης επικοινωνίας και πληροφόρησης**: Αυτοματοποιούν την επεξεργασία και την ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ του πλοίου και των παράκτιων σταθμών ή άλλων πλοίων, βελτιστοποιώντας την λήψη αποφάσεων και την πλοήγηση.

Ιστορική Αναδρομή Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

Η ιστορία των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου εκτείνεται από την αρχαιότητα έως τη σύγχρονη εποχή, ακολουθώντας την εξέλιξη της τεχνολογίας και την αυξανόμενη κατανόηση του ανθρώπου για τους αυτοματισμούς. Ας δούμε μια σύντομη αναδρομή:

Αρχαιότητα και Μεσαίωνας

- **3ος αιώνας π.Χ.**: Οι πρώτες γνωστές εφαρμογές αυτοματισμού περιλαμβάνουν τα έργα του Κτησίβιου, έναν Έλληνα μηχανικό και μαθηματικό, ο οποίος σχεδίασε αυτοματοποιημένα υδραυλικά συστήματα, όπως ωρολόγια νερού.
- **1ος αιώνας μ.Χ.**: Ηρώνας του Αλεξανδρείας σχεδίαζε αυτόματες συσκευές και μηχανισμούς, όπως αυτόματες πόρτες ναού και αυτοματοποιημένα θεατρικά μηχανήματα.

Βιομηχανική Επανάσταση (18ος-19ος αιώνας)

- **1788**: Ο James Watt αναπτύσσει τον κυκλοφορητή του ατμού με έναν κυκλικό μηχανισμό ελέγχου για την αυτόματη ρύθμιση της ταχύτητας των ατμομηχανών.
- **19ος αιώνας**: Η εισαγωγή των Jacquard looms, που χρησιμοποιούσαν καρτέλες για τον αυτόματο έλεγχο των υφαντικών μηχανών, αποτελεί ένα πρώιμο παράδειγμα προγραμματισμού.

20ός αιώνας: Η Εποχή των Ηλεκτρονικών Συστημάτων

- **1948**: Ο Norbert Wiener δημοσιεύει το "Cybernetics", θεμελιώνοντας τη θεωρία του ελέγχου και της επικοινωνίας στα ζωντανά όντα και τις μηχανές.
- **1950ς-1960ς**: Η ανάπτυξη των πρώτων ψηφιακών υπολογιστών και η εισαγωγή των μικροελεγκτών παρέχουν τα εργαλεία για πιο προηγμένα συστήματα αυτοματοποιημένου ελέγχου.

21ος αιώνας: Η Εποχή της Ψηφιακής και Τεχνητής Νοημοσύνης

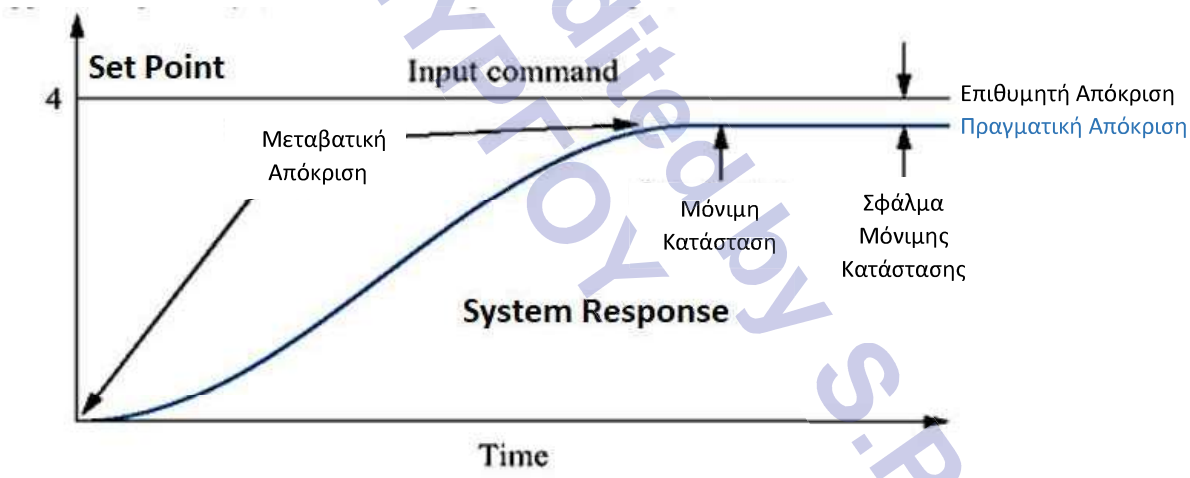
- **Σήμερα**: Η ευρεία χρήση του Διαδικτύου των Πραγμάτων (IoT), της τεχνητής νοημοσύνης (AI) και της μηχανικής μάθησης έχει επιτρέψει την ανάπτυξη εξαιρετικά προηγμένων συστημάτων αυτομάτου ελέγχου. Αυτά τα συστήματα είναι ικανά να προσαρμόζονται και να βελτιώνονται με την πάροδο του χρόνου, βρίσκοντας εφαρμογή σε αμέτρητους τομείς, από την αυτόματη παραγωγή και τις έξυπνες μεταφορές έως την υγειονομική περίθαλψη και την οικοδομική αυτοματοποίηση.

Ορισμός και Συμπεριφορά Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

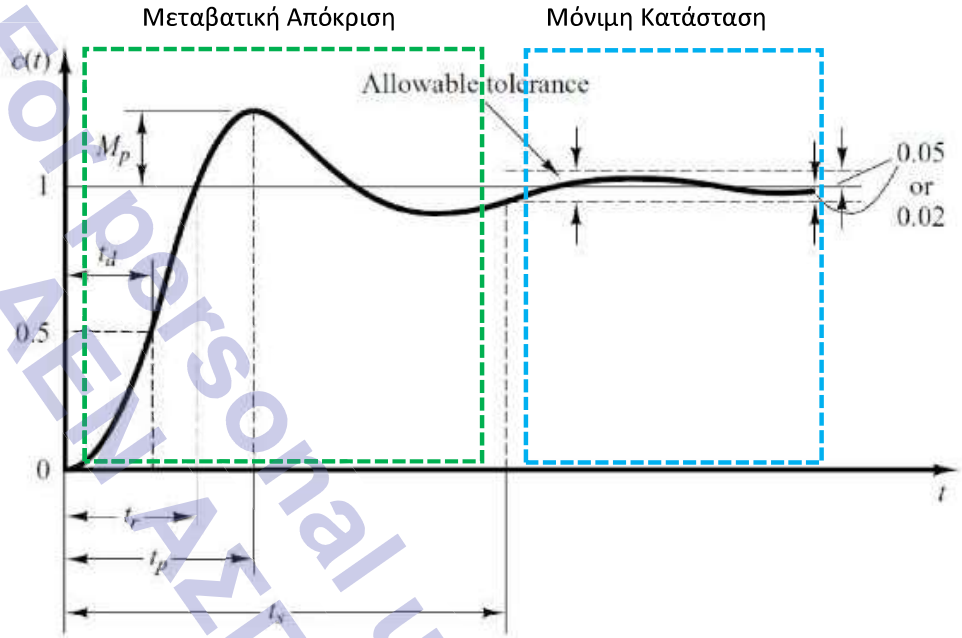
Τελικά τι είναι ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου;

- Ο αυτοματισμός ***μοντελοποιεί τα διάφορα συστήματα ως μαύρα κουτιά*** με είσοδο και έξοδο, χρησιμοποιώντας μεθοδολογίες και μαθηματικά εργαλεία της επεξεργασίας σήματος.
- Ως **είσοδος** θεωρείται ένα σήμα, αναλογικό ή ψηφιακό, συλλεγόμενο από κάποια πηγή δεδομένων.
- Τα ενδιάμεσα κουτιά αναπαριστούν τις ***διάφορες μεταβατικές καταστάσεις σήματος***, και περιγράφονται με μαθηματικές συναρτήσεις, τις συναρτήσεις μεταφοράς.
- Μία ***συνάρτηση μεταφοράς*** προσδιορίζει ένα σύστημα ή υποσύστημα και τον τρόπο που μεταβάλλεται η έξοδος με κάθε σήμα εισόδου. ***Ουσιαστικά «μεταφέρει» το σήμα εισόδου*** (δηλαδή την εντολή) ***στην έξοδο***.
- Όταν μια ή περισσότερες μεταβλητές εξόδου ενός συστήματος πρέπει να ακολουθήσουν την τιμή κάποιας αναφοράς που μεταβάλλεται με τον χρόνο, χρειάζεται να προστεθεί ένας ελεγκτής που να χειρίζεται τις τιμές των σημάτων εισόδου έως ότου επιτευχθεί η επιθυμητή έξοδος.

Επιτυγχάνεται γρήγορα και χωρίς λάθος η επιθυμητή έξοδος ;



Εικόνα 1: Απόκριση ενός συστήματος (1ης Τάξης) στο πεδίο του χρόνου



Εικόνα 2: Απόκριση ενός συστήματος (2ης Τάξης) στο πεδίο του χρόνου

Η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο και την συνάρτηση μεταφοράς. Εμείς ενδιαφερόμαστε για την απόκριση μόνιμης κατάστασης του συστήματος ως συνάρτηση της παραμέτρου εισόδου. Προσοχή χρειάζεται επίσης και η συμπεριφορά του συστήματος κατά την Μεταβατική Απόκριση.

Ορολογία:

Set Point: Επιθυμητή Απόκριση (είσοδος)

Transient Response: Μεταβατική Απόκριση

Steady State: Μόνιμη Κατάσταση (έξοδος)

Steady State Error: Σφάλμα Μόνιμης Κατάστασης.

Να σημειωθεί ότι το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση ενός ***ευσταθούς*** συστήματος ***κλειστού βρόχου*** είναι συνήθως πολύ μικρότερο από το αντίστοιχο σφάλμα που εμφανίζεται σε ένα σύστημα ***ανοικτού βρόχου***.

Χρόνος Καθυστέρησης / Delay Time (t_d): Η περίοδος από τη στιγμή που γίνεται μια αλλαγή στην είσοδο μέχρι τη στιγμή που η έξοδος αρχίζει να αλλάζει σημαντικά (π.χ στο 50% της τελικής τιμής).

Χρόνος Ανόδου / Rise Time (t_r): Ο χρόνος που χρειάζεται η έξοδος ενός συστήματος για να αυξηθεί από ένα χαμηλότερο ποσοστό (συχνά το 10%) της τελικής της τιμής σε ένα υψηλότερο ποσοστό (συνήθως το 90%) μετά από μια αλλαγή στην είσοδο.

Χρόνος Κορυφής / Peak Time (t_p): Ο χρόνος από την αρχική στιγμή εφαρμογής μιας είσοδου έως τη στιγμή που η έξοδος του συστήματος φτάνει στην πρώτη της μέγιστη (ή κορυφαία) τιμή, δηλαδή το υψηλότερο σημείο της απόκρισης πριν αρχίσει να επιστρέφει προς την επιθυμητή ή τη μόνιμη κατάσταση.

Ο χρόνος κορυφής είναι ιδιαίτερα σημαντικός σε συστήματα ελέγχου που παρουσιάζουν υπερβολική απόκριση (overshoot), δηλαδή όταν η έξοδος του συστήματος υπερβαίνει προσωρινά την επιθυμητή τιμή προτού σταθεροποιηθεί. Ο χρόνος κορυφής είναι ένας δείκτης της ταχύτητας ανταπόκρισης του συστήματος, καθώς μικρότεροι χρόνοι κορυφής υποδηλώνουν γρηγορότερη απόκριση στις αλλαγές της εισόδου.

Σε πολλές εφαρμογές, ιδίως σε εκείνες που απαιτούν γρήγορη απόκριση χωρίς μεγάλο overshoot, ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος κορυφής μαζί με τη μείωση του υπερβολικού μεγέθους της απόκρισης.

Χρόνος Εγκατάστασης / Settling Time (t_s): Ο χρόνος που χρειάζεται η έξοδος ενός συστήματος ελέγχου να σταθεροποιηθεί και να παραμείνει εντός ενός συγκεκριμένου εύρους γύρω από την τελική τιμή ή την επιθυμητή τιμή, μετά από μια αλλαγή ή διαταραχή στην είσοδο. Το εύρος αυτό συνήθως ορίζεται ως ένα ποσοστό (π.χ., ±2% ή ±5%) της επιθυμητής τιμής.

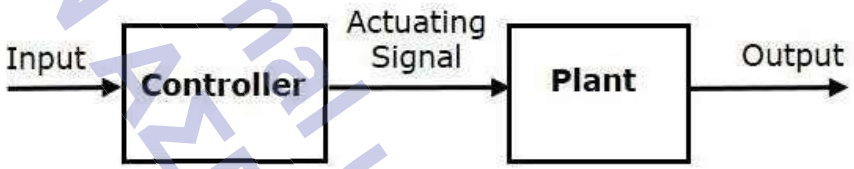
Παρουσία Ανάδρασης/Ανατροφοδότησης στα Συστήματα Ελέγχου

Ας σκεφτούμε, πώς διαφέρει ο τρόπος που αντιδρούν ή ελέγχουν τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου. Υπάρχει κάποια διαφορά στο πώς λαμβάνουν ή χρησιμοποιούν πληροφορίες για να ελέγξουν μια διεργασία;

Η διαφορά έγκειται στην ύπαρξη ανάδρασης/ανατροφοδότησης. Οπότε, βασιζόμενοι στην ύπαρξη ή όχι ανάδρασης/ανατροφοδότησης, υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες συστημάτων αυτόματου ελέγχου.

1. Ανοιχτού βρόγχου (απουσία ανάδρασης/ανατροφοδότησης):

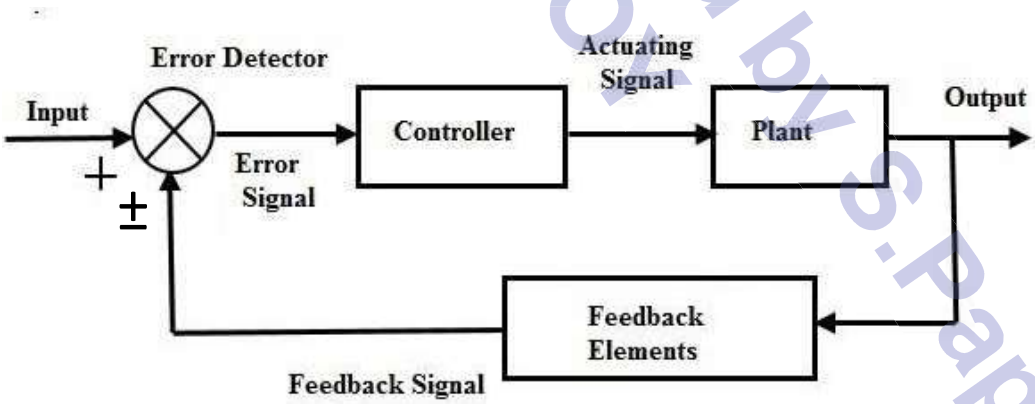
- Τα συστήματα ανοιχτού βρόχου δεν λαμβάνουν υπόψη την επίδραση της εξόδου στην είσοδο, δηλαδή δεν υπάρχει ανατροφοδότηση. Παρουσιάζουν ευκολία στην υλοποίηση, έχουν χαμηλό κόστος συντήρησης, όμως έχουν ευαισθησία σε εξωτερικές διαταραχές και αλλαγές στις συνθήκες λειτουργίας. Επιπλέον δεν μπορούν να αντιδράσουν σε αλλαγές ή σφάλματα που εμφανίζονται στη διαδικασία.



Εικόνα 3: Λειτουργικό Διάγραμμα Συστήματος Ελέγχου Ανοιχτού Βρόγχου (Open Loop Block Diagram)

2. Κλειστού βρόγχου (παρουσία ανάδρασης/ανατροφοδότησης):

Τα συστήματα κλειστού βρόχου χρησιμοποιούν ανατροφοδότηση, δηλαδή η πληροφορία από την έξοδο του συστήματος χρησιμοποιείται για την ρύθμιση της εισόδου, βελτιώνοντας έτσι την ακρίβεια και την σταθερότητα.



Εικόνα 4: Λειτουργικό Διάγραμμα Συστήματος Ελέγχου Κλειστού Βρόγχου (Closed Loop Block Diagram)

Στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου με κλειστό βρόγχο, η ανατροφοδότηση (feedback) είναι ένας κρίσιμος μηχανισμός που επιτρέπει στο σύστημα να προσαρμόζει τη λειτουργία του

βάσει των πραγματικών εξόδων ή αποτελεσμάτων. Η ανατροφοδότηση μπορεί να είναι θετική (positive feedback) ή αρνητική (negative feedback), με κάθε μία να έχει διαφορετικό ρόλο και εφαρμογή.

2.1. Σύστημα Ελέγχου με Αρνητική Ανάδραση

Σε ένα σύστημα ελέγχου με αρνητική ανάδραση, η έξοδος του συστήματος παρακολουθείται και συγκρίνεται με την επιθυμητή τιμή (***set point***). Οποιαδήποτε απόκλιση από την επιθυμητή τιμή (***error***) οδηγεί σε μια αντίδραση ώστε να έρθει η τιμή της εξόδου πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή.

Η αρνητική ανάδραση στοχεύει στην σταθεροποίηση του συστήματος, μειώνοντας τις αποκλίσεις και βελτιώνοντας την ακρίβεια και την αξιοπιστία. Χρησιμοποιείται ευρέως σε συστήματα ελέγχου για διάφορες εφαρμογές, όπως ο θερμοστάτης σε ένα σύστημα θέρμανσης ή ψύξης.

2.2. Σύστημα Ελέγχου με Θετική Ανάδραση

Στη θετική ανάδραση, η έξοδος του συστήματος ενισχύει την είσοδο, οδηγώντας σε μια αυξανόμενη αλλαγή από την αρχική κατάσταση. Αντί να μειώνει μια απόκλιση, η θετική ανάδραση την αυξάνει (ενισχύει), κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε γρήγορες ή εκθετικές αλλαγές.

Ενώ η θετική ανάδραση μπορεί να φαίνεται λιγότερο επιθυμητή σε συστήματα που απαιτούν σταθερότητα, είναι ωστόσο χρήσιμη σε εφαρμογές όπου μια γρήγορη αύξηση ή μια ενισχυμένη απόκριση είναι απαραίτητη, όπως στην ενίσχυση σημάτων σε ηλεκτρονικά κυκλώματα ή στην ανοσοποιητική αντίδραση σε βιολογικά συστήματα.

2.3. Διαφορές Μεταξύ Αρνητικής και Θετικής Ανάδρασης

Η αρνητική ανάδραση στοχεύει στη σταθεροποίηση και την ακρίβεια, ενώ η θετική ανάδραση στοχεύει στην ενίσχυση και την ταχεία αλλαγή.

Η αρνητική ανάδραση είναι πιο συχνή σε συστήματα ελέγχου και ρύθμισης, ενώ η θετική ανάδραση βρίσκει εφαρμογή σε συστήματα που απαιτούν γρήγορη ανάπτυξη ή ενίσχυση μιας διαδικασίας.

2.4. Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα Συστημάτων Κλειστού Βρόγχου

Πλεονεκτήματα Συστημάτων Κλειστού Βρόχου

1. **Αυτορρύθμιση**: Η ανάδραση επιτρέπει στο σύστημα να αυτορυθμίζεται, αντιδρώντας σε αλλαγές του περιβάλλοντος ή σε εσωτερικές διαταραχές, διατηρώντας έτσι την επιθυμητή λειτουργία.

2. **Ακρίβεια**: Η συνεχής ανατροφοδότηση μπορεί να μειώσει τις αποκλίσεις από την επιθυμητή έξοδο, εξασφαλίζοντας υψηλότερη ακρίβεια στη λειτουργία του συστήματος.

3. **Σταθερότητα**: Τα συστήματα κλειστού βρόχου μπορούν να είναι πιο σταθερά από τα ανοικτού βρόχου, καθώς η ανάδραση βοηθά στην αντιμετώπιση των διαταραχών που θα μπορούσαν να προκαλέσουν αστάθεια.

4. **Προσαρμοστικότητα**: Είναι ικανά να προσαρμόζονται σε μεταβαλλόμενες συνθήκες ή απαιτήσεις, χωρίς την ανάγκη για εξωτερική επέμβαση.

Μειονεκτήματα Συστημάτων Κλειστού Βρόχου

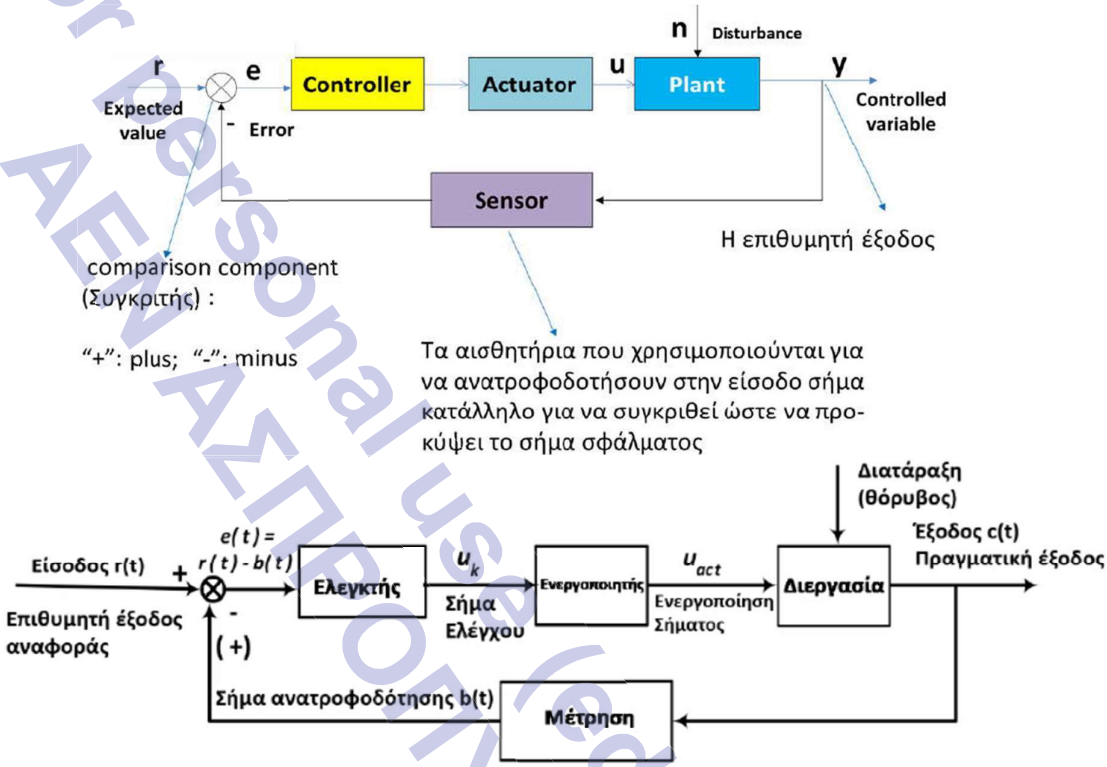
1. **Πολυπλοκότητα στον Σχεδιασμό**: Η σχεδίαση και η ρύθμιση ενός συστήματος κλειστού βρόχου μπορεί να είναι πιο περίπλοκη από ένα ανοικτού βρόχου, απαιτώντας προηγμένη γνώση και εξειδίκευση.

2. **Κόστος και Απαιτήσεις Συντήρησης**: Τα συνεχή συστήματα ανατροφοδότησης μπορεί να αυξήσουν το αρχικό κόστος και τις απαιτήσεις συντήρησης του συστήματος λόγω της προσθήκης αισθητήρων, ελεγκτών και άλλου υλικού.

3. **Καθυστερήσεις στην Απόκριση**: Η διαδικασία ανάδρασης μπορεί να προσθέσει καθυστερήσεις στην απόκριση του συστήματος, καθώς τα σήματα πρέπει να συλλέγονται, να επεξεργάζονται και να εφαρμόζονται από τον ελεγκτή.

4. **Ευαισθησία σε Σφάλματα Αισθητήρων και Συστημάτων**: Η ακρίβεια και η αξιοπιστία των συστημάτων κλειστού βρόχου εξαρτώνται άμεσα από την ακρίβεια των αισθητήρων και τη σταθερότητα των συστημάτων ελέγχου, που μπορεί να επηρεαστούν από σφάλματα ή βλάβες.

2.5. Συνοπτική παρουσίαση λειτουργίας ενός Συστήματος Ελέγχου Κλειστού Βρόγχου



Εικόνα 5: Βασικά Στοιχεία ενός Συστήματος Αυτομάτου Ελέγχου

Ενεργοποιητής / ***Actuator***: Μετατρέπει το σήμα που λαμβάνει από τον ελεγκτή (που μπορεί να είναι ηλεκτρικό, ψηφιακό ή αναλογικό) σε μια φυσική δράση.

Αυτή η δράση μπορεί να είναι η περιστροφή ενός άξονα, η μετακίνηση ενός πιστονιού, η ανοικτή ή κλειστή κατάσταση ενός βαλβίδας, ή οποιαδήποτε άλλη μηχανική κίνηση.

Σε ένα σύστημα ελέγχου, ο ενεργοποιητής είναι υπεύθυνος για την εκτέλεση της εντολής του ελεγκτή, εξασφαλίζοντας ότι η έξοδος του συστήματος συμμορφώνεται με την επιθυμητή προδιαγραφή ή την επιθυμητή κατάσταση.

Οι ενεργοποιητές μπορούν να είναι ηλεκτρικοί, υδραυλικοί, πνευματικοί ή ακόμη και μηχανικοί.

Ελεγκτής / Controller: Ο ελεγκτής δέχεται σήματα από τους αισθητήρες (συλλέγει πληροφορίες από το περιβάλλον ή την διεργασία).

Συγκρίνει αυτές τις πληροφορίες με την επιθυμητή τιμή (setpoint / expected value). Η διαφορά μεταξύ της πραγματικής και της επιθυμητής τιμής αποτελεί το "σφάλμα" του συστήματος ***e(t).***

Δίνει εντολές προς τους ενεργοποιητές (actuators) για να προσαρμόσει τη λειτουργία του συστήματος ,με σκοπό να μειώσει το σφάλμα. Οι εντολές αυτές είναι υπό τη μορφή σήματος, δηλαδή το σήμα ελέγχου ***u(t)***.

Μέτρηση (Αισθητήρας) / Sensor: Η συσκευή η οποία από ένα συγκεκριμένο σημείο λήψης λαμβάνει τη μέτρηση της εξόδου και την επιστρέφει υπό μορφή σήματος στον ελεγκτή.

2.6. Κατηγορίες Συστημάτων Ελέγχου

1. ***Ως προς το πεδίο εφαρμογής***
   - Ηλεκτρικά – ηλεκτρονικά συστήματα
   - Υδραυλικά συστήματα
   - Ηλεκτροϋδραυλικά συστήματα

2. ***Ως προς τη φύση του σήματος εισόδου***
   - Αναλογικά συστήματα
   - Ψηφιακά συστήματα

3. ***Ως προς τη θεωρητική μοντελοποίηση τους***
   - Γραμμικά συστήματα (με αυτά θα ασχοληθούμε)
   - Μη γραμμικά συστήματα

4. ***Ως προς τον τρόπο υλοποίησης τους***
   - Σερβομηχανισμοί
   - Αριθμητικά (arithmetic) συστήματα ελέγχου
   - Ακολουθιακά (sequential) συστήματα Ελέγχου
   - Συστήματα πολύπλοκων διεργασιών

Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα πολύ δυνατό ***μαθηματικό εργαλείο*** στην θεωρία και την πράξη των συστημάτων ελέγχου, καθώς παρέχει τη μεθοδολογία για την ανάλυση και τον σχεδιασμό σύνθετων συστημάτων. Θα τον εφαρμόσουμε σε Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (***ΓΧΑ***) Συστήματα.

Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

Εικόνα 6: Σύστημα Ελέγχου

Έστω ένα σύστημα ελέγχου με είσοδο ***x(t)*** και έξοδο ***y(t)***. Έστω ότι αντιστοιχίζουμε την είσοδο και την έξοδο και την έξοδο με έναν ***τελεστή T*** όπου ***y(t) = T[x(t)].***

Ένα σύστημα είναι ***<u>γραμμικό</u>*** (linear) αν ισχύουν:

T [$\alpha \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$] = $\alpha \cdot T[x_1(t)] + b \cdot T[x_2(t)]$

- ***Η αρχή της υπέρθεσης:*** έξοδος για άθροισμα εισόδων = άθροισμα των επιμέρους εισόδων
- ***Η αρχή της ομογένειας:*** ο πολλαπλασιασμός της εισόδου με μια σταθερά οδηγεί στον πολλαπλασιασμό της εξόδου με την ίδια ακριβώς σταθερά.

Ένα σύστημα είναι ***<u>χρονικά αμετάβλητο</u>*** (time invariant) αν ισχύει ότι: $y(t-t_0) = T[(t-t_0)]$ $\forall$ t_0.

- Οι παράμετροι ενός χρονικά αμετάβλητου συστήματος παραμένουν σταθερές.
- Η καθυστέρηση της εισόδου κατά χρόνο t_0 οδηγεί σε καθυστέρηση της εξόδου κατά τον ίδιο χρόνο t_0.

Στην πράξη, κανένα πραγματικό σύστημα δεν είναι αυστηρά ΓΧΑ. Πολλά όμως μπορούν, υπό συνθήκες, να προσεγγιστούν ως τέτοια με ικανοποιητική ακρίβεια.

Χρησιμότητα Μετασχηματισμού Laplace (ML).

Ο ML χρησιμοποιείται για να ***μετατρέψει συναρτήσεις*** από το πεδίο ***του χρόνου*** (την πραγματική πληροφορία) στο πεδίο της ***μιγαδικής συχνότητας*** $s = \sigma \pm j\omega$. Αυτός ο μετασχηματισμός επιτρέπει την ανάλυση και τον χειρισμό διαφορικών εξισώσεων με πιο απλό τρόπο, καθιστώντας τις περιγραφές συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας αντί για το πεδίο του χρόνου.

Χρησιμότητα του Μετασχηματισμού Laplace

- **Απλοποίηση Διαφορικών Εξισώσεων**: Ο μετασχηματισμός Laplace μετατρέπει διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν συστήματα ελέγχου σε αλγεβρικές εξισώσεις, που είναι πιο εύκολο να λυθούν.

- **Ανάλυση Σταθερότητας**: Επιτρέπει την εύκολη ανάλυση της σταθερότητας ενός συστήματος, καθώς μπορούμε να εξετάσουμε τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο.

- **Σχεδιασμός Συστημάτων Ελέγχου**: Διευκολύνει τον σχεδιασμό και την ανάλυση συστημάτων ελέγχου, επιτρέποντας τη χρήση μεθόδων στο πεδίο της συχνότητας για τη βελτιστοποίηση των αποκρίσεων του συστήματος.

- **Αποκρίσεις Συστημάτων σε Εισόδους**: Βοηθά στον υπολογισμό της απόκρισης ενός συστήματος σε διάφορες είσοδους, όπως βηματικές, εκθετικές ή ημιτονοειδείς συναρτήσεις, ***μέσω της χρήσης του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace***.

- **Απλοποίηση Συνθήκης Αρχικών Τιμών**: Καθιστά δυνατή τη λήψη υπόψη των αρχικών συνθηκών του συστήματος κατά τον υπολογισμό της απόκρισης, χωρίς να απαιτείται η άμεση λύση των αρχικών συνθηκών στις διαφορικές εξισώσεις.

Η Γενική Συνάρτηση δίνεται από τη σχέση: $F(s) = L\,\{f(t) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} e^{-st}\, f(t)dt$

Απλούστερα: $F(s) = L\,\{f(t)\}$ (L = Laplace Transformation).

Ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι **αμφίπλευρος**, δηλαδή ορίζεται και αρνητικά χρονικά διαστήματα.

Εμείς θα ασχοληθούμε κυρίως με το ***μονόπλευρο L,*** δηλαδή μόνο για θετικά χρονικά διαστήματα: $F(s) = L\,\{f(t) = \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-st}\, f(t)dt$

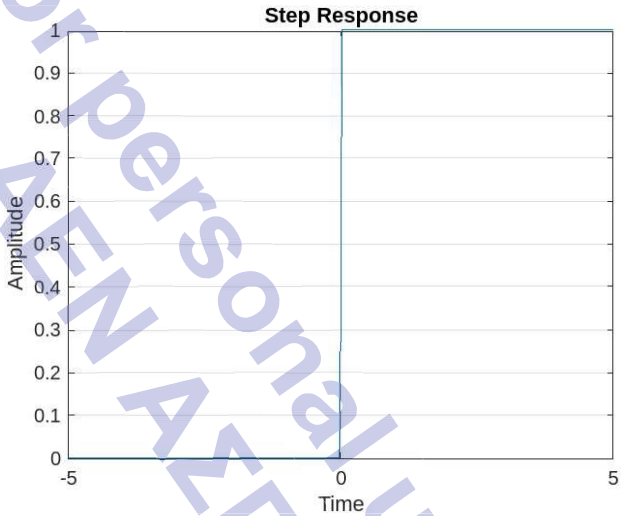
Παραδείγματα:

Μετασχηματισμός Laplce της συνάρτησης ***f(t) = e^{-3t}u(t)***

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

- ***f(t)*** είναι μια συνάρτηση στο χρόνο
- e^{-st} είναι ο όρος του μετασχηματισμού με το *s* να είναι ένας μιγαδικός αριθμός ($s = \sigma \pm j\omega$)

- ***u(t)*** είναι η βηματική συνάρτηση, η οποία είναι ίση με ***0*** για ***t < 0*** και με ***1*** για ***t ≥ 0***.



Εικόνα 7: Απόκριση Βηματικής Συνάρτησης

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \frac{1}{s+3}$$

για s > -3 (περιοχή σύγκλισης).

Για τους ML θα δοθούν έτοιμοι πίνακες τους οποίους θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε.

Πίνακας μετασχηματισμών Laplace

Μετασχηματισμός Laplace $F(s)$	Χρονική συνάρτηση $f(t)$
1	Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	Μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u_s(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Συνάρτηση μοναδιαίας ράμπας
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(n = θετικός ακέραιος) t^n
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t}$ (n = θετικός ακέραιος)
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})\ (\alpha \neq \beta)$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta e^{-\beta t}-\alpha e^{-\alpha t})\ (\alpha \neq \beta)$
$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t}-\alpha t e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2}(\alpha t-1+e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left[t-\frac{2}{\alpha}+\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}\right]$

Μετατόπιση Συχνότητας

Εικόνα 8: ΜΛ Πίνακας 1 (Πηγή: Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου – Farid Colnaraghi – Benjamin C. Kuo, Κλειδάριθμος)

Μετασχηματισμός Laplace $F(s)$	Χρονική συνάρτηση $f(t)$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$
$\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$	$\sin\omega_n t$
$\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$	$\cos\omega_n t$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}$	$1-\cos\omega_n t$
$\frac{\omega_n^2(s+\alpha)}{s^2+\omega_n^2}$	$\omega_n\sqrt{\alpha^2+\omega_n^2}\sin(\omega_n t+\theta)$ όπου $\theta=\tan^{-1}(\omega_n/\alpha)$
$\frac{\omega_n}{(s+\alpha)(s^2+\omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n}{\alpha^2+\omega_n^2}e^{-\alpha t}+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega_n^2}}\sin(\omega_n t-\theta)$ όπου $\theta=\tan^{-1}(\omega_n/\alpha)$
$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\ \ (\zeta<1)$
$\frac{\omega_n^2}{s\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\theta\right)$ όπου $\theta=\cos^{-1}\zeta\ \ (\zeta<1)$
$\frac{s\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{-\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\theta\right)$ όπου $\theta=\cos^{-1}\zeta\ (\zeta<1)$
$\frac{\omega_n^2(s+\alpha)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n\sqrt{\frac{\alpha^2-2\alpha\zeta\omega_n+\omega_n^2}{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\theta\right)$ όπου $\theta=\tan^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha-\zeta\omega_n}\ (\zeta<1)$
$\frac{\omega_n^2}{s^2(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$t-\frac{2\zeta}{\omega_n}+\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\theta\right)$ όπου $\theta=\cos^{-1}(2\zeta^2-1)\ \ (\zeta<1)$

Εικόνα 9: ΜΛ Πίνακας 2 (Πηγή: Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου – Farid Colnaraghi – Benjamin C. Kuo, Κλειδάριθμος)

Συνάρτηση	$f(t)$	$F(s)$
Ημιτονοειδής	$A \cdot sin(\omega t)$	$A \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Ημιτονοειδής με διαφορά φάσης	$A \cdot sin(\omega t+\theta)$	$A \cdot \left(\frac{\cos(\theta)\cdot\omega+\sin(\theta)\cdot s}{s^2+\omega^2}\right)$
Ημιτονοειδής με καθυστέρηση	$A \cdot u(t-a) \cdot sin(\omega(t-\alpha))$	$A \cdot e^{-as} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Ημιτονοειδής με καθυστέρηση και διαφορά φάσης	$A \cdot u(t-a) \cdot sin(\omega(t-\alpha)+\theta)$	$A \cdot e^{-as} \cdot \left(\frac{\cos(\theta)\cdot\omega+\sin(\theta)\cdot s}{s^2+\omega^2}\right)$
Συνημιτονοειδής	$A \cdot cos(\omega t)$	$A \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2}$
Συνημιτονοειδής με διαφορά φάσης	$A \cdot cos(\omega t+\theta)$	$A \cdot \left(\frac{\cos(\theta)\cdot s-\sin(\theta)\cdot\omega}{s^2+\omega^2}\right)$
Συνημιτονοειδής με καθυστέρηση	$A \cdot u(t-a) \cdot cos(\omega(t-\alpha))$	$A \cdot e^{-as} \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2}$
Συνημιτονοειδής με καθυστέρηση και διαφορά φάσης	$A \cdot u(t-a) \cdot cos(\omega(t-\alpha)+\theta)$	$A \cdot e^{-as} \cdot \left(\frac{\cos(\theta)\cdot s-\sin(\theta)\cdot\omega}{s^2+\omega^2}\right)$

Εικόνα 10: ΜΛ Πίνακας 3, Σύνθετοι ΜΛ για ημιτονοειδής συναρτήσεις με διαφορά φάσης ή καθυστέρησης.

Να γίνουν οι ακόλουθοι ΜΛ:

1. $f(t) = e^{-5t}u(t)$, $f(t) = e^{7t}u(t)$
2. $f(t) = e^{-4t} + e^{-2t}$ Απάντηση: $\frac{2s+6}{s^2+6s+8}$
3. $f(t) = (1+3t)e^{-5t}$ Απάντηση: $\frac{s+8}{(s+5)^2}$
4. $f(t) = e^{-4t}\sin(2t+\pi/6)$

1.

Ιδιότητα	$f(t)$	$F(s)$
Μετατόπιση συχνότητας	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(s+a)$

f(t) = e^{-5t}u(t):

Μετασχηματίζω την ***f(t)*** = ***u(t)*** βάση του πίνακα στην εικόνα 8, ως F(s) = $\frac{1}{s}$. Βάση της μετατόπισης της συχνότητας όπου ***s*** αντικαθιστώ με ***s-α***, εδώ το ***α=-5***, ***s-(-5)*** = s+5, άρα ***F (s+a)*** = $\frac{1}{s+5}$, s > -5.

f(t) = e^{7t}u(t):

Μετασχηματίζω την ***f(t)*** = ***u(t)*** βάση του πίνακα στην Εικόνα 8, ως F(s) = $\frac{1}{s}$. Βάση της μετατόπισης της συχνότητας όπου ***s*** αντικαθιστώ με ***s-α***, εδώ το ***α=7***, *s-7*, άρα ***F (s+a)*** = $\frac{1}{s-7}$, s > 7.

2.

Ιδιότητα	$f(t)$	$F(s)$
Γραμμικότητα	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$	$\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-4t} + e^{-2t}\} = \mathcal{L}\{e^{-4t}\} + \mathcal{L}\{e^{-2t}\} =$$

$$\frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+2} = \frac{s+4+s+2}{(s+4)(s+2)} = \frac{2s+6}{(s+4)(s+2)} = \frac{2s+6}{s^2+6s+8}$$

3.

Ιδιότητα	$f(t)$	$F(s)$
Γραμμικότητα	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$	$\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(1+3t)e^{-5t}\} = \mathcal{L}\{e^{-5t}\} + \mathcal{L}\{3te^{-5t}\} = \frac{1}{s+5} + \frac{3}{(s+5)^2} =$$

$$\frac{(s+5)^2}{(s+5)(s+5)^2} + \frac{(s+5)3}{(s+5)(s+5)^2} = \frac{(s+5)^2 + (s+5)3}{(s+5)(s+5)^2} = \frac{\cancel{(s+5)}(s+5+3)}{\cancel{(s+5)}(s+5)^2} = \frac{s+8}{(s+5)^2}$$

4.

Ιδιότητα	$f(t)$	$F(s)$
Μετατόπιση συχνότητας	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(s+a)$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-4t}\sin(2t + \pi/6)\} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2 + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot (s+4)}{(s+4)^2 + 4}$$

$$= \frac{0.5s + 3.7321}{(s+4)^2 + 4} = \frac{s + 7.4642}{2\left((s+4)^2 + 4\right)} = \frac{s + 7.4642}{2s^2 + 16s + 40}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace.

Δεδομένης μιας συνάρτησης X(s) στο s-επίπεδο, η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ [***X(s)***] είναι μια συνάρτηση x(t) έτσι ώστε ***X(s)*** = $\mathcal{L}$ [***x(t)***].

Με μαθηματικό τύπο: f(t) = $\mathcal{L}^{-1}$ [***F(s)***] = $\frac{1}{2\pi j}\int_{s=c-j\infty}^{s=c+j\infty} F(s)\, e^{st} ds$

Όπου ***c*** είναι ένας πραγματικός αριθμός και τα όρια του ολοκληρώματος είναι η περιοχή σύγκλισης της F(s).

- Ο απευθείας υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace (ΑΜΛ) είναι συχνά δύσκολος και χρονοβόρος.
- Οι έτοιμοι πίνακες με τα ζεύγη ΜΛ καλύπτουν συγκεκριμένες περιπτώσεις και δεν αρκούν για την εύρεση οποιασδήποτε συνάρτησης ***F(s).***
- Ο ΑΜΛ μπορεί να υπολογιστεί με αλγεβρικές τεχνικές, ***ρητές συναρτήσεις με πολυωνυμικούς όρους των δυνάμεων του s.***

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + b_{M-2}s^{M-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{\alpha_N s^N + \alpha_{N-1}s^{N-1} + \alpha_{N-2}s^{N-2} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

- B(s): το ***πολυώνυμο του αριθμητή***.
- A(s): το ***πολυώνυμο του παρονομαστή.***
- N (ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή): η ***τάξη*** της ρητής συνάρτησης.
- Έστω ότι ***οι ρίζες*** του πολυωνύμου του παρονομαστή ***A(s)*** είναι οι $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_N$. Τότε ισχύει ότι ***A(s)*** = $\alpha_N (s-\rho_1)(s-\rho_2)\ldots(s-\rho_N)$, όπου οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_N$ ονομάζονται ***πόλοι*** της ρητής συνάρτησης.
- Έστω ότι ***οι ρίζες*** του πολυωνύμου του αριθμητή ***B(s)*** είναι οι $z_1, z_2, \ldots z_M$. Τότε ισχύει ότι ***B(s)*** = $b_M (s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_M)$, όπου οι ρίζες $z_1, z_2, \ldots z_N$ ονομάζονται ***μηδενικά*** της ρητής συνάρτησης.

- Η ρητή συνάρτηση μπορεί να είναι ***αυστηρά κανονική*** (strictly proper), δηλαδή ***M < N*** ή μη αυστηρά κανονική (non strictly proper), ***M≤ N***.

Όταν ***M < N*** τότε ισχύει το ακόλουθο:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{c_1}{(s - \rho_1)} + \frac{c_2}{(s - \rho_2)} + \cdots \frac{c_n}{(s - \rho_n)}$$

Προσοχή: $\boldsymbol{\rho_1 \neq \rho_2 \neq \ldots \neq \rho_N}$

$$c_i = F(s) \cdot (s - \rho_i)|_{s=\rho_i}$$

$$\boldsymbol{f(t) = c_1 \cdot e^{\rho_1 t} + c_2 \cdot e^{\rho_2 t} + \cdots + c_n \cdot e^{\rho_n t}}$$

1) $F(s) = \dfrac{1}{(s+3)(s+2)(s+6)}$

Να βρεθεί η $f(t)$

Λύση

$$F(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \frac{C_3}{s-p_3}$$

όπου $p_1 = -3$ $p_2 = -2$, $p_3 = -6$

$$C_i = F(s) \cdot (s-p_i)\Big|_{s=p_i}$$

- $C_1 = \dfrac{1}{\cancel{(s+3)}(s+2)(s+6)} \cdot \cancel{(s+3)}\Big|_{s=-3}$

$C_1 = \dfrac{1}{(s+2)(s+6)}\Big|_{s=-3} \rightarrow C_1 = \dfrac{1}{(-3+2)(-3+6)} = \dfrac{-1}{3}$

- $C_2 = \dfrac{1}{(s+3)\cancel{(s+2)}(s+6)} \cdot \cancel{(s+2)}\Big|_{s=-2}$

$C_2 = \dfrac{1}{(s+3)(s+6)}\Big|_{s=-2} \rightarrow C_2 = \dfrac{1}{(-2+3)(-2+6)} = \dfrac{1}{4}$

- $C_3 = \dfrac{1}{(s+3)(s+2)\cancel{(s+6)}} \cdot \cancel{(s+6)}\Big|_{s=-6}$

$C_3 = \dfrac{1}{(s+3)(s+2)}\Big|_{s=-6} \rightarrow C_3 = \dfrac{1}{(-6+3)(-6+2)} = \dfrac{1}{12}$

①

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)(s+2)(s+6)} = \frac{-1/3}{(s+3)} + \frac{1/4}{(s+2)} + \frac{1/12}{(s+6)}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{(s+3)} + \frac{1/4}{s+2} + \frac{1/12}{s+6}\right\}$$

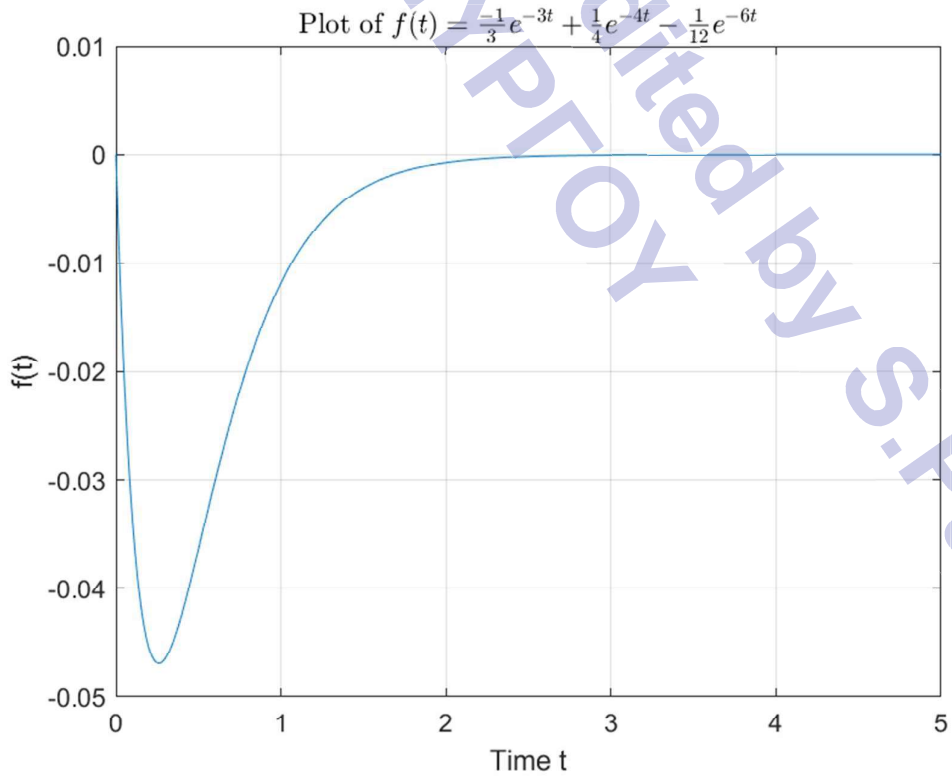
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{(s+3)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/4}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/12}{s+6}\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+6}\right\}$$

Από τους πίνακες

$$f(t) = -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{12}e^{-6t}$$

$t \geq 0$



Εικόνα 11: Απόκριση στο χρόνο Παραδείγματος 1

2) $F(s) = \dfrac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \dfrac{5s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$

Να βρεθεί η $f(t)$

Λύση

$$F(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+2} + \frac{C_3}{s+3}$$

- $C_1 = \left[(s+1)F(s)\right]\Big|_{s=-1} = \cancel{(s+1)}\dfrac{5s+3}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s+3)}\Big|_{s=-1}$

$$C_1 = \frac{5(-1)+3}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{-2}{2} = -1$$

- $C_2 = \left[(s+2)F(s)\right]\Big|_{s=-2} = \cancel{(s+2)}\dfrac{5s+3}{(s+1)\cancel{(s+2)}(s+3)}\Big|_{s=-2}$

$$C_2 = \frac{5(-2)+3}{(-2+1)(-2+3)} = \frac{-7}{-1} = 7$$

- $C_3 = \left[(s+3)F(s)\right]\Big|_{s=-3} = \cancel{(s+3)}\dfrac{5s+3}{(s+1)(s+2)\cancel{(s+3)}}\Big|_{s=-3}$

$$C_3 = \frac{5(-3)+3}{(-3+1)(-3+2)} = \frac{-12}{2} = -6$$

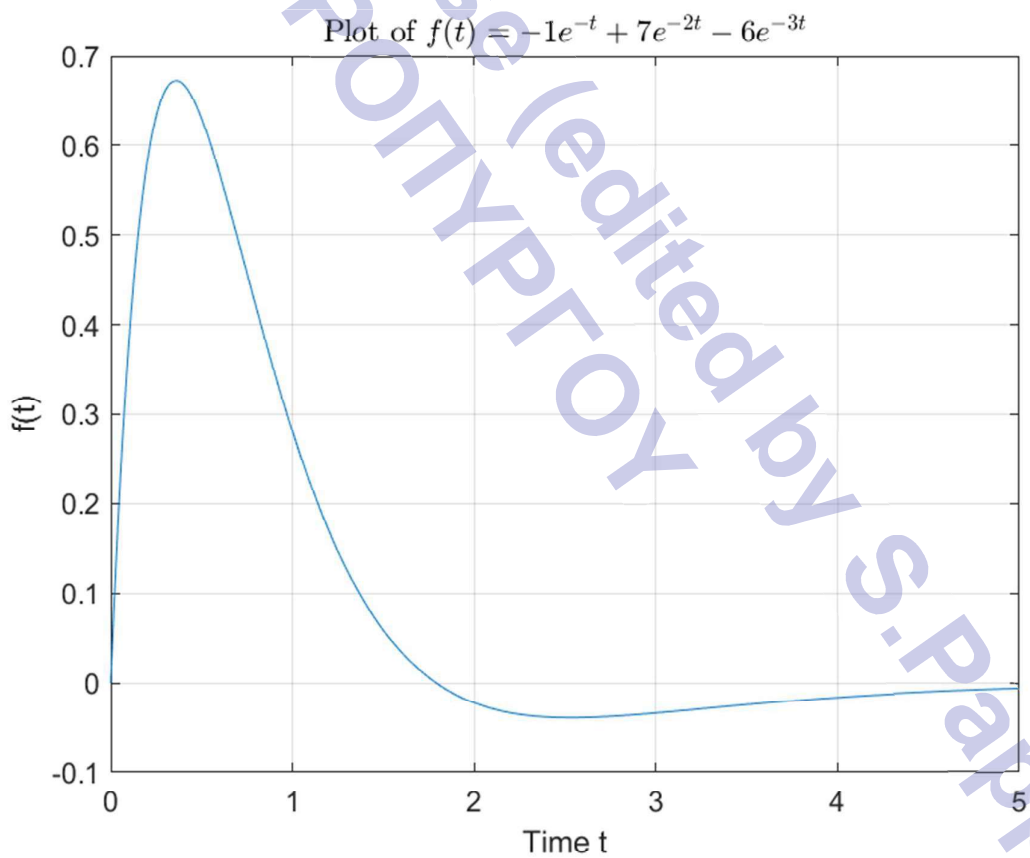
$$F(s) = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

②

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -1\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 7\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) - 6\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

Από τους πίνακες

$$f(t) = -1\,e^{-t} + 7\,e^{-2t} - 6\,e^{-3t} \qquad t \geq 0$$



Εικόνα 12: Απόκριση στο χρόνο Παραδείγματος 2

3) $F(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{6}{s^2+4}$

Να βρεθεί η $f(t)$

Λύση

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+4}\right\}$$

Από τους πίνακες

- $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{1\cdot 2}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

άρα $\frac{1}{2}\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^3} = \frac{1}{s^3}$

Συνεπώς : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2$

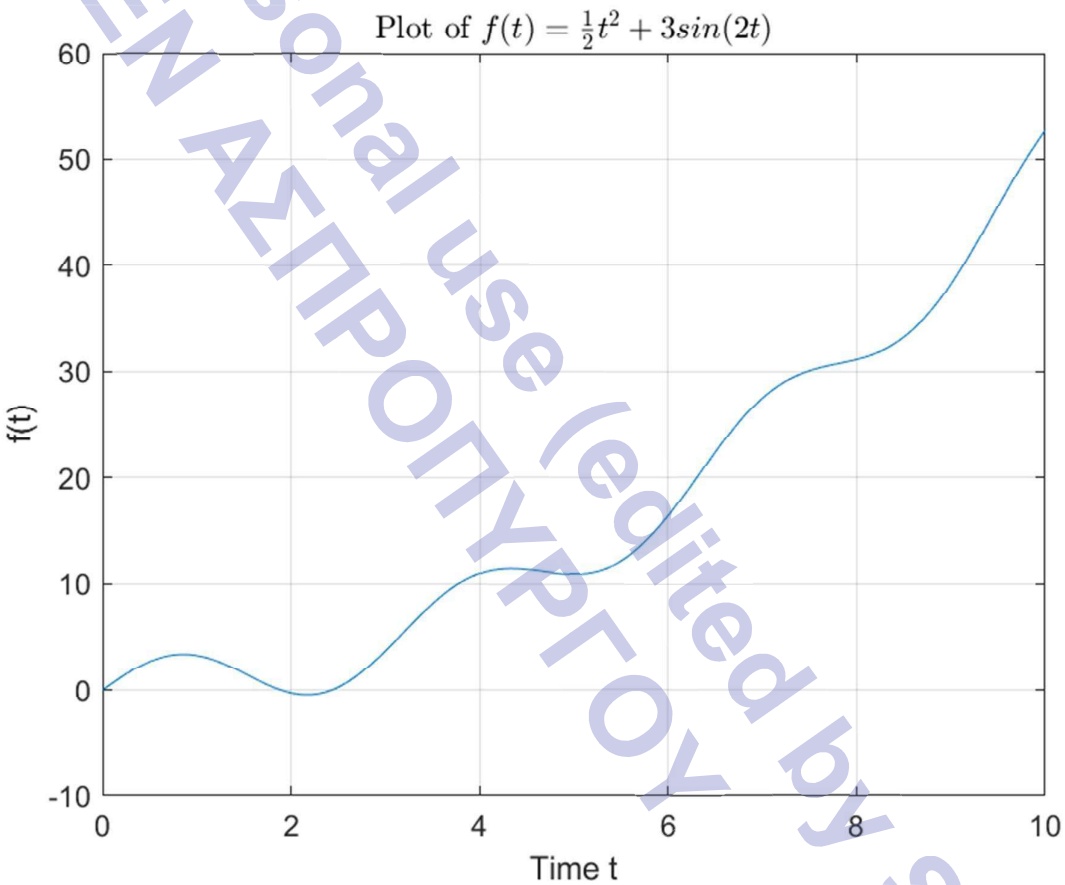
- $\mathcal{L}\{\sin\omega_n\cdot t\} = \frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$

$$\frac{6}{s^2+4} = \frac{3\cdot 2}{s^2+2^2} \qquad \omega_n = 2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{3\,\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = 3\sin 2t$$

③

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3\sin 2t$$



Εικόνα 13: Απόκριση στο χρόνο Παραδείγματος 3

4) $F(s) = \dfrac{1}{(s+4)^4} + \dfrac{s-3}{(s-3)^2+6}$

Να βρεθεί η $f(t)$

Λύση

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-3)^2+6}\right\}$$

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+4)^4}\right\}$

Μετατόπιση συχνότητας:

$$\mathcal{L}\{t^n e^{-\alpha t}\} = \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}} \qquad n>0$$

$$\mathcal{L}\{t^3 e^{-4t}\} = \frac{3!}{(s+4)^4} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(s+4)^4} = \frac{6}{(s+4)^4}$$

$$\frac{1}{6}\mathcal{L}\{t^3 e^{-4t}\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{(s+4)^4} = \frac{1}{(s+4)^4}$$

④

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-3)^2+6}\right\}$

$$\frac{s-3}{(s-3)^2+6} = \frac{(s-3)}{(s-3)^2+(\sqrt{6})^2}$$

Από πίνακες κ' ιδιότητες :

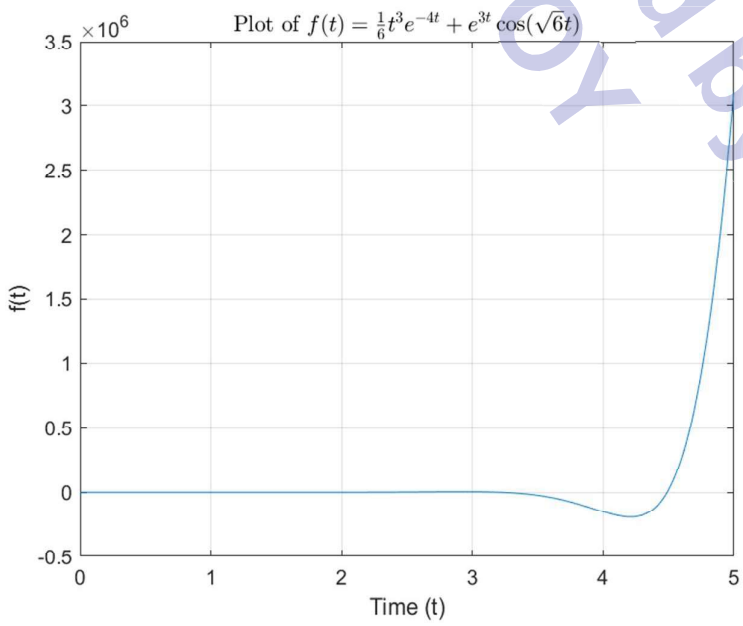
$$\cos(\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Μετατόπιση συχνότητας : $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\cdot f(t)\} = F(s+\alpha)$

Εδώ : $\alpha = -3$
$\omega = \sqrt{6}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-3)}{(s-3)^2+(\sqrt{6})^2}\right\} = e^{3t}\cdot\cos(\sqrt{6})t$$

$$f(t) = \frac{1}{6}t^3\cdot e^{-4t} + e^{3t}\cos(\sqrt{6}t)$$



Εικόνα 14: Απόκριση στο χρόνο Παραδείγματος 4

5

5) $F(s) = \dfrac{2}{s^2+4s+5}$

Να βρεθεί η $f(t)$

Λύση

$$F(s) = \frac{2}{s^2+4s+5} = \frac{2}{s^2+4s+4+1} = \frac{2}{(s+2)^2+1}$$

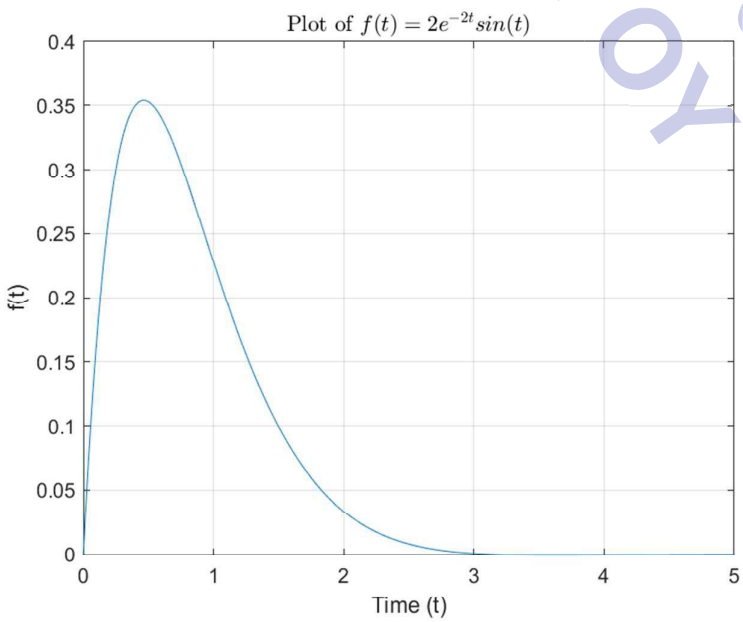
$$= 2 \cdot \frac{1}{(s+2)^2+1^2}$$

Από γνώσεις κ' ιδιότητα μετατόπισης της συχνότητας βρίσκω :

$$\mathcal{L}\{A\sin(\omega t)\} = A \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad A = 2,\ \omega = 1$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} \cdot f(t)\} = F(s+\alpha) \qquad \alpha = 2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4s+5}\right\} = 2 \cdot e^{-2t} \cdot \sin(t)$$



Εικόνα 15: Απόκριση στο χρόνο Παραδείγματος 5

6) $F(s) = \dfrac{s(s+1)}{(s+1)(s-7)}$

Να βρεθεί η $f(t)$

Λύση

$$F(s) = \frac{s\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s-7)} = \frac{s}{s-7} = \frac{s-7+7}{s-7}$$

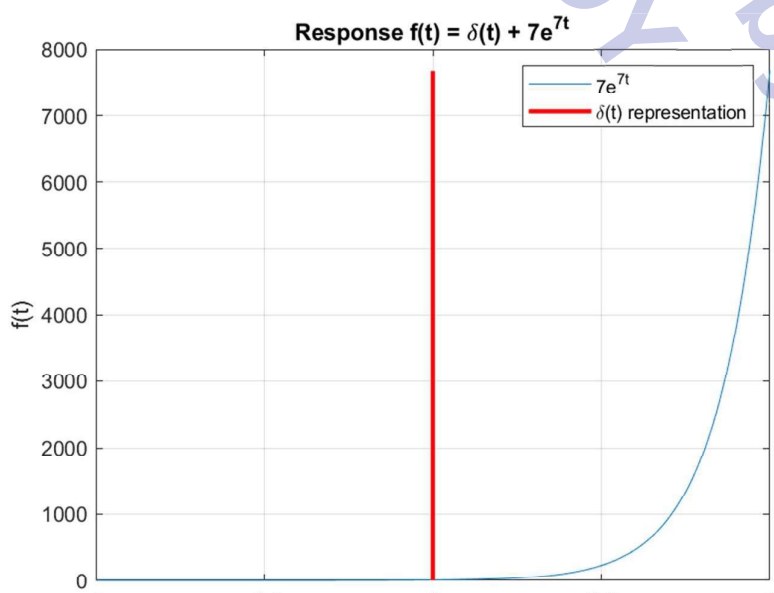
$$= \frac{s-7}{s-7} + \frac{7}{s-7} = 1 + \frac{7}{s-7}$$

Από τους πίνακες:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{7t}\} = \frac{1}{s-7}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\delta(t)\} = 1$$

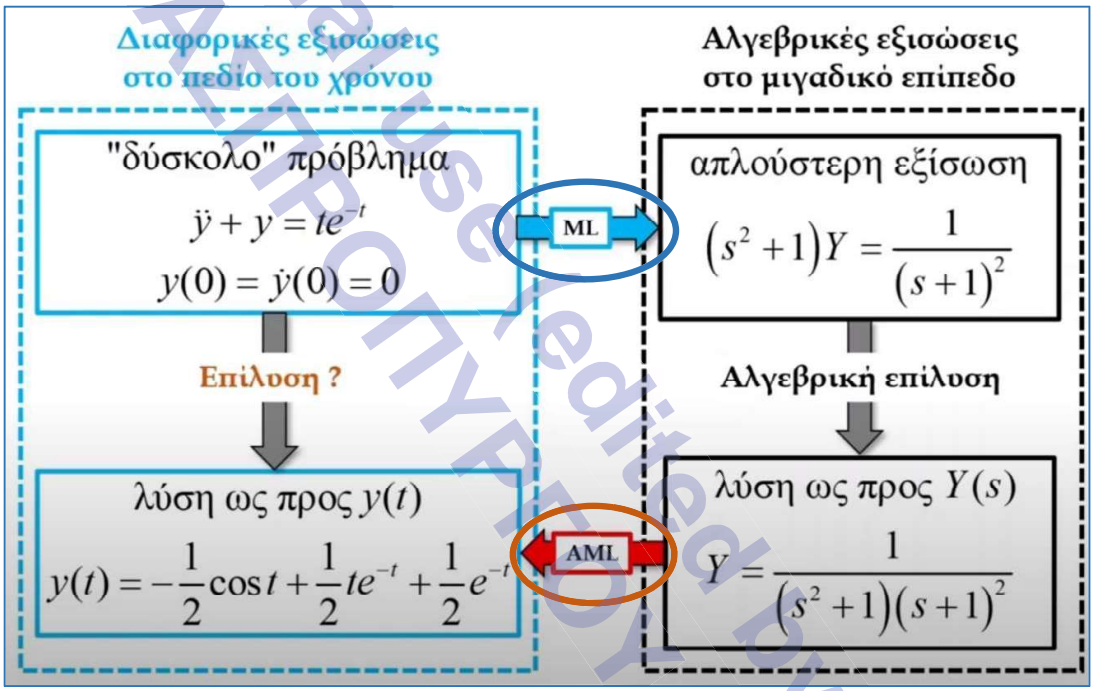
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s(s+1)}{(s+1)(s-7)}\right\} = \delta(t) + 7e^{7t}$$



Εικόνα 16: Απόκριση στο χρόνο Παραδείγματος 6

Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων με Εφαρμογή του Μετασχηματισμού Laplace.

Μια διαφορική συνάρτηση είναι οποιαδήποτε συνάρτηση εμπεριέχει παράγωγο. Ο βαθμός της παραγώγου καθορίζει και τον βαθμό της διαφορικής συνάρτησης. Σημαντικό για τις διαφορικές εξισώσεις είναι οι αρχικές συνθήκες, καθώς καθορίζει την τιμή της εξόδου τη χρονική στιγμή ***t = 0.*** Μας είναι χρήσιμες διότι πολλά φυσικά/μηχανικά/ηλεκτρονικά/ηλεκτρολογικά συστήματα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις. Γιατί να χρησιμοποιήσουμε ΜΛ για τη λύση τους; Ας δούμε το παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 17: Λύση διαφορικής εξίσωσης στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας με χρήση ΜΛ

Υπάρχουν διαφορικές εξισώσεις που είναι απλές και θα μπορούσαν να λυθούν εύκολα στο πεδίο του χρόνου. Τα συστήματα όμως υπό εξέταση περιέχουν σύνθετες διαφορικές εξισώσεις. Είναι λοιπόν πιο εύκολη η λύση κάνοντας ΜΛ, διότι όλες οι πράξεις που θα έχουμε να διαχειριστούμε, είναι αλγεβρικές, δηλαδή, προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις.

Ιδιότητες παραγώγων στο πεδίο Laplace.

Ποιος είναι ο συμβολισμός των παραγώγων στο πεδίο του χρόνου;

$$\dot{f}(t) = f'(t) = \frac{df(t)}{dx} = \frac{d}{dt}f(t) \Leftrightarrow \dot{f} = f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dt}f$$

Ιδιότητα	$f(t)$	$F(s)$
Παραγώγιση γενικά	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

$$s^0 = 1$$

$$s^1 = s$$

Παράγωγος	Αναλυτική	Απλοποιημένη
$f'(t)$	$s^1 \cdot F(s) - s^0 \cdot f(0)$	$s \cdot F(s) - f(0)$
$-f'(t)$	$-\left(s^1 \cdot F(s) - s^0 \cdot f(0)\right)$	$-s \cdot F(s) + f(0)$
$-2f'(t)$	$-2 \cdot \left(s^1 \cdot F(s) - s^0 \cdot f(0)\right)$	$-2 \cdot s \cdot F(s) + 2 \cdot f(0)$
$f''(t)$	$s^2 \cdot F(s) - s^1 \cdot f(0) - s^0 \cdot f'(0)$	$s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$
$-3f''(t)$	$-3 \cdot \left(s^2 \cdot F(s) - s^1 \cdot f(0) - s^0 \cdot f'(0)\right)$	$-3 \cdot s^2 \cdot F(s) + 3 \cdot s \cdot f(0) + 3 \cdot f'(0)$
$f'''(t)$	$s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0) - s^1 \cdot f'(0) - s^0 \cdot f''(0)$	$s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)$
$2f'''(t)$	$2 \cdot \left(s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0) - s^1 \cdot f'(0) - s^0 \cdot f''(0)\right)$	$2 \cdot s^3 \cdot F(s) - 2 \cdot s^2 \cdot f(0) - 2 \cdot s \cdot f'(0) - 2 \cdot f''(0)$
$f^{(4)}(t)$	$s^4 \cdot F(s) - s^3 \cdot f(0) - s^2 \cdot f'(0) - s^1 \cdot f''(0) - s^0 \cdot f'''(0)$	$s^4 \cdot F(s) - s^3 \cdot f(0) - s^2 \cdot f'(0) - s \cdot f''(0) - f'''(0)$
$f^{(5)}(t)$	$s^5 \cdot F(s) - s^4 \cdot f(0) - s^3 \cdot f'(0) - s^2 \cdot f''(0) - s^1 \cdot f'''(0) - s^0 \cdot f^{(4)}(0)$	$s^5 \cdot F(s) - s^4 \cdot f(0) - s^3 \cdot f'(0) - s^2 \cdot f''(0) - s \cdot f'''(0) - f^{(4)}(0)$

*Εικόνα 18: Μετασχηματισμός Laplace Παραγώγων (προσοχή στις αρχικές συνθήκες. Το πλήθος τους είναι **n-1**) .*

Παράδειγμα 1° : Μοντέλο 1ης τάξης

$\dot{y}(t) + 3\,y(t) = u(t)$, με αρχική συνθήκη: ***y(0) = 1***.

$$s \cdot Y(s) - y(0) + 3 \cdot Y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow s \cdot Y(s) - 1 + 3 \cdot Y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$s \cdot Y(s) + 3 \cdot Y(s) = \frac{1}{s} + 1 \Rightarrow Y(s) \cdot (s+3) = \frac{1+s}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1+s}{s}}{s+3} \Rightarrow Y(s) = \frac{s+1}{s \cdot (s+3)}$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s \cdot (s+3)} \qquad p_1 = 0 \quad p_2 = -3$$

Λύση

$$Y(s) = \frac{C_1}{s-0} + \frac{C_2}{s-3}$$

$$\cdot\ C_1 = Y(s) \cdot s \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{s+1}{\cancel{s} \cdot (s+3)} \cdot \cancel{s} \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{s+1}{s+3} \Big|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$\cdot\ C_2 = Y(s) \cdot (s+3) \Big|_{s=-3}$$

$$= \frac{s+1}{s\,\cancel{(s+3)}} \cancel{(s+3)} \Big|_{s=-3}$$

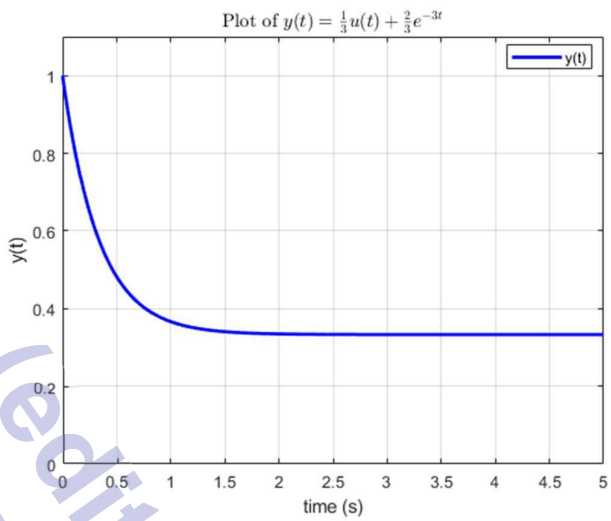
$$= \frac{s+1}{s} \Big|_{s=-3} = +\frac{2}{3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{2}{3} \frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{+\frac{2}{3} \frac{1}{s+3}\right\}$$

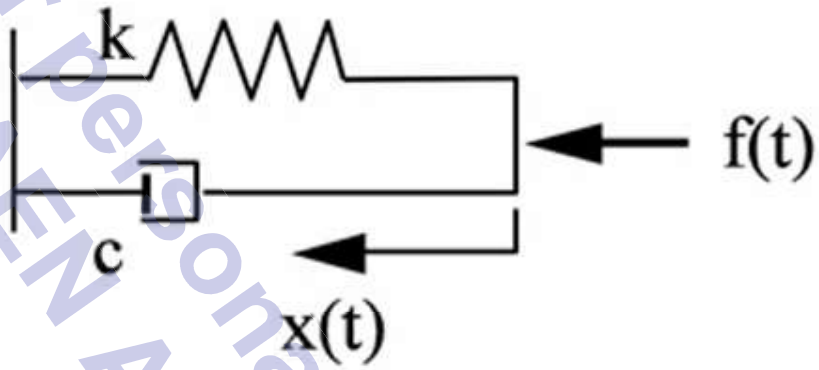
$$= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$= \frac{1}{3} u(t) + \frac{2}{3} e^{-3t}$$



Εικόνα 19: Χρονική Απόκριση του συστήματος. Για t=0, y(t)=1

Σύστημα 1ης Τάξης Ελατήριο-Μάζα



ΛΥΣΗ

Γράφουμε την εξίσωση ισορροπίας στο πεδίο του ***χρόνου***:

$$f(t) = k\,x(t) + c\,\frac{dx}{dt}$$

Μετατρέπουμε την εξίσωση ισορροπίας στο πεδίο του ***Laplace***:

Συνθήκη Ισορροπίας Δυνάμεων

Δίνονται τα ακόλουθα στοιχεία:

Σταθερά του ελατηρίου k = 100 Nm^{-1}

Συντελεστής Απόσβεσης c = 20 Nsm^{-1}

Αρχικές Συνθήκες: t = 0:

x = 0.1 m,

Η δύναμη f(t) μεταβάλλεται μέσω μιας ***βηματικής απόκρισης*** από ***0 N σε 7N.***

Να βρεθεί η ***x(t)***

$$F(s) = kX(s) + c\,[sX(s) - x(0)]$$

$$\frac{7}{s} = 100\,X(s) + 20\,[sX(s) - 0.1]$$

Λύνω ως προς X(s):

$$\frac{7}{s} = 100\,X(s) + 20\,sX(s) - 2$$

$$\frac{7}{s} + 2 = X(s)[100 + 20s]$$

$$X(s) = \frac{\frac{7}{s} + 2}{100 + 20s}$$

Πολλαπλασιάζω με ***s αριθμητή και παρονομαστή***

$$X(s) = \frac{7 + 2s}{s(100 + 20s)}$$

$$X(s) = \frac{7 + 2s}{100s + 20s^2}$$

Μετασχηματίζω τον παρονομαστή στη μορφή
K s (s+a)

$$X(s) = \frac{7 + 2s}{20s(s + 5)}$$

Χρησιμοποιώ τη μέθοδο με τα μερικά κλάσματα

$$X(s) = \frac{\mathrm{A}}{s} + \frac{\mathrm{B}}{(s + 5)}$$

$$\mathrm{A} = \lim_{s \to 0} sX(s) = \left[\frac{7 + 2s}{20s(s + 5)}\right]_{s=0} = \frac{7}{100} = 0.07$$

$$\mathrm{B} = \lim_{s \to -5} (s + 5)X(s) = \left[\frac{7 + 2s}{20s}\right]_{s=-5} = \frac{-3}{-100} = 0.03$$

$$\boldsymbol{X(s) = 0.07\frac{1}{s} + 0.03\frac{1}{(s + 5)}}$$

Μετατρέπουμε στο πεδίο του χρόνου με Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace:

$$\underline{x(t) = 0.07 + 0.03\, e^{-5t}}$$

<u>Ελέγχω τα αποτελέσματα με τα ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ</u>

Θεώρημα Αρχικής Τιμής

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

$$= \left[s\left(\frac{7+2s}{20s(s+5)}\right)\right]_{s=\infty}$$

$$= \left[\left(\frac{7+2s}{20(s+5)}\right)\right]_{s=\infty}$$

$$= \left[\left(\frac{7/s+2}{20(1+5/s)}\right)\right]_{s=\infty}$$

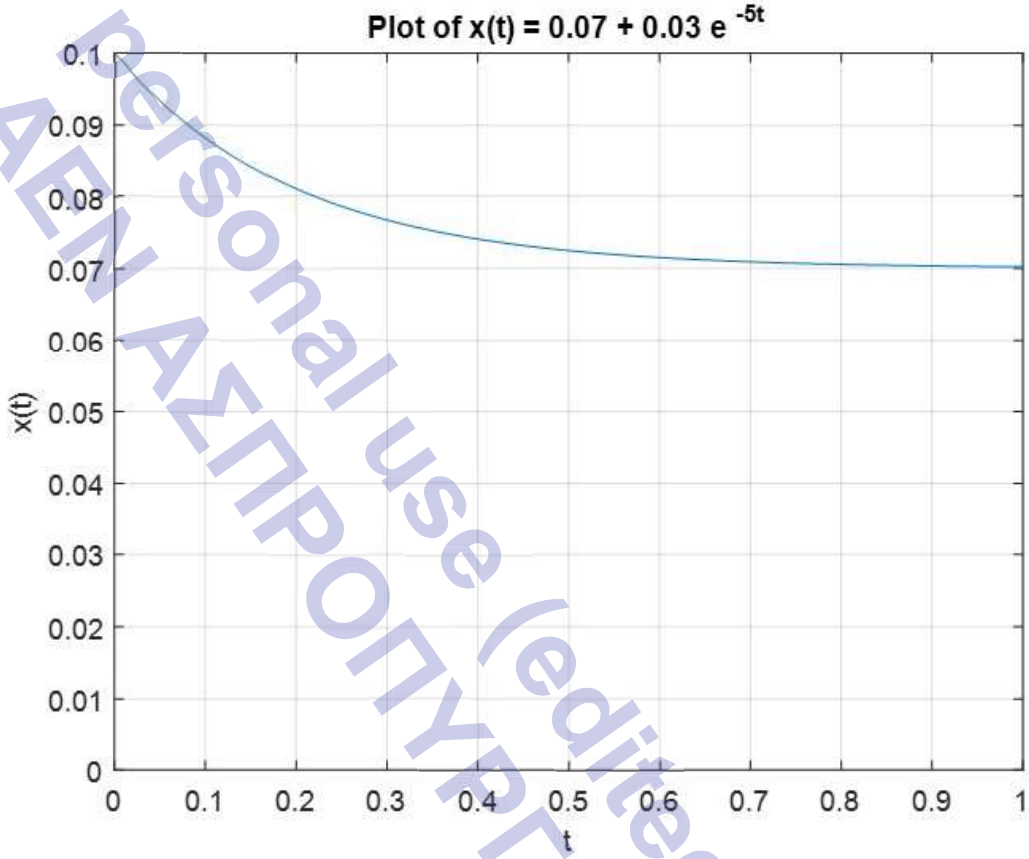
$$= \frac{2}{20} = 0.1$$

Θεώρημα Τελικής Τιμής

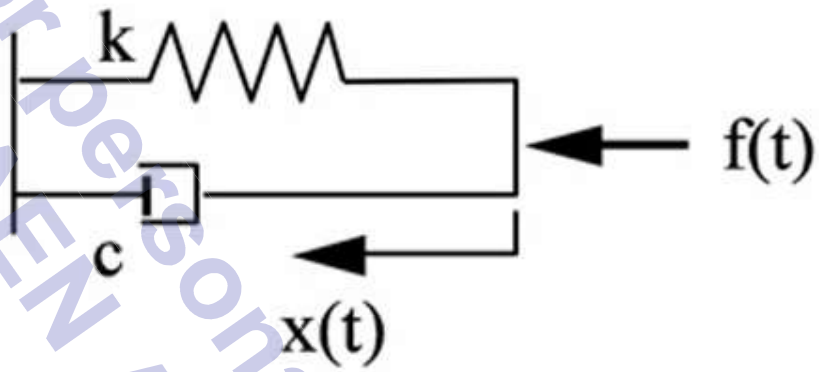
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$$

$$= \left[s\left(\frac{7+2s}{20s(s+5)}\right)\right]_{s=0}$$

$$= \frac{7}{100} = 0.07$$



Σύστημα 1ης Τάξης Ελατήριο Μάζα με καθυστέρηση



Δίνονται τα ακόλουθα στοιχεία:

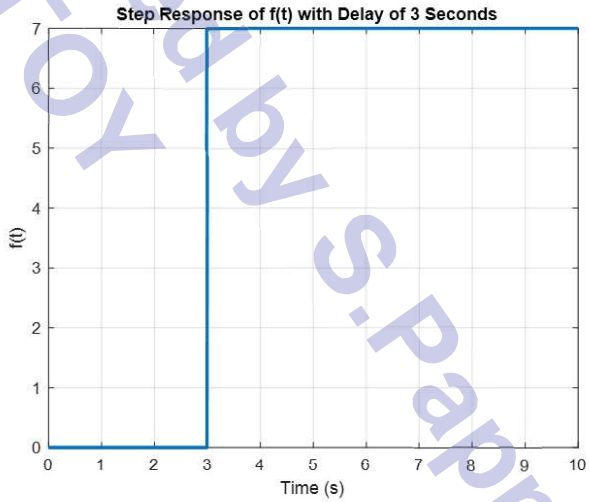
Σταθερά του ελατηρίου k = 100 Nm^{-1}

Συντελεστής Απόσβεσης c = 20 Nsm^{-1}

Αρχικές Συνθήκες: t = 0, x = 0m

Η δύναμη f(t) μεταβάλλεται μέσω μιας ***βηματικής απόκρισης*** από ***0 N σε 7N με καθυστέρηση 3 δευτερολέπτων***

Να βρεθεί η ***x(t)***



ΛΥΣΗ

Γράφουμε την εξίσωση ισορροπίας στο πεδίο του ***χρόνου με την καθυστέρηση***:

$$f(t-3) = 100\,x(t) + 20\,\frac{dx}{dt}$$

Μετατρέπουμε την εξίσωση ισορροπίας στο πεδίο του ***Laplace (χρησιμοποιώ την ιδιότητα της μετατόπισης της συχνότητας)***:

$$\boldsymbol{e^{-3s}F(s)} = e^{-3s}\frac{7}{s} = 100X(s) + 20sX(s)$$

$$e^{-3s}\frac{7}{s} = 20\,(s+5)X(s)$$

$$\mathrm{X(s)} = \frac{7e^{-3s}}{20s(s+5)}$$

$$\mathrm{X(s)} = \left[\frac{7}{20s(s+5)}\right]e^{-3s}$$

Γράφουμε την εξίσωση ισορροπίας στο πεδίο του ***χρόνου***:

$$f(t) = k\,x(t) + c\,\frac{dx}{dt} = 100\,x(t) + 20\frac{dx}{dt}$$

Μετατρέπουμε την εξίσωση ισορροπίας στο πεδίο του ***Laplace***:

$$F(s) = kX(s) + c\,[sX(s) - x(0)] = 100X(s) + 20\,[sX(s) - x(0)]$$

x(0) = 0

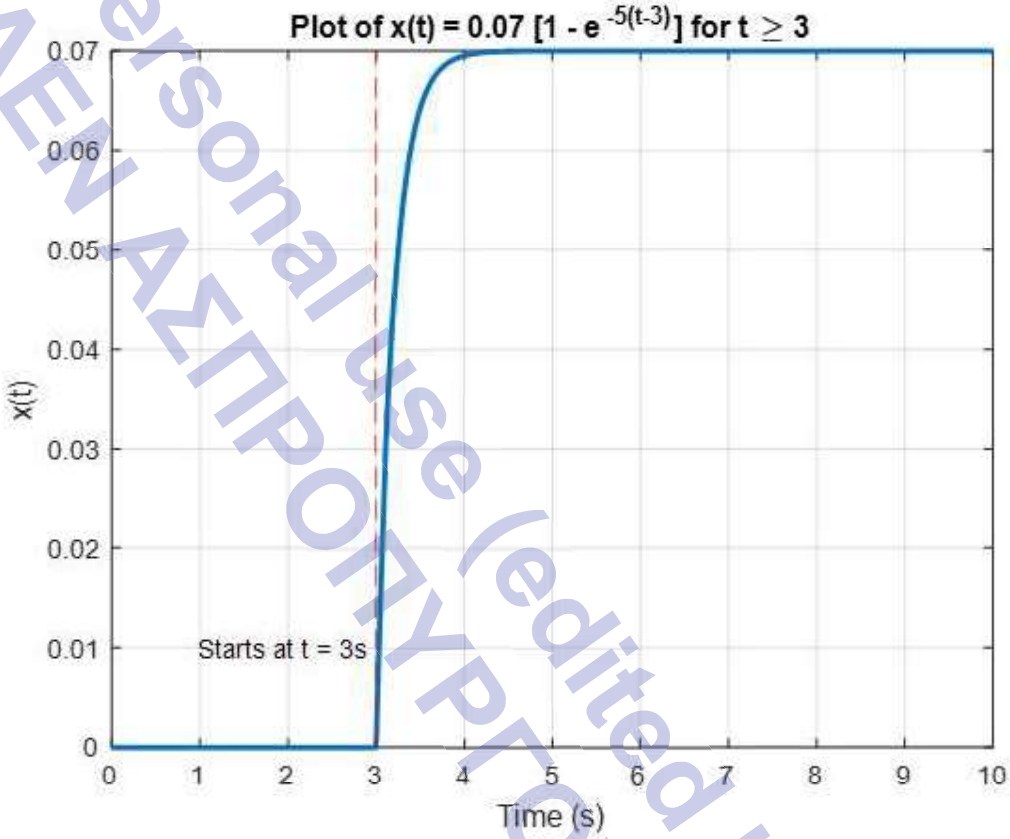
Με τον ίδιο τρόπο, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιώ τη μέθοδο με τα μερικά κλάσματα

$$\mathrm{X(s)} = \left[\frac{0.07}{s} - \frac{0.07}{(s+5)}\right]e^{-3s}$$

$$\mathbf{X(s) = 0.07}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+5)}\right]\mathbf{e}^{-3s}$$

Μετατρέπουμε στο πεδίο του χρόνου με Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace:

$$x(t) = 0.07\left[1 - e^{-5(t-3)}\right]$$



Μοντέλο 2ης τάξης - ΟΛΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από την ακόλουθη συνάρτηση:

$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = u$, where $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt}\right\} = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$
$$= s^2 Y(s) - s\cdot 0 - 1$$
$$= s^2 Y(s) - 1$$

$$3\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = 3\left[sY(s) - y(0)\right]$$
$$= 3sY(s) - 3\cdot 0$$
$$= 3sY(s)$$

$$2\mathcal{L}\{y\} = 2Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{u\} = \frac{1}{s}$$

Άρα ο Μ.Λ της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$Y(s)\left(s^2+3s+2\right) = \frac{1}{s} + 1$$
$$Y(s)\left(s^2+3s+2\right) = \frac{s+1}{s}$$

s^2+3s+2

$\Delta = 3^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$s_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2}$ $\begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -1 \end{cases}$

$s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$

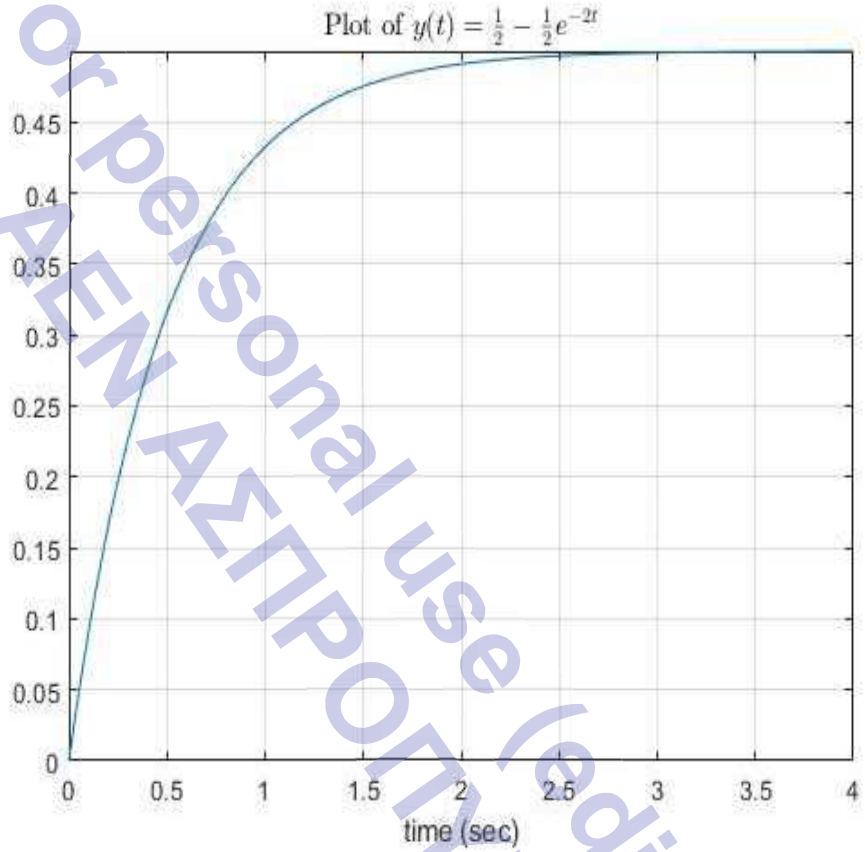
$$Y(s)\cancel{(s+1)}(s+2) = \frac{\cancel{s+1}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

από πίνακες

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\alpha)}\right\} = \frac{1}{\alpha}\cdot\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)$$



Εικόνα 20: Ελεύθερη Απόκριση του συστήματος. Για t=0, y(t)=0

Μοντέλο 2ης τάξης - ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

Εξαναγκασμένη απόκριση συστήματος (***$y_{bias}(t)$***): Έχω το ίδιο σύστημα, όμως τώρα ***όλες οι αρχικές συνθήκες <u>είναι μηδενικές</u>***.

$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = u$, where $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = \mathbf{0}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$
$$= s^2Y(s) - s\cdot 0 - 0$$
$$= s^2Y(s) - 0$$

$$3\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = 3[sY(s) - y(0)]$$
$$= 3sY(s) - 3\cdot 0$$
$$= 3sY(s)$$

$$2\mathcal{L}\{y\} = 2Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{u\} = \frac{1}{s}$$

Άρα ο Μ.Λ της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$Y(s)(s^2+3s+2) = \frac{1}{s}$$
$$Y(s)(s^2+3s+2) = \frac{1}{s}$$

s^2+3s+2

$\Delta = 3^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$s_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2}$ $\begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -1 \end{cases}$

$s^2+3s+2 = (s+1)$ –

$$Y(s)(s+1)(s+2) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+2}$$

$$\cdot\ C_1 = sY(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$\cdot\ C_2 = (s+1)Y_s\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s(s+2)}\Big|_{s=-1} = -1$$

$$\cdot\ C_3 = (s+2)Y_s\Big|_{s=-2} = \frac{1}{s(s+1)}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

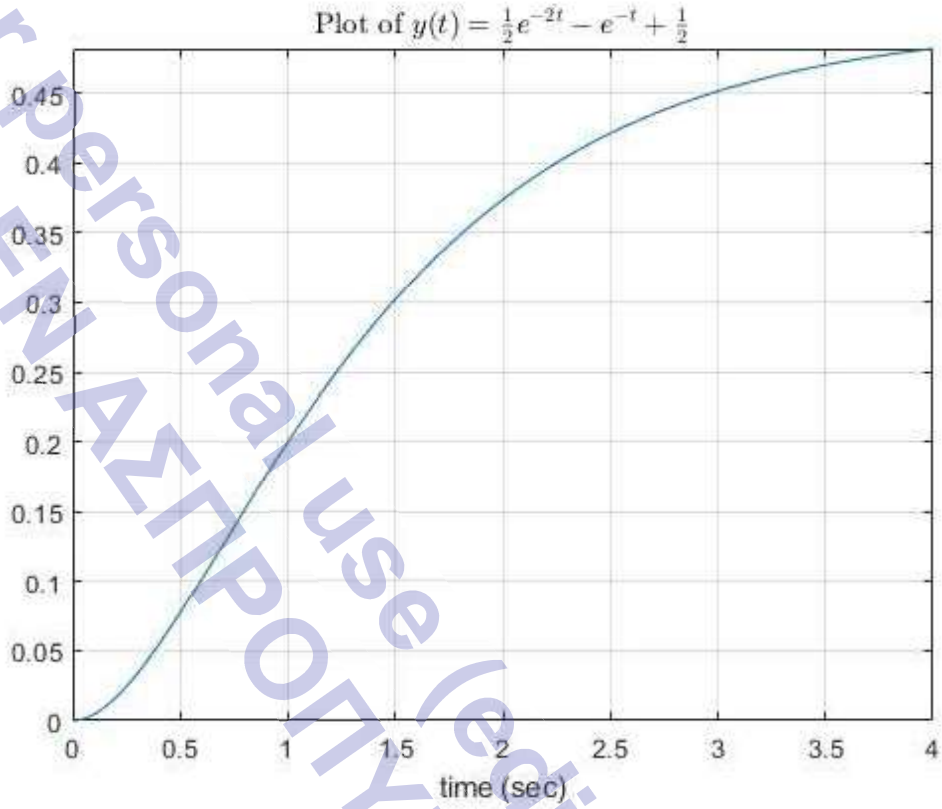
Από πίνακες

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{2}\cancelto{1}{u(t)} = \frac{1}{2} \quad t \geq 0$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = -1\,e^{-t}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - 1\,e^{-t} + \frac{1}{2}$$



Εικόνα 21: Εξαναγκασμένη Απόκριση του συστήματος. Για t=0, y(t)=0, y'(t) = 0.

Μοντέλο 2ης τάξης - ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

Ελεύθερη απόκριση συστήματος (***$y_{free}(t)$***): Έχω το ξανά ίδιο σύστημα, όμως τώρα ***η είσοδος u(t)*** ***<u>είναι μηδενική</u>***.

$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \mathbf{0}$, με $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt}\right\} = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$
$$= s^2 Y(s) - s\cdot 0 - 0$$
$$= s^2 Y(s) - 1$$

$$3\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = 3\left[sY(s) - y(0)\right]$$
$$= 3sY(s) - 3\cdot 0$$
$$= 3sY(s)$$

$$2\mathcal{L}\{y\} = 2Y(s)$$

$$u = 0$$

Άρα ο Μ.Λ της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$Y(s)\,(s^2+3s+2) - 1 = 0$$
$$Y(s)\,(s^2+3s+2) = 1$$

s^2+3s+2

$\Delta = 3^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$s_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2}$ $\begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -1 \end{cases}$

$s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$

$$Y(s)\,(s+1)(s+2) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

$$\cdot\, C_1 = (s+1)\,Y_s\Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s+2)}\Big|_{s=-1} = +1$$

$$\cdot\, C_2 = (s+2)\,Y_s\Big|_{s=-2} = \frac{1}{(s+1)}\Big|_{s=-2} = -1$$

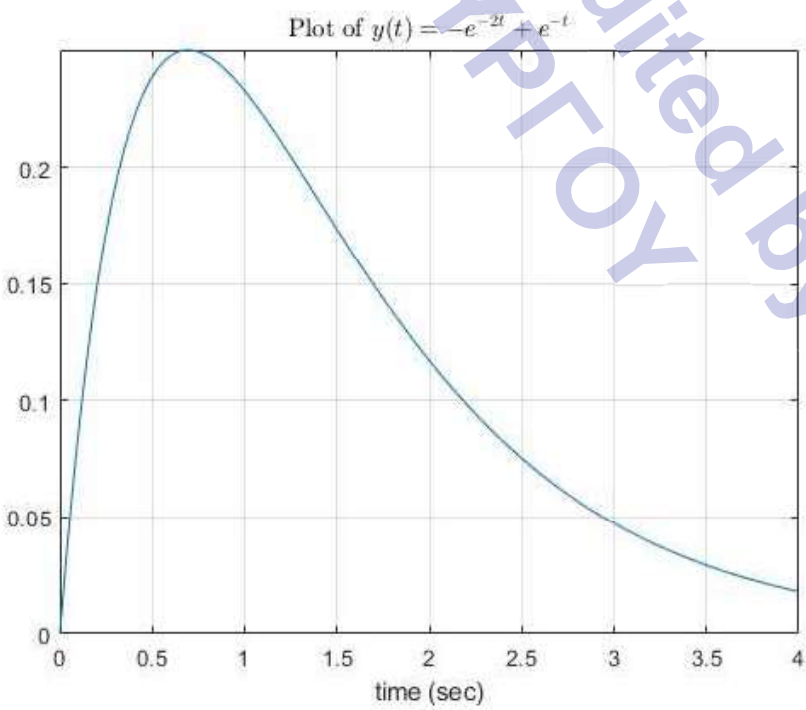
$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

Από πίνακες

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = 1e^{-t}$$

$$-1\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -1e^{-2t}$$

$$y(t) = -e^{-2t} + 1e^{-t}$$



Εικόνα 22: Ελεύθερη Απόκριση του συστήματος. Για t=0, y(t)=0, y'(t) = 1 και u(t) = 0.

Μοντέλο 2ης τάξης - ΟΛΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ = ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ + ΕΛΕΥΘΕΡΗ

Η ολική απόκριση του συστήματος: Είναι το άθροισμα της ελεύθερης και της εξαναγκασμένης απόκρισης.

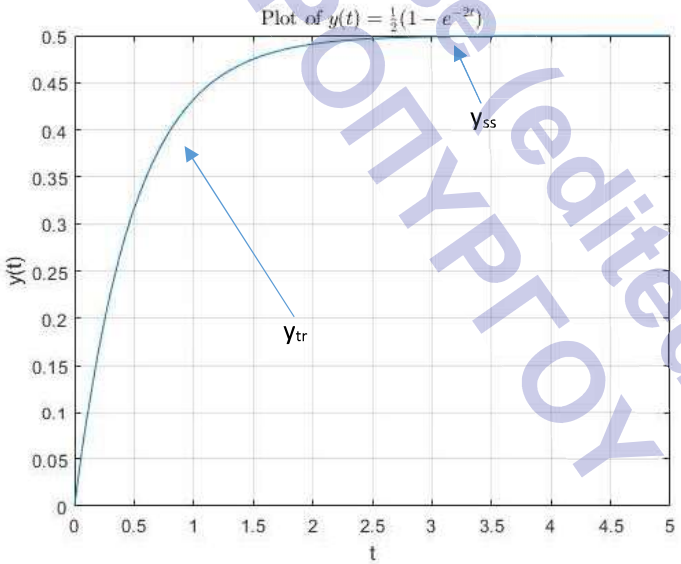
Στο παράδειγμά μας, η ολική απόκριση του ***y(t)*** της διαφορικής εξίσωσης

$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = u$, με αρχικές συνθήκες *y(0)* = 0, $\dot{y}(0) = 1$, είναι

$$y(t) = y_{free}(t) + y_{bias}(t) = (e^{-t} + e^{-2t}) + \frac{1}{2}(e^{-2t} - 2e^{-t} + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

Ουσιαστικά καταλήξαμε στο αποτέλεσμα του παραδείγματος 2!!! ***Η μέθοδος του ΜΛ οδηγεί με ένα μόνο βήμα στην ΟΛΙΚΗ λύση/απόκριση.***



Εικόνα 23: Συνολική απόκριση του συστήματος

Η απόκριση στην ***μόνιμη κατάσταση ισορροπίας*** (***steady state response)*** y_{ss} είναι το μέρος της ολικής απόκρισης το οποίο ***<u>δεν μηδενίζεται</u>*** όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο.

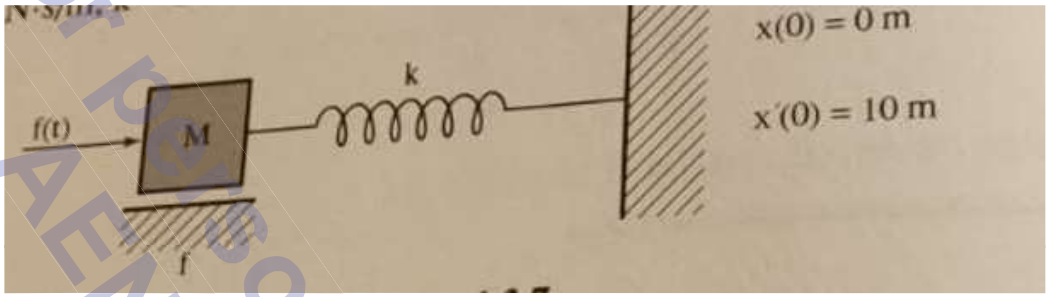
Η απόκριση στη ***μεταβατική κατάσταση*** (***transient response)*** y_{tr} είναι το μέρος της ολικής απόκρισης το οποίο ***τείνει στο μηδέν*** όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο.

Στη δική μας περίπτωση:

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\,(1 - e^{-2t})\right) = \frac{1}{2}\,, \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\,(e^{-2t})\right) = 0$$

$$y_{tr} = -\frac{1}{2}\,(e^{-2t})$$

Παράδειγμα 2ου Βαθμού – Ελατήριο Μάζα



Σας δίνετε η εξίσωση κίνησης καθώς και οι αρχικές συνθήκες για το ακόλουθο σύστημα ελατηρίου μάζας.

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = 20.$$

f(t) = 20N = 20 u(t) *είναι η δύναμη που ασκείται.*

f = 80 Ns/m *είναι η τριβή.*

K = 160 N/m*, η σταθερά του ελατηρίου*

M = 10 Kg*, είναι η μάζα του σώματος.*

Να βρεθεί η **x(t).**

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = 20.$$

Διαιρώ με ***M*** και τα δυο μέρη:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{M}x = \frac{20}{M}.$$

Αντικαθιστώ τις τιμές που δίνονται:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 2$$

Χρησιμοποιώ τις ιδιότητες για τον μετασχηματισμό Laplace της 1ης και της 2ης παραγώγου:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0),$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s),$$

$$\mathcal{L}\{2\} = \frac{2}{s}.$$

$$(s^2X(s) - s(0) - 10) + 8(sX(s) - 0) + 16X(s) = \frac{2}{s}.$$

$$s^2X(s) - 10 + 8sX(s) + 16X(s) = \frac{2}{s}.$$

$$(s^2 + 8s + 16)X(s) = \frac{2}{s} + 10.$$

$$X(s) = \frac{2/s + 10}{s^2 + 8s + 16}.$$

Παραγοντοποιώ τον παρονομαστή:

$$X(s) = \frac{2/s + 10}{(s+4)^2}.$$

Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με ***s.*** Στον αριθμητή βγάζω κοινό παράγοντα το νούμερο 10.

$$X(s) = \frac{10(s + 0.2)}{s(s+4)^2}$$

Σας δίνεται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\beta}{s(s+\alpha)^2}\right\} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\beta - \beta e^{-\alpha t} + \alpha(\alpha - \beta)te^{-\alpha t}\right).$$

Χρησιμοποιώ την παραπάνω ιδιότητα με ***με α = 4, β = 0.2***

και καταλήγω:

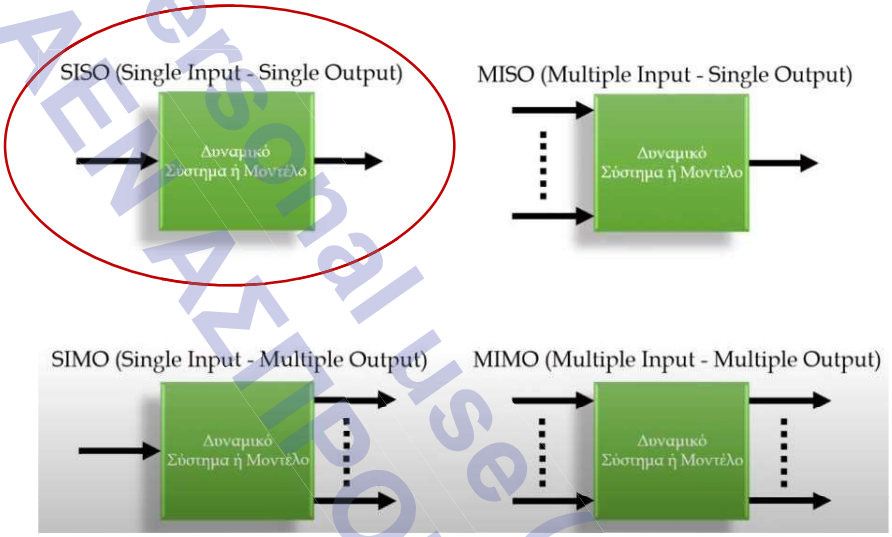
$$x(t) = \frac{10}{16}\left(0.2 - 0.2e^{-4t} + 4(4-0.2)te^{-4t}\right)$$

$$x(t) = 0.125 + 9.5te^{-4t} - 0.125e^{-4t}.$$

Συνάρτηση Μεταφοράς (Transfer Function)-Πόλοι/Μηδενικά

Στον κλασσικό έλεγχο, οι συναρτήσεις μεταφοράς χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν τις σχέσεις εισόδου-εξόδου μεταξύ των μεταβλητών ενός συστήματος.

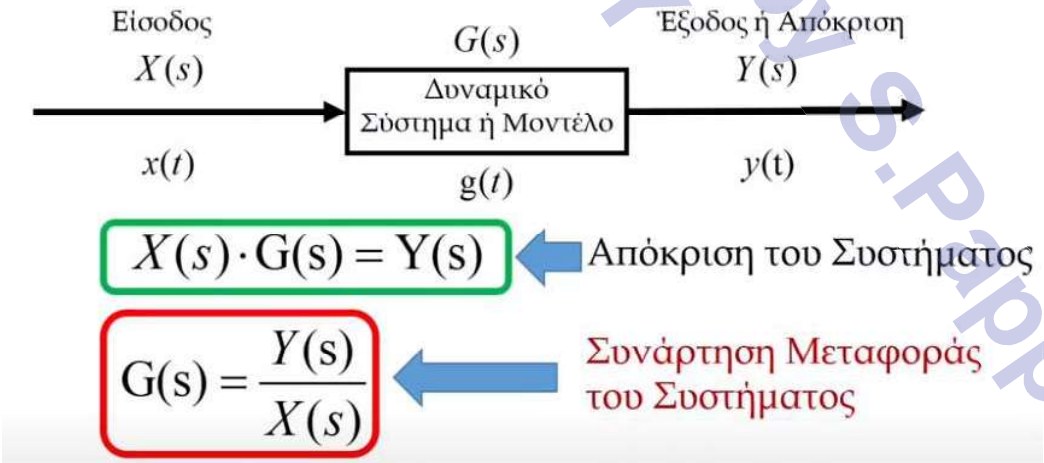
Κατηγορίες συστημάτων:



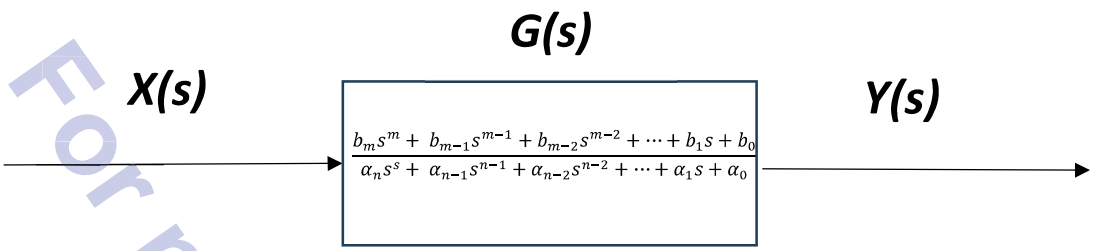
Εικόνα 24: Κατηγορίες Συστημάτων Ελέγχου. Εμείς θα ασχοληθούμε με SISO

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός ***Γραμμικού Χρονικά Ανεξάρτητου (ΓΧΑ) Συστήματος*** ορίζεται ως ***το πηλίκο του μετασχηματισμού Laplace*** *της εξόδου (απόκριση)* ***προς τον μετασχηματισμό Laplace*** *της εισόδου, θεωρώντας* ***μηδενικές αρχικές συνθήκες***.

Η συνάρτηση μεταφοράς ***δεν παρέχει πληροφορίες σχετικά με την εσωτερική δομή*** του συστήματος (black-box abstraction)



Εικόνα 25: Συνάρτησης μεταφοράς ενός Δυναμικού Μοντέλου



Όπως είδαμε και στον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} =$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K\,(s-z_1)\,(s-z_2)\cdots\,(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\cdots\,(s-p_n)}$$

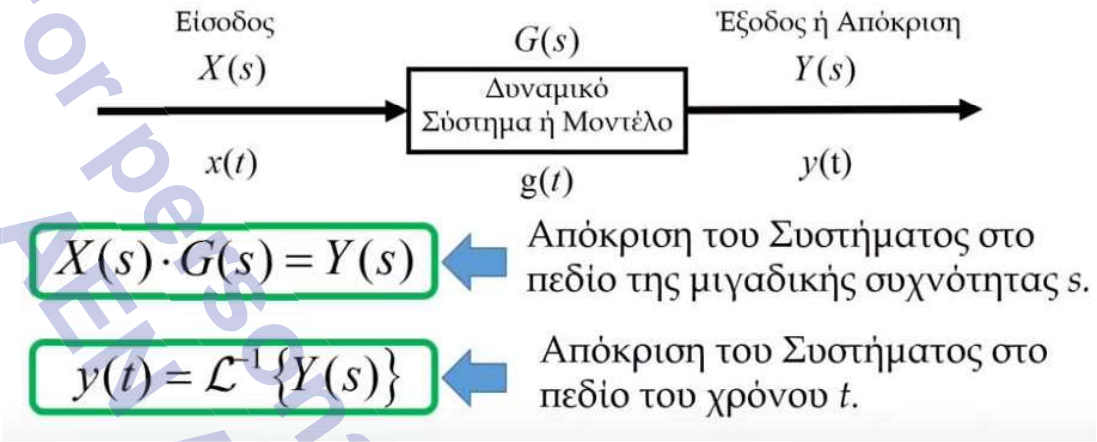
- Οι ρίζες της ***χαρακτηριστικής εξίσωσης*** του συστήματος ***D(s) = 0*** είναι οι $p_1, p_2, \ldots p_n$. ονομάζονται ***πόλοι*** του συστήματος
- Οι ρίζες του πολυωνύμου ***N(s) = 0*** είναι οι $z_1, z_2, \ldots z_m$. ονομάζονται ***μηδενικά*** του συστήματος.
- Η θέση των πόλων και των μηδενικών στο μιγαδικό επίπεδο καθορίζει ***τη δυναμική συμπεριφορά*** του συστήματος.
- Ειδικά η ***θέση των πόλων*** καθορίζει την ***ευστάθεια*** του συστήματος.
- Το ***K*** ονομάζεται κέρδος (Gain/DC GAIN).
- ***Η τάξη*** ενός (πραγματικού) συστήματος εντοπίζεται μέσω της συνάρτησης μεταφοράς του. Δίνεται από τη μεγαλύτερη δύναμη του ***n*** στην οποία είναι υψωμένο το ***s*** στον παρονομαστή ***D(s)***. Άρα η τάξη του συστήματος ***είναι ίση με τον αριθμό των πόλων του***.

Σύστημα Μηδενικής Τάξης: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0}{\alpha_0}$

Σύστημα 1ης Τάξης: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0}{\alpha_1 s + \alpha_0}$

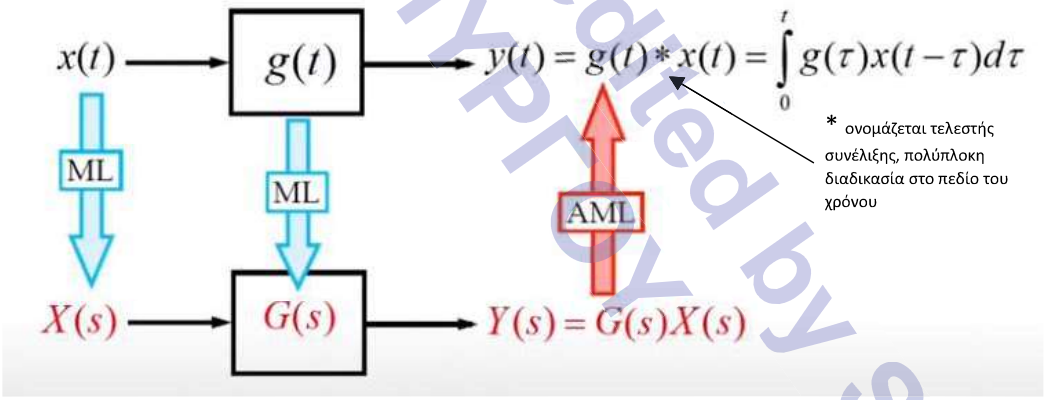
Σύστημα 2ης Τάξης: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$

Σε αυτά τα παραδείγματα θεωρούμε ότι *m = 0*, δηλαδή το ότι το σύστημα δεν έχει μηδενικά



Εικόνα 26: Απόκριση Γραμμικού Χρονικά Αμετάβλητου Συστήματος

- Η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της εξόδου του συστήματος.
- ***ΠΡΟΣΟΧΗ:*** Η απόκριση ***Y(s)*** του συστήματος υπολογίζεται από το ***γινόμενο*** *X(s)·G(s) και στη συνέχεια αντιστρέφεται σε y(t)* και ΟΧΙ από το γινόμενο x(t)·g(t).

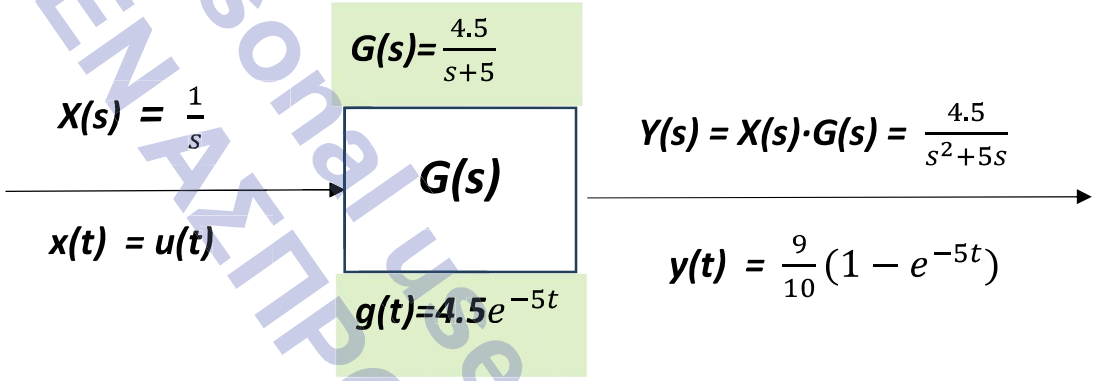


Εικόνα 27:Γενικό Σχήμα Υπολογισμού της Χρονικής Απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος σε γνωστό σήμα εισόδου, μέσω της συνάρτησης μεταφοράς (ML = Μετασχηματισμός Laplace, AML = Αντίστροφος ML).

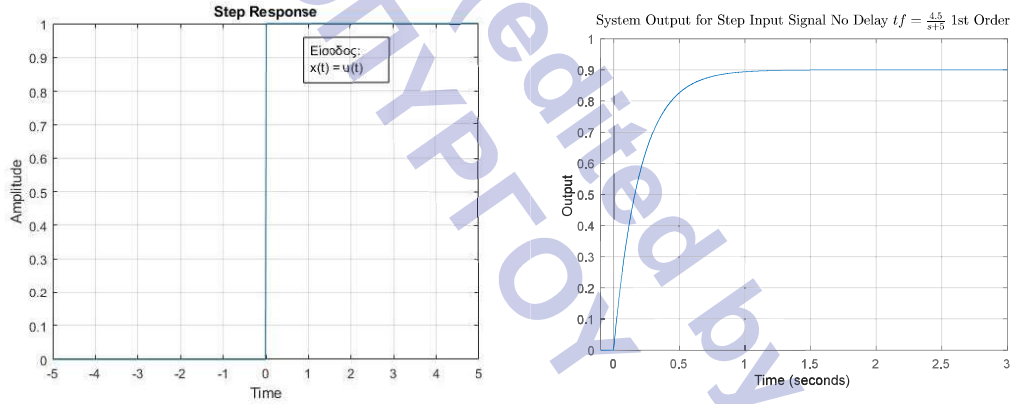
ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Παράδειγμα 1: Βηματική απόκριση (step response) συστήματος 1ου βαθμού χωρίς καθυστέρηση

Βηματική Απόκριση ενός συστήματος είναι ο ***Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της εξόδου*** του συστήματος σε συνδυασμό με ***Βηματική Είσοδο***



Εικόνα 28: Σχηματική Αναπαράσταση Συστήματος 1ης τάξης με βηματική είσοδο χωρίς καθυστέρηση

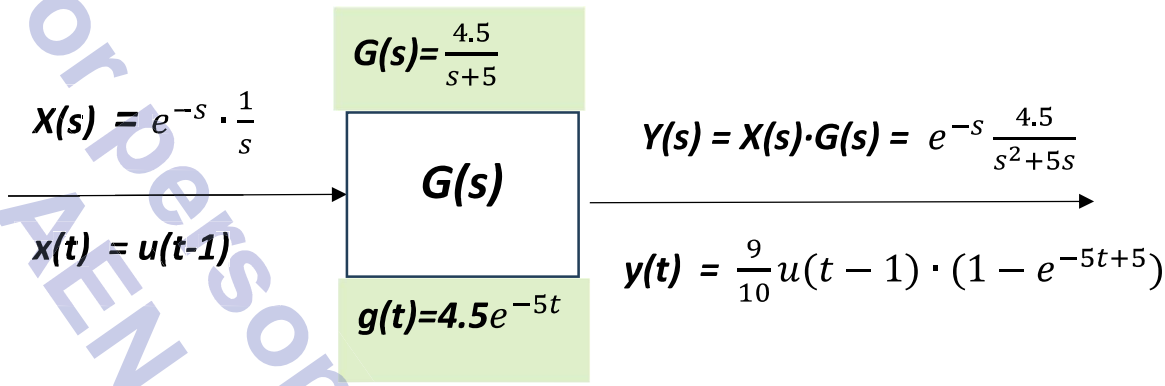


Εικόνα 29: Απόκριση Συστήματος 1ης τάξης χωρίς καθυστέρηση

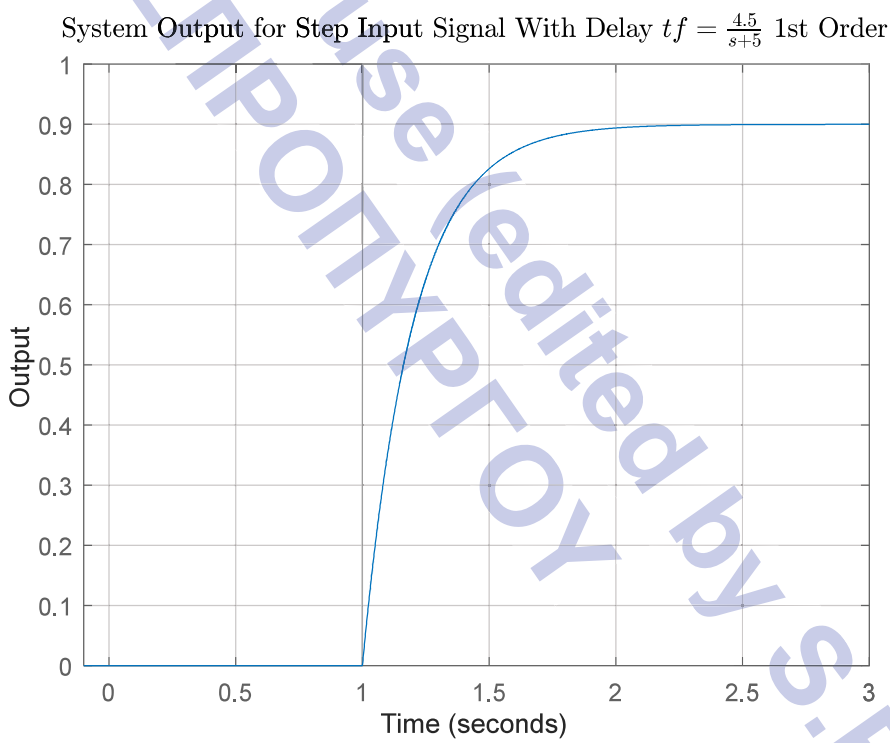
Παρατηρούμε ότι η ***απόκριση*** (έξοδος) «ακολουθεί» το ***βήμα*** της εισόδου και είναι και αυτό ένα ***βήμα,*** λίγο διαφορετικό από αυτό της εισόδου, όμως στην ίδια μορφή και χωρίς καθυστέρηση.

Άρα η ***συνάρτηση μεταφοράς μεταφέρει*** το σήμα εισόδου στη έξοδο. Συνεπώς το σήμα της εισόδου μεταφέρεται (μέσω της συνάρτησης μεταφοράς) στην έξοδο. Αν ήθελα να μεταφέρω το σήμα της εισόδου ***αυτούσιο*** στην έξοδο θα έπρεπε η συνάρτηση μεταφοράς να είναι ίση με μονάδα, ***G(s) = 1.*** Με αυτόν τον τρόπο είναι απλά σα να συνδέω την είσοδο και την έξοδο με ένα καλώδιο. Άρα ***δεν έχω σύστημα ελέγχου.***

Παράδειγμα 2: Βηματική απόκριση συστήματος 1ου βαθμού με καθυστέρηση

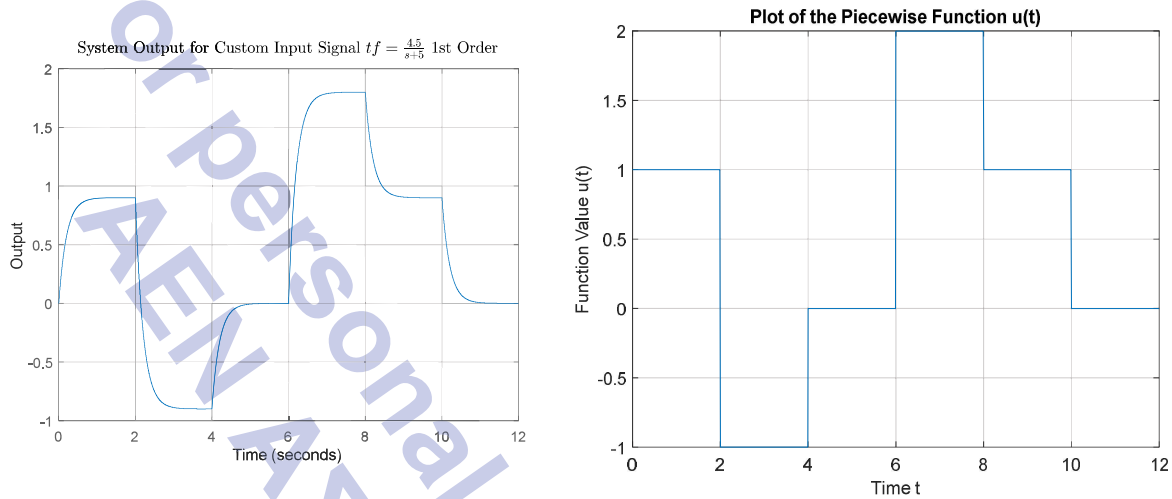


Εικόνα 30: Σχηματική Αναπαράσταση Συστήματος 1ης τάξης βηματικής εισόδου με καθυστέρηση



Εικόνα 31: Απόκριση Συστήματος 1ης τάξης με καθυστέρηση

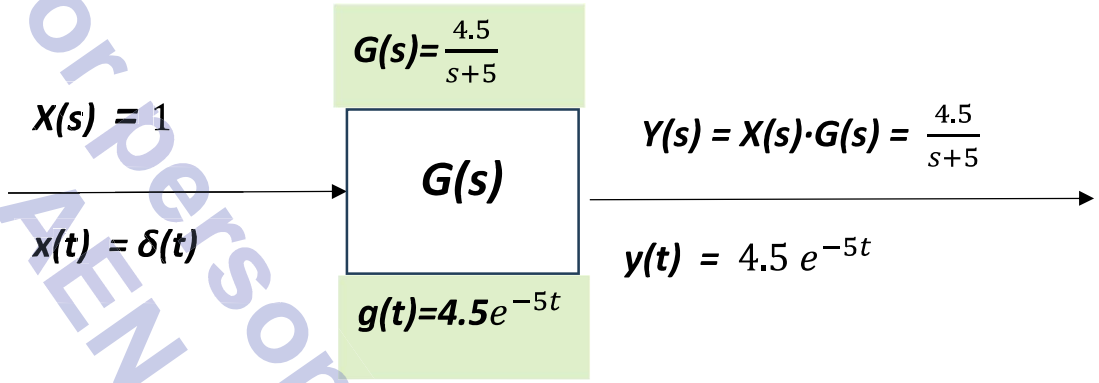
Παράδειγμα 3: Απόκριση συστήματος 1ου βαθμού με μεταβλητή βηματική είσοδο



Εικόνα 32: Απόκριση Συστήματος 1ης τάξης με μεταβλητή βηματική είσοδο

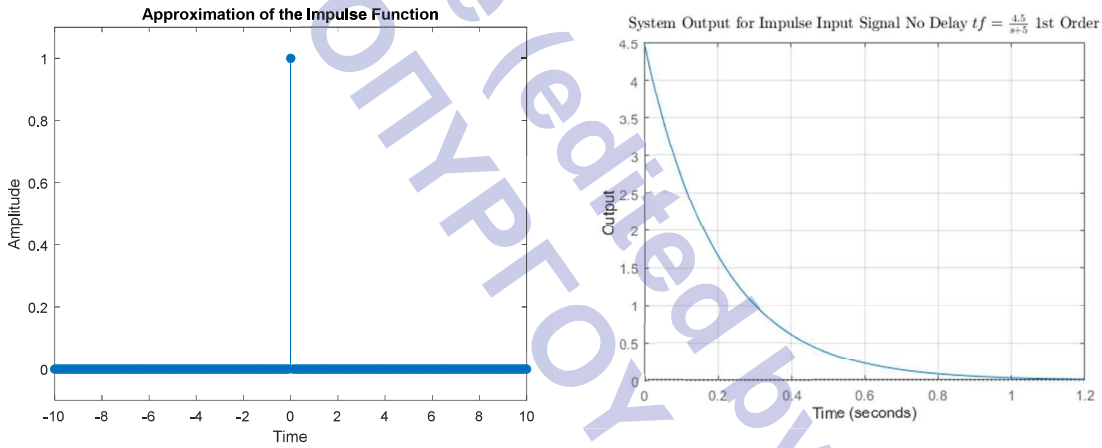
Από τα παραδείγματα 1-3 γίνεται εμφανές ότι η συνάρτηση μεταφοράς ***«μεταφέρει» το βήμα*** της εισόδου στην έξοδο, ακόμα όταν αυτό έχει καθυστερήσεις ή είναι μεταβλητό.

Παράδειγμα 4: Απόκριση συστήματος 1ου βαθμού με κρουστική είσοδο (impulse response)



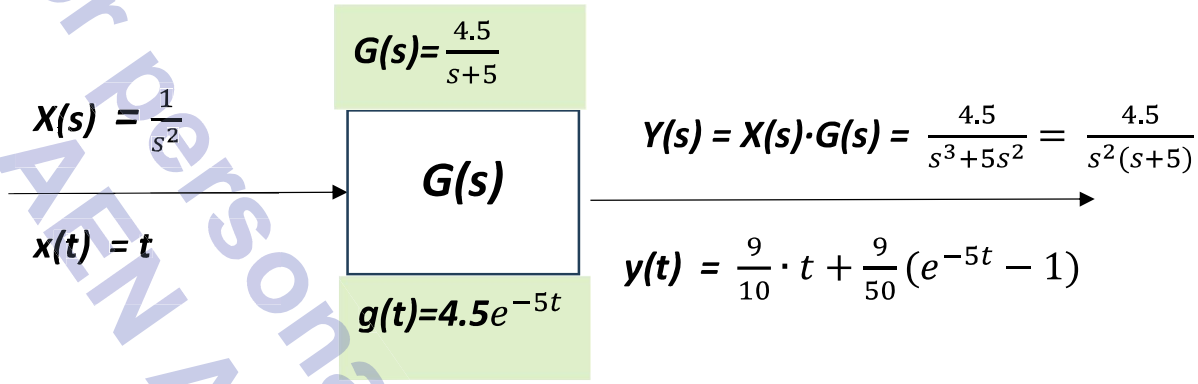
Εικόνα 33: Σχηματική Αναπαράσταση Συστήματος 1ης τάξης κρουστικής εισόδου

Παρατηρούμε ότι η ***κρουστική απόκριση*** ενός συστήματος είναι και ο ***Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace*** του ***ίδιου*** του συστήματος.

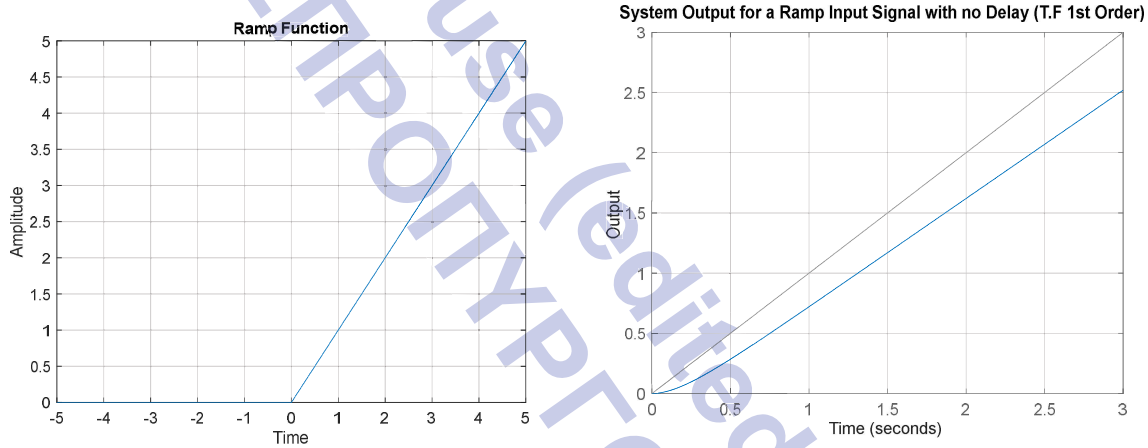


Εικόνα 34: Απόκριση Συστήματος 1ης τάξης με κρουστική είσοδο

Παράδειγμα 5: Απόκριση αναρρίχησης (ramp repsonse) συστήματος 1ης τάξης χωρίς καθυστέρηση.

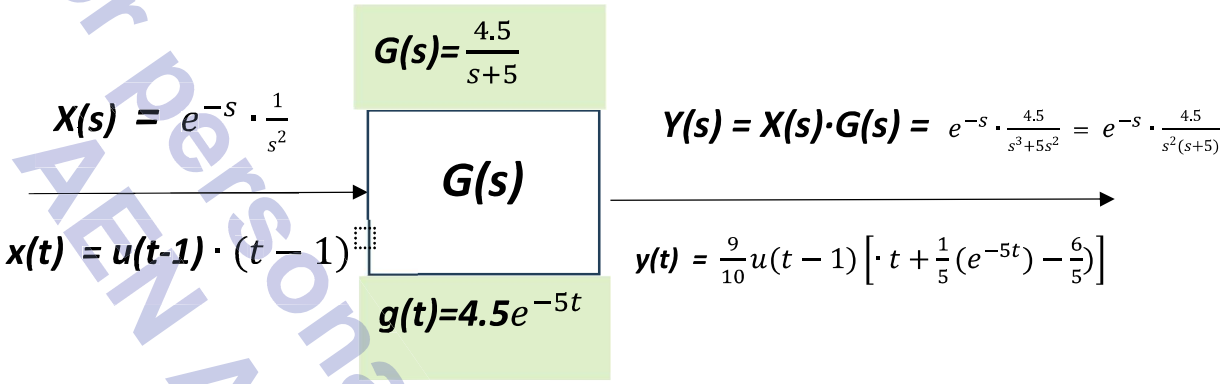


Εικόνα 35: Σχηματική Αναπαράσταση Συστήματος 1ης τάξης με είσοδο συνάρτηση αναρρίχησης χωρίς καθυστέρηση



Εικόνα 36: Απόκριση Συστήματος 1ης τάξης με είσοδο συνάρτηση αναρρίχησης χωρίς καθυστέρηση

Παράδειγμα 6: Απόκριση αναρρίχησης (ramp repsonse) συστήματος 1^{ης} τάξης με καθυστέρηση.



Εικόνα 37: Σχηματική Αναπαράσταση Συστήματος 1ης τάξης με είσοδο συνάρτηση αναρρίχησης με καθυστέρηση

Ιδιότητα	$f(t)$	$F(s)$
Μετατόπιση στο πεδίο χρόνου	$f(t-a)\cdot u(t-a)$	$e^{-as}\cdot F(s)$

$$Y(s) = e^{-s} \cdot \frac{4.5}{s^3+5s^2}$$

$$Y(s) = e^{-1s} \cdot F(s)$$

$$F(s) = \frac{4.5}{s^3+5s^2} = \frac{4.5}{s^2(s+5)} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{s^2(s+5)}$$

Από τους πίνακες

$$f(t) = \frac{9}{10}t + \frac{9}{50}e^{-5t} - \frac{9}{50} \quad (1)$$

Βάση ιδιότητας

$$e^{-1s}F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t-1)\cdot u(t-1)$$

Για να βρώ την $y(t)$:

Πολλαπλασιάζω την (1) με $u(t-1)$ κ'

όπου t, αντικαθιστώ με $(t-1)$

$$y(t) = u(t-1)\cdot\left[\frac{9}{10}(t-1) + \frac{9}{50}\left(e^{-5(t-1)} - 1\right)\right]$$

$$= u(t-1)\cdot\left[\frac{9}{10}t - \frac{9}{10} + \frac{9}{50}e^{(5-5t)} - \frac{9}{50}\right]$$

$$= \frac{9}{10}u(t-1)\left[t + \frac{e^{(5-5t)}}{5} - \frac{6}{5}\right]$$