– Ορισμός (ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)

Έστω ότι έχουμε τη συνάρτηση $y=f(x)$, ορισμένη σε ένα διάστημα $A(\alpha,\beta)\subseteq \mathbb{R}$ και $x_0\in A$. Το όριο:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

(αν υπάρχει) λέγεται παράγωγος της $f(x)=y$ στο σημείο x_0, η δε συνάρτηση λέμε ότι παραγωγίζεται στο σημείο $x=x_0$. Η παράγωγος μιας συναρτήσεως στο σημείο $x_0\in A$ συμβολίζεται με πολλούς τρόπους, όπως:

$$f'(x_0),\ y'_{x=x_0},\ Df(x_0),\ \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0},\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$$

Αν η $y=f(x)$ έχει παράγωγο, σε $\forall x\in A$, τότε λέγεται παραγωγίσιμη στο διάστημα A και οι παραπάνω συμβολισμοί γίνονται αντίστοιχα:

$$f'(x),\ y',\ Df(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{dy}{dx}$$

Είναι φανερό από τον ορισμό, ότι η παράγωγος μιας συναρτήσεως σε ένα διάστημα είναι γενικά μια νέα συνάρτηση ενώ η παράγωγος σε ένα σημείο, αριθμός.

– ΠΛΕΥΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ –

Έστω η συνάρτηση $y=f(x)$, ορισμένη στο διάστημα $A\subseteq\mathbb{R}$ και $x_0\in A$. Τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ονομάζονται πλευρικές παράγωγοι ή παράγωγος αριστερά και παράγωγος δεξιά στο σημείο $x_0\in A$.
Συμβολίζονται αντίστοιχα: $f'_{(-)}(x_0)$ και $f'_{(+)}(x_0)$.

Αποδεικνύεται ότι αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι σε ένα σημείο του Π.Ο. της $y=f(x)$ και είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $f'_{(-)}(x_0)=f'_{(+)}(x_0)$, τότε η συνάρτηση παραγωγίζεται σ' αυτό το σημείο και ισχύει:

$$f'_{(-)}(x_0)=f'_{(+)}(x_0)=f'(x_0)$$

Ενώ, αν οι πλευρικές παράγωγοι είναι άνισες, τότε η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο στο σημείο αυτό.

— Παραδείγματα —

① Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta / \mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ Τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(\alpha x+\beta)-(\alpha x_0+\beta)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\alpha=\alpha\in\mathbb{R}$$

Άρα υπάρχει η $f'(x_0)=\alpha$, $\forall x_0\in\mathbb{R}$

② Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x} / \mathbb{R}_+$. Εξετάζουμε την ύπαρξη παραγώγου στη θέση $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty\notin\mathbb{R}$$

άρα δεν υπάρχει η $f'(0)$

③ Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. Εξετάζουμε την ύπαρξη παραγώγου στη θέση $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(+1)=+1$$

Παρατηρούμε ότι η $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμος αριστερά και δεξιά του 0. Όμως $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ οπότε δεν είναι παραγωγίσιμος στο 0

– Παραδείγματα και εφαρμογές –

① Έστω $f/[\alpha,\beta]$ με $f(x)=c$. Τότε $\frac{df}{dx}=0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$

Έστω x_0 τυχαίο σημείο του $[\alpha,\beta]$. Τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0$$

$f'(x_0)=0$ $\forall x_0\in[\alpha,\beta]$

$$\boxed{\text{Άρα } \frac{dc}{dx}=0,\ c \text{ σταθερά}}$$

② Έστω $f/\mathbb{R}$ με $f(x)=x^{\nu}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Τότε $\frac{df}{dx}=\nu\cdot x^{\nu-1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\cdot x_0+\ldots+x\cdot x_0^{\nu-2}+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\cdot x_0+\ldots+x x_0^{\nu-2}+x_0^{\nu-1})=\nu x_0^{\nu-1}$$

$$\boxed{\text{Άρα } \frac{d(x^{\nu})}{dx}=\nu x^{\nu-1} \quad x\in\mathbb{R},\ \nu\in\mathbb{N}}$$

③ Έστω $f/\mathbb{R}_+^*$ με $f(x)=\sqrt{x}$. Τότε $\frac{df}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in\mathbb{R}_+^*$

Έστω $x_0\in\mathbb{R}^+$ Τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}^2-\sqrt{x_0}^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\boxed{\text{Άρα } \frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

3 B

— ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ —

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ		ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ
① $f(x)=c$	$\longrightarrow$	① $\frac{df}{dx}=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$
② $f(x)=x^{\alpha} \ (\alpha\in\mathbb{R})$	$\longrightarrow$	② $\frac{df}{dx}=\alpha x^{\alpha-1} \ \forall x\in\mathbb{R}$
③ $f(x)=\sqrt{x}$	$\longrightarrow$	③ $\frac{df}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \ \forall x\in\mathbb{R}^{*}_{+}$
④ $f(x)=e^{x}$	$\longrightarrow$	④ $\frac{df}{dx}=e^{x} \ \forall x\in\mathbb{R}$
⑤ $f(x)=\eta\mu x$	$\longrightarrow$	⑤ $\frac{df}{dx}=\sigma\upsilon\nu x \ \forall x\in\mathbb{R}$
⑥ $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$\longrightarrow$	⑥ $\frac{df}{dx}=-\eta\mu x \ \forall x\in\mathbb{R}$
⑦ $f(x)=\varepsilon\varphi x$	$\longrightarrow$	⑦ $\frac{df}{dx}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}x} \ \forall x\in\mathbb{R}-\left\{x\in\mathbb{R}: x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$
⑧ $f(x)=\sigma\varphi x$	$\longrightarrow$	⑧ $\frac{df}{dx}=-\frac{1}{\eta\mu^{2}x} \ \forall x\in\mathbb{R}-\left\{x\in\mathbb{R}: x=\kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$
⑨ $f(x)=\text{Τοξ}\,\eta\mu x$	$\longrightarrow$	⑨ $\frac{df}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} \quad -1<x<1$
⑩ $f(x)=\text{Τοξ}\,\sigma\upsilon\nu x$	$\longrightarrow$	⑩ $\frac{df}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}} \quad -1<x<1$
⑪ $f(x)=\text{Τοξ}\,\varepsilon\varphi x$	$\longrightarrow$	⑪ $\frac{df}{dx}=\frac{1}{1+x^{2}} \ \forall x\in\mathbb{R}$
⑫ $f(x)=\text{Τοξ}\,\sigma\varphi x$	$\longrightarrow$	⑫ $\frac{df}{dx}=\frac{-1}{1+x^{2}} \ \forall x\in\mathbb{R}$
⑬ $f(x)=\log_{\alpha}x$	$\longrightarrow$	⑬ $\frac{df}{dx}=\frac{1}{x\log\alpha} \ \forall x\in\mathbb{R}^{*}_{+} \ \alpha>0 \wedge \alpha\neq 1$
⑭ $f(x)=\ln x$	$\longrightarrow$	⑭ $\frac{df}{dx}=\frac{1}{x} \ \forall x\in\mathbb{R}^{*}_{+}$
⑮ $f(x)=\alpha^{x}$	$\longrightarrow$	$\frac{df}{dx}=\alpha^{x}\cdot\ln\alpha$ όπου $\alpha>0$

– ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ –

① $(f \pm g)' = f' \pm g'$

② $(\lambda \cdot f)' = \lambda f'$ (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$)

③ $(f \cdot g)' = f'g + g'f$

④ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

⑤ $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ $\longrightarrow$ σύνθετη συνάρτηση

⑥ $[f^{\nu}]' = \nu f^{\nu-1} \cdot f'$

⑦ $(e^{f(x)})' = f(x) \cdot e^{f(x)}$

– Παραγωγίστε καθεμιά από τις ακόλουθες συναρτήσεις –

① $y = -4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$

– $\frac{dy}{dx} = 0 + 2(1) - 3(2x) - 5(3x^2) - 8(4x^3) + 9(5x^4) = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4$

② $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$

– $\frac{dy}{dx} = -x^{-2} + 3(-2x^{-3}) + 2(-3x^{-4}) = -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4} = \frac{-1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$

③ $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2^{x^{3/2}}$

– $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) - 2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{3/3}} - \frac{3}{x^{1/2}}$

④ $y = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}} = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4}$

$- \frac{dy}{dx} = 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 6\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right) - 2\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right) - 4\left(-\frac{3}{4}x^{-7/4}\right) =$

$= -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4} = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$

⑤ $y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}} = (3x^2)^{1/3} - (5x)^{-1/2}$

$- \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^2)^{-2/3} \cdot 6x - \left(-\frac{1}{2}\right)(5x)^{-3/2} \cdot 5 = \frac{2x}{(9x^4)^{1/3}} + \frac{5}{2(5x)(5x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \frac{1}{2x\sqrt{5x}}$

⑥ $s = (t^2-3)^4$

$- \frac{ds}{dt} = 4(t^2-3)^3 \cdot (2t) = 8t(t^2-3)^3$

⑦ $z = \frac{3}{(\alpha^2-y^2)^2} = 3(\alpha^2-y^2)^{-2}$

$- \frac{dz}{dx} = 3(-2)(\alpha^2-y^2)^{-3} \cdot \frac{d}{dy}(\alpha^2-y^2) = 3(-2)(\alpha^2-y^2)^{-3}(-2y) = \frac{12y}{(\alpha^2-y^2)^3}$

⑧ $f(x) = \sqrt{x^2+6x+3} = (x^2+6x+3)^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+6x+3)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+6x+3) = \frac{1}{2}(x^2+6x+3)^{-1/2} \cdot (2x+6) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+3}}$

⑨ $y = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

$y' = (x^2+4)^2 \frac{d}{dx}(2x^3-1)^3 + (2x^3-1)^3 \cdot \frac{d}{dx}(x^2+4)^2 =$

$= (x^2+4)^2 \cdot 3(2x^3-1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(2x^3-1) + (2x^3-1)^3 \cdot 2(x^2+4) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+4) =$

$= (x^2+4)^2 \cdot 3(2x^3-1)^2 \cdot 6x^2 + (2x^3-1)^3 \cdot 2(x^2+4) \cdot 2x = 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3+36x-2)$

(10) $y=\dfrac{3-2x}{3+2x}$

$$y'=\frac{(3+2x)\cdot\frac{d}{dx}(3-2x)-(3-2x)\frac{d}{dx}(3+2x)}{(3+2x)^2}=\frac{(3+2x)\cdot(-2)-(3-2x)\cdot(2)}{(3+2x)^2}=\frac{-12}{(3+2x)^2}$$

— ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ —

(1) $\vartheta=\dfrac{3r+2}{2r+3}$ [Απ: $\dfrac{d\vartheta}{dr}=\dfrac{5}{(2r+3)^2}$]

(2) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5$ [Απ: $y'=\dfrac{5x^4}{(1+x)^6}$]

(3) $y=2x^2\sqrt{2-x}$ [Απ: $y'=\dfrac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$]

(4) $f(x)=x\sqrt{3-2x^2}$ [Απ: $f'(x)=\dfrac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$]

(5) $y=(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$ [Απ: $y'=\dfrac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$]

(6) $z=\dfrac{w}{\sqrt{1-4w^2}}$ [Απ: $z'=\dfrac{1}{(1-4w^2)^{3/2}}$]

(7) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ [Απ: $y'=\dfrac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$]

(8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ [Απ: $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$]

(9) $y=(x^2+3)^4(2x^3-5)^3$ [Απ: $y'=2x(x^2+3)^3(2x^3-5)^2(17x^3+27x-20$]

(10) $s=\dfrac{t^2+2}{3-t^2}$ [Απ: $s'=\dfrac{10t}{(3-t^2)^2}$]

(11) $y=\left(\dfrac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$ $\left[\text{Απ: } y'=\dfrac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}\right]$

(12) $y=x^5+5x^4-10x^2+6$ $\left[\text{Απ: } y'=5x(x^3+4x^2-4)\right]$

(13) $y=3x^{1/2}-x^{3/2}+2x^{-1/2}$ $\left[\text{Απ: } y'=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^{3/2}}\right]$

(14) $y=\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}x^{-2}+4x^{-1/2}$ $\left[\text{Απ: } y'=-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^{3/2}}\right]$

(15) $y=\sqrt{2x}+2\sqrt{x}$ $\left[\text{Απ: } y'=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}\right]$

(16) $f(t)=\dfrac{2}{\sqrt{t}}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{t}}$ $\left[\text{Απ: } f'(t)=-\dfrac{t^{1/2}+2t^{2/3}}{t^2}\right]$

(17) $y=(1-5x)^6$ $\left[\text{Απ: } y'=-30(1-5x)^5\right.$

(18) $f(x)=(3x-x^3+1)^4$ $\left[\text{Απ: } f'(x)=12(1-x^2)(3x-x^3+1)^3\right]$

(19) $y=(3+4x-x^2)^{1/2}$ $\left[\text{Απ: } y'=\dfrac{2-x}{y}\right]$

– Παραγώγιση Εκθετικών και Λογαριθμικών Συναρτήσεων –

(1) $y=\ln(x^3+2)(x^2+3)=\ln(x^3+2)+\ln(x^2+3)$

$$y'=\frac{1}{x^3+2}\cdot\frac{d}{dx}(x^3+2)+\frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3)=\frac{3x^2}{x^3+2}+\frac{2x}{x^2+3}$$

(2) $f(x)=\ln\dfrac{x^4}{(3x-4)^2}=\ln x^4-\ln(3x-4)^2=4\ln x-2\ln(3x-4)$

$$f'(x)=4\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x)-2\frac{1}{3x-4}\frac{d}{dx}(3x-4)=\frac{4}{x}-\frac{6}{3x-4}$$

(3) $y=\ln\sin 3x$

$$y'=\frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin 3x)=\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}=3\cot 3x$$

(4) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$$y'=\frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}\cdot(2x)}{x+(1+x^2)^{1/2}}=\frac{1+x(1+x^2)^{-1/2}}{x+(1+x^2)^{1/2}}\cdot\frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(5) $y=e^{-\frac{1}{2}x}$

$$y'=e^{-\frac{1}{2}x}\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

(6) $y=e^{x^2}$

$$y'=e^{x^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2)=2xe^{x^2}$$

(7) $y=x^2\cdot 3^x$

$$y'=x^2\cdot\frac{d}{dx}(3^x)+3^x\cdot\frac{d}{dx}(x^2)=x^2\cdot 3^x\cdot\ln 3+3^x\cdot 2x=x\cdot 3^x(x\ln 3+2)$$

(8) Βρείτε την y'', όταν $y=e^{-x}\ln x$

$$y'=e^{-x}\cdot\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(e^{-x})=\frac{e^{-x}}{x}-e^{-x}\cdot\ln x=\frac{e^{-x}}{x}-y$$

$$y''=\frac{x\cdot\frac{d}{dx}(e^{-x})-e^{-x}\frac{d}{dx}(x)}{x^2}-y'=\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}-\frac{e^{-x}}{x}+e^{-x}\cdot\ln x=-e^{-x}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\ln x\right)$$

– Παραγώγιση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων –

(1) $y=\sin x-x\cos x+x^2+4x+3$ (Απ: $x\sin x+2x+4$)

(2) $p=\sqrt{\sin\theta}$ [Απ: $(\cos\theta)/(2\sqrt{\sin\theta})$]

(3) $y=\sin 2/x$ (Απ: $(-2\cos 2/x)/x^2$)

(4) $y=\cos(1-x^2)$ (Απ: $2x\sin(1-x^2)$)

⑤ $y = \cos(1-x)^2$ (ΑΠ: $2(1-x)\sin(1-x)^2$)

⑥ $y = \sin^2(3x-2)$ (ΑΠ: $3\sin(6x-4)$)

⑦ $y = \sin^3(2x-3)$ (ΑΠ: $-\frac{3}{2}\{\cos(6x-9)-\cos(2x-3)\}$)

⑧ $y = \frac{1}{2}\tan x \sin 2x$ (ΑΠ: $\sin 2x$)

ΟΠΟΥ: $\sin x = ημx$

$\cos x = συνx$

$\tan x = εφx$

– ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ –

Διαφορικά.

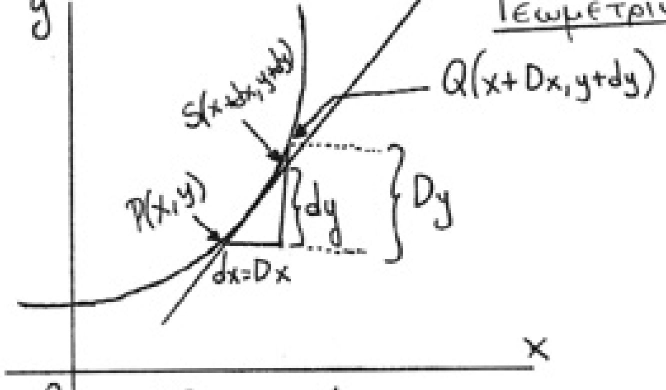
Για την συνάρτηση $y = f(x)$ ορίζουμε: (α) ως διαφορικό του x το dx με τη σχέση $dx = Dx$

(β) ως διαφορικό του y το dy με τη σχέση $dy = f(x)dx$.

Το διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι από τον ορισμό του ίσο με τη μεταβολή της μεταβλητής. Το διαφορικό όμως της εξαρτημένης μεταβλητής δεν ισούται με τη μεταβολή της.

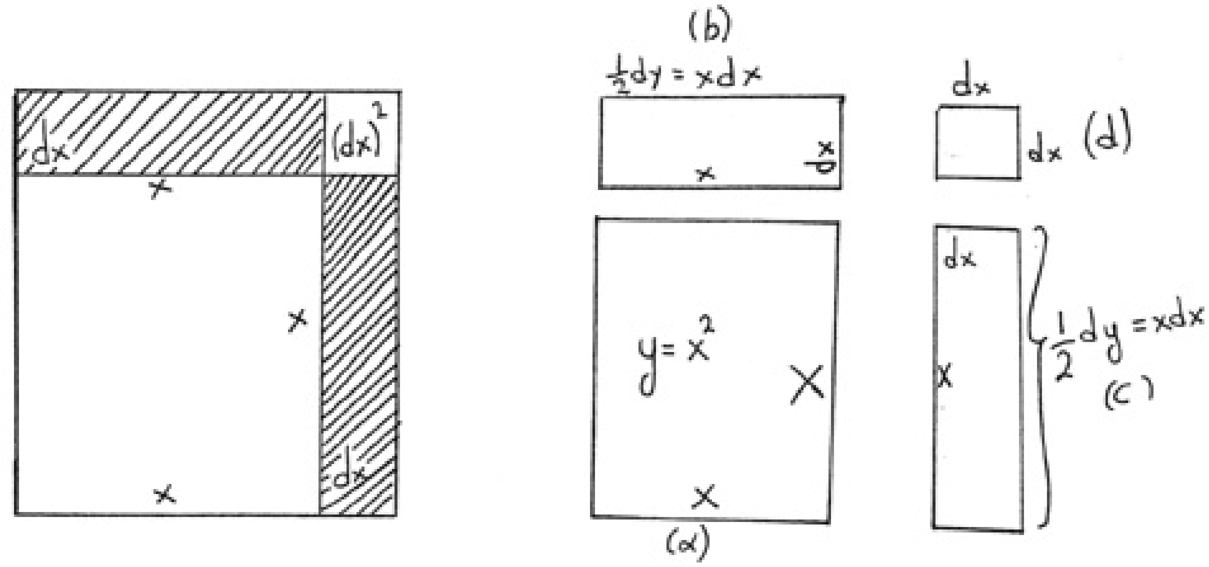
Παράδειγμα 1: Όταν $y = x^2$, έχουμε $dy = 2x \cdot dx$ ενώ $Dy = (x+Dx)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (Dx)^2 = 2xdx + (dx)^2$. Μια γεωμετρική ερμηνεία δίνεται στο σχ. 2. Παρατηρούμε ότι τα Dy και dy διαφέρουν κατά ένα τετράγωνο εμβαδού $(dx)^2$.

Γεωμετρική Σημασία Διαφορικών (Σx. 1)



Σx. 1

$$\boxed{Dy \simeq dy}$$



Σχ. 2

ΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ dy υπολογίζεται είτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό $dy = f'(x)dx$ ή με τις σχέσεις που προκύπτουν από τους κανόνες υπολογισμού παραγώγων. Μερικά διαφορικά είναι τα εξής:

$$d(c) = 0, \quad d(cu) = c\,du, \quad d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \quad d(\sin u) = \cos u\,du, \quad d(\ln u) = \frac{du}{u}, \text{ κτλ.}$$

<u>Παράδειγμα 2:</u> Βρείτε το dy για καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις:

(α) $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

$dy = d(x^3) + d(4x^2) - d(5x) + d(6) = (3x^2 + 8x - 5)dx$

(b) $y = (2x^3+5)^{3/2}$

$$dy = \frac{3}{2}(2x^3+5)^{1/2} \cdot d(2x^3+5) = \frac{3}{2}(2x^3+5)^{1/2} \cdot 6x^2 \cdot dx = 9x^2(2x^3+5)^{1/2} \cdot dx$$

<u>– Προσεγγίσεις με Διαφορικά –</u>

Αν το $dx = \Delta x$ είναι σχετικά μικρό συγκρινόμενο με το x, τότε το dy αποτελεί μια αρκετά καλή προσέγγιση του Δy.

Παράδειγμα 3.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $y=x^2+x+1$ και έστω ότι το x μεταβάλλεται από $x=2$ σε $x=2.01$.

ΛΥΣΗ

Η πραγματική μεταβολή του y είναι $Dy=\{(2.01)^2+2.01+1\}-\{2^2+2+1\}=$

$$=.0501.$$

Η κατά προσέγγιση μεταβολή του y, που υπολογίζεται θέτοντας $x=2$ και $dx=.01$, είναι $dy=f'(x)dx=(2x+1)dx=\{2(2)+1\}.01=.05$.

— ΑΣΚΗΣΕΙΣ —

(4) Ένας κυκλικός δίσκος διαστέλλεται κάτω από την επίδραση θερμότητας, έτσι ώστε η ακτίνα του να αυξηθεί από 5cm σε 5.06cm. Βρείτε κατά προσέγγιση την αύξηση της επιφανειάς του. $(E=\pi r^2)$

ΑΠ: $0.6\pi=1.88cm^2$

(5) Μια σφαίρα από πάγο ακτίνας 10cm μικραίνει, έτσι ώστε η ακτίνα της να γίνει 9.8cm. Βρείτε κατά προσέγγιση την ελάττωση (α) του όγκου της και (β) του εμβαδού της επιφάνειας της.
$\left(V=\frac{4}{3}\pi r^3 \,/\, E=4\pi r^2\right)$

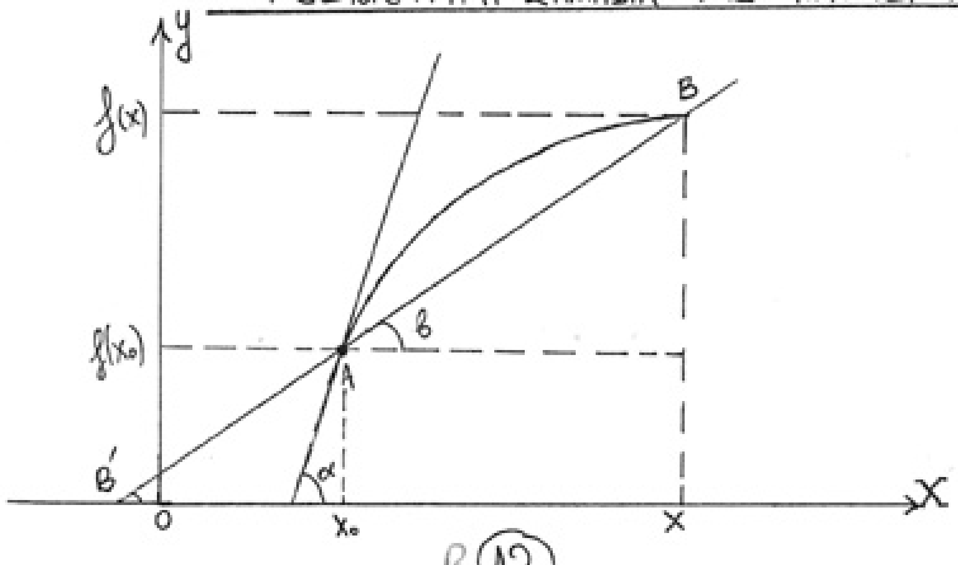
ΑΠ: (α) $80\pi\ cm^3$
(β) $16\pi\ cm^2$

(6) Βρείτε κατά προσέγγιση τη μεταβολή του όγκου ενός κύβου πλευράς x cm που προκύπτει από μεταβολή της πλευράς του κατά 1%.

— ΛΥΣΗ —

$V=x^3$ και $dV=3x^2dx$. Για $dx=0.01x$ είναι $dV=3x^2(0.01x)=0.03x^3 cm^3$

— ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ —



Έστω f συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.
Έστω $A(x_0,f(x_0))$, $B(x,f(x))$ δύο σημεία της γραφικής παράστασης της f. Ο συντελεστής διευθύνσεως της AB είναι:

$$\varepsilon\varphi\beta = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Τότε σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\varepsilon\varphi\beta = \varepsilon\varphi\alpha$$

Δηλαδή: $\boxed{f'(x_0) = \varepsilon\varphi\alpha}$

Έτσι αν η f παραγωγίζεται σε κάποιο σημείο x_0, τότε στο σημείο αυτό υπάρχει εφαπτόμενη της καμπύλης και ο συντελεστής διευθύνσεως της γεωμετρικής εφαπτομένης ισούται με την παράγωγο της f στο σημείο αυτό.

Παραδείγματα:

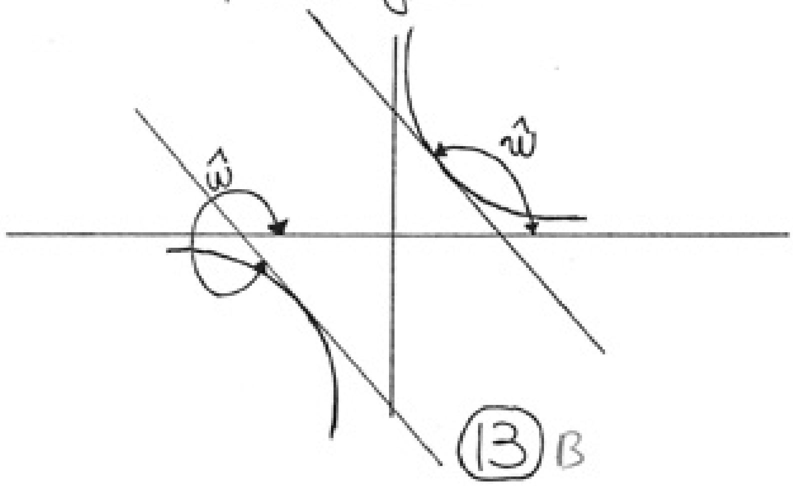
① Δίνεται η υπερβολή $y=f(x)=\frac{\alpha^2}{x}$ με $x\neq 0$ και $\alpha\neq 0$

Να υπολογιστεί: η γωνία του άξονα των x με την εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο $M(\alpha,\alpha)$.

Έχουμε $y'=f'(x)=-\frac{\alpha^2}{x^2}$ με $x\neq 0$.

Έστω ω η ζητούμενη γωνία. Τότε: $\varepsilon\varphi\omega = f'(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\alpha^2} = -1 \Rightarrow \omega = \text{τοξεφ}(-1)$

Σχήμα παραδείγματος:

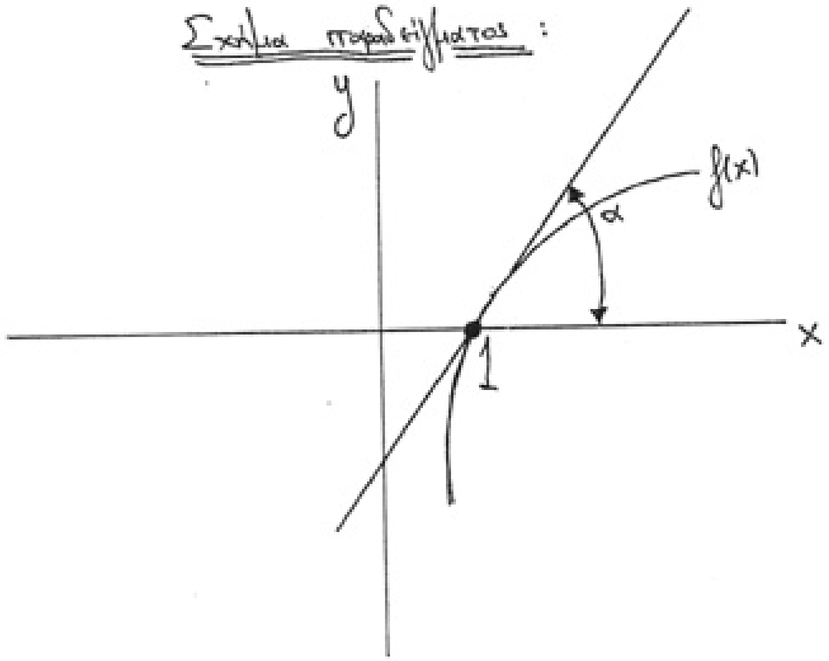


② Να βρεθεί με ποια γωνία τέμνει τον άξονα των x η καμπύλη $y = f(x) = \ln x \,|\, \mathbb{R}^*_+$

Η ζητούμενη γωνία είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας των x με την εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο τομής τους.
Έχουμε $\ln x = 0 \Longrightarrow x = 1$. Άρα ο άξονας των x και η καμπύλη τέμνονται στο (1,0).
Η παράγωγος είναι $y' = f'(x) = \frac{1}{x} \,|\, \mathbb{R}^*_+$

Οπότε $\varepsilon\varphi\alpha = f'(1) = \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow \alpha = \text{τοξεφ}(1)$

Σχήμα παραδείγματος :



– ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ –

Ευθύγραμμη κίνηση σωματιδίου :
Η κίνηση σωματιδίου κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής καθορίζεται πλήρως από την εξίσωση $s = f(t)$, όπου $t \geq 0$ είναι ο χρόνος και s η απόσταση του σωματιδίου από ένα σταθερό σημείο O της ευθείας πάνω στην οποία κινείται.
Έστω $f(t_0)$ και $f(t)$ δύο θέσεις του σωματιδίου πάνω στην ευθεία με αντίστοιχες ταχύτητες $u(t_0)$ και $u(t)$ στις χρονικές στιγμές t_0 και t (βλέπε σχήμα κάτω).

Τότε

1) Ορίζουμε μέση ταχύτητα του κινητού μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t_0, το πηλίκο $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

2) Ορίζουμε στιγμιαία ταχύτητα $U(t_0)$ του κινητού κατά την χρονική στιγμή t_0 το

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.f'(t)\right|_{t=t_0}$$

3) Ορίζουμε στιγμιαία επιτάχυνση $\gamma(t_0)$ του κινητού κατά την χρονική στιγμή t_0 το

$$\lim_{t\to t_0}\frac{U(t)-U(t_0)}{t-t_0}=\left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.U'(t)\right|_{t=t_0}=\left.f''(t)\right|_{t=t_0}$$

<u>Παραδείγματα:</u>

1) Ένα κινητό κινείται πάνω σε μια καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x=t^3+2t$, $y=4ημ3t$, $z=5συν3t$, όπου t ο χρόνος. (Στο χώρο το κινητό εκτελεί ταυτόχρονα τρεις ευθύγραμμες κινήσεις μια αντίστοιχα σε κάθε άξονα x, y, z).

α) Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε κάθε χρονική στιγμή.
β) Βρείτε την ταχύτητα του κινητού την χρονική στιγμή $t=0$.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

α) Το διάνυσμα θέσεως του κινητού είναι:

$$\vec{r}=\vec{xi}+\vec{yj}+\vec{zk}=(t^3+2t)\vec{i}+(4ημ3t)\vec{j}+(5συν3t)\vec{k}$$

Τότε $$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(3t^2+2)\vec{i}+(12συν3t)\vec{j}+(-15ημ3t)\vec{k}$$

Και $$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=(6t)i+(-36ημ3t)\vec{j}+(-45συν3t)\vec{k}$$

β) Για $t=0$ $\quad \vec{v}=(3\cdot 0^2+2)\vec{i}+(12συν0^\circ)\vec{j}+(-15ημ0^\circ)\vec{k}$

$\vec{v}=2\vec{i}+12\vec{j}$

Το μέτρο ταχύτητος είναι $\sqrt{2^2+12^2}=\sqrt{4+144}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$

② Δυο κινητά αναχωρούν ταυτόχρονα από το σημείο (0,0) και οι εξισώσεις κίνησεως είναι $f_1(t)=3t^3-2t^2-t$ και $f_2(t)=2t^3-t^2+t$ αντίστοιχα. Να βρεθούν οι ταχύτητες των κινητών κατά την τελευταία τους συνάντηση.

ΛΥΣΗ :

Τα κινητά συναντιούνται όταν $f_1(t)=f_2(t) \Leftrightarrow 3t^3-2t^2-t=2t^3-t^2-t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^3-t^2-2t=0 \Leftrightarrow t(t^2-t-2)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t(t-2)(t+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \\ t=-1 \quad \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

Έτσι η τελευταία συνάντηση έγινε την χρονική στιγμή $t=2sec$.
Οπότε

$$\upsilon_1(2)=\left.\frac{df_1}{dt}\right|_{t=2}=(9t^2-4t-1)_{t=2}=23$$

$$\upsilon_2(2)=\left.\frac{df_{(2)}}{dt}\right|_{t=2}=(6t^2-2t+1)_{t=2}=21$$

– ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ –

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ. Η κίνηση ενός σωματιδίου P κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής καθορίζεται πλήρως από την εξίσωση $s=f(t)$, όπου $t \geq 0$ είναι ο χρόνος και s είναι η απόσταση του P από ένα σταθερό σημείο O της ευθείας πάνω στην οποία κινείται.

Η ταχύτητα του P τη χρονική στιγμή t είναι $\upsilon=\frac{ds}{dt}$

Αν $\upsilon>0$, το P κινείται στην κατεύθυνση που αυξάνει η απόσταση s.
Αν $\upsilon<0$, το P κινείται στην κατεύθυνση που ελαττώνεται η απόσταση s.
Αν $\upsilon=0$, το P βρίσκεται, την ορισμένη αυτή χρονική στιγμή, σε ηρεμία.

Η επιτάχυνση του P τη χρονική στιγμή t είναι $\alpha=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$

Αν $\alpha>0$, η ταχύτητα υ αυξάνεται, ενώ αν $\alpha>0$, η υ ελαττώνεται με το χρόνο.
Αν οι υ και α έχουν το ίδιο πρόσημο, τότε το μέτρο της ταχύτητας του σημείου P αυξάνεται.
Αν οι υ και α έχουν αντίθετα πρόσημα, τότε το μέτρο της ταχύτητας του σημείου P ελαττώνεται.

Στα επόμενα προβλήματα της ευθύγραμμης κίνησης η απόσταση s είναι σε μέτρα (m) και ο χρόνος t σε δευτερόλεπτα (s).

- ΑΣΚΗΣΕΙΣ -

① Ένα σώμα κινείται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής σύμφωνα με την εξίσωση $s=\frac{1}{2}t^3-2t$. Προσδιορίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του 2 δευτερόλεπτα μετά από την αρχή της κίνησής του.

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{3}{2}t^2-2 \cdot \quad \text{Για } t=2,\ v=\frac{3}{2}2^2-2=4\,m/s$$

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=3t \qquad \text{Για } t=2,\ \alpha=3\cdot(2)=6\,m/s^2$$

② Η εξίσωση της ευθύγραμμης κίνησης ενός σωματιδίου είναι $s=t^3-6t^2+9t+4$

(α) Βρείτε τα s και α, όταν $v=0$
(β) Βρείτε τα s και v, όταν $\alpha=0$
(γ) Πότε αυξάνεται η s;
(δ) Πότε αυξάνεται η v;
(ε) Πότε αλλάζει η κατεύθυνση της κίνησης;

$v=ds/dt=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$
$\alpha=dv/dt=6(t-2)$

(α) Θέτοντας $v=0$, είναι $t=1$ και 3. Για $t=1$ είναι $s=8$ και $\alpha=-6$. Για $t=3$ είναι $s=4$ και $\alpha=6$.
(β) Για $\alpha=0$ είναι $t=2$, οπότε $s=6$ και $v=-3$
(γ) Η s αυξάνεται όταν $v>0$, δηλαδή όταν $t<1$ και $t>3$
(δ) Η v αυξάνεται όταν $\alpha>0$, δηλαδή όταν $t>2$.
(ε) Η κατεύθυνση της κίνησης αλλάζει όταν είναι $v=0$ και $\alpha\neq0$. Συνεπώς από το μέρος (α) προκύπτει ότι η κατεύθυνση της κίνησης αλλάζει όταν $t=1$ και $t=3$.

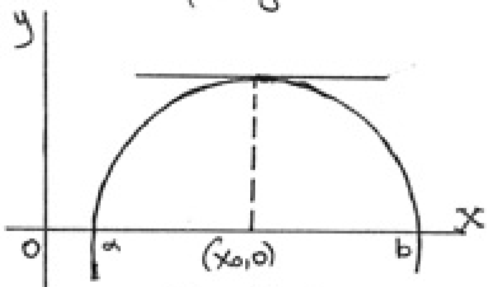
③ Η απόσταση s μιας ατμομηχανής που κινείται σε ευθεία σιδηροτροχιά, από ένα σταθερό σημείο δίνεται από τη σχέση $s=3t^4-44t^3+144t^2$, όπου t είναι ο χρόνος. Πότε η ατμομηχανή οπισθοχωρούσε;

(ΑΠ: $3<t<8$)

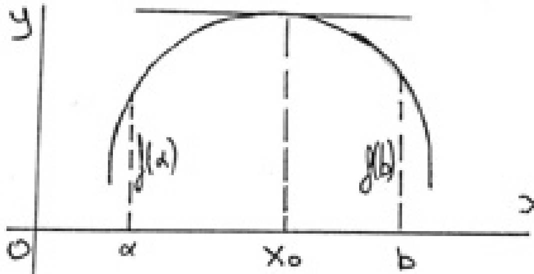
- ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ -

Το θεώρημα του Rolle. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\alpha \le x \le b$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\alpha < x < b$ και αν $f(\alpha) = f(b) = 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο $x = x_0$ του διαστήματος $\alpha < x < b$ στο οποίο είναι $f'(x) = 0$.
Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος αυτού είναι η εξής: Αν μια συνεχής καμπύλη τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $x=\alpha$ και $x=b$ και έχει εφαπτόμενη σε κάθε σημείο μεταξύ των α και b, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x = x_0$ μεταξύ των α και b, όπου η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς τον άξονα των x. Βλέπε Σx. 21-1.

Πόρισμα: Αν η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος του Rolle με τη διαφορά ότι $f(\alpha) = f(b) \neq 0$, τότε $f'(x) = 0$ για μια τουλάχιστον τιμή του x μεταξύ των α και b. Βλέπε Σx. 21-2



Σx. 21-1

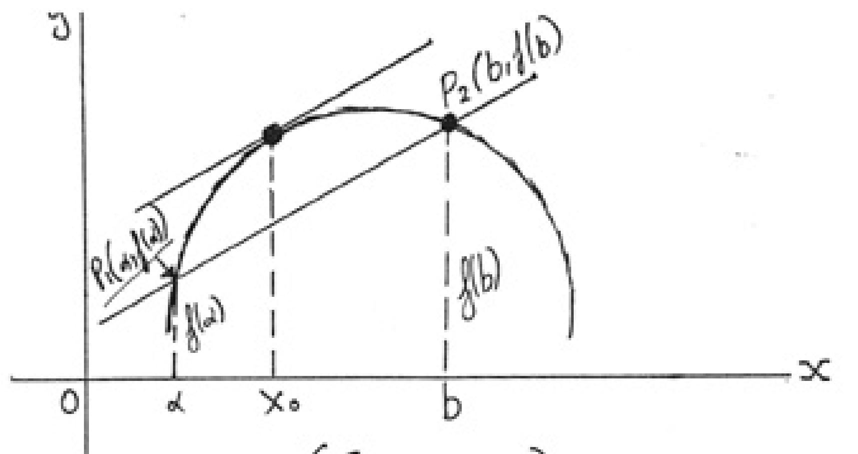


Σx. 21-2

Το θεώρημα της μέσης τιμής: Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\alpha \le x \le b$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\alpha < x < b$, τότε υπάρχει τουλάχιστο μία τιμή $x = x_0$ μεταξύ των α και b τέτοια ώστε:

$$\frac{f(b) - f(\alpha)}{b - \alpha} = f'(x_0)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος αυτού είναι η εξής: Αν P_1 και P_2 είναι δυο σημεία μιας συνεχούς καμπύλης (Σx. 21-3), η οποία έχει εφαπτομένη σε κάθε ενδιάμεσο σημείο, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της καμπύλης μεταξύ των P_1 και P_2, στο οποίο η κλίση της καμπύλης είναι ίση με τη κλίση της P_1P_2.



(Σχ. 21-3)

— ΛΥΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ —

① Βρείτε την τιμή x_0, για την οποία γίνεται λόγος στο θεώρημα του Rolle, για την συνάρτηση $f(x)=x^3-12x$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$.

Από τη $f'(x)=3x^2-12=0$ έχουμε $x=\mp 2$. Συνεπώς, η ζητούμενη τιμή είναι $x_0=2$.

② Βρείτε την τιμή x_0, για την οποία γίνεται λόγος στο θεώρημα της μέσης τιμής, για τη συνάρτηση $f(x)=3x^2+4x-3$, $\alpha=1$, $b=3$.

Χρησιμοποιώντας $f(\alpha)=f(1)=4$, $f(b)=f(3)=36$, $f'(x_0)=6x_0+4$ και $b-\alpha=2$, έχουμε $36=4+2(6x_0+4)=12x_0+12$ από όπου $x_0=2$.

③ Δείξτε ότι στο διάστημα $(-1,1)$ δεν υπάρχει εφαπτόμενη της καμπύλης $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ παράλληλη στον άξονα οx.

ΛΥΣΗ:

Θα ελέγξουμε αν εφαρμόζεται στο θεώρημα Rolle για την f στο $(-1,1)$.
Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f'(x)=(1-x^{2/3})'=-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3}x^{-1/3}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Για $x=0 \in (-1,1)$ έχουμε $f'(0) \longrightarrow \infty$ η f δηλαδή δεν παραγωγίζεται σε όλα τα $x \in (-1,1)$ άρα δεν υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ με $f'(\xi)=0$ άρα δεν υπάρχει στο $(-1,1)$ εφαπτόμενη της f παράλληλη στον άξονα οx.

④ Να ελέγξετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f(x)=|\eta\mu x|$ στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ΛΥΣΗ:

Η $f(x)=|\eta\mu x|$ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Θα ελέγξαμε αν παραγωγίζεται στη θέση $x=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|\eta\mu(0+h)|-|\eta\mu 0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|\eta\mu h|}{h}=$$

$$=\begin{cases} h>0 & \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\eta\mu h}{h}=1 \\ h<0 & \lim\limits_{h\to 0^-}-\dfrac{\eta\mu h}{h}=-1 \end{cases}$$

Συνεπώς δεν υπάρχει η $f'(0)$, δηλαδή η f δεν παραγωγίζεται σε όλα τα $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow$ δεν εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής.

—ΑΛΥΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ—

1) Βρείτε την τιμή x_0, για την οποία γίνεται λόγος στο θεώρημα Rolle, για τις επόμενες συναρτήσεις:

(α) $f(x)=x^2-4x+3,\ 1\le x\le 3$ (ΑΠ: $x_0=2$)

(β) $f(x)=\sin x,\ 0\le x\le \pi$ (ΑΠ: $x_0=\frac{1}{2}\cdot\pi$)

(γ) $f(x)=\cos x,\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ (ΑΠ: $x_0=\pi$)

② Βρείτε την τιμή x_0 για την οποία γίνεται λόγος στο θεώρημα της μέσης τιμής, για τις επόμενες συναρτήσεις:

(α) $y=x^3,\ 0\le x\le 6$ (ΑΠ: $x_0=2\sqrt{3}$)

(β) $y=\alpha x^2+bx+c,\ x_1\le x\le x_2$ (ΑΠ: $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$)

(γ) $y=\ln x,\ 1\le x\le 2e$ (ΑΠ: $x_0=\frac{2e-1}{1+\ln 2}$)

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμος, στο (α,β) τότε ισχύουν:

α) $f'(x) > 0 \ \forall x \in (\alpha,\beta) \Longleftrightarrow f \uparrow$ στο $[\alpha,\beta]$

β) $f'(x) < 0 \ \forall x \in (\alpha,\beta) \Longleftrightarrow f \downarrow$ στο $[\alpha,\beta]$

γ) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (\alpha,\beta) \Longleftrightarrow f \uparrow$ στο $[\alpha,\beta]$

δ) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (\alpha,\beta) \Longleftrightarrow f \downarrow$ στο $[\alpha,\beta]$

ε) $f'(x) = 0 \ \forall x \in (\alpha,\beta) \Longleftrightarrow f$ σταθερή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Εξετάστε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x) = 2x+10$ στο R

ΛΥΣΗ:

Έχουμε $f'(x) = (2x+1)' = 2 > 0 \Longrightarrow f \uparrow \ \forall x \in R$

2) Εξετάστε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x) = x^2$ στο R

ΛΥΣΗ:

Έχουμε $f'(x) = (x^2)' = 2x$

- $f(x) > 0 \ \forall x \in R_+ \longrightarrow f \uparrow x \in R_+$
- $f(x) < 0 \ \forall x \in R_- \Longrightarrow f \downarrow x \in R_-$

3) Εξετάστε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση: $f(x) = \ln x$, $x \in R_+^*$

ΛΥΣΗ:

Έχουμε $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in R_+^*$

$f'(x) > 0 \ \forall x \in R_+^* \longrightarrow f \uparrow x \in R_+^*$

④ Εξετάστε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x)=e^x$ στο R

ΛΥΣΗ:

Έχουμε $f'(x)=(e^x)'=e^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f \uparrow \forall x\in\mathbb{R}$

⑤ Εξετάστε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x$ στο R

ΛΥΣΗ:

Έχουμε $f'(x)=x^2+5x+6$

Το τριώνυμο x^2+5x+6 γίνεται θετικός εκτός των ριζών του $-2,-3$ και αρνητικός εντός των ριζών του, οπότε:

$$f'(x)>0,\ x\in(-\infty,-3)\cup(-2,+\infty)$$
$$f'(x)<0,\ x\in(-3,-2)$$

Άρα η f στο $\uparrow (-\infty,-3)\cup(-2,+\infty)$

και f στο $\downarrow (-3,-2)$

⑥ Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=2x^2-\ln x,\ x\in(0,+\infty)$

β) $f(x)=(x-2)^2,\ x\in\mathbb{R}$

γ) $f(x)=x\ln x,\ x\in(0,+\infty)$

δ) $f(x)=x+\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ:

α) $f'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

Το $x=-\frac{1}{2}$ απορρίπτεται γιατί βρίσκεται εκτός του πεδίου ορισμού της f. Μας ενδιαφέρει το πρόσημο της $f'(x)$ στα διαστήματα $(0,\frac{1}{2})$ και $(\frac{1}{2},+\infty)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x(x-\frac{1}{2})\cdot(x+\frac{1}{2})>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$

Άρα $f \downarrow$ στο $(0,\frac{1}{2})$ και $f \uparrow$ στο $(\frac{1}{2},+\infty)$

β) $f'(x)=2(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>2$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<2$

Άρα $f \downarrow$ στο $(0,\frac{1}{2})$ και $f \uparrow$ στο $(\frac{1}{2},+\infty)$

γ) $f'(x)=(x\ln x)'=x'\ln x+x(\ln x)'=1+\ln x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \quad \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1+\ln x>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$ $\boxed{\text{διότι } \ln e=1}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{e}$

Άρα $f \downarrow$ στο $(0, 1/e)$ και $f \uparrow$ στο $(1/e, +\infty)$

δ) $f'(x)=(x+\eta\mu x)'=1+\sigma\upsilon\nu x$

Αλλά $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1+\sigma\upsilon\nu x \leq 2 \Rightarrow f'(x) \geq 0$, άρα $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

— ΜΕΓΙΣΤΑ-ΕΛΑΧΙΣΤΑ-

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ:

Για να βρούμε τα σχετικά μέγιστα και ελάχιστα συνεχών συναρτήσεων, των οποίων οι πρώτες παράγωγοι είναι επίσης συνεχείς, κάνουμε τα εξής:

1) Λύνουμε την $f'(x)=0$ για να προσδιορίσουμε τα κρίσιμα σημεία.
2) Τοποθετούμε τα κρίσιμα σημεία σε μια αριθμητική ελίκωση, δημιουργώντας κατά αυτό τον τρόπο ορισμένα διαστήματα.
3) Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ σε κάθε διάστημα.
4) Έστω ότι το x αυξάνει περνώντας από ένα κρίσιμο σημείο $x=x_0$
   α) Η $f(x)$ έχει μέγιστο $(=f(x_0))$, αν το πρόσημο της $f'(x)$ αλλάζει από $+$ σε $-$
   β) Η $f(x)$ έχει ελάχιστο $(=f(x_0))$, αν το πρόσημο της $f'(x)$ αλλάζει από $-$ σε $+$
   γ) Η $f(x)$ δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο $x=x_0$, αν η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΓΙΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ / ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ:

1) Λύνουμε την $f'(x)=0$ για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία.
2) Σε ένα κρίσιμο σημείο $x=x_0$.
   η $f(x)$ έχει μέγιστο $(=f(x_0))$, αν $f''(x_0)<0$
   η $f(x)$ έχει ελάχιστο $(=f(x_0))$, αν $f''(x_0)>0$

Το κριτήριο δεν ισχύει στην περίπτωση που η $f''(x_0)$ είναι μηδέν ή άπειρη. Στην περίπτωση αυτή, πρέπει να χρησιμοποιείται το κριτήριο της πρώτης παραγώγου.

Παραδείγματα:

① Να βρεθούν τα ακρότατα (αν υπάρχουν) της συναρτήσεως $f(x)=x^3-9x^2+5 / \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ:

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2-18x$

$f'(x)=0 \Longleftrightarrow 3x^2-18x=0 \Longleftrightarrow 3x(x-6)=0 \Longleftrightarrow$ $x=0$ ή $x=6$

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$f(0)$ T.M	$\searrow$	$f(6)$ T.E	$\nearrow$	

② Όμοια για την $f(x)=e^{x-1/x} \,|\, \mathbb{R}^*$

ΛΥΣΗ:

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$

$$f'(x)=e^{x-1/x}\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)'=e^{x-1/x}\cdot\frac{1}{x^2}$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x)>0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$

$\Longrightarrow f \uparrow$ στο $\mathbb{R}^* \Longrightarrow f$ δεν παρουσιάζει ακρότατα

③ Η απόσταση s που διανύει ένα σώμα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω σε χρόνο t, δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο: $s=120t-4{,}9t^2$.
Βρείτε το μέγιστο ύψος που θα φθάσει το σώμα και τον απαιτούμενο χρόνο.

ΛΥΣΗ:

$S(t)=120t-4{,}9t^2 \rightarrow S'(t)=120-9{,}8t$

και $S'(t)=0 \Longleftrightarrow t=\frac{120}{9{,}8} \Longleftrightarrow \boxed{t=12{,}24\text{sec}}$

Ακόμα $s''(t) = -9,8 < 0$ για $t = 12,24$ η $s(t)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και μάλιστα $S(12,24) = (120\cdot 12,24 - 4,9\cdot 12,24^2)\,m \Rightarrow S_{max} = 734,69\,m$

(4) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα (αν υπάρχουν) της συνάρτησης $f(x) = x\ln x \; (0, +\infty)$

ΛΥΣΗ:

$f'(x) = 1 + \ln x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

Η $f'(x) = 1 + \ln x$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in (0, +\infty)$ και $f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$. Άρα το $\frac{1}{e}$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου για την f, αφού η $f''(x)$ είναι συνεχής στο $\frac{1}{e}$.

Άρα έχουμε min για $x = \frac{1}{e}$ και $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

(5) Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = x^4$

Λύση:

$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$ με $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Χρησιμοποιούμε το 1º κριτήριο.

— ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΙ ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ —

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) και παραγωγίσιμη σε κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Τότε είναι γνωστό, ότι θα υπάρχει εφαπτομένη του γραφήματος της f στο σημείο x_0.

Ορισμός:

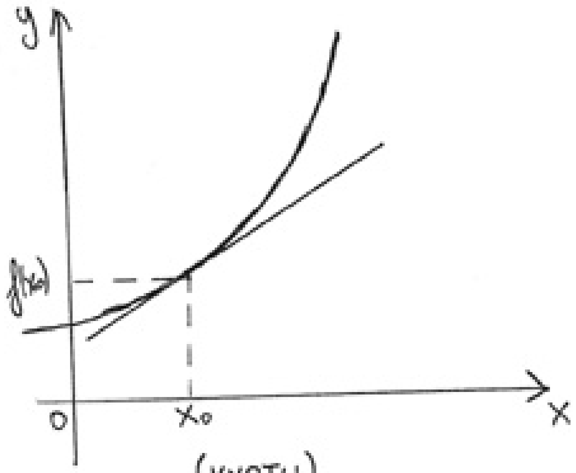
Η f ονομάζεται <u>κυρτή</u> όταν και μόνο όταν το γράφημά της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη του γραφήματος σε οποιοδήποτε σημείο του.

Ορισμός:

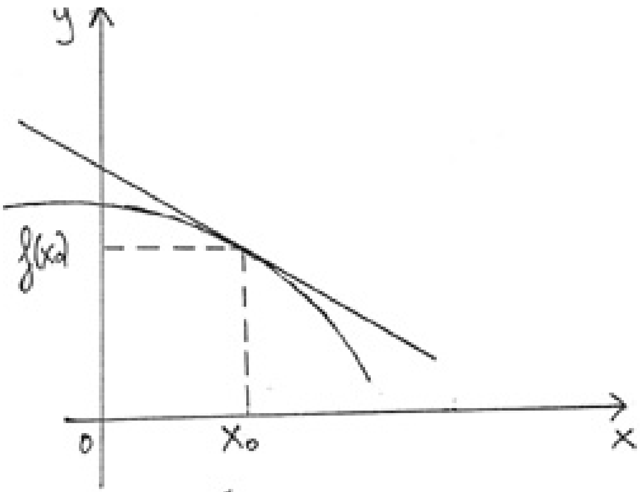
Η f ονομάζεται <u>κοίλη</u> όταν και μόνο όταν το γράφημα της f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη του γραφήματος σε οποιοδήποτε σημείο του.

Πρόταση:

Έστω f μια συνάρτηση, ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν $f''(x) > 0$ (αντίστοιχα $f''(x) < 0$) $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f έχει κοίλα άνω (αντίστοιχα κάτω) στο $[\alpha, \beta]$



(ΚΥΡΤΗ)



(ΚΟΙΛΗ)

ΠΡΟΤΑΣΗ :

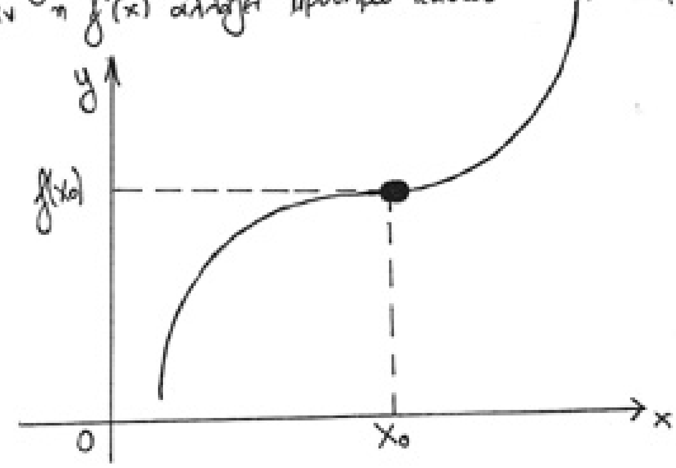
- ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ -

Σημείο καμπής μιας καμπύλης είναι ένα σημείο στο οποίο η καμπύλη σταματά να στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω και αρχίζει να τα στρέφει προς τα κάτω ή αντίστροφα.

Ένα σημείο $x=x_0$ είναι σημείο καμπής μιας καμπύλης

αν $f''(x_0)=0$

αν η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο καθώς το x περνάει το $x=x_0$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

① Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)=x^3$ είναι κοίλη, κυρτή, καθώς επίσης και τα σημεία καμπής.

ΛΥΣΗ :

$f(x)=x^3/R$

$f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$

$f''(x)=0 \Longleftrightarrow 6x=0 \Longleftrightarrow x=0$

Οπότε $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>0$ και $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<0$
Άρα f κυρτή στο $(0,+\infty)$ και f κοίλη στο $(-\infty,0)$
Επίσης όπως φαίνεται από τα ανωτέρω $\Rightarrow$ Το $x=0$ είναι θέση σημείου καμπής.

② Όμοια για τη συνάρτηση $f(x)=xe^{-x}$

<u>ΛΥΣΗ</u>:

$$f(x)=xe^{-x} \,|\, \mathbb{R}$$
$$f'(x)=(xe^{-x})'=x'\cdot e^{-x}+x(e^{-x})'=e^{-x}-xe^{-x}$$
$$f''(x)=(e^{-x}-xe^{-x})'=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-2)$$
$$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Οπότε f κυρτή στο $(2,+\infty)$ και f κοίλη στο $(-\infty,2)$

$\Rightarrow$ Το $x=2$ είναι θέση σημείου καμπής.

③ Όμοια για τη συνάρτηση $f(x)=x^4$

<u>ΛΥΣΗ</u>: $f(x)=x^4 \,|\, \mathbb{R}$

$$f'(x)=4x^3$$
$$f''(x)=12x^2>0 \text{ και } f''(x)=0 \Rightarrow x=0$$

Άρα $f(x)$ δεν έχει σημεία καμπής.

* ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ *

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ	ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ
Αύξουσα	$f'(x)\geq 0$	$f'(x)\geq 0$
Φθίνουσα	$f'(x)\leq 0$	$f'(x)\leq 0$
Κυρτή	$f''(x)\geq 0$	$f''(x)\geq 0$
Κοίλη	$f''(x)\leq 0$	$f''(x)\leq 0$
Μέγιστο	$f'(x)=0$	$f'(x)=0$ και $f''(x)<0$ ή αλλαγή προσήμου της f': $+\to-$
Ελάχιστο	$f'(x)=0$	$f'(x)=0$ και $f''(x)>0$ ή αλλαγή προσήμου της f': $-\to+$
ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ	$f''(x)=0$	$f''(x)=0$ και $f'''(x)\neq 0$ αλλαγή προσήμου της f''

Άλυτα Προβλήματα — Μέγιστα ελάχιστα

① Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι 20. Βρείτε τους αριθμούς (a) αν το γινόμενο τους είναι μέγιστο, (b) αν το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ελάχιστο, (c) αν το γινόμενο του τετραγώνου του ενός και του κύβου του άλλου είναι μέγιστο Απ. (a) 10,10 (b) 10,10 (c) 8,12

② Το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι 16. Βρείτε τους αριθμούς, (a) αν το άθροισμα τους είναι ελάχιστο (b) αν το άθροισμα του ενός και του τετραγώνου του άλλου είναι ελάχιστο. Απ. (a) 4,4 (b) 8,2

③ Ένα ορθογώνιο κιβώτιο ανοιχτό από πάνω με τετράγωνη βάση και χωρητικότητα $6400\,cm^3$, πρόκειται να κατασκευαστεί με κόστος 32 δρχ. ανά cm^2 για τη βάση και 20 δρχ. ανά cm^2 για τις πλευρές. Βρείτε τις πλέον οικονομικές διαστάσεις. Απ. $20 \times 20 \times 16$ σε cm

④ Ένας τοίχος ύψους 8m απέχει $3\frac{3}{8}$ m από ένα ψηλό κτίριο. Βρείτε το μήκος της πιο κοντής σκάλας που θα στηρίζεται στο έδαφος και στο κτίριο και θα ακουμπά στον τοίχο Απ. $15\frac{5}{8}$ m.

⑤ Βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που περνάει από το σημείο (3,4) και μαζί με τους άξονες ορίζει στο πρώτο τεταρτημόριο τρίγωνο με ελάχιστη επιφάνεια Απ. $4x \pm 3y - 24 = 0$

⑥ Σε ποιο σημείο του πρώτου τεταρτημορίου της παραβολής $y = 4 - x^2$ η εφαπτομένη ορίζει μαζί με τους άξονες τρίγωνο με ελάχιστη επιφάνεια Απ $(2\sqrt{3}/3\ ,\ 3/3)$

⑦ Βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου (4,2) από την παραβολή $y^2 = 8x$ —— Απ. $2\sqrt{2}$

⑧ Φέρτε εκείνη την εφαπτομένη της έλλειψης $x^2/25 + y^2/16 = 1$ για την οποία το τμήμα που περιέχεται μεταξύ των αξόνων είναι ελάχιστο. και δείξτε ότι το μήκος του τμήματος αυτού είναι 9

⑨ Στην έλλειψη $x^2/400 + y^2/225 = 1$ εγγράφονται ορθογώνια με τις πλευρές τους παράλληλες προς τους άξονές της. Βρείτε τις διαστάσεις των ορθογωνίων εκείνων που έχουν (a) μέγιστη επιφάνεια και (b) μέγιστο περίμετρο Απ. (a) $20\sqrt{2} \times 15\sqrt{2}$, (b) 32×18

10/ Βρείτε την ακτίνα R του ορθού κυκλικού κώνου με το μέγιστο όγκο, που μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα ακτίνας r. Απ. $R = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$

11) Ένας ορθός κυκλικός κύλινδρος εγγράφεται σ'έναν ορθό κυκλικό κώνο ακτίνας r. Βρείτε την ακτίνα R του κυλίνδρου (a) αν όγκος του είναι μέγιστος και (b) αν η πλευρική του επιφάνεια είναι μέγιστη
Απ. (a) $R = \frac{2}{3}r$, (b) $R = \frac{1}{2}r$

12) Δείξτε ότι το ελάχιστο υλικό με το οποίο μπορεί να κατασκευαστεί μία κωνική σκηνή με ορισμένη χωρητικότητα, αντιστοιχεί σε ύψος ίσο με $\sqrt{2}$ επί την ακτίνα της βάσης

13) Μεταξύ των ισοσκελών τριγώνων των περιγραμμένων σε κύκλο ακτίνας r, το τρίγωνο με το ελάχιστο εμβαδό είναι ισόπλευρο τρίγωνο με ύψος 3r.

14) Προσδιορίστε τις διαστάσεις του ορθού κυκλικού κυλίνδρου με τη μέγιστη πλευρική επιφάνεια, που μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα ακτίνας 8cm Απ. $h = 2r = 8\sqrt{2}$ cm

15) Διερευνήστε τη δυνατότητα εγγραφής ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου με μέγιστη ολική επιφάνεια, σ'έναν ορθό κυκλικό κώνο ακτίνας r και ύψους h
Απ. Αν $h > 2r$, η ακτίνα του κυλίνδρου είναι $\frac{1}{2}hr/(h-r)$

16) Ηλεκτρικό ρεύμα, που διατρέχει κυκλικό πηνίο ακτίνας r, εξασκεί δύναμη $F = kx/(x^2+r^2)^{5/2}$ σ'ένα μικρό μαγνήτη, που είναι τοποθετημένος σ'απόσταση x πάνω από το κέντρο του πηνίου. Δείξτε ότι η F γίνεται μέγιστη όταν $x = \frac{1}{2}r$.

17) Η ισχύς που παράγεται από ένα ηλεκτρικό στοιχείο ηλεκτρεγερτικής δύναμης E και σταθερής εσωτερικής αντίστασης r, όταν περνάει σταθερό ρεύμα διαμέσου μιας εξωτερικής αντίστασης R, είναι $E^2R/(r+R)^2$
Δείξτε ότι η ισχύς αυτή γίνεται μέγιστη όταν $R = r$

– ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ $y = f(x)$ –

Για την χάραξη της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$, εκτός από αυτά που αναφέραμε παραπάνω, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε και το εξής:

α) Πεδίο ορισμού και ρίζες της $f(x) = 0$ όπως και $f(0) = y$

β) Την <u>αρχή</u> της $f(x)$. Δηλαδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ;$ και <u>τέλος</u> δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ;$

γ) Τις ασύμπτωτες ευθείες της γραφικής παράστασης (εάν υπάρχουν). Διακρίνουμε τρία είδη ασύμπτωτων ευθειών:

① <u>Κατακόρυφη ασύμπτωτη</u>: Έχει εξίσωση της μορφής $x = \alpha$
Για να υπάρχει πρέπει και αρκεί $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty$

② <u>Οριζόντια ασύμπτωτη</u>: Έχει εξίσωση της μορφής $y = \beta$
Για να υπάρχει πρέπει και αρκεί $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \beta$

③ <u>Πλάγια ασύμπτωτη</u>: Εμφανίζεται μόνο όταν στη συνάρτηση, ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή. Για να έχει η συνάρτηση πλάγια ασύμπτωτη με εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \mu$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \mu$$

Αφού συγκεντρώσαμε όλα τα στοιχεία της συναρτήσεως, κάνουμε πινακογράφηση αυτών και προχωρούμε στη χάραξη της γραφικής παράστασης.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>:

① Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

<u>ΛΥΣΗ</u>:

Το πεδίο ορισμού είναι $A = R - \{\pm 1\}$ διότι πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-1) \neq 0$
$\Rightarrow x \neq \pm 1$

<u>Ασύμπτωτες</u>: $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ η f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες $x = 1$ και $x = -1$

Εδώ βαθμός αριθμητή > βαθμό παρονομαστή άρα υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη της μορφής $y = \lambda x + \mu$, όπου $\lambda = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(x^2-1)x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} =$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

και $\mu = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - \lambda x\right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} - x = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$

Άρα πλάγια ασύμπτωτη η $y = x$

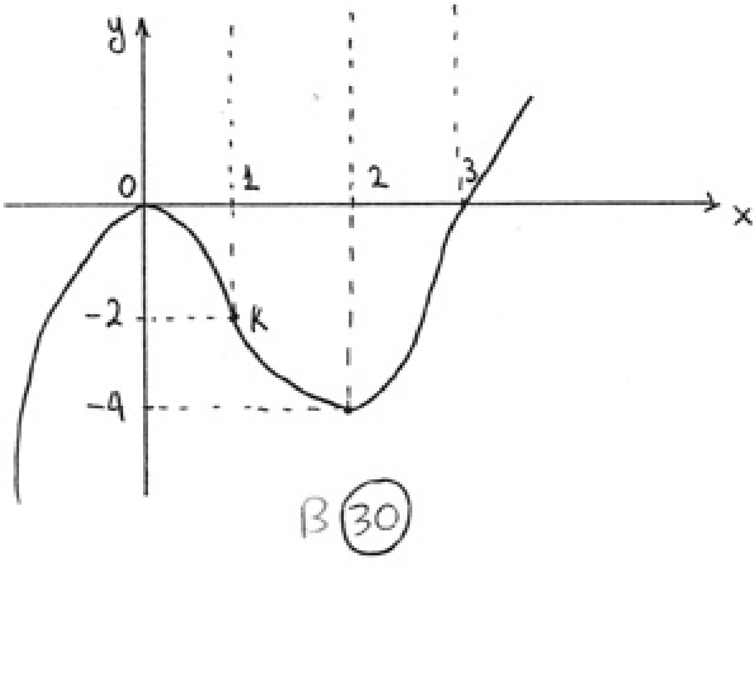
1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x^2$

Λύση:

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η εξίσωση $f(x) = x^3 - 3x^2 = 0$ έχει ρίζες $x_1 = 0$ και $x_2 = 3$ και συνεπώς η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(3,0)$. Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ και μηδενίζεται για $x=0$ και $x=2$. Συνεπώς είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(2,+\infty)$ και αρνητική στο $(0,2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$. Η f έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6x-6 = 6(x-1)$. Η f'' μηδενίζεται για $x=1$, ενώ είναι θετική στο $(1,+\infty)$ και αρνητική στο $(-\infty,1)$. Συνεπώς η f έχει τοπικό μέγιστο στο 0 το $f(0)=0$ και τοπικό ελάχιστο στο 2 το $f(2)=-4$. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $K(1,-2)$, και στρέφει τα κοίλα άνω στο $[1,+\infty)$ και κάτω στο $(-\infty,1]$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται στον επόμενο πίνακα ο οποίος μας διευκολύνει στη μελέτη και γραφική παράσταση της f.

x	$-\infty$	0		1		2		3	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f''	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
f	$\nearrow$	0 μ	$\searrow$	-2 κ	$\searrow$	-4 ε	$\nearrow$	0	$\nearrow$



2. Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Λύση:

α) Πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \Rightarrow D_f = R-\{-1\}$

β) $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=0$ και $f(0)=0$

γ) Ασύμπτωτες

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\pm\infty$ η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη με εξίσωση $x=-1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{(x+1)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{x})}=1$ Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη με εξίσωση $y=1$

δ) $f'(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'=\dfrac{x'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\ \forall x\in R-\{-1\}$

Άρα $f \uparrow\ \forall x\in R-\{-1\}$ και βέβαια δεν υπάρχουν ακρότατα.

ε) $f''(x)=\left[\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]'=-\dfrac{2}{(x+1)^3}$

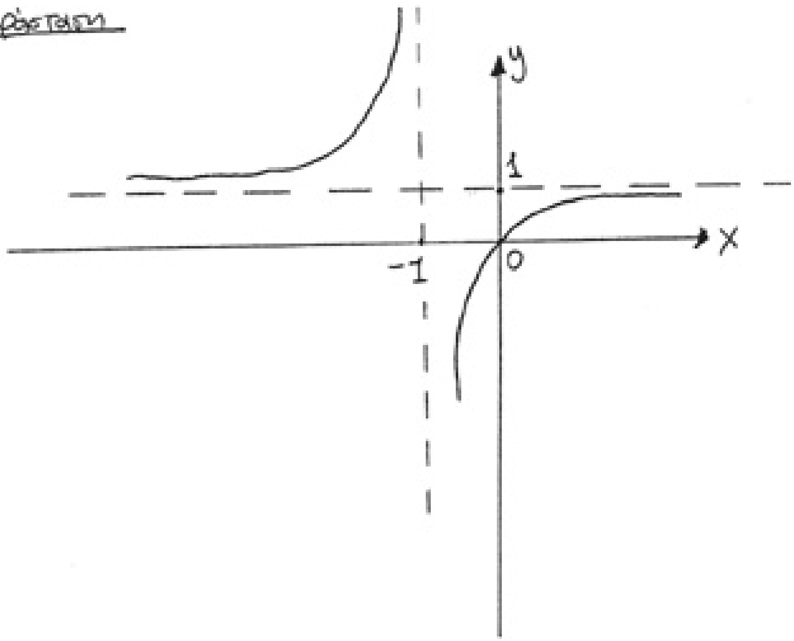
$f''(x)>0 \Leftrightarrow x<-1 \Rightarrow f$ κυρτή στο $(-\infty,-1)$ και

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x>-1 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-1,+\infty)$

στ) ΠΙΝΑΚΑΣ

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
f'	$+$	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	$-$	$-$	$-$
f	↗	↗	↗	↗

3. <u>Γραφική παράσταση</u>



3. Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = e^{-x^2}$

<u>Λύση</u>:

α) $D_f = \mathbb{R}$

β) $f(x) \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

γ) $f(-x) = e^{-(-x)^2} = f(x) \Big| \Rightarrow f$ άρτια

δ) <u>Ασύμπτωτες</u>

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -x^2 = 0$ η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f.

ε) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f'(x) > 0 \iff -2xe^{-x^2} > 0 \iff x < 0$

και $f'(x) < 0 \iff -2xe^{-x^2} < 0 \iff x > 0$

Άρα $f \uparrow$ στο $(-\infty, 0)$ και $f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$. Επειδή δε η f' αλλάζει πρόσημο δεξιά και αριστερά του $0 \Rightarrow$ για $x=0$ η f παρουσιάζει ακρότατο και μάλιστα τοπικό μέγιστο
$f(0) = e^0 \Rightarrow f(0) = 1$

στ) $f''(x) = (-2xe^{-x^2})' = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x^2}(2x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

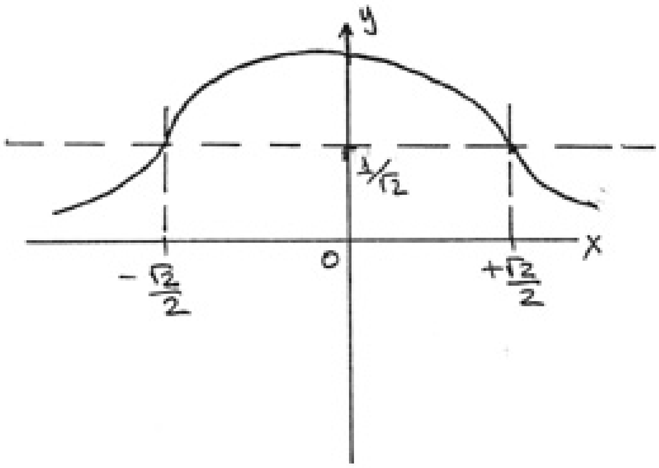
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Επειδή δε η f'' αλλάζει πρόσημο δεξιά και αριστερά των $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ τα σημεία $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι θέσεις σημείων καμπής.

ζ) ΠΙΝΑΚΑΣ

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		0		$+\sqrt{2}/2$		$+\infty$
f'		+		+	0	−		−	
f''		+	0	−		−	0	+	
f		↗		↗		↘		↘	
			Σ.Κ		max		Σ.Κ		

η) ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ



ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Μέχρις εδώ ασχοληθήκαμε με συναρτήσεις μιας μόνο μεταβλητής. Όπως όμως ξέρουμε υπάρχουν συναρτήσεις δυο ή περισσότερων μεταβλητών όπως $z=f(x,y)$ ή $z=f(x,y,\omega)$

$$Z=f(x,y,\omega,\ldots\ldots)$$

Στην περίπτωση δυο μεταβλητών θα εξετάσουμε την παραγώγιση και ας δούμε ένα πολύ απλό νόμο.

Τον νόμο όγκου V, πιέσεως P και θερμοκρασίας T, που είναι:

$$V=c\frac{T}{P} \quad (\text{όπου } C \text{ σταθερά}) \quad (\text{Καταστ. εξίσωση αερίων})$$

α) Αν υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία T μεταβάλλεται ενώ η πίεση παραμένει σταθερά τότε:

$$\frac{dV}{dT}=c\cdot\frac{1}{P}$$

β) Αν υποθέσουμε ότι η πίεση μεταβάλλεται ενώ η θερμοκρασία T παραμένει σταθερά τότε:

$$\frac{dV}{dP}=-c\frac{T}{P^2}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ύπαρξη δυο ανεξάρτητων μεταβλητών συνεπάγεται την δημιουργία δυο παραγώγων. Οι παράγωγοι αυτές λέγονται μερικές παράγωγοι.

Για να γίνεται διάκριση μεταξύ της παραγώγου και της μερικής παραγώγου θα χρησιμοποιούμε αντί του συμβόλου "d" το "∂".

Έτσι λοιπόν οι πιο πάνω μερικές παράγωγοι θα συμβολίζονται αντίστοιχα.

$$\frac{\partial V}{\partial T}=k\frac{1}{P}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P}=-k\frac{T}{P^2}$$

Γενικότερα σαν $z=f(x,y)$ όταν γράφουμε $\frac{\partial z}{\partial x}$ θα εννοούμε την x σαν μεταβλητή και την y σαν σταθερά.
Ενώ με $\frac{\partial z}{\partial y}$ θα εννοούμε την y σαν μεταβλητή και την x σαν σταθερά.

Παραδειγματα

1. $z = x^2 + 2y \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2$

2. $z = 2x^3y + 5x^2y^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y + 10xy^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 + 10x^2y$

3. $z = \eta\mu(x+y) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \sigma\upsilon\nu(x+y) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sigma\upsilon\nu(x+y)$

Μερικες παραγωγοι ανωτερων ταξεων

Η μερική παράγωγος $\frac{\partial z}{\partial x}$ της $z=f(x,y)$ μπορεί με τη σειρά της να παραγωγιστεί μερικά ως προς x και ως προς y, οπότε θα δώσει τις μερικές παραγώγους δευτέρας τάξης $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ και $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$. Όμοια από την $\frac{\partial z}{\partial y}$ προκύπτουν με παραγώγιση οι $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ και $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.
Αν η $z=f(x,y)$ και οι μερικές της παράγωγοι είναι συνεχείς, η σειρά παραγώγισης μπορεί να εναλλαγεί, δηλ. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y \cdot \partial x}$

Λυμενα προβληματα

1. Βρείτε τις μερικές παραγώγους.
$z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$

Λύση:

Θεωρώντας το y σταθερό και παραγωγίζοντας ως προς x βρίσκουμε
$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$

Θεωρώντας το x σταθερό και παραγωγίζοντας ως προς y βρίσκουμε
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 8y$$

2. $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$

Θεωρώντας το y σταθερό και παραγωγίζοντας ως προς x βρίσκουμε
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}$$

Θεωρώντας το x σταθερό και παραγωγίζοντας ως προς y βρίσκουμε
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{2y}{x}$$

3. $z = \sin(2x+3y)$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x+3y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x+3y)$$

4. $z = \arctan x^2y + \arctan xy^2$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{1+x^4y^2} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{1+x^4y^2} + \frac{2xy}{1+x^2y^4}$$

5. $z = e^{x^2+xy}$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+xy}(2x+y) = z\cdot(2x+y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+xy}\cdot(x) = z\cdot x$$

6. Το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο $K = \frac{1}{2}ab\sin C$.
Αν $a=20$, $b=30$ και $C=30^\circ$, υπολογίστε:
α) Το ρυθμό μεταβολής του K ως προς α, όταν τα b και C παραμένουν σταθερά
β) Το ρυθμό μεταβολής του K ως προς C, όταν τα b και α παραμένουν σταθερά.
γ) Το ρυθμό μεταβολής του b ως προς α, όταν τα K και C παραμένουν σταθερά.

ΛΥΣΗ:

α) $\frac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{2}b\sin C = \frac{1}{2}(30)\cdot\sin 30^\circ = \frac{15}{2}$

β) $\frac{\partial K}{\partial C} = \frac{1}{2}ab\cos C = \frac{1}{2}(20)(30)\cdot(\cos 30^\circ) = 150\sqrt{3}$

γ) $b = \frac{2K}{a\sin C}$, $\frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{2K}{a^2\sin C} = -\frac{2(\frac{1}{2}ab\sin C)}{a^2\sin C} = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$

ΑΛΥΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Για καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις βρείτε τις $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(α) $z = x^2+3xy+y^2$ (ΑΠ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x+3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x+2y$)

(β) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$ (ΑΠ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x}{y^3} - \frac{1}{x^2}$)

(γ) $z = \sin 3x\cos 4y$ (ΑΠ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3\cos 3x\cos 4y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -4\sin 3x\sin 4y$)

(δ) $z = \arctan\frac{y}{x}$ (ΑΠ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$)

(ε) $x^2-4y^2+9z^2=36$ (ΑΠ: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{9z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{9z}$)

(ζ) $z^3-3x^2y+6xyz=0$ (ΑΠ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y(x-z)}{z^2+2xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-2z)}{z^2+2xy}$)

(η) $yz+xz+xy=0$ (ΑΠ: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$)

2) Για καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις βρείτε τις $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

(α) $z = 2x^2-5xy+y^2$ (ΑΠ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -5$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

(β) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$ (ΑΠ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{6y}{x^4}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$)

(γ) $z = \sin 3x\cos 4y$ (ΑΠ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -9z$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -12\cos 3x\sin 4y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -16z$)

(δ) $z=\arctan\frac{y}{x}$ (Απ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$)

– ΟΛΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ –

Ολικά Διαφορικά. Τα διαφορικά dx και dy μιας συνάρτησης $y=f(x)$ μιας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής ορίστηκαν με τις σχέσεις

$$dx = Dx,\quad dy = f'(x)dx = \frac{dy}{dx}dx$$

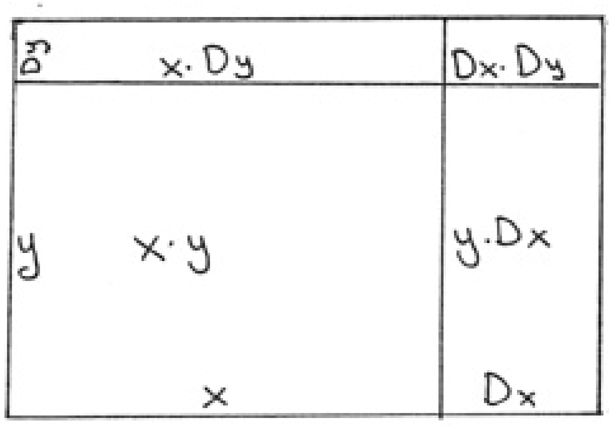
Θεωρούμε τη συνάρτηση $z=f(x,y)$ των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x και y και ορίζουμε $dx=Dx$ και $dy=Dy$. Όταν το x μεταβάλλεται, ενώ το y διατηρείται σταθερό, το z είναι συνάρτηση μόνο του x και το μερικό διαφορικό του z ως προς x ορίζεται από την σχέση $d_xz = f_x(x,y)dx = \frac{\partial z}{\partial x}dx$. Όμοια, το μερικό διαφορικό του z ως προς y ορίζεται από τη σχέση $d_xz = f_y(x,y)dy = \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Το ολικό διαφορικό dz ορίζεται ως το άθροισμα των μερικών διαφορικών, δηλαδή:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad (1)$$

Για μια συνάρτηση $w=F(x,y,z,\dots t)$ περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών το ολικό διαφορικό είναι:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \dots + \frac{\partial w}{\partial t}dt \quad (2)$$

Όπως και στην περίπτωση συνάρτησης μιας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής, το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών δίνει μια καλή προσέγγιση της ολικής αύξησης της συνάρτησης, όταν οι αυξήσεις των διαφόρων ανεξάρτητων μεταβλητών είναι μικρές.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τη συνάρτηση $z=x\cdot y$ έχουμε $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=y\cdot dx+x\cdot dy$.

Όταν τα x και y αυξηθούν κατά $Dx=dx$ και $Dy=dy$, η αύξηση στη Dz του z είναι:

$$\begin{aligned} Dz &= (x+Dx)\cdot(y+Dy)-xy \\ &= xDy+yDx+DxDy \\ &= xdy+ydx+dx\cdot dy \end{aligned}$$

Μια γεωμετρική ερμηνεία δόθηκε στη σελίδα 9 των φυλλαδίων. Βλέπουμε ότι τα dz και Dz διαφέρουν κατά το ορθογώνιο εμβαδόν $DxDy=dxdy$.

– ΛΥΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ –

1) Βρείτε την dz/dt, αν $z=\ln(x^2+y^2)$ και $x=e^{-t}$, $y=e^{t}$.

Λύση:

Έχουμε $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial x}{\partial t}=-e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^{t}$

Συνεπώς $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{2x}{x^2+y^2}(-e^{-t})+\frac{2y}{x^2+y^2}(e^{t})=2\cdot\frac{ye^{t}-xe^{-t}}{x^2+y^2}$

2) Έστω $z=f(x,y)$ μια συνεχής συνάρτηση των x και y με συνεχείς μερικές παραγώγους $\partial z/\partial x$ και $\partial z/\partial y$ και έστω y μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x. Τότε το z είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x και από την (2) έχουμε:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Η αλλαγή στο συμβολισμό από το z στο f έγινε για να μην υπάρξει σύγχυση από τη χρήση των dz/dx και $\partial z/\partial x$ στην ίδια έκφραση.

3) Βρείτε την dz/dx, αν $z=f(x,y)=x^2+2xy+4y^2$, $y=e^{ax}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=(2x+2y)+(2x+8y)ae^{ax}=2(x+y)+2a(x+4y)e^{ax}$$

4) Βρείτε α) την dz/dx και β) την dz/dy, αν $z=f(x,y)=xy^2+x^2y$, $y=\ln x$

α) Η x είναι ανεξάρτητη μεταβλητή.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = (y^2+2xy)+(2xy+x^2)\left(\frac{1}{x}\right) = y^2+2xy+2y+x$$

β) Η y είναι ανεξάρτητη μεταβλητή

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{dy} = (y^2+2xy)x + (2xy+x^2) = xy^2+2x^2y+2xy+x^2$$

5) Το ύψος ενός ορθού κυκλικού κώνου είναι 15cm και αυξάνεται κατά 0,2cm/min. Η ακτίνα της βάσης είναι 10cm και μειώνεται κατά 0,3cm/min. Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται ο όγκος;

ΛΥΣΗ:

Έστω x = ακτίνα και y = ύψος του κώνου. Από την έκφραση του όγκου $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$, όπου τα x και y θεωρούνται συναρτήσεις του t, έχουμε

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left(2xy\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{3}\pi\Big[(2\cdot 10\cdot 15\cdot(-0{,}3) +$$

$$+ 10^2\cdot(0{,}2)\Big] = -70\pi/3 \text{ cm}^3/\text{min}$$

6) Υπολογίστε κατά προσέγγιση τη μεταβολή της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 6cm και 8cm, όταν η μικρότερη πλευρά μεγαλώσει $\frac{1}{4}$cm και η μεγαλύτερη πλευρά μικρύνει $\frac{1}{8}$cm.

ΛΥΣΗ:

Έστω x, y, z η μικρότερη πλευρά, η μεγαλύτερη πλευρά και η υποτείνουσα του τριγώνου αντίστοιχα.

Έχουμε:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy =$$

$$= \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Όταν $x=6$, $y=8$, $dx = \frac{1}{4}$ και $dy = -\frac{1}{8}$ τότε $dz = \frac{6\cdot(1/4)+8(-1/8)}{\sqrt{6^2+8^2}} =$

$= 1/20$cm. Συνεπώς η υποτείνουσα μεγαλώνει κατά $\frac{1}{20}$ cm περίπου.

7) Η ισχύς που καταναλώνει μια ηλεκτρική αντίσταση δίνεται από τον τύπο $P=E^2/R$ σε W. Αν $E=200V$ και $R=8\Omega$, πόσο μεταβάλλεται η ισχύς, αν η E μειωθεί κατά 5V και η R κατά $0{,}2\Omega$;

ΛΥΣΗ:

Είναι $\frac{\partial P}{\partial E}=\frac{2E}{R}$, $\frac{\partial P}{\partial R}=-\frac{E^2}{R^2}$, $dP=\frac{2E}{R}dE-\frac{E^2}{R^2}dR$

Όταν $E=200$, $R=8$, $dE=-5$ και $dR=-0{,}2$ τότε:

$$dP=\frac{2\cdot 200}{8}\cdot(-5)-\left(\frac{200}{8}\right)^2(-0{,}2)=-250+125=-125$$

Η ισχύς μειώνεται κατά 125W περίπου.

8) Βρείτε την dz/dt, αν $z=x^2+3xy+5y^2$ και $x=\sin t$ και $y=\cos t$

ΛΥΣΗ:

Έχουμε $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x+10y$, $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$

Επομένως $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(2x+3y)\cos t-(3x+10y)\sin t$

— ΑΛΥΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ —

1) Βρείτε το ολικό διαφορικό καθεμιάς από τις επόμενες συναρτήσεις

(α) $z=x^3y+2xy^3$ (ΑΠ: $dz=(3x^2+2y^2)y\,dx+(x^2+6y^2)x\,dy$)

(β) $\theta=\arctan y/x$ (ΑΠ: $d\theta=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$)

(γ) $z=e^{x^2-y^2}$ (ΑΠ: $dz=2z(x\,dx-y\,dy)$)

(δ) $z=x(x^2+y^2)^{-1/2}$ (ΑΠ: $dz=\frac{y(y\,dx-x\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$)

2) Η θεμελιώδης συχνότητα ταλάντωσης μιας χορδής κυκλικής διατομής κάτω από τάση T είναι $n=\frac{1}{2r\ell}\sqrt{\frac{T}{\pi d}}$, όπου ℓ το μήκος της χορδής r η ακτίνα της διατομής της και d η πυκνότητα του υλικού της χορδής. Βρείτε κατά προσέγγιση (α) το αποτέλεσμα της μεταβολής του ℓ κατά μικρό ποσό $d\ell$, (β) το αποτέλεσμα της μεταβολής της T κατά ένα μικρό ποσό dT και (γ) το αποτέλεσμα της σύγχρονης μεταβολής των ℓ και T.

(ΑΠ: α) $-\frac{n}{\ell}d\ell$, β) $\frac{n}{2T}dT$, γ) $n\left(-\frac{d\ell}{\ell}+\frac{dT}{2T}\right)$)

3) Βρείτε την du/dt στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $u = x^2y^3$, $x = 2t^3$, $y = 3t^2$ (ΑΠ: $6xy^2t(2yt+3t)$)

β) $u = x\cos y + y\sin x$, $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$

(ΑΠ: $2(\cos y + y\cos x)\cos 2t - 2(-x\sin y + \sin x)\sin 2t$

γ) $u = xy + yz + zx$, $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = e^t + e^{-t}$

(ΑΠ: $(x+2y+z)e^t - (2x+y+z)e^{-t}$)

4) Μια ορισμένη στιγμή η ακτίνα ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου είναι 6cm και αυξάνεται με ρυθμό 0,2cm/s, ενώ το ύψος του είναι 8cm και μειώνεται με ρυθμό 0,4cm/s. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής α) του όγκου και β) της ολικής επιφάνειας τη χρονική στιγμή αυτή.

(ΑΠ: α) $4{,}8\pi$ cm^3/s, β) $3{,}2\pi$ cm^2/s)

5) Ένα σωματίδιο κινείται σε ένα επίπεδο έτσι ώστε οι συντεταγμένες του να δίνονται από τις εξισώσεις $x = 2+3t$, $y = t^2+4$, όπου τα x και y είναι σε μέτρα και το t σε πρώτα λεπτά. Με τι ταχύτητα απομακρύνεται το σωματίδιο από την αρχή των αξόνων, όταν $t=1$;

(ΑΠ: $5/\sqrt{2}$ m/min)

$Z = \sqrt{x^2+y^2}$

— ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ —

Έστω $x = x(t)$, $y = y(t)$ τότε από τον τύπο του ολικού διαφορικού θα έχουμε:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}$$

Η παράσταση αυτή ονομάζεται ολική παράγωγος της z, ως προς x και y, που και αυτές εξαρτώνται από την t.

Γενικότερα αν $u = f(x, y, z, \ldots)$ τότε

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} + \cdots}$$

— ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ —

Οι μερικές παράγωγοι μας λύνουν το πρόβλημα της εύρεσης παραγώγου μιας πεπλεγμένης συνάρτησης.
Έστω αν $z = f(x,y) =$ σταθερά. Τότε τα διαφορικά της είναι μηδέν
Επομένως ο τύπος $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$

γίνεται $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$

Παραδείγματα

1. Αν $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Να βρείτε το dz αν $x = 15$, $y = 20$, $dx = \frac{5}{8}$, $dy = -\frac{5}{16}$.

Έχουμε:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Άρα $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\frac{5}{8}x - \frac{5}{16}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

και μετά την αντικατάσταση

$$dz = \frac{15 \cdot \frac{5}{8} + 20\left(-\frac{5}{16}\right)}{\sqrt{15^2+20^2}} = \frac{1}{8}$$

2. Αν $P = \frac{E^2}{R}$. Να βρείτε το dP.

Έχουμε: $\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{2E}{R}$, $\frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{E^2}{R^2}$

άρα $dP = \frac{2E}{R}dE - \frac{E^2}{R^2}dR$

3. Αν $z = 2x^3 - xy^3 + y^2 = 0$ βρείτε την $\frac{dy}{dx}$.

Έχουμε $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3xy^2 + 2y$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2-y^3}{3xy^2+2y}$$

4) Να βρείτε τον συντελεστή διευθύνσεως της εφαπτομένης της καμπύλης $z = x^2+xy+y^2+4=0$ στο σημείο $(2,-2)$

ΛΥΣΗ:

Έχουμε, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x+y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x+2y$

άρα $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{2x+y}{x+2y}$ συνεπώς

εφω $= \frac{dy}{dx}$ στο σημείο $(2,-2)$, $\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow$

εφω $= 1 \Longleftrightarrow ω = \frac{\pi}{4}$

5) Βρείτε το $\frac{dz}{dt}$ εάν $z = x^2+3xy+5y^2$ και $x = ημt$, $y = συνt$

Έχουμε $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x+3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x+10y$

$\frac{dx}{dt} = συνt$ $\quad \frac{dy}{dt} = -ημt$

Άρα $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = (2x+3y)συνt - (3x+10y)\cdot ημt$

6) Εάν $z = \ln(x^2+y^2)$, $x = e^{-t}$, $y = e^{t}$. Βρείτε το $\frac{dz}{dt}$.

Έχουμε $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$

$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}$ $\quad \frac{dy}{dt} = e^{t}$

Άρα $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2\cdot\frac{ye^{t}-xe^{-t}}{x^2+y^2}$