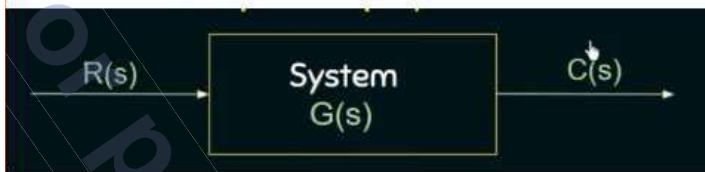


Συνάρτηση Μεταφοράς Ανοιχτού Βρόγχου



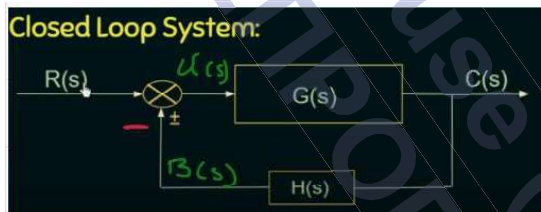
$R(s)$ είναι το σήμα εισόδου (Reference Input)

$C(s)$ είναι το σήμα εξόδου (Controlled Output)

$$C(s) = R(s) \cdot G(s)$$

Και τα δυο στο πεδίο του Laplace

Συνάρτηση Μεταφοράς Κλειστού Βρόγχου



$B(s)$ = feedback signal, Σήμα ανάδρασης

$U(s)$ = Actuating Signal, Σήμα ενεργοποίησης

$$\begin{aligned} U(s) &= R(s) - B(s) \\ &= R(s) - C(s)H(s) \end{aligned}$$

$$C(s) = U(s) \cdot G(s) \Rightarrow$$

$$C(s) = \{R(s) - B(s)\} \cdot G(s) \Rightarrow$$

$$C(s) = \{R(s) - C(s)H(s)\} G(s) \Rightarrow$$

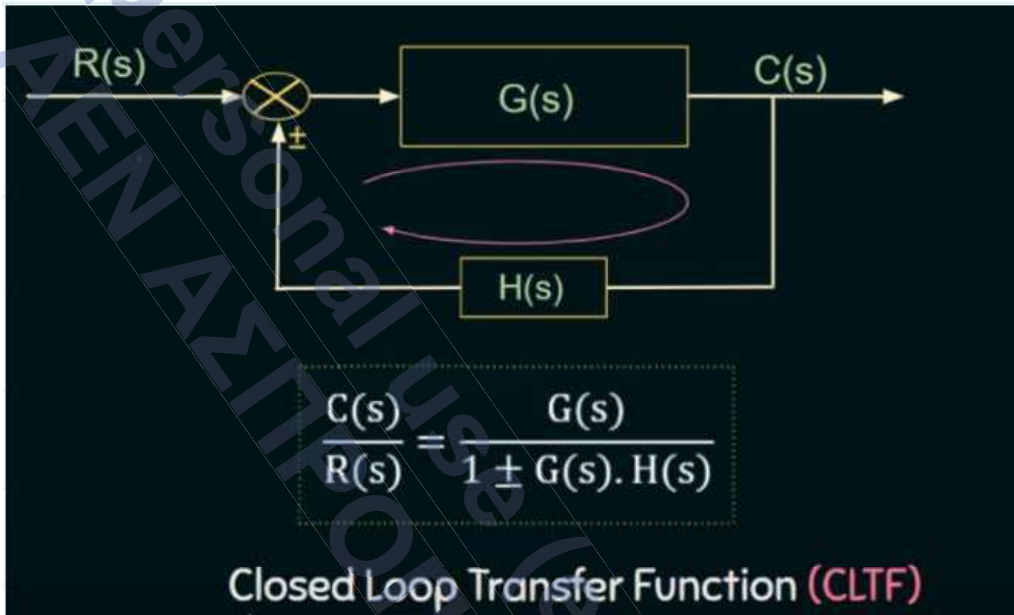
$$C(s) = R(s)G(s) - C(s)H(s)G(s) \Rightarrow$$

$$C(s) \{1 + H(s)G(s)\} = R(s)G(s)$$

Εξόδος

Είσοδος

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



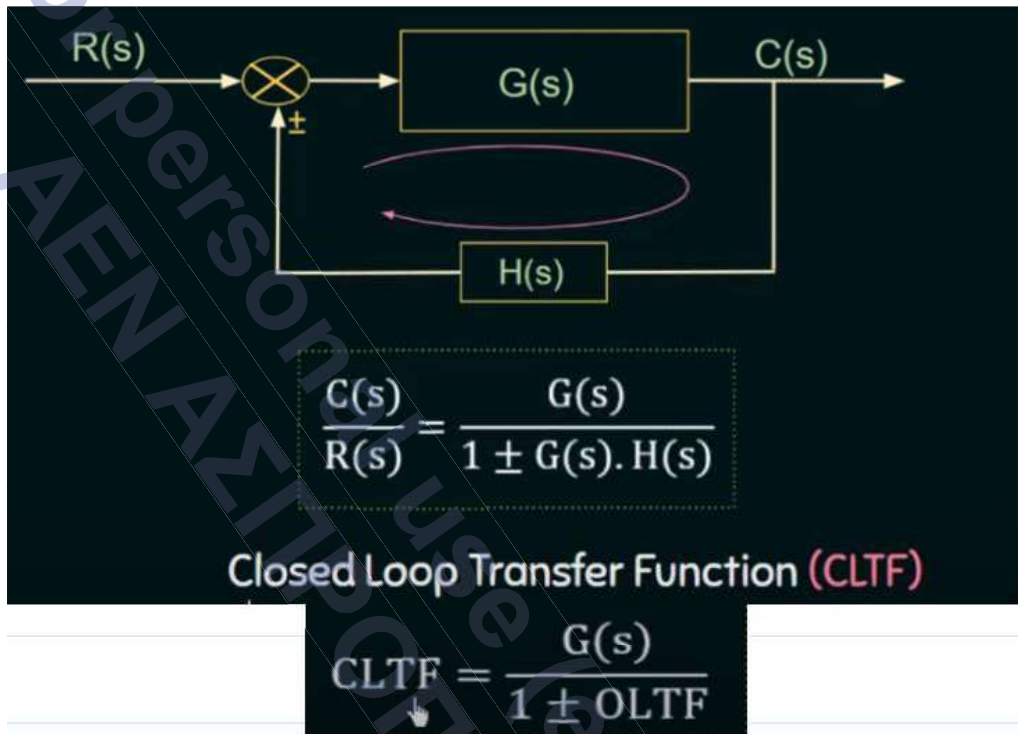
Όταν έχω "-" στον άρνητικό

τότε
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Όταν έχω "+", στον άρνητικό

τότε
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

Συσχέτιση Συνάρτησης Μεταφοράς Ανοιχτού – Κλειστού Βρόγχου



ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΓΧΟΥ

Ανάλυση σταθερότητας (stability analysis) με το κριτήριο Routh-Hurwitz

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΑΝΟΙΧΤΟΥ ΒΡΟΓΧΟΥ

Ανάλυση Σφαλμάτων στην σταθερή κατάσταση

Σχεδιασμός του Root Locus

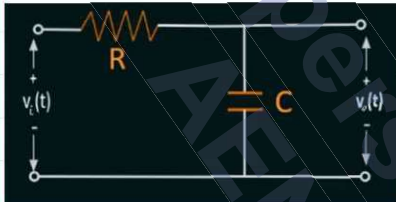
Σχεδιασμός γραφήματος Bode

Σχεδιασμός γραφήματος Nyquist

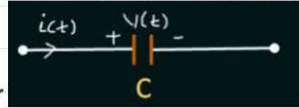
Η Συνάρτηση Μεταφοράς Ανοιχτού Βρόγχου, χρησιμοποιείται για όλα, εκτός από την ανάλυση σταθερότητας του συστήματος ελέγχου.

1ο Παράδειγμα – Συνάρτηση Μεταφοράς Κυκλώματος RC (Passive Low Pass Filter)

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω κυκλώματος



Θα πρέπει να γίνουν όλοι οι μετασχηματισμοί Laplace



$C = \text{χωρητικότητα}$

$$v_i(t) \Rightarrow V_i(s)$$

$$v_o(t) \Rightarrow V_o(s)$$

$$R \Rightarrow R$$

$$C \Rightarrow \frac{1}{s \cdot C}$$

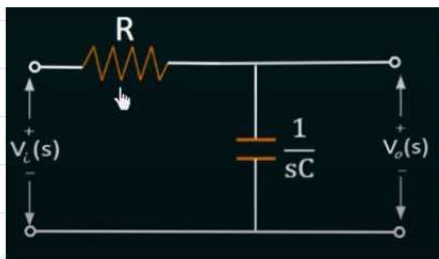
$$q(t) = C \cdot V(t)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dV(t)}{dt}$$

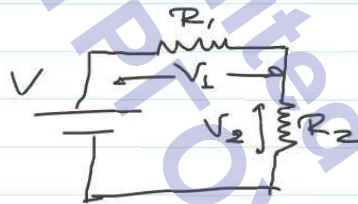
$$I(s) = C \cdot s \cdot V(s)$$

Αρχικές συνθήκες = 0

$$\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{s \cdot C}$$



Χρησιμοποιώ τη θεωρία του διαιρέτη τάσης :



$$V = V_1 + V_2$$

$$V_2 = V \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_o(s) = V_i(s) \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$= V_i(s) \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{Rsc + 1}$$

$$V_o(s) = V_i(s) \frac{1}{1 + (RC) \cdot s}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + (RC) \cdot s} = \frac{1}{1 + s\tau}$$

Σταθερά χρόνου
 $\tau = RC$ του κυκλώματος!

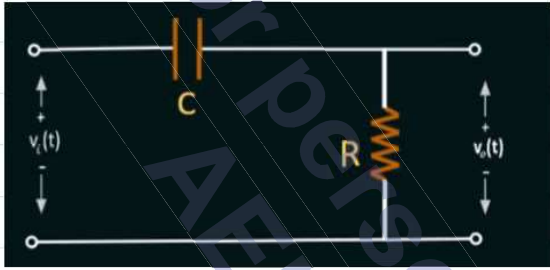
Η σταθερά χρόνου ενός συστήματος **1ης τάξης** αντιπροσωπεύει το χρόνο που χρειάζεται ώστε η απόκριση να φθάσει στο 63.2% της τελικής τιμής.
 Μπορεί να βρεθεί από τη συνάρτηση μεταφοράς, αρκεί να είναι στην ακόλουθη μορφή:

The standard form of transfer function of a 1st order control system is:

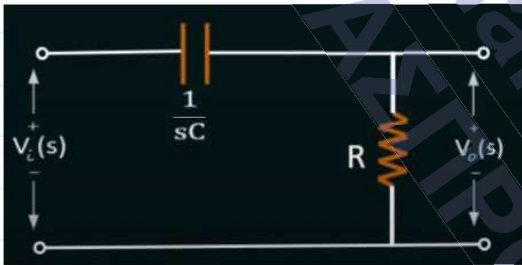
$$G(s) = \frac{K}{s \cdot \tau + 1}$$

Where, k = DC gain of the system
 & τ is the Time Constant.

2ο Παράδειγμα Συνάρτησης Μεταφοράς Passive RC HIGH PASS



Ο μετασχηματισμός Laplace του κυκλώματος είναι:



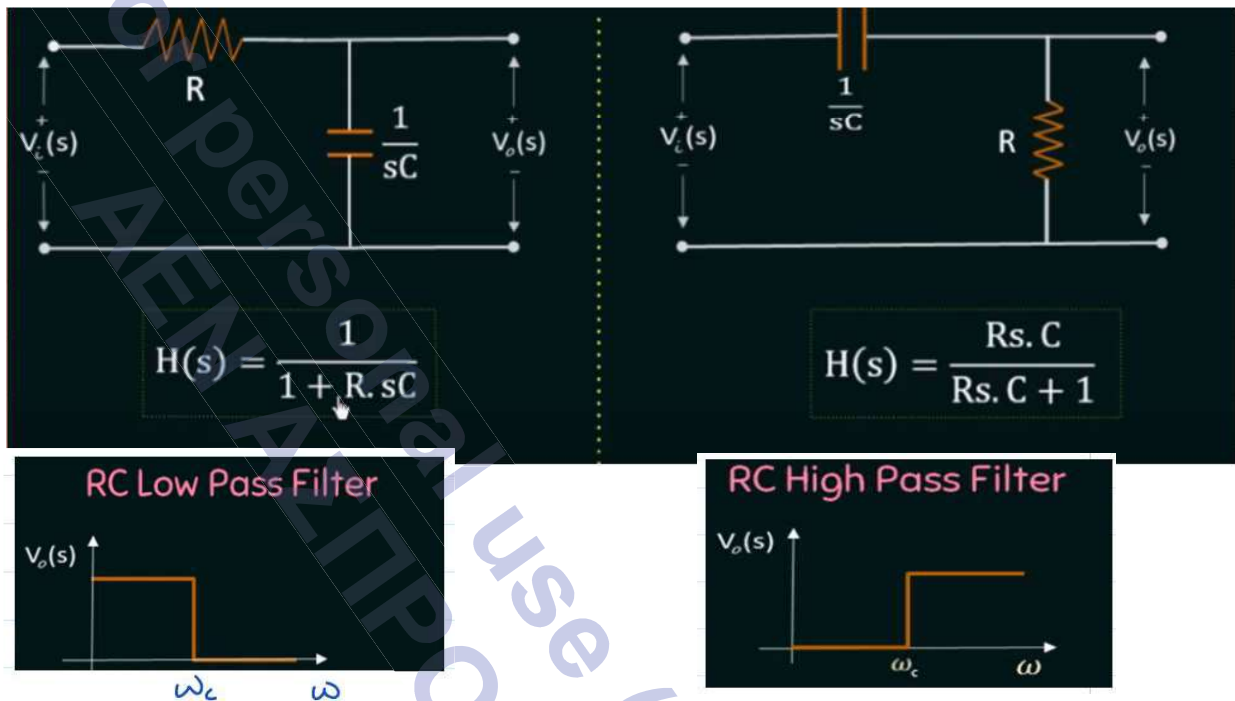
$$V_o(s) = V_i(s) \frac{R}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$= V_i(s) \frac{R}{\frac{RcS + 1}{sC}}$$

$$= V_i(s) \frac{RcS}{1 + RcS}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(Rc)S}{1 + (Rc)S}$$

Σύγκριση Συμπεριφοράς Passive Low Pass και Passive High Pass Κυκλώματος



$$X_c = \frac{1}{sC} \quad \left. \begin{array}{l} s = \alpha + j\omega \end{array} \right\} X_c = \frac{1}{(\alpha + j\omega) \cdot C} \Rightarrow X_c \propto \frac{1}{\omega}$$

Για ένα **passive low-pass RC φίλτρο** η τιμή της παραμέτρου ω_c υπολογίζεται όταν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ίση με $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\tau = RC$ είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος!

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1 + (\omega_c RC)^2 = 2$$

$$(\omega_c RC)^2 = 1$$

$$\omega_c RC = 1$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Για ένα **passive high-pass RC φίλτρο** η τιμή της παραμέτρου ω_c υπολογίζεται όταν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ίση με $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$$

$$\frac{\omega_c RC}{\sqrt{1+(\omega_c RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\omega_c RC)^2 = 1 + (\omega_c RC)^2 \times \frac{1}{2}$$

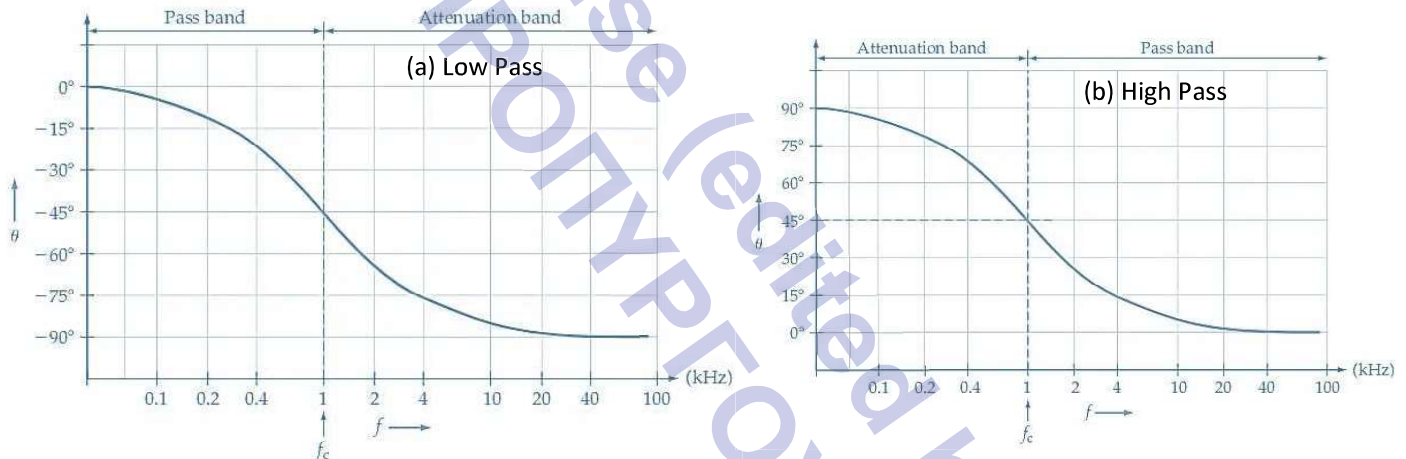
$$(\omega_c RC)^2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$(\omega_c RC)^2 = 2$$

$$\omega_c RC = \sqrt{2}$$

$$\omega_c = \frac{\sqrt{2}}{RC}$$

$\tau = RC$ είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος!



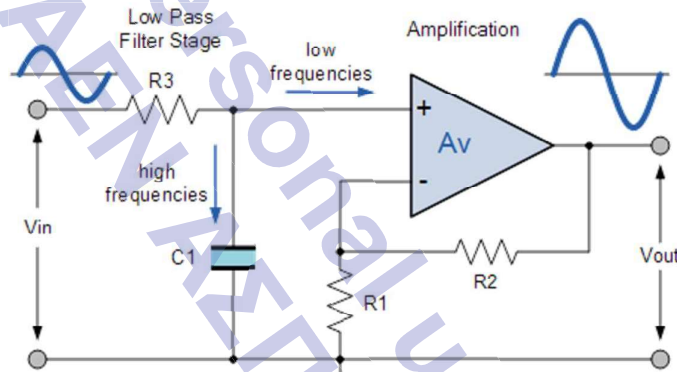
Εικόνα 38: Τυπικό διάγραμμα Φάσης/Συχνότητας (Bode Plot) για (a) Low Pass φίλτρο (δεξιά) και (b) High Pass Φίλτρο (αριστερά)

Εικόνα 38 (a) διάγραμμα Bode Low Pass : Η έξοδος του φίλτρου είναι ο πυκνωτής, συνεπώς παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης εξόδου και της τάσης εισόδου. Το διάγραμμα δείχνει αυτήν την διαφορά φάσης (θ) σε σχέση με την συχνότητα του σήματος (f). Όταν η συχνότητα είναι **μηδέν ή πολύ μικρή** η διαφορά φάσης είναι **μηδέν**. **Στην κρίσιμη συχνότητα f_c ($\omega_c = 2\pi f_c$)** η διαφορά φάσης γίνεται 45° και μετά όσο η συχνότητα αυξάνεται η τάση εξόδου **υστερεί** της τάσης εισόδου μέχρι και 90° (σε μεγάλες συχνότητες).

Εικόνα 38 (b) διάγραμμα Bode High Pass : Η έξοδος είναι συμφασική με την είσοδο για υψηλές συχνότητες ($\theta=0^\circ$), ενώ προηγείται κατά 90° της εισόδου για πολύ μικρές συχνότητες. **Στην κρίσιμη συχνότητα f_c ($\omega_c = 2\pi f_c$)** η έξοδος **προηγείται** κατά 45° της εισόδου.

Ενεργητικό (Active) Low Pass Filter.

Στα παθητικά (passive) φίλτρα τα οποία έχουν πολλαπλά στάδια χάνεται το πλάτος (η ισχύς) του σήματος στην έξοδο. Γιαυτό το λόγο το σήμα χρειάζεται ενίσχυση η οποία επιτυγχάνεται με τα ενεργητικά φίλτρα. Αυτά περιέχουν διατάξεις, όπως τελεστικοί ενισχυτές, τρανζίστορ ή FET οποίες αντλούν ισχύ από ένα εξωτερικό κύκλωμα και ενισχύουν το σήμα εξόδου.



$$\text{DC gain} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = A_F$$

$$\text{Voltage Gain, } (A_v) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_F}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c} \right)^2}}$$

$$A_F = (1 + R_2/R_1)$$

f = η συχνότητα του σήματος εισόδου, (Hz)

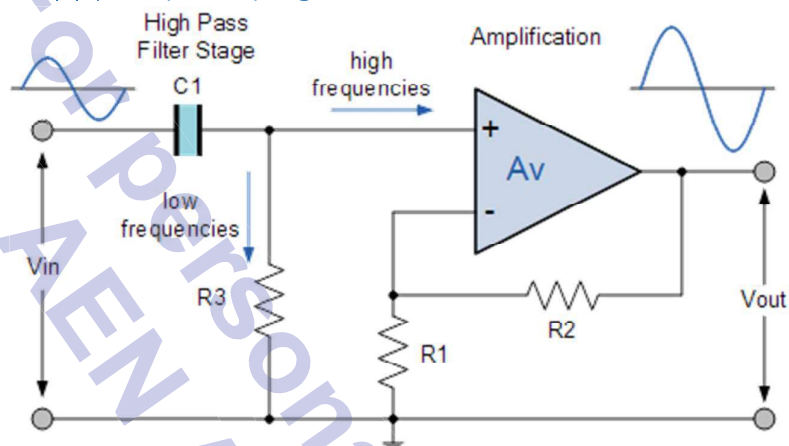
f_c = η κρίσιμη συχνότητα, (Hz)

1. Σε πολύ χαμηλές συχνότητες $f < f_c$ $\frac{V_{out}}{V_{in}} \cong A_F$

2. Στην κρίσιμη συχνότητα, $f = f_c$ $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_F}{\sqrt{2}} = 0.707 A_F$

3. Σε πολύ υψηλές συχνότητες, $f > f_c$ $\frac{V_{out}}{V_{in}} < A_F$

Ενεργητικό (Active) High Pass Filter.



$$\text{Voltage Gain, } (A_v) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_F \left(\frac{f}{f_c} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c} \right)^2}}$$

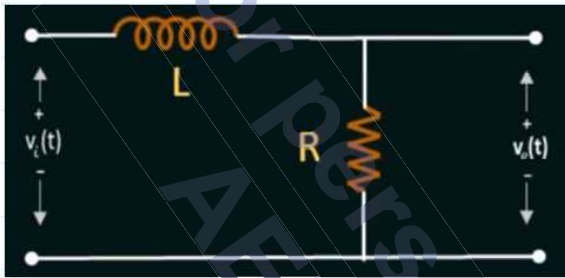
$$A_F = (1 + R_2/R_1)$$

f = η συχνότητα του σήματος εισόδου, (Hz)

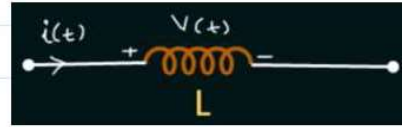
f_c = η κρίσιμη συχνότητα, (Hz)

1. Σε πολύ χαμηλές συχνότητες $f < f_c$ $\frac{V_{out}}{V_{in}} < A_F$
2. Στην κρίσιμη συχνότητα, $f = f_c$ $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_F}{\sqrt{2}} = 0.707 A_F$
3. Σε πολύ υψηλές συχνότητες, $f > f_c$ $\frac{V_{out}}{V_{in}} \cong A_F$

3^ο Παράδειγμα Συνάρτησης Μεταφοράς L-R

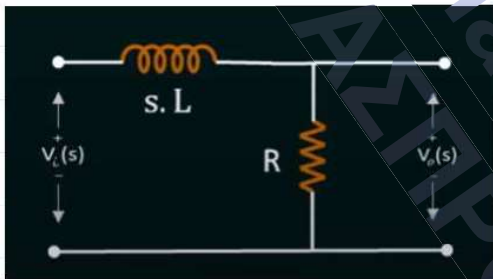


Μετασχηματισμός Laplace για πηνίο.



$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Μετασχηματισμός Laplace του κυκλώματος



$$V(s) = L \cdot s I(s)$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = s \cdot L$$

$$V_o(s) = V_i(s) \frac{R}{R + sL}$$

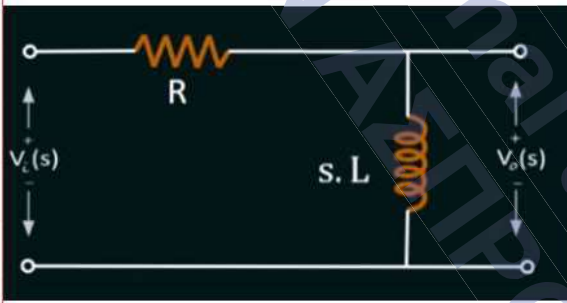
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{R + sL}$$

$$H(s) = \frac{R}{R + sL}$$

4^ο Παράδειγμα Συνάρτησης Μεταφοράς R-L



Μετασχηματισμός Laplace του κυκλώματος



$$V_o(s) = V_i(s) \frac{sL}{R + sL}$$

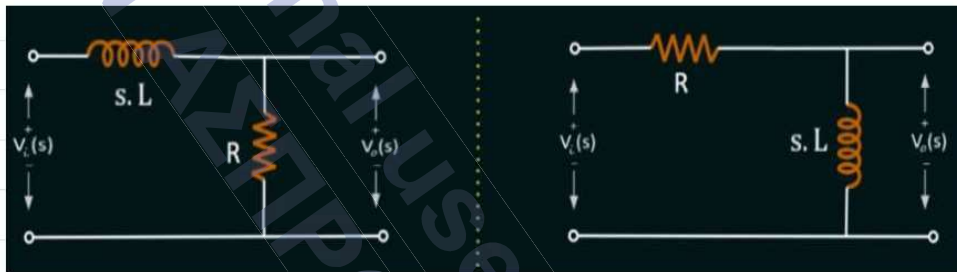
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{sL}{R + sL}$$

$$H(s) = \frac{sL}{R + sL}$$

Σύγκριση Κυκλωμάτων L-R & R-L

Να θυμηθούμε ότι:

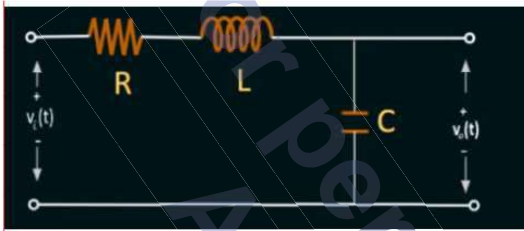
$$\left. \begin{aligned} X_L &= s \cdot L \\ s &= \sigma + j\omega \end{aligned} \right\} \begin{aligned} X_L &\propto \omega \quad \text{ή} \quad X_L \propto f \\ \omega &= 2\pi f \end{aligned}$$



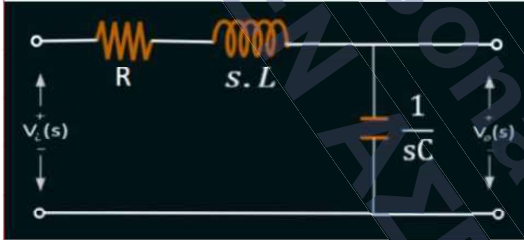
$$H(s) = \frac{R}{R + sL} \quad H(s) = \frac{sL}{R + sL}$$



5° Παράδειγμα Συνάρτησης Μεταφοράς R-L-C



Μετασχηματισμός Laplace του κυκλώματος



$$V_o(s) = V_i(s) \frac{\frac{1}{sC}}{(R + sL + \frac{1}{sC}) \cdot (sC)}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{Rsc + s^2Lc + 1}$$

Ποια είναι η τάξη του κυκλώματος;

Η τάξη του κυκλώματος είναι ίση με τον αριθμό των ηλεκτρικών στοιχείων που αποθηκεύουν ηλεκτρική ενέργεια (effective energy storing elements).

Προσοχή, η αντίσταση R δεν αποθηκεύει ενέργεια, μόνο κατανalώνει!

Άρα στο παραπάνω κύκλωμα, η τάξη είναι ίση με 2!

Αυτό φαίνεται και από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

$$H(s) = \frac{1}{s^2Lc + sRc + 1}$$

Πρότυπα Συστήματα 2^{ης} Τάξης

Τα συστήματα 2^{ης} τάξης, (μηχανικά, ηλεκτρικά, υδραυλικά), μπορούν να μοντελοποιηθούν ως **πρότυπα συστήματα δεύτερης τάξης**. Μέσω αυτής της διαδικασίας εξαγονται χρήσιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά τους.

Ένα τυπικό πρότυπο σύστημα 2^{ης} τάξης έχει την παρακάτω μορφή:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (1)$$

ζ : είναι ο λόγος απόσβεσης

ω_n : είναι η φυσική συχνότητα του συστήματος

y : είναι η έξοδος του συστήματος

u : είναι η (δοκιμαστική μοναδιαία) είσοδος του συστήματος

Θεωρώντας ότι όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, και παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης **(1)**, έχουμε:

$$s^2 Y(s) - \cancel{s y(0)} - \cancel{\dot{y}(0)} + 2\zeta\omega_n (s Y(s) - \cancel{y(0)}) + \omega_n^2 Y(s) = \omega_n^2 U(s) \Rightarrow$$

$$s^2 Y(s) + 2\zeta\omega_n s Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = \omega_n^2 U(s) \Rightarrow (O.M.A. U(s) = 1/s)$$

$$s^2 Y(s) + 2\zeta\omega_n s Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = \omega_n^2 \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s) (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = \omega_n^2 \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

$$\text{Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος } G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πρότυπου συστήματος δεύτερης προκύπτει αν ο παρονομαστής στο δεξιό μέλος της $G(s)$ γίνει ίσος με μηδέν.

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

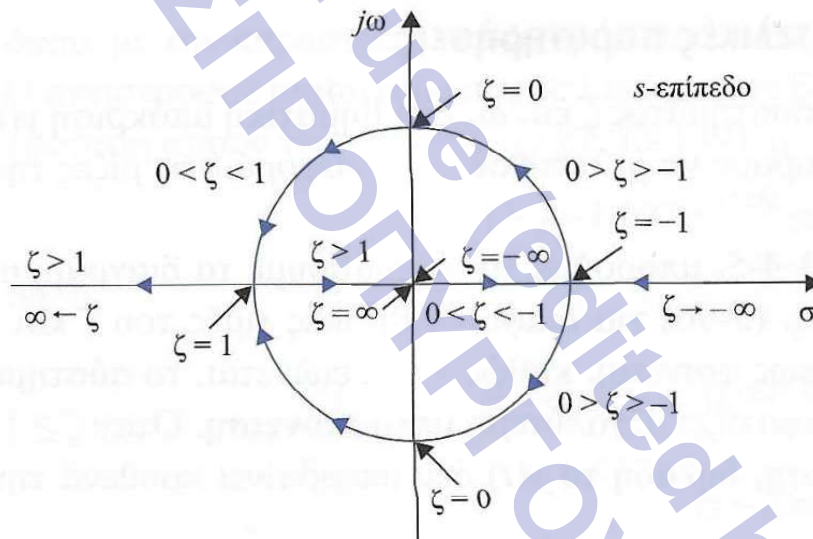
Οι **δυο πόλοι** της του συστήματος είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και δίνονται από τη σχέση:

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Από τους πόλους του συστήματος συμπεραίνουμε ότι η λύση σχετίζεται άμεσα με τον την τιμή του λόγου απόσβεσης ζ . **Ο λόγος απόσβεσης ζ καθορίζει** αν οι πόλοι θα είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί. Επίσης η τιμή της φυσικής συχνότητας ω_n έχει επίδραση στην τελική συμπεριφορά του συστήματος.

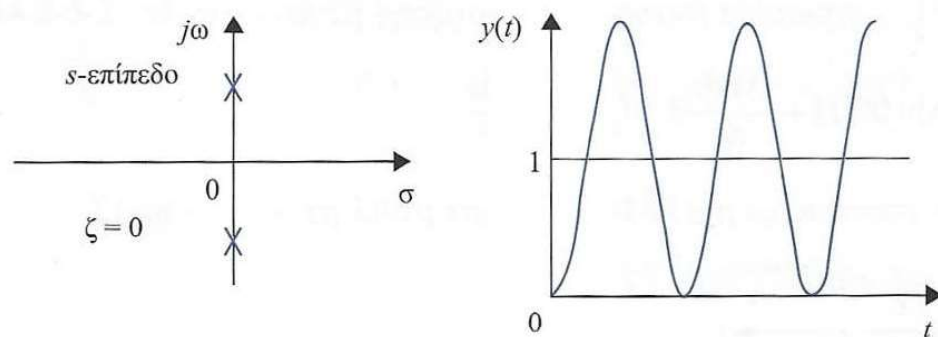
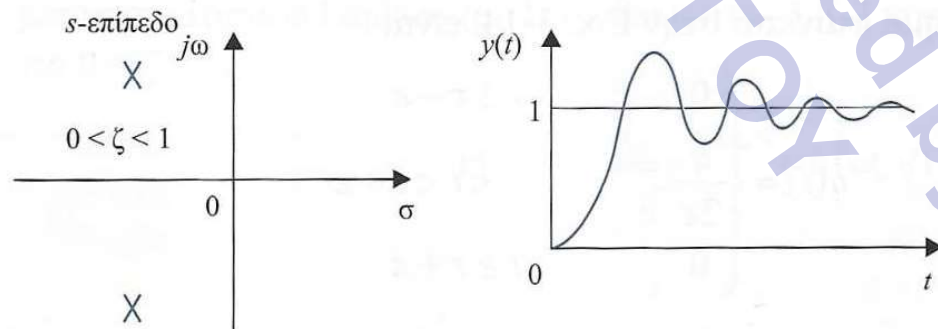
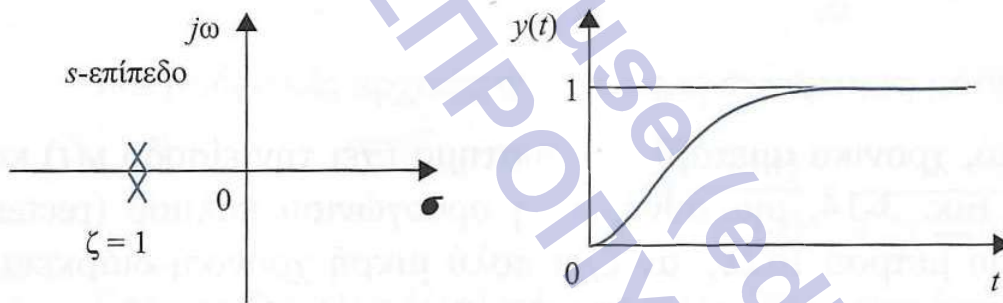
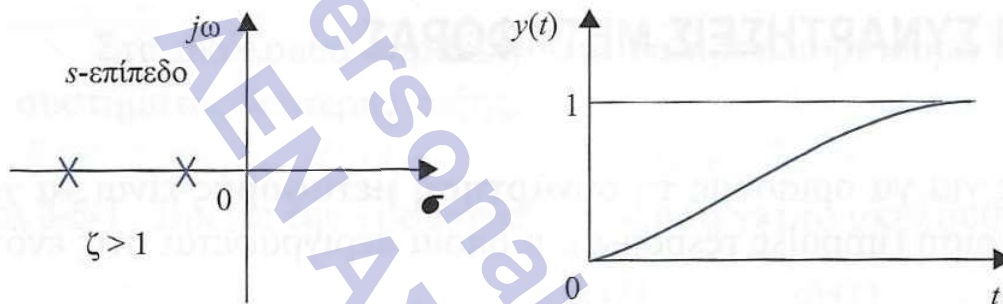
Συμπερασματικά:

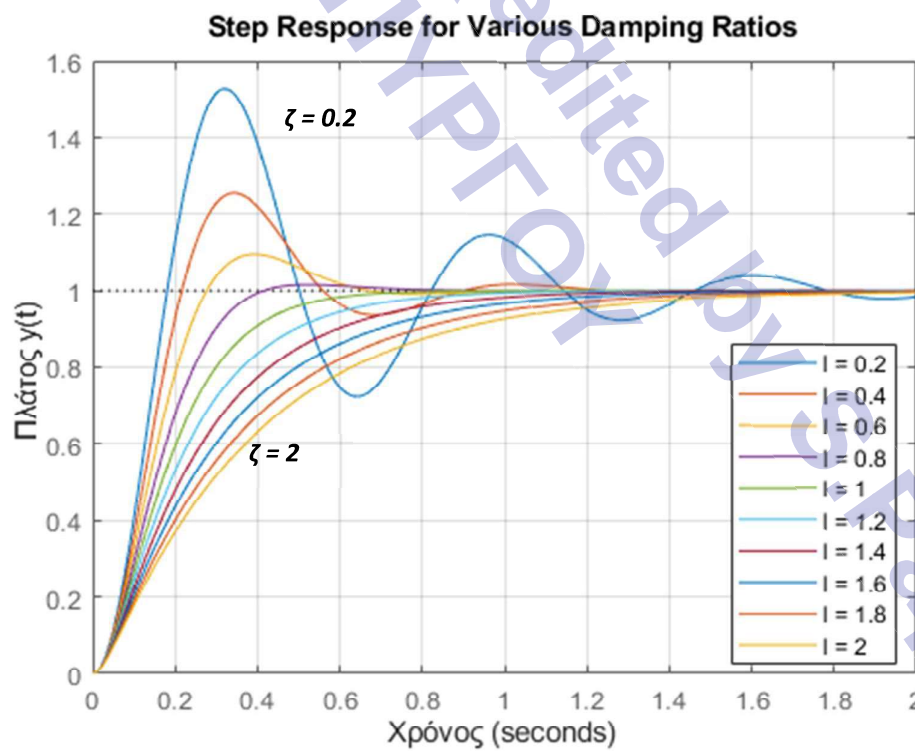
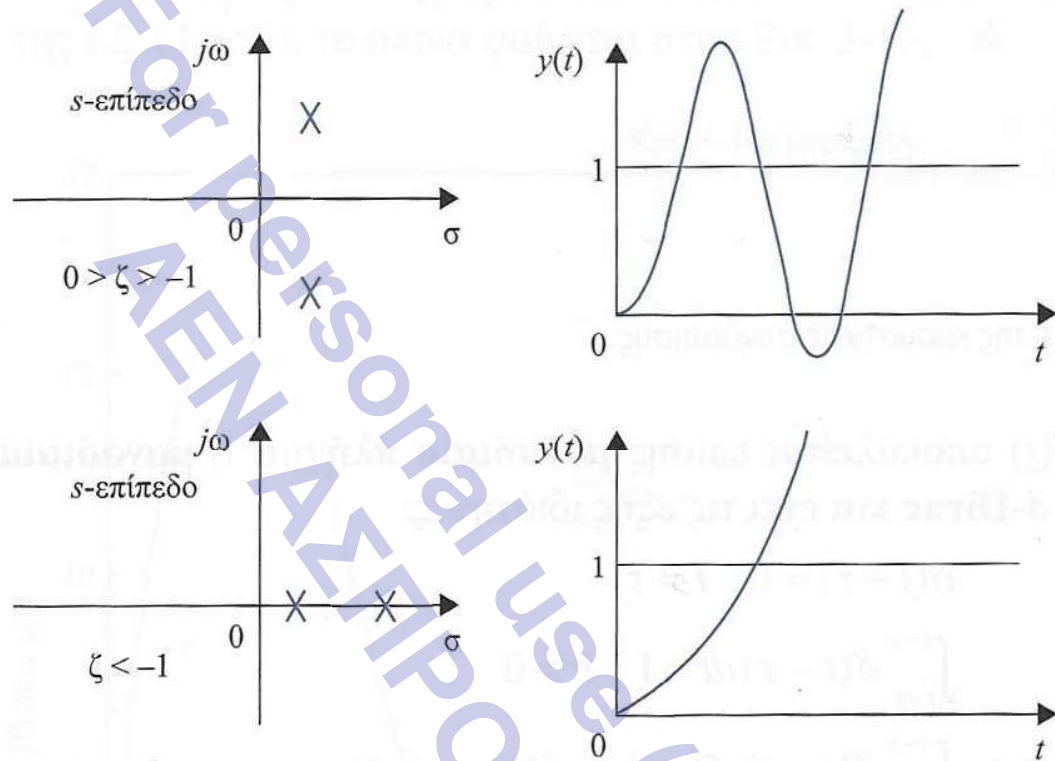


Εικόνα 39: Γεωμετρικός Τόπος ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης του πρότυπου συστήματος 2ης τάξης

Πόλοι του $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	Ταξινόμηση της απόκρισης $y(t)$
$0 < \zeta < 1: s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (-\zeta\omega_n < 0)$	Υποαποσβεννόμενο σύστημα
$\zeta = 1: s_1, s_2 = -\omega_n$	Κρίσιμο αποσβεννόμενο σύστημα
$\zeta > 1: s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$	Υπεραποσβεννόμενο σύστημα
$\zeta = 0: s_1, s_2 = \pm j\omega_n$	Μη αποσβεννόμενο σύστημα (οριακά ασταθές)
$\zeta < 0: s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (-\zeta\omega_n > 0)$	Αρνητικά αποσβεννόμενο σύστημα (ασταθές)

Σύγκριση βηματικών αποκρίσεων για τις διάφορες θέσεις των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης του πρότυπου συστήματος 2^{ης} τάξης, στο επίπεδο της μιγαδικής συχνότητας





Εικόνα 40: Αποκρίσεις μοναδιαίου θήματος του πρότυπου συστήματος 2ης τάξης για διάφορες τιμές του ζ (εδώ I) και σταθερό $\omega_n = 10 \text{ rad/sec}$

Όπως φαίνεται και από την Εικόνα 45, καθώς το ζ **μειώνεται**, το σύστημα ρέπει προς ταλαντώσεις, ενώ η απόκρισή του εμφανίζει μεγαλύτερη **υπερακόντιση** (overshoot). Όταν $\zeta \geq 1$, η βηματική απόκριση **δεν εμφανίζει υπερακόντιση**, δηλαδή το $y(t)$ **δεν υπερβαίνει** πουθενά την τελική του τιμή (set point, reference value).

Αποδεικνύεται με μαθηματικές πράξεις ότι αν η συνάρτηση στο πεδίο Laplace είναι:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \text{ και } \underline{\zeta < 1} \text{ (Υποαποσβεννύμενο σύστημα)}$$

τότε αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace μας δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$y(t) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \right) \sin \left[\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \right) t + \cos^{-1} \zeta \right] \quad t \geq 0 \quad (3)$$

$$\cos^{-1} \zeta = \theta \text{ (πάντα σε rad όχι σε degrees!!)}$$

Παράδειγμα 1^ο: Υποαποσβεννύμενο σύστημα ($\zeta < 1$)

Θεωρείστε την γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 34.5 \frac{dy(t)}{dt} + 1000 \cdot y(t) = 1000 u(t),$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή: $y(0) = \dot{y}(0) = 0$

Εκτελώντας τον μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε:

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - \dot{y}(0) + 34.5 s Y(s) - y(0) + 1000 \cdot Y(s) = 1000 \cdot \frac{1}{s}$$

$$s^2 Y(s) + 34.5 s Y(s) + 1000 Y(s) = 1000 \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1000}{s \cdot (s^2 + 34.5 s + 1000)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = 1000 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{1000} = 31.6228$$

$$2\zeta\omega_n = 34.5 \Rightarrow 2\zeta \cdot 31.6228 = 34.5 \Rightarrow \zeta = \frac{34.5}{2 \cdot 31.6228} \Rightarrow \zeta = 0.5455$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (3) η απόκριση στο πεδίο του χρόνου θα είναι:

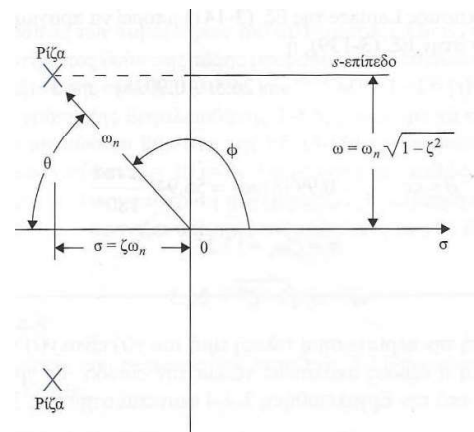
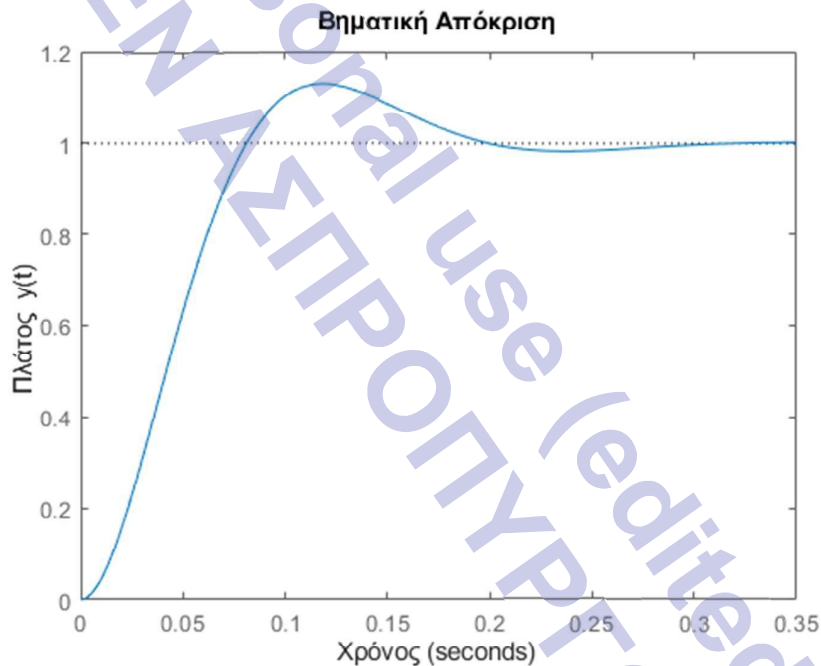
$$y(t) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \right) \cdot \sin \left[\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \right) t + \cos^{-1} \zeta \right] \quad t \geq 0$$

Υπολογισμός της γωνίας θ σε **rad** όχι σε degrees!!

Άρα:

$$y(t) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.5455^2}} \cdot e^{-0.5455 \cdot 31.6228 t} \right) \cdot \sin \left[\left(31.6228 \cdot \sqrt{1 - 0.5455^2} \right) t + \cos^{-1}(0.5455) \right]$$

$$y(t) = 1 - (1.193 \cdot e^{-17.25 t}) \cdot \sin[(26.5)t + 0.9938]$$



Εικόνα 41: Χρονική Απόκριση $y(t)$ του παραδείγματος 1 για είσοδο μοναδιαίου βήματος

Από την Εικόνα 46 παρατηρούμε ότι η **τελική τιμή της $y(t)$ είναι ίση με 1**, που συνεπάγεται ότι **στην μόνιμη κατάσταση** η έξοδος ακολουθεί τέλεια την είσοδο. Υπάρχει όμως υπερακόντιση καθώς από τα 0.75 – 0.2 δευτερόλεπτα η τιμή της εξόδου της $y(t)$, είναι μεγαλύτερη από αυτή της εισόδου.

Παράδειγμα 2º: Υπεραποσβεννύμενο σύστημα ($\zeta > 1$)

Θεωρείστε το σύστημα $Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ με $\zeta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ και $\omega_n = \sqrt{2}$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\sqrt{2}^2}{s^2 + 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} \sqrt{2} s + \sqrt{2}^2} = \frac{1}{s} \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s} \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Με τη χρήση της μεθόδου των μερικών κλασμάτων έχουμε:

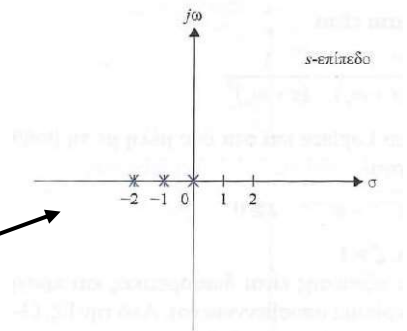
$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \left[\frac{2}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=0} = 1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)Y(s) = \left[\frac{2}{s(s+2)} \right]_{s=-1} = -2$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)Y(s) = \left[\frac{2}{s(s+1)} \right]_{s=-2} = 1$$

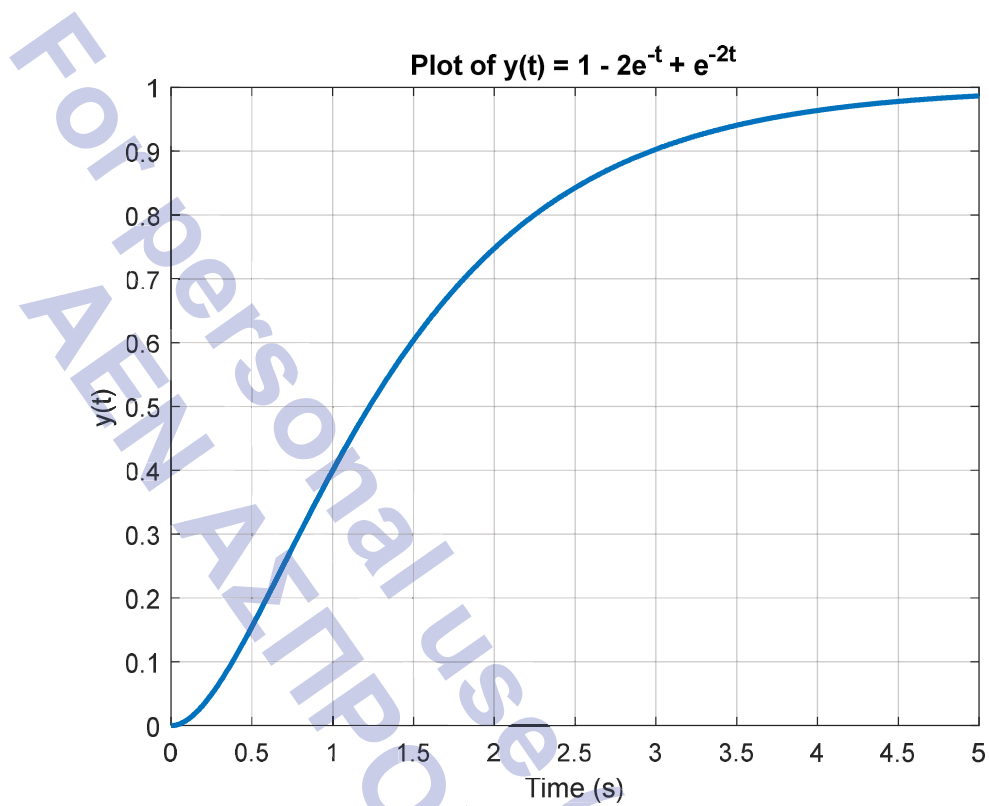
$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)}$$



Μετατρέπουμε στο πεδίο του χρόνου με Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace:

$$y(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \quad t \geq 0.$$

Από την Εικόνα 47 παρατηρούμε ότι η **τελική τιμή της $y(t)$ τείνει στο 1**, που συνεπάγεται ότι **στην μόνιμη κατάσταση** η έξοδος ακολουθεί με πολύ μικρό σφάλμα την είσοδο. Δεν υπάρχει υπερακόντιση καθώς η τιμή εξόδου της $y(t)$, δεν γίνεται ποτέ μεγαλύτερη από αυτή της εισόδου.



Εικόνα 42: Χρονική Απόκριση $y(t)$ του παραδείγματος 2 για είσοδο μοναδιαίου βήματος