

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

α/α	$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$
1	$\alpha f_1(t) \pm \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) \pm \beta F_2(s)$
2	$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t) = \dot{f}(t)$	$s F(s) - f(0)$
3	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = f''(t) = \ddot{f}(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
4	$\frac{d^v f(t)}{dt^v} = f^{(v)}(t)$	$s^v F(s) - s^{v-1} f(0) - \dots - f^{(v-1)}(0)$
5	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$
6	$\int_0^t \int_0^r f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(0)}{s}$
7	$\int \dots \int f(t) (dt)^v$	$\frac{F(s)}{s^v} + \sum_{k=1}^v \left[\int \dots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0}$
8	$f(t-r) \cdot u(t-r)$	$e^{-rs} F(s)$
9	$t^v f(t)$	$(-1)^v \frac{d^v}{ds^v} F(s)$
10	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(\sigma) d\sigma$
11	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
12	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(p) F_2(s-p) dp$
13	$e^{-\alpha t} \cdot f(t)$	$F(s+\alpha)$
14	$f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$	$\alpha F(\alpha s)$
15	$f(t) \cos \omega t$	$\frac{1}{2} F(s-j\omega) + \frac{1}{2} F(s+j\omega)$
16	$f(\alpha t)$	$\frac{F(s/\alpha)}{\alpha}$
17	$\frac{f(t)}{t^v}$	$\int_s^{\infty} \dots \int_s^{\infty} F(s) (ds)^v$

(Συνεχίζεται)

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

18	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$ Θεώρημα αρχικής τιμής
19	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$ Θεώρημα τελικής τιμής

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.2 ΖΕΥΓΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE

α/α	$F(s) = LT \{f(t)\}$	$f(t) = ILT \{F(s)\}$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	$u(t)$
3	$\frac{1}{s^2}$	t
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$, n θετικός ακέραιος
5	s	$\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta^{(1)}(t)$
6	s^n	$\delta^{(n)}(t)$, n θετικός ακέραιος
7	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
8	$\frac{1}{s^{n+1/2}}$	$\frac{2^n t^{n-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi^{1/2}}$
9	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}$	$u(t - \alpha)$
10	$\frac{1}{s} (1 - e^{-\alpha s})$	$u(t) - u(t - \alpha)$
11	$\frac{1}{s + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$
12	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot e^{-\alpha t}$, n θετικός ακέραιος
13	$\frac{1}{s(s + \alpha)}$	$\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$
14	$\frac{1}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1 - \frac{\beta}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{\beta - \alpha} e^{-\beta t}}{\alpha \beta}$
15	$\frac{s + \gamma}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\alpha \beta} \left(\gamma - \frac{\beta(\gamma - \alpha)}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\beta - \alpha} e^{-\beta t} \right)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.2 ΖΕΥΓΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE (Συνεχίζεται)

16	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$
17	$\frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t}}{\alpha - \beta}$
18	$\frac{s + \gamma}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{(\gamma - \alpha)e^{-\alpha t} - (\gamma - \beta)e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$
19	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)(s + \gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{e^{-\beta t}}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}$
20	$\frac{s + \delta}{(s + \alpha)(s + \beta)(s + \gamma)}$	$\frac{(\delta - \alpha)e^{-\alpha t}}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{(\delta - \beta)e^{-\beta t}}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)} + \frac{(\delta - \gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}$
21	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
22	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
23	$\frac{s + \alpha}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$
24	$\frac{s \cdot \sin \alpha + \omega \cdot \cos \alpha}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t + \alpha)$
25	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2}$
26	$\frac{s + \alpha}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega^2} \cos(\omega t + \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$
27	$\frac{1}{(s + \alpha)(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$
28	$\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{e^{-\alpha t} \sin \beta t}{\beta}$
29	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$
30	$\frac{s + \gamma}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{\sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma - \alpha}$
31	$\frac{1}{s[(s + \alpha)^2 + \beta^2]}$	$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{1}{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{-\alpha}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.2 ΖΕΥΓΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE (Συνεχίζεται)

32	$\frac{s + \gamma}{s[(s + \alpha)^2 + \beta^2]}$	$\frac{\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma - \alpha} - \tan^{-1} \frac{\beta}{-\alpha}$
33	$\frac{1}{s^2(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$
34	$\frac{1}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$
35	$\frac{s + \beta}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (\beta - \beta e^{-\alpha t} + \alpha(\alpha - \beta)t e^{-\alpha t})$
36	$\frac{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{\alpha_0}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2 - \alpha_1\alpha + \alpha_0}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{-\alpha t} - \frac{\beta^2 - \alpha_1\beta + \alpha_0}{\beta(\alpha - \beta)} e^{-\beta t}$
37	$\frac{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s[(s + \alpha)^2 + \beta^2]}$	$\frac{\alpha_0}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{1}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \cdot$ $\cdot \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - \alpha_1\alpha + \alpha_0)^2 + \beta^2(\alpha_1 - 2\alpha)^2} e^{-\alpha t} \cdot$ $\cdot \sin(\beta t + \varphi),$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta(\alpha_1 - 2\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2 - \alpha_1\alpha + \alpha_0} - \tan^{-1} \frac{\beta}{-\alpha}$
38	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
39	$\frac{1}{s^2 - \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sinh \omega t$
40	$\frac{1}{(s + \alpha)^2(s + \beta)}$	$\frac{1}{(\beta - \alpha)^2} [((\beta - \alpha)t - 1)e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}]$
41	$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$
42	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$
43	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\omega t \cos \omega t + \sin \omega t)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.2 ΖΕΥΓΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE (Συνεχίζεται)

44	$\frac{s^n}{(s^2 + \omega^2)^{n+1}}$	$\frac{t^n \sin \omega t}{n! 2^n \omega}$
45	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$
46	$\frac{s}{(s^2 + \alpha^2)(s^2 + \beta^2)}$	$\frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{\beta^2 - \alpha^2}$
47	$\frac{s^2}{(s + \alpha)(s + \beta)(s + \gamma)}$	$\frac{\alpha^2 e^{-\alpha t}}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{\beta^2 e^{-\beta t}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{\gamma^2 e^{-\gamma t}}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}$
48	$\frac{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^2(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{\alpha_1 + \alpha_0 t}{\alpha \beta} - \frac{\alpha_0(\alpha + \beta)}{(\alpha \beta)^2} - \frac{1}{\alpha - \beta} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_0}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha t} -$ $-\frac{1}{\alpha - \beta} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta} + \frac{\alpha_0}{\beta^2} \right) e^{-\beta t}$
49	$\frac{s + \gamma}{s^2[(s + \alpha)^2 + \beta^2]}$	$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\gamma t + 1 - \frac{2\gamma\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \right) +$ $+ \frac{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - \alpha)^2}}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$ $\varphi = 2 \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha} + \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma - \alpha}$
50	$\frac{1}{(s + \gamma)[(s + \alpha)^2 + \beta^2]}$	$\frac{e^{-\gamma t}}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \varphi)}{\beta \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}},$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma - \alpha}$
51	$\frac{1}{s^2(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} t(1 + e^{-\alpha t}) - \frac{2}{\alpha^3} (1 - e^{-\alpha t})$

1

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad m < n$$

ΔΙΑΚΡΙΤΟΙ ΠΟΛΩΝΙΣΜΟΙ

$$\bullet F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_n}{s+p_n}$$

$$\bullet k_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} F(s) \cdot (s+p_i)$$

• $P_1, P_2, \dots, P_n$ και $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί.

ΠΟΛΛΑΠΛΟΙ

$$\bullet F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)^r (s+p_2)\dots(s+p_n)} =$$

$$= \frac{k_{11}}{s+p_1} + \frac{k_{12}}{(s+p_1)^2} + \dots + \frac{k_{1r}}{(s+p_1)^r} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_n}{s+p_n}$$

$$\bullet k_{ij} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{s \rightarrow -p_i} \left[\frac{d^{(r-j)}}{ds^{(r-j)}} (F(s) \cdot (s+p_i)^r) \right]$$

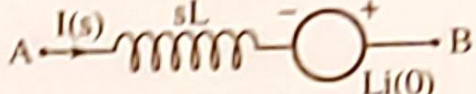
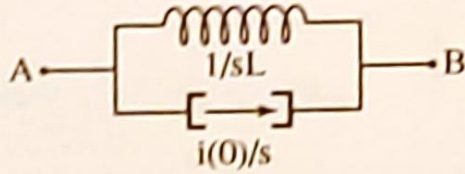
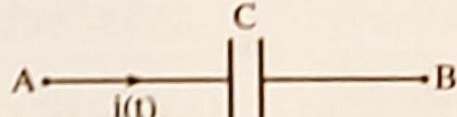
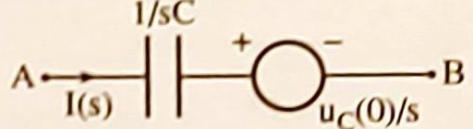
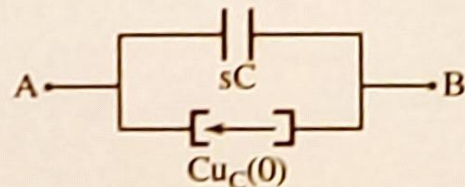
$$\bullet k_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} F(s) \cdot (s+p_i)$$

2

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad m > n$$

Αν ο βαθμός του πολωνύμου του αριθμητή είναι μεγαλύτερος του παρανομαστή, εκτελείται η διαίρεση των $B(s)/A(s)$ που δίνει ένα πολώνυμο του s , συν το κλάσμα του υπολοίπου δια του παρανομαστή που ανάγεται στην κατηγορία 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.4 ΠΛΗΘΗΤΙΚΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥΣ ΚΑΤΑ LAPLACE

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΜΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΕΝΟ (πεδίο t)	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΕΝΟ (πεδίο s)
ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ	 $u_R(t) = Ri(t)$	 $V_R(s) = RI(s)$
ΠΗΝΙΟ	 $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ ή $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt$	 $V_L(s) = sLI(s) - Li(0)$ ↕  $I(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s}$
ΠΥΚΝΩΤΗΣ	 $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ ή $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$	 $I(s) = sC V_C(s) - Cu_C(0)$ ↕  $V_C(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0)}{s}$