— ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ —

Αν $F(x)$ είναι μια συνάρτηση για την οποία σε ένα ορισμένο διάστημα του x είναι $F'(x) = f(x)$, τότε η $F(x)$ καλείται αόριστο ολοκλήρωμα (ή παράγουσα) της $f(x)$. Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας δεδομένης συνάρτησης δεν είναι μοναδικό. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις x^2, x^2+5, x^2-4 είναι αόριστα ολοκληρώματα της $f(x) = 2x$, αφού $\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(x^2+5) = \frac{d}{dx}(x^2-4) = 2x$.

Όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $f(x) = 2x$, έχουν τη μορφή $x^2 + C$, όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερή που καλείται σταθερή ολοκλήρωσης.

Για να δηλώσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ χρησιμοποιούμε το: $\boxed{\text{σύμβολο } \int f(x)dx.}$

Έτσι γράφουμε $\int 2x dx = x^2 + C$

— ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ —

I. $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$ / $\Delta \subseteq R$ και $c \in R$

II. $\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_\nu(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_\nu(x)dx$

$\Delta \subseteq R$

III. $[\int f(x)dx]' = [F(x)+c]' = f(x)$

IV. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

V. $\int dF(x) = F(x) + c$

— ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ —

① $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c \quad \forall \mu \in R - \{-1\}$

② $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

③ $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$

④ $\int \sigma\upsilon\nu x\,dx = \eta\mu x + c$

⑤ $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \epsilon\varphi x + c$

⑥ $\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} = -\sigma\varphi x + c$

⑦ $\int \sigma\varphi x\,dx = \ln|\eta\mu x| + c$

⑧ $\int \epsilon\varphi x\,dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$

⑨ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tau o\xi o\epsilon\varphi x + c$

⑩ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi o\eta\mu x + c$

⑪ $\int e^x dx = e^x + c$

⑫ $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$

⑬ $\int \frac{dx}{\alpha^2+x^2} = \frac{1}{\alpha}\tau o\xi o\epsilon\varphi\frac{x}{\alpha} + c$

⑭ $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \tau o\xi o\eta\mu\frac{x}{\alpha} + c$

— ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ —

① $d f(x) = f'(x)\,dx$

② $d(x \pm \alpha) = dx$ (όπου α σταθερά)

③ $dx = \alpha\, d\left(\frac{x}{\alpha}\right)$

④ $dx = \left(\frac{1}{\alpha}\right) d(\alpha x)$

— ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ —

$\boxed{1^{\text{ος}}}$ Ολοκλήρωμα αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων των προσθετέων.

π.χ. $\int(\alpha+\beta-\gamma)dx = \int\alpha\,dx + \int\beta\,dx - \int\gamma\,dx$

$\boxed{2^{\text{ος}}}$ Ο τύπος $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του m διάφορο της (-1). Καλείται και ολοκλήρωμα δυνάμεως. Θα έχουμε ολοκλήρωμα δυνάμεως όταν το διαφορικό είναι ή μπορεί να γίνει όμοιο με τη βάση της δυνάμεως.

π.χ. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + c$

$$\text{π.χ} \int (x+1)^2 dx = \int (x+1)^2 d(x+1) = \frac{(x+1)^3}{3} + c$$

$$\int (x-3)^{-4} dx = \int (x-3)^{-4} d(x-3) = \frac{(x-3)^{-3}}{3} + c$$

$$\int \text{ημ}^{\frac{3}{7}} x \, d\,\text{ημ}x = \frac{\text{ημ}^{\frac{3}{7}+1} x}{\frac{3}{7}+1} = \frac{\text{ημ}^{\frac{10}{7}} x}{\frac{10}{7}}$$

3ος Εάν το διαφορικό είναι ή μπορεί να γίνει όμοιο με τον παρονομαστή τότε το ολοκλήρωμα ισούται με το νεπέρειο λογάριθμο του παρονομαστή.

$$\text{π.χ} \int \frac{dx}{x} = \log x \qquad \int \frac{d\,\text{ημ}x}{\text{ημ}x} = \log \text{ημ}x$$

$$\int \frac{dx}{x+5} = \frac{d(x+5)}{x+5} = \log(x+5)$$

Επίσης εάν η παράγωγος του παρονομαστού είναι ίση με τον αριθμητή το ολοκλήρωμα ισούται με το λογάριθμο του παρονομαστού.

$$\text{π.χ} \int \frac{\text{συν}x \, dx}{\text{ημ}x} = \log(\text{ημ}x) \qquad \int \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x+5} = \log(x^2+3x+5)$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \log(x^2+4)$$

4ος Στα τριγωνομετρικά ολοκληρώματα για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε, πρέπει το διαφορικό να είναι όμοιο με το τόξο.

$$\text{π.χ} \int \text{ημ}(x+\alpha)\,dx = \int \text{ημ}(x+\alpha)\,d(x+\alpha) = -\text{συν}(x+\alpha)$$

$$\int \text{συν}4x\,dx = \frac{1}{4} \int \text{συν}4x\,d4x = \frac{1}{4}\text{ημ}4x$$

$$\int \text{ημ}\frac{3x}{5}\,dx = \frac{5}{3} \int \text{ημ}\frac{3x}{5}\,d\frac{3x}{5} = -\frac{5}{3}\text{συν}\frac{3x}{5}$$

Επίσης στα ολοκληρώματα τα οποία περιέχουν τον νεπέρειο λογάριθμο e, για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε, πρέπει το διαφορικό να είναι όμοιο με τον εκθέτη του e.

π.χ $\int e^x dx = e^x$

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d3x = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\int e^{-\frac{x}{2}}dx = -2\int e^{-\frac{x}{2}}d\left(-\frac{x}{2}\right) = -2e^{-\frac{x}{2}}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Στο διαφορικό μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε μια σταθερά, εαν όμως το διαφορικό πολλαπλασιαστεί επι μια σταθερά, τότε το ολοκλήρωμα πολλαπλασιάζεται επι τη σταθερά αυτή, εαν το διαφορικό διαιρεθεί με μια σταθερά, τότε το ολοκλήρωμα διαιρείται με την σταθερά αυτή.

π.χ $\int dx = \int d(x+c)$ $\quad \int dx = \int d(x-c)$

$$\int dx = \frac{1}{c}\int d(cx) \qquad \int dx = c\int d\left(\frac{x}{c}\right)$$

$\boxed{5^{ος}}$ Στο διαφορικό εισάγεται το ολοκλήρωμα μιας παράστασεως. Δηλαδή, στο διαφορικό είναι δυνατό να εισαχθεί οποιαδήποτε παράσταση, αρκεί προηγουμένως να ευρεθεί το ολοκλήρωμα αυτής. Τότε το διαφορικό γράφεται $d\left(\begin{smallmatrix}\text{ολοκλήρωμα}\\ \text{παραστάσεως}\end{smallmatrix}\right)$

π.χ αν έχουμε την παράσταση x^2dx και θέλουμε το x^2 να εισαχθεί στο διαφορικό, βρίσκουμε το ολοκλήρωμα

$\int x^2dx = \frac{x^3}{3}$ οπότε η παράσταση $x^2dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right)$

Το $\eta\mu x dx = -d(\sigma\upsilon\nu x)$ διότι $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x$

$\sigma\upsilon\nu x dx = d(\eta\mu x)$ διότι $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:</u>

1) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int (2x^2+3x+2)dx$

<u>Λύση:</u>

$$\int (2x^2+3x+2)dx = \int 2x^2dx + \int 3xdx + \int 2dx = 2\int x^2dx + 3\int xdx + 2\int dx =$$

$$= 2\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\frac{x^{1+1}}{1+1} + 2x + c = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + c$$

2) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\eta\mu x\right)dx$

ΛΥΣΗ:

$$\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\eta\mu x\right)dx=\int\sqrt[3]{x^2}dx+\int\eta\mu x dx=\int x^{2/3}dx+\int \eta\mu x dx=\frac{x^{2/3+1}}{\frac{2}{3}+1}-\sigma\upsilon\nu x+c=$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-\sigma\upsilon\nu x+c=\frac{3\cdot x^{\frac{5}{3}}}{5}-\sigma\upsilon\nu x+c=\frac{3\cdot x\cdot\sqrt[3]{x^2}}{5}-\sigma\upsilon\nu x+c$$

3) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int(x^2+1)\cdot\sqrt[3]{x}\,dx$

ΛΥΣΗ:

$$\int(x^2+1)\sqrt[3]{x}\,dx=\int(x^2+1)x^{1/3}dx=\int\left(x^{7/3}+x^{1/3}\right)dx=$$

$$=\int x^{7/3}dx+\int x^{1/3}dx=\frac{x^{7/3+1}}{7/3+1}+\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}+c=\frac{x^{10/3}}{\frac{10}{3}}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c=$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{x^{10}}}{10}+\frac{3\sqrt[3]{x}}{4}+c=\frac{3\cdot x^3\sqrt[3]{x}}{10}+\frac{3\cdot x\sqrt[3]{x}}{4}+c$$

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$

ΛΥΣΗ:

$$\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx=\int\left(e^x-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int e^x dx-\int\frac{dx}{x^2}=e^x-\int x^{-2}dx=$$

$$=e^x-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c=e^x+\frac{1}{x}+c$$

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^2x}dx$

ΛΥΣΗ:

$$\int\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2x\,\eta\mu^2x}dx=\int\frac{\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^2x}dx=\int\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x\,\eta\mu^2x}-\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x\,\eta\mu^2x}\right)dx=$$

$$=\int\frac{1}{\eta\mu^2x}dx-\int\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}dx=-\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x+c$$

6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\sigma\varphi^2x\,dx$

ΛΥΣΗ:

$$\int\sigma\varphi^2x\,dx=\int\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu^2x}dx=\int\frac{1-\eta\mu^2x}{\eta\mu^2x}dx=\int\frac{dx}{\eta\mu^2x}-\int\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu^2x}dx=$$

$$=-\sigma\varphi x-\int dx=-\sigma\varphi x-x+c$$

— ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

• <u>Με αντικατάσταση</u>

Η μέθοδος αυτή είναι μια απλή αλλαγή μεταβλητής. Γενικώς ισχύουν τα εξής:

– Κάθε ολοκλήρωμα του οποίου ο παρονομαστής είναι άθροισμα δύο τετραγώνων, ολοκληρώνεται (λύνεται) με αντικατάσταση. Επίσης εφαρμόζεται η μέθοδος αυτή, όταν μετά την αλλαγή της μεταβλητής εξαλείφεται η παλιά μεταβλητή και το ολοκλήρωμα γίνεται απλούστερο. Εάν δεν εξαλείφεται, μπορούμε να λάβουμε τη παλαιά μεταβλητή συναρτήσει της νέας, χωρίς την εισαγωγή ριζικού.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι ρητή (δηλαδή είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων π.χ $\frac{x^2}{x^2+4x+5}$) και το πολυώνυμο του αριθμητού είναι βαθμού ίσου ή μεγαλύτερου από το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστού, πριν εφαρμόσουμε οποιαδήποτε μέθοδο ολοκληρώσεως, διαιρούμε τον αριθμητή δια τον παρονομαστή.

π.χ

1) $\int \frac{dx}{x^2+k^2}$ θέτω $x=\sqrt{k^2t^2}$

$x = kt$

Διαφορίζω $dx = kdt$. Αντικαθιστώ και έχω:

$$\int \frac{kdt}{k^2t^2+k^2} = \int \frac{kdt}{k^2(t^2+1)} = \frac{1}{k}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{k}\,\text{τοξεφ}\,t = \frac{1}{k}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{x}{k}\right)$$

(Σε κάθε αλλαγή μεταβλητής βρίσκουμε το παλαιό διαφορικό συναρτήσει του νέου)

2) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$ θέτω $x^2+1=t^3$, $2xdx=3t^2dt$, $dx=\frac{3t^2dt}{2x}$

Αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα και έχω:

$$\int \frac{x\,\frac{3t^2dt}{2x}}{\sqrt[3]{t^6}} = \frac{3}{2}\int \frac{t^2dt}{t^2} = \frac{3}{2}\int dt = \frac{3}{2}t = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2+1}$$

3) $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$ θέτω $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, διαφορίζω $dx=2t\,dt$ αντικαθιστώ και έχω

$$\int \frac{x\,2t\,dt}{1+t} = \int \frac{t^2\,2t\,dt}{t+1} = 2\int \frac{t^3\,dt}{t+1} =$$ διαιρώ τον αριθμητή δια του παρονομαστή και έχω:

$$= 2\int \left(t^2-t+1+\frac{-1}{t+1}\right)dt = 2\int t^2dt - 2\int t\,dt + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \frac{2t^3}{3} - \frac{2t^2}{2} + 2t - 2\log(t+1) = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - 2\frac{(\sqrt{x})^2}{2} + 2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x}+1)$$

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ θέτω $\sqrt{x^2-1}=t$ και $x^2-1=t^2$ διαφορίζω

$2x\,dx = 2t\,dt$ ή $dx=\frac{t\,dt}{x}$ αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\frac{t\,dt}{x}}{x\,t} = \int \frac{dt}{x^2} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \text{τόξο εφ}\,t = \text{τοξο εφ}\sqrt{x^2-1}$$

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int [f(x)]^{\mu} \cdot f'(x)\,dx$

Θέτουμε $f(x)=t \Leftrightarrow f'(x)dx=dt = dx=\frac{dt}{f'(x)}$ Άρα

$$\int [f(x)]^{\mu}\cdot f'(x)\,dx = \int t^{\mu} f'(x)\frac{dt}{f'(x)} = \int t^{\mu}dt = \frac{t^{\mu+1}}{\mu+1}+c =$$

$$= \frac{[f(x)]^{\mu+1}}{\mu+1}+c$$

6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx$

Θέταμε $f(x)=t \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{f'(x)}$ Άρα

$$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = \int e^{t}\cdot f'(x)\frac{dt}{f'(x)} = \int e^{t}dt = e^{t}+c = e^{f(x)}+c$$

7) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \sigma\upsilon\nu(f(x))f'(x)dx$

Θέτουμε: $f(x)=t \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{f'(x)}$ Άρα

$$\int \sigma\upsilon\nu(f(x))f'(x)dx=\int \sigma\upsilon\nu\, t\, f'(x)\cdot\frac{dt}{f'(x)}=\int \sigma\upsilon\nu\, t\, dt=\eta\mu t+c=\eta\mu(f(x))+c$$

8) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int (x^3+2)^4\cdot 3x^2dx$

Θέτουμε: $x^3+2=t \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{3x^2}$ Άρα

$$\int (x^3+2)^4\cdot 3x^2dx=\int t^4\, 3x^2\frac{dt}{3x^2}=\int t^4dt=\frac{t^{4+1}}{4+1}+c=\frac{(x^3+2)^5}{5}+c$$

9) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \sqrt{x^4+1}\cdot x^3dx$

Θέτουμε $x^4+1=t \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{4x^3}$

$$\int \sqrt{x^4+1}\, x^3dx=\int \sqrt{t}\, x^3\frac{dt}{4x^3}=\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{4}\cdot\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+c=\frac{\sqrt{t^3}}{6}+c=\frac{\sqrt{t^2\cdot t}}{6}+c=$$

$$=\frac{t\sqrt{t}}{6}+c=\frac{(x^4+1)\cdot\sqrt{x^4+1}}{6}+c$$

— ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ —

Έστω $u=u(x)$ και $v=v(x)$ δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Διαφορίζουμε το γινόμενο $u\cdot v$ και έχουμε:

$$d(u\cdot v)=udv+vdu \Leftrightarrow udv=d(u\cdot v)-vdu$$

Ολοκληρώνουμε και έχουμε: $\int udv=\int d(u\cdot v)-\int vdu \Leftrightarrow$

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu \longrightarrow$$ Τύπος παραγοντικής ολοκλήρωσης

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την κατά παράγοντα ολοκλήρωση πρέπει στο ολοκλήρωμα να υπάρχουν δύο όροι: ο ένας ο εκτός του διαφορικού και ο άλλος το διαφορικό. Επομένως εάν υπάρχουν τρείς ο ένας εισάγεται εντός του διαφορικού, εάν υπάρχουν περισσότεροι τότε πρέπει να συνδέονται με την μεταξύ τους σχέση.

Στο διαφορικό εισάγεται το ολοκλήρωμα της παραστάσεως, δηλαδή στο διαφορικό είναι δυνατόν να εισαχθεί οποιαδήποτε παράσταση, αρκεί προηγουμένως να ολοκληρωθεί, τότε το διαφορικό γίνεται:

$d\begin{pmatrix}\text{ολοκλήρωμα}\\ \text{παραστάσεως}\end{pmatrix}$ π.χ $x^2dx = d\dfrac{x^3}{3}$ διότι $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3}$

— ΤΥΠΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ —

● $\int \alpha d\beta = \alpha\beta - \int \beta\, d\alpha$ όπου α και β διαφορίσιμοι συναρτήσεις του x.

1) $\int f(x)\overline{\eta\mu\lambda x}^{\alpha}dx$, $\int f(x)\overline{\sigma\upsilon\nu\lambda x}^{\beta}dx$, $\int f(x)\overline{\tau o\xi\eta\mu\lambda x}^{\gamma}dx$

$\int f(x)\cdot\overline{\tau o\xi\varepsilon\varphi\lambda x}^{\delta}dx$

2) $\int \overline{e^{\kappa x}}^{\varepsilon}\sigma\upsilon\nu\lambda x\,dx$, $\int \overline{e^{\kappa x}}^{\zeta}\eta\mu\lambda x\,dx$

3) $\int f(x)\overline{e^{\kappa x}}^{\eta}dx$, $\int f(x)\overline{\log\varphi(x)}^{\theta}dx$

Όλα τα ολοκληρώματα των δυο πρώτων περιπτώσεων ολοκληρώνονται κατά παράγοντες.

● Τα ολοκληρώματα της τρίτης περιπτώσεως ολοκληρώνονται ή με αντικατάσταση ή κατά παράγοντες. Για να εξετάσουμε αν ολοκληρώνονται με αντικατάσταση θέτουμε με το (η) $e^{\kappa x}=t$, με το (θ) $\log\varphi(x)=t$.

Στα ολοκληρώματα (α) και (β) στο διαφορικό εισάγεται ή το $\eta\mu\lambda x$ ή το $\sigma\upsilon\nu\lambda x$. Εις τα (γ) και (δ) εισάγεται η $f(x)$, στα (ε), (ζ) και (η) το $e^{\kappa x}$, στο (θ) η $f(x)$.

π.χ 1) $\int x\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int x\,d\eta\mu x = x\eta\mu x - \int \eta\mu x\,dx = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

2) $\int x^2\eta\mu x\,dx = -\int x^2 d\sigma\upsilon\nu x = -x^2\sigma\upsilon\nu x + \int \sigma\upsilon\nu x\, dx^2 = -x^2\sigma\upsilon\nu x + \int 2x\sigma\upsilon\nu x\,dx =$

$= -x^2\sigma\upsilon\nu x + 2\int x\,d\eta\mu x = -x^2\sigma\upsilon\nu x + 2\left(x\eta\mu x - \int \eta\mu x\,dx\right) = -x^2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x$

3) $\int e^x ημ2x\,dx = \int ημ2x\,de^x = e^x ημ2x - \int e^x\,dημ2x = e^x ημ2x - \int e^x 2συν2x\,dx =$

$= e^x ημ2x - 2\int e^x συν2x\,dx = e^x ημ2x - 2\int συν2x\,de^x = e^x ημ2x - 2(συν2x\,e^x -$

$- \int e^x\,dσυν2x) = e^x ημ2x - 2e^x συν2x - 2\int e^x 2ημ2x\,dx$ δηλαδή το αρχικό ολοκλήρωμα.

$\int e^x ημ2x\,dx = e^x ημ2x - 2e^x συν2x - 4\int e^x ημ2x\,dx$ ή

$\int e^x ημ2x\,dx + 4\int e^x ημ2x\,dx = e^x(ημ2x - 2συν2x)$ ή

$5\int e^x ημ2x\,dx = e^x(ημ2x - 2συν2x)$ και $\int e^x ημ2x\,dx = \frac{1}{5}e^x(ημ2x - 2συν2x)$

— ΑΣΚΗΣΕΙΣ —

1) $\int x^2 συνx\,dx$

$\int x^2 συνx\,dx = \int x^2\,dημx = x^2ημx - \int ημx\,dx^2 = x^2ημx - \int ημx\,2x\,dx = x^2ημx - 2\int x\,d(-συνx) =$

$= x^2ημx + 2\int x\,dσυνx = x^2ημx - 2(xσυνx - \int συνx\,dx) = x^2ημx - 2(xσυνx - ημx) =$

$= x^2ημx - 2xσυνx + 2ημx$

2) $\int xημ3x\,dx$

$\int xημ3x\,dx = \frac{1}{3}\int xημ3x\,d(3x) = -\frac{1}{3}\int x\,dσυν3x = -\frac{1}{3}(xσυν3x - \int συν3x\,dx) =$

$= -\frac{1}{3}xσυν3x + \frac{1}{3}\int συν3x\,dx = -\frac{1}{3}xσυν3x + \frac{1}{9}\int συν3x\,d(3x) = -\frac{1}{3}xσυν3x + \frac{1}{9}ημ3x$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int xe^x dx$

Θέτουμε $u = x$, $e^x = υ$ και επειδή $e^x dx = de^x$ έχουμε:

$\int xe^x dx = \int x\,de^x = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + c$

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x^2 e^x dx$

Θέτουμε $u = x^2$, $e^x = υ$ και επειδή $e^x dx = de^x$ έχουμε:

$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2e^x - \int e^x dx^2 = x^2e^x - \int e^x 2x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2\int x\,de^x =$

$x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int(3x^2+1)e^x dx$
Θέτουμε $3x^2+1=u$ $e^x=v$ και επειδή $e^x dx=de^x$
Έχουμε: $\int(3x^2+1)e^x dx=\int(3x^2+1)de^x=(3x^2+1)e^x-\int e^x d(3x^2+1)=$

$=(3x^2+1)e^x-\int e^x 6x dx=(3x^2+1)e^x-6\int x de^x=(3x^2+1)e^x-6(xe^x-\int e^x dx)=$

$=3x^2e^x+e^x-6xe^x+6e^x=3x^2e^x-6xe^x+7e^x+c$

6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x^3e^{2x}dx$

$\int x^3e^{2x}dx=\int x^3\frac{1}{2}de^{2x}=\frac{1}{2}\int x^3de^{2x}=\frac{1}{2}x^3\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx^3=$

$=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 3x^2dx=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{2}\int x^2e^{2x}dx=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{2}de^{2x}=$

$=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}\int x^2de^{2x}=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}(x^2e^{2x}-\int e^{2x}dx^2)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}\int e^{2x}\cdot 2xdx=$

$=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}\int 2x\frac{1}{2}de^{2x}=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}\int xde^{2x}=$

$=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}(x\cdot e^{2x}-\int e^{2x}dx)=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}-\frac{3}{4}\int e^{2x}\cdot\frac{1}{2}de^{2x}=$

$=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2\cdot e^{2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}-\frac{3}{8}e^{2x}+c$

7) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x^2 ημx dx$
Γνωρίζουμε ότι: $dσυνx=-ημx dx$. Άρα

$\int x^2ημx dx=-\int x^2dσυνx=-(x^2συνx-\int συνx dx^2)=-x^2συνx+\int συνx\cdot 2xdx=$

$-x^2συνx+2\int xσυνx dx=-x^2συνx+2\int x dημx=-x^2συνx+2(xημx-\int ημx dx)=$

$=-x^2συνx+2xημx-2(-συνx)+c=-x^2συνx+2xημx+2συνx+c$

8) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int xσυνx dx$
Γνωρίζουμε ότι: $dημx=συνx dx$. Άρα
$\int xσυνx dx=\int x dημx=xημx-\int ημx dx=xημx-(-συνx)+c=xημx+συνx+c$

9) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int x^2 \ln x\,dx$

Γνωρίζουμε ότι $d\ln x = \frac{dx}{x}$ και $x^2 dx = \frac{dx^3}{3}$

Άρα $\int x^2 \ln x\,dx = \int \ln x\, x^2 dx = \int \ln x \cdot \frac{dx^3}{3} = \frac{1}{3}\int \ln x\, dx^3 = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^3 d\ln x\right) =$

$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + c$

10) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int e^x ημ2x\,dx$

$\int e^x ημ2x\,dx = \int ημ2x\, de^x = e^x ημ2x - \int e^x dημ2x = e^x ημ2x - \int e^x συν2x\, d2x =$

$= e^x ημ2x - 2\int συν2x\, e^x dx = e^x ημ2x - 2\int συν2x\, de^x = e^x ημ2x - 2\left(e^x συν2x - \int e^x dσυν2x\right) =$

$= e^x ημ2x - 2e^x συν2x + 2\int e^x(-ημ2x)\,d2x = e^x ημ2x - 2e^x συν2x - 4\int e^x ημ2x\,dx$

Άρα $\int e^x ημ2x\,dx = e^x ημ2x - 2e^x συν2x - 4\int e^x ημ2x\,dx \Longleftrightarrow$

$5\int e^x ημ2x\,dx = -e^x ημ2x - 2e^x συν2x \Longleftrightarrow \int e^x ημ2x\,dx = \frac{e^x ημ2x - 2e^x συν2x}{5} + c$

11) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int e^x συν2x\,dx$

$\int e^x συν2x\,dx = \int συν2x\, de^x = e^x συν2x - \int e^x dσυν2x = e^x συν2x - \int e^x(-ημ2x)\,d2x =$

$e^x συν2x + 2\int ημ2x\, e^x dx = e^x συν2x + 2\int ημ2x\, de^x = e^x συνx + 2\left(e^x ημ2x - \int e^x dημ2x\right) =$

$e^x συν2x + 2e^x ημ2x - 2\int e^x συν2x\, d2x = e^x συν2x + 2e^x ημ2x - 4\int συν2x \cdot e^x dx$

Άρα $\int e^x συν2x\,dx = e^x συν2x + 2e^x ημ2x - 4\int e^x συν2x\,dx \Longleftrightarrow$

$5\int e^x συν2x\,dx = e^x συν2x + 2e^x ημ2x \Longleftrightarrow \int e^x συνx\,dx = \frac{e^x συν2x + 2e^x ημ2x}{5} +$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η μέθοδος αυτή ολοκληρώσεως βασίζεται στη μέθοδο της άλγεβρας αναλύσεως ενός κλάσματος σε άθροισμα ισοδύναμων κλασμάτων. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- α) Αν οι ρίζες του παρονομαστού είναι πραγματικές και απλές.
- β) Αν είναι πραγματικές πολλαπλές.
- γ) Αν είναι μιγαδικοί

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ αναλύσεως ενός κλάσματος σε άθροισμα ισοδύναμων κλασμάτων

(1) $\dfrac{x}{x^2-7x+10} = \dfrac{x}{(x-5)\cdot(x-2)} = \dfrac{A}{x-5} + \dfrac{B}{x-2}$. Βρίσκω τα Α και Β

$x = A(x-2)+B(x-5) = (A+B)x-2A-5B$. Εξισώνω τους συντελεστές των αυτών δυνάμεων του x και έχω το σύστημα.

$A+B=1$ και $-2A-5B=0$. Λύνω και βρίσκω $A=\frac{5}{3}$, $B=-\frac{2}{3}$.

Αντικαθιστώ και έχω την ανάλυση του κλάσματος.

$$\frac{x}{x^2-7x+10} = \frac{5/3}{x-5} + \frac{-2/3}{x-2} = \frac{5}{3(x-5)} - \frac{2}{3(x-2)}$$

---

(2) $\dfrac{1}{x^3(x+1)} = \dfrac{A}{x^3} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{\Gamma}{x} + \dfrac{\Delta}{x+1}$. Βρίσκω τα A, B, Γ, Δ ως ανωτέρω:

$$\frac{x+3}{x^2(x+1)^3} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{\Gamma}{(x+3)^3} + \frac{\Delta}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1}$$

---

(3) $$\frac{x^2+3x+4}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$$

---

(4) $$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma x+\Delta}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+Z}{x^2+1}$$

Γενικώς ζητούμε στον αριθμητή ένα πολυώνυμο πλήρες κατά ένα βαθμό μικρότερο του παρονομαστού.
Στη τρίτη περίπτωση αν ο παρονομαστής είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού με ρίζες φανταστικές ή γενικώς μιγαδικές, ο δε αριθμητής σταθερής ποσότητος, τότε τρέπουμε τον παρονομαστή σε άθροισμα δυο τετραγώνων δια του τύπου.

$$\alpha = \left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2\right]$$

οπότε το ολοκλήρωμα λύνεται δια αντικαταστάσεως

<u>Π.χ</u> : $\int \frac{5dx}{2x^2+x+5}$. Τρέπω τον παρονομαστή σε άθροισμα τετραγώνων με τον ανωτέρω τύπο και το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$5\int \frac{dx}{2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\right]} = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{16}}$$. Θέτω $x+\frac{1}{4}=\sqrt{\frac{39}{16}}\,t$

ή $x+\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{39}}{4}t$, $dx=\frac{\sqrt{39}}{4}dt$. Αντικαθιστώ :

$$\frac{5}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{39}}{4}dt}{\frac{39}{16}t^2+\frac{39}{16}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{39}}{4}}{\frac{39}{16}}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{10\sqrt{39}}{39}\,\text{τοξ.εφ}t =$$

$$= \boxed{\frac{10\sqrt{39}}{39}\,\text{τοξ.εφ}\frac{4x+1}{\sqrt{39}}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογιστούν τα κάτωθι ολοκληρώματα :

(1) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

ΛΥΣΗ

$$\int\frac{dx}{x^2-1} = \int\frac{dx}{(x+1)(x-1)} = \int\frac{A\,dx}{x+1}+\int\frac{B\,dx}{x-1}$$. υπολογίζω τα A και B

$$\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$ ή $1=Ax-A+Bx+B$ ή $1=(A+B)x-A+B$

Εξισώνω τους συντελεστές των αυτών δυνάμεων του x και έχω το σύστημα $A+B=0$ και $-A+B=1$ λύνω και βρίσκω $A=-\frac{1}{2}$ $B=\frac{1}{2}$ αντικαθιστώ τις τιμές αυτών και έχω:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\cdot(x-1)} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2}\log(x+1)+\frac{1}{2}\log(x-1) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

---

(2) $\displaystyle\int\frac{x^2-6x+8}{x^2+6x+8}\,dx$

ΛΥΣΗ

$\displaystyle\int\frac{x^2-6x+8}{x^2+6x+8}\,dx$. Επειδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι του ίδιου βαθμού διαιρώ τον αριθμητή δια του παρονομαστού και το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int\frac{x^2-6x+8}{x^2+6x+8}dx = \int\left(1+\frac{(-12x)}{x^2+6x+8}\right)dx = \int dx-12\int\frac{x\,dx}{x^2+6x+8} =$$

$$= x-12\int\frac{x\,dx}{(x+4)\cdot(x+2)} = x-12\left[\int\frac{A\,dx}{x+4}+\int\frac{B\,dx}{x+2}\right].$$ Υπολογίζω τα A και B:

$$\frac{x}{(x+4)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+2}$$ ή $x=Ax+2A+Bx+4B$ ή

$x=(A+B)x+2A+4B$ άρα $A+B=1$, $2A+4B=0$. Λύνω το σύστημα και βρίσκω $A=2$, $B=-1$. Αντικαθιστώ και έχω ότι:

$$x-12\int\frac{x\,dx}{(x+4)\cdot(x+2)} = x-12\left[2\int\frac{dx}{x+4}-\int\frac{dx}{x+2}\right] = x-12\left(2\log(x+4)-\log(x+2)\right) =$$

$$= x-24\log(x+4)+12\log(x+2) = \boxed{x+\log\frac{(x+2)^{12}}{(x+4)^{24}}}$$

---

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x+1)}$

ΛΥΣΗ

$\int \frac{dx}{x^2(x+1)} = \int \frac{A\,dx}{x^2} + \int \frac{B\,dx}{x} + \int \frac{\Gamma\,dx}{x+1}$. Υπολογίζω τα A, B και Γ:

$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{\Gamma}{x+1}$ ή $1 = A(x+1) + Bx(x+1) + \Gamma x^2$

ή $1 = Ax + A + Bx^2 + Bx + \Gamma x^2 = (B+\Gamma)x^2 + (A+B)x + A$. Εξισώνω τους συντελεστές και έχω το σύστημα $B+\Gamma=0$, $A+B=0$, $A=1$. Λύνω και βρίσκω $A=1$, $B=-1$, $\Gamma=1$. Αντικαθιστώ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} = \int x^{-2}dx - \log x + \log(x+1) =$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \boxed{-\frac{1}{x} + \log\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

---

4) $\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$

ΛΥΣΗ

$\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2} = \int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+2)} = \int \frac{A\,dx}{(x-1)^2} + \int \frac{B\,dx}{x-1} + \int \frac{\Gamma\,dx}{x+2}$. Υπολογίζω τα A, B, Γ: $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x+2}$

ή $x = A(x+2) + B(x-1)(x+2) + \Gamma(x-1)^2$ ή $x = Ax + 2A + Bx^2 + Bx - 2B + \Gamma x^2 - 2\Gamma x + \Gamma = (B+\Gamma)x^2 + (A+B-2\Gamma)x + 2A - 2B + \Gamma$ άρα έχω το σύστημα $B+\Gamma=0$, $A+B-2\Gamma=1$, $2A-2B+\Gamma=0$. Λύνω και βρίσκω $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{2}{9}$, $\Gamma=-\frac{2}{9}$. Αντικαθιστώ και έχω:

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}\int (x-1)^{-2}dx + \frac{2}{9}\log(x-1) -$$

$$-\frac{2}{9}\log(x+2) = \boxed{\frac{1}{3}\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{2}{9}\log\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

ΛΥΣΗ

$\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int \frac{A\,dx}{x} + \int \frac{B\,dx}{(x+1)^2} + \int \frac{\Gamma\,dx}{x+1}$. Υπολογίζω τα A, B και Γ :

$\displaystyle\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{\Gamma}{x+1}$ ή $1 = A\cdot(x+1)^2 + Bx + \Gamma x(x+1)$ ή

$1 = Ax^2 + 2Ax + A + Bx + \Gamma x^2 + \Gamma x = (A+\Gamma)x^2 + (2A+B+\Gamma)x + A$

Εξισώνω τους συντελεστάς και έχω το σύστημα $A+\Gamma=0$, $2A+B+\Gamma=0$, $A=1$. Λύνω και βρίσκω $A=1$, $B=-1$, $\Gamma=-1$. Αντικαθιστώ και έχω

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} = \log x - \int (x+1)^{-2}dx - \log(x+1) =$$

$$= \log\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \boxed{\log\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}}$$

---

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+5}$

ΛΥΣΗ

Επειδή ο παρονομαστής έχει ρίζας μιγαδικάς ο δε αριθμητής είναι σταθερής ποσότητος τρέπω τον παρονομαστή σε άθροισμα τετραγώνων και έχω $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}}$. Επειδή ο παρονομαστής είναι άθροισμα τετραγώνων λύνομε δι' αντικαταστάσεως. Θέτω $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{19}{4}}\,t = \frac{\sqrt{19}}{2}t$

Διαφορίζω $dx = \frac{\sqrt{19}}{2}dt$. Αντικαθιστώ και έχω :

$$\int \frac{\frac{\sqrt{19}}{2}dt}{\frac{19t^2}{4} + \frac{19}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{19}}{2}}{\frac{19}{4}} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{19}}{19}\,\text{τοξεφ}\,t = \boxed{\frac{2\sqrt{19}}{19}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)}$$

---

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+3x+5}$

ΛΥΣΗ

$$\int \frac{dx}{2x^2+3x+5} = \int \frac{dx}{2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right]} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}$$ Θέτω $x+\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{31}}{4}t$

Διαφορίζω $dx = \frac{\sqrt{31}}{4}dt$. Αντικαθιστώ και έχω: $\frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{31}}{4}dt}{\frac{31}{16}t^2+\frac{31}{16}} =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\sqrt{31}}{4}}{\frac{31}{16}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{31}}{31}\,\text{τοξεφ}\,t = \boxed{\frac{2\sqrt{31}}{31}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{31}}\right)}$$

---

(8) $\int \frac{x\,dx}{x^2+x+5}$

ΛΥΣΗ

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+5} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+5} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+5) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}\log(x^2+x+5) - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{19}}{2}dt}{\frac{19}{4}t^2+\frac{19}{4}}}$$

---

(9) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

ΛΥΣΗ

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{A\,dx}{x} + \int \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}dx.$$ Υπολογίζω τα A, B και Γ.

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$$ ή $1 = Ax^2+A+Bx^2+\Gamma x$ ή $1 = (A+B)x^2+\Gamma x+A$

Εξισώνω τους συντελεστές και έχω το σύστημα $A+B=0$, $\Gamma=0$, $A=1$

Λύνω και βρίσκω $A=1$, $B=-1$, $\Gamma=0$ Αντικαθιστώ τις τιμές στο ολοκλήρωμα και έχω: $\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \boxed{\log x - \text{τοξεφ}\,x.}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

<u>Πρώτη μορφή</u>: Ολοκληρώματα των οποίων ο παρονομαστής είναι άθροισμα τριγωνομετρικών αριθμών. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) <u>Εάν όλοι</u> οι τριγωνομετρικοί όροι οι οποίοι υπάρχουν εις το ολοκλήρωμα είναι άρτιου βαθμού, τότε θέτουμε <u>$εφx=ω$</u> και έχουμε $\boxed{dx=\frac{dω}{1+ω^2}}$

$$\underline{συνx}=\frac{1}{\sqrt{1+εφ^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+ω^2}},\quad \underline{ημx}=\frac{εφx}{\sqrt{1+εφ^2x}}=\frac{ω}{\sqrt{1+ω^2}}$$

β) Εάν <u>ένας μόνον</u> τριγωνομετρικός όρος από αυτούς που υπάρχουν εις το ολοκλήρωμα είναι περιττού βαθμού τότε θέτουμε <u>$εφ\frac{x}{2}=ω$</u> και έχουμε $\boxed{dx=\frac{2dω}{1+ω^2}}$, $\underline{συνx}=\frac{1-εφ^2\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}=\frac{1-ω^2}{1+ω}$

$$\underline{ημx}=\frac{2εφ\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}=\frac{2ω}{1+ω^2}$$

<u>Σημείωση</u>: Σε τις δυο περιπτώσεις μετά την αλλαγή της μεταβλητής μεταβαίνουμε στα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

«ΑΣΚΗΣΕΙΣ»

1. $\int\frac{dx}{ημx}$

Θέτω $εφ\frac{x}{2}=ω$, $dx=\frac{2dω}{1+ω^2}$, $ημx=\frac{2ω}{1+ω^2}$

$$\int\frac{\frac{2dω}{1+ω^2}}{\frac{2ω}{1+ω^2}}=\int\frac{dω}{ω}=\log ω=\boxed{\log εφ\frac{x}{2}}$$

② $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x}$

Θέτω $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = \omega$, $dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$ Αντικαθιστώ και έχω

$$\int \frac{\frac{2d\omega}{1+\omega^2}}{\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} = -2\int\frac{d\omega}{\omega^2-1} = -2\int\frac{d\omega}{(\omega+1)(\omega-1)} = -2\int\frac{Ad\omega}{\omega+1} - 2\int\frac{Bd\omega}{\omega-1}$$

Υπολογίζω τα A και B $\frac{1}{(\omega+1)\cdot(\omega-1)} = \frac{A}{\omega+1} + \frac{B}{\omega-1}$ ή $1 = A\omega - A + B\omega + B$

ή $1 = (A+B)\omega - A + B$ Εξισώνω τους συντελεστές και έχω το σύστημα

$A+B=0$, $-A+B=1$ Λύνω και βρίσκω $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ Αντικαθιστώ τις τιμές των A και B και έχω $\int\frac{d\omega}{\omega+1} - \int\frac{d\omega}{\omega-1} = \log(\omega+1) - \log(\omega-1) =$

$$= \log\left(\frac{\omega+1}{\omega-1}\right) = \boxed{\log\left(\frac{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}+1}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}-1}\right)}$$

---

③ $\int\frac{dx}{5+4\sigma\upsilon\nu x}$

Θέτω $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = \omega$, $dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$ Αντικαθιστώ και έχω

$\int\frac{\frac{2d\omega}{1+\omega^2}}{5+4\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} = 2\int\frac{d\omega}{\omega^2+9}$ Θέτω $\omega = 3\varphi$, $d\omega = 3d\varphi$ Αντικαθιστώ και έχω

$$2\int\frac{3d\varphi}{9\varphi^2+9} = \frac{3}{2}\int\frac{d\varphi}{\varphi^2+1} = \frac{2}{3}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{2}{3}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right) = \boxed{\frac{2}{3}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{3}\right)}$$

---

④ $\int\frac{dx}{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$ Θέτω $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = \omega$, $dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$, $\eta\mu x = \frac{2\omega}{1+\omega^2}$

Αντικαθιστώ και έχω: $\int\frac{\frac{2d\omega}{1+\omega^2}}{1+\frac{2\omega}{1+\omega^2}+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} = \int\frac{2d\omega}{2\omega+2} = \int\frac{d\omega}{\omega+1} = \log(\omega+1) =$

$$= \boxed{\log\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}+1\right)}$$

⑤ $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x+3}$

ΛΥΣΗ

$$\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x+3} = \int \frac{\frac{2d\omega}{1+\omega^2}}{\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}+2\frac{2\omega}{1+\omega^2}+3} = \int \frac{2d\omega}{2\omega^2+4\omega+4} = \int \frac{d\omega}{\omega^2+2\omega+2} =$$

$= \int \frac{d\omega}{(\omega+1)^2+1}$ Θέτω $\omega+1=\varphi$, $d\omega=d\varphi$ Αντικαθιστώ και έχω: $\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+1} = \tau o\xi\varepsilon\varphi\,\varphi =$

$= \tau o\xi\varepsilon\varphi(\omega+1) = \boxed{\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}+1\right)}$

---

⑥ $\int \frac{dx}{3\sigma\upsilon\nu^2 x+2\eta\mu^2 x}$

ΛΥΣΗ

Θέτω $\varepsilon\varphi x=\omega$, $dx=\frac{d\omega}{1+\omega^2}$, $\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{1+\omega^2}$, $\eta\mu^2 x=\frac{\omega^2}{1+\omega^2}$ Αντικαθιστώ και έχω

$$\int \frac{\frac{d\omega}{1+\omega^2}}{3\frac{1}{1+\omega^2}+2\frac{\omega^2}{1+\omega^2}} = \int \frac{d\omega}{3+2\omega^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\omega}{\omega^2+\frac{3}{2}}$$ Θέτω $\omega=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varphi$, $d\omega=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}d\varphi$

Αντικαθιστώ και έχω $\frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}d\varphi}{\frac{3}{2}\varphi^2+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}}\int\frac{d\varphi}{\varphi^2+1} = \frac{\sqrt{6}}{6}\tau o\xi\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\omega}{\sqrt{3}}\right) =$

$= \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\varepsilon\varphi x}{\sqrt{3}}\right)}$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ

1) $\int f(x)\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\,dx$

2) $\int \frac{f(x)\cdot dx}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}$

3) $\int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}$

4) $\int f(x)\cdot\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}\,dx$

5) $\int \frac{f(x)\cdot dx}{\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}}$

6) $\int \frac{dx}{f(x)\cdot\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}}$

7) $\int f(x)\cdot\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}\,dx$

8) $\int \frac{f(x)\cdot dx}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$

9) $\int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$

Σε κάθε ολοκλήρωμα το οποίο περιέχει ριζικό, καταρχήν θέτουμε όπου ρίζα ίσο με t. Η αλλαγή αυτή θα ισχύει εάν εξαλείφεται η παλαιά μεταβλητή και το ολοκλήρωμα γίνεται απλούστερο ή εάν δεν εξαλείφεται, αλλά να είναι δυνατόν να λάβουμε την παλαιά μεταβλητή συναρτήσει της νέας άνευ της εισαγωγής ριζικών.

Τα ολοκληρώματα των μορφών 1, 2, 3, 4, 5 και 6 ολοκληρώνονται με το γενικό τρόπο, εάν θέσουμε όπου ρίζα ίσον με $t-\beta x$ δηλαδή:

$$\sqrt{} = t-\beta x.$$

Τα ολοκληρώματα των μορφών 7, 8, 9 ολοκληρώνονται με το γενικό τρόπο εάν θέσουμε όπου $x=\frac{\alpha}{\beta}\eta\mu\omega$

Ειδικοί Τρόποι Ολοκληρώσεως

- Τα ολοκληρώματα 1, 2, 3 ολοκληρώνονται εάν θέσουμε $x=\frac{\alpha}{\beta}\varepsilon\varphi\omega$
- Τα ολοκληρώματα 4, 5, 6 εάν θέσουμε $x=\frac{\alpha}{\beta\,\eta\mu\omega}$
- Τα ολοκληρώματα 8 και 9 όταν δεν υπάρχει η $f(x)$, εάν θέσουμε $x=\frac{\alpha}{\beta}t$

Παραδείγματα

1. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ Θέτω $\sqrt[3]{x^2+1}=t$ ή $x^2+1=t^3$ Διαφορίζω $2x\,dx=3t^2dt$ Άρα $dx=\frac{3t^2dt}{2x}$ Αντικαθιστώ: $\int\frac{x\frac{3t^2dt}{2x}}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{3t^2dt}{t}=$

$=\frac{3}{2}\int t\,dt=\frac{3}{2}\frac{t^2}{2}=\boxed{\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

2. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ Θέτω $\sqrt{x^2-1}=t$ ή $x^2-1=t^2$ Διαφορίζω $2x\,dx=2t\,dt$ Άρα $dx=\frac{t\,dt}{x}$ Αντικαθιστώ: $\int\frac{\frac{t\,dt}{x}}{x\cdot t}=\int\frac{dx}{x^2}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\text{τοξεφ}\,t=$

$=\boxed{\text{τοξεφ}\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$

3. $\int\sqrt{1+3x^2}\,dx$ Θέτω $\sqrt{1+3x^2}=t-\sqrt{3}\,x$ (η εκλογή της αλλαγής γίνεται ούτως ώστε μετά την ύψωση εις το τετράγωνο να εξαλείφεται το x^2)

ή $1+3x^2=t^2+3x^2-2\sqrt{3}\,t\,x$ ή $x=\frac{t^2-1}{2\sqrt{3}\,t}$ Διαφορίζω $dx=\left(\frac{t^2-1}{2\sqrt{3}\,t}\right)'dt=$

$=\frac{t^2-1}{2\sqrt{3}\,t^2}dt$ Αντικαθιστώ $\int(t-\sqrt{3}x)\frac{t^2+1}{2\sqrt{3}\,t^2}dt=$ Αντικαθιστώ τη τιμή του x συναρτήσει της t.

(ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ 3)

$$= \int\left(t-\cancel{\sqrt{3}}\,\frac{t^2-1}{2\sqrt{3}t}\right)\cdot\frac{t^2+1}{2\sqrt{3}t^2}\,dt = \int\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2\sqrt{3}t^2}\,dt = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt = \frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\left[\int t\,dt + \right.$$

$$\left. + 2\int\frac{dt}{t} + \int\frac{dt}{t^3}\right] = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{t^2}{2} + 2\log t + \frac{t^{-2}}{-2}\right] = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\left[\frac{(\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{1+3x^2})^2}{2} + 2\log(\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{1+3x^2}) - \frac{1}{2(\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{1+3x^2})^2}\right]}$$

4. $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$ Θέτω $x=\sqrt{4}\,ημω = 2ημω$ Διαφορίζω $dx = 2συνωdω$

Αντικαθιστώ: $\int\frac{(\sqrt{4-4ημ^2ω})\cdot 2συνωdω}{2ημω} = 2\int\frac{συν^2ωdω}{ημω} =$

$$= 2\int\frac{(1-ημ^2ω)dω}{ημω} = 2\int\frac{dω}{ημω} - 2\int ημωdω = 2\log εφ\frac{ω}{2} + 2συνω =$$

$$= \boxed{2\log εφ\frac{τοξημ\frac{x}{2}}{2} + \sqrt{4-x^2}}$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1 $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$

ΛΥΣΗ

Θέτω $\sqrt{1+x^2} = t-x$ ή $1+x^2=(t-x)^2$ ή $1+x^2 = t^2+x^2-2tx$, $x=\frac{t^2-1}{2t}$

$d = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$. Αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα και έχω:

$$\int(t-x)\,\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \int\left(t-\frac{t^2-1}{2t}\right)\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \int\frac{(t^2+1)^2}{4t^3}dt = \frac{1}{4}\int\frac{t^4+2t^2+1}{t^3}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int t\,dt + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\log t + \frac{1}{4}\int t^{-3}dt = \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}\log t +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{t^{-2}}{-2} = \boxed{\frac{1}{8}(x+\sqrt{1+x^2})^2 + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{8(x+\sqrt{1+x^2})^2}}$$

2 $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

ΛΥΣΗ

Θέτω $x = εφω$, $dx = \frac{dω}{συν^2ω}$ Αντικαθιστώ και έχω: $\int\frac{\frac{dω}{συν^2ω}}{(1+εφ^2ω)^{3/2}} =$

$$= \int \frac{\frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\right)^{3/2}} = \int \frac{\frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3\omega}} = \int \sigma\upsilon\nu\omega d\omega = \eta\mu\omega = \boxed{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

---

3 $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

ΛΥΣΗ

Θέτω $x=\eta\mu\omega$, $dx=\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$ Αντικαθιστώ και έχω: $\displaystyle\int \frac{\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{(1-\eta\mu^2\omega)^{3/2}} = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\omega \cdot d\omega}{(\sigma\upsilon\nu^2\omega)^{3/2}} =$

$$= \int \frac{\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{\sigma\upsilon\nu^3\omega} = \int \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

---

4 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$

ΛΥΣΗ

Θέτω $x=\frac{3}{2}\eta\mu\omega$, $dx=\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$ Αντικαθιστώ και έχω: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-9\eta\mu^2\omega}}{\frac{3}{2}\eta\mu\omega}\cdot\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu\omega d\omega =$

$$= 3\int \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega d\omega}{\eta\mu\omega} = 3\int \frac{(1-\eta\mu^2\omega)d\omega}{\eta\mu\omega} = 3\int \frac{d\omega}{\eta\mu\omega} - 3\int \eta\mu\omega d\omega = 3\log\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2} + 3\sigma\upsilon\nu\omega =$$

$$= \boxed{3\log\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{2x}{3}}{2}\right) + \sqrt{9-4x^2}}$$

---

5 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}dx$

ΛΥΣΗ

Θέτω $x=\alpha\eta\mu\omega$, $dx=\alpha\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$. Αντικαθιστώ και έχω: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\alpha^2-\alpha^2\eta\mu^2\omega}}{\alpha\eta\mu\omega}\cdot\alpha\sigma\upsilon\nu\omega d\omega =$

$$= \alpha\int \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega d\omega}{\eta\mu\omega} = \alpha\int \frac{1-\eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega}d\omega = \alpha\int \frac{d\omega}{\eta\mu\omega} - \alpha\int \eta\mu\omega \cdot d\omega = \alpha\log\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2} + \alpha\sigma\upsilon\nu\omega =$$

$$= \alpha\log\varepsilon\varphi\frac{\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha}}{2} + \alpha\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} = \boxed{\alpha\log\varepsilon\varphi\frac{\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha}}{2} + \sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

---

6 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

ΛΥΣΗ

Θέτω $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ Αντικαθιστώ και έχω: $\displaystyle\int \frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2dt}{t^2+1} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$

$$= 6\int dt - 6\int \frac{dt}{t^2+1} = 6t - 6\tau o\xi\varepsilon\varphi t = \boxed{6\sqrt[6]{x} - 6\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt[6]{x}}$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΥΚΛΟΣ

Α)Εξισωση κυκλου

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

Κεντρο, κυκλου, (α, β)

Ακτινα, κυκλου, R

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

Κεντρο, κυκλου, (α, β)

Ακτινα, κυκλου, R

Β) Εξισωση κυκλου

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Κεντρο, κυκλου, $(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$

Ακτινα, κυκλου, $R = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}$

ΕΛΛΕΙΨΗ

Εξισωση ελλειψης $\quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Α) Γενικη μορφη

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y$$

B) Γενική μορφή: $\boxed{\alpha y^2+\beta y+\gamma=x}$ → $\alpha>0$, $\alpha<0$

ΕΥΘΕΙΑ

Γενική μορφή: $\boxed{y=\alpha x+\beta}$ (Μια ευθεία ορίζεται από δυο σημεία της)

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\left[\varphi(x)+c\right]\Big|_\alpha^\beta=\left[\varphi(\beta)+c\right]-\left[\varphi(\alpha)-c\right]=$

$\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=$ Αριθμός

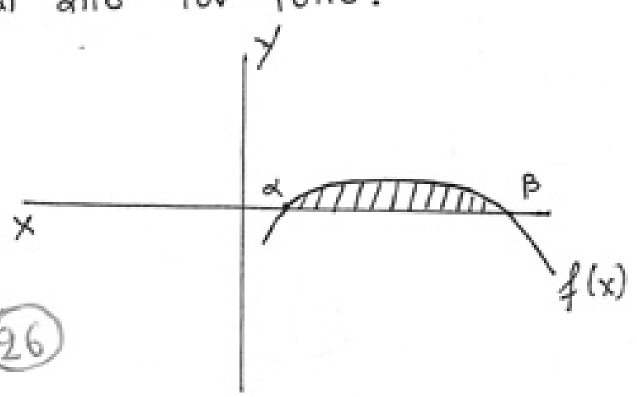
Ιδιότητες:

- $\int_\alpha^\beta[\lambda f(x)\pm\mu g(x)]dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx\pm\mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$ $(\lambda,\mu\in R)$
- $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx$
- Αν $\alpha<\beta<\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma\in R)$ τότε $\int_\alpha^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx$

ΕΜΒΑΔΑ

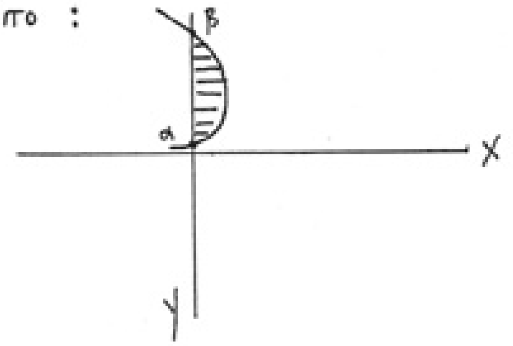
A) Το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από το γράφημα της $f(x)$ και του άξονος του x δίδεται από τον τύπο:

$$E=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

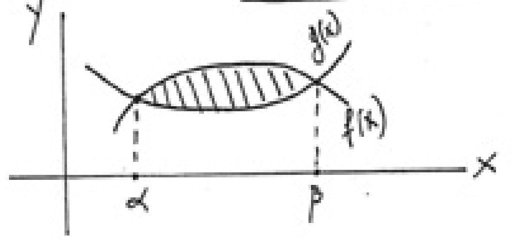


Β) Το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από το γράφημα της $f(y)$ και του άξονος του y δίδεται από το τύπο :

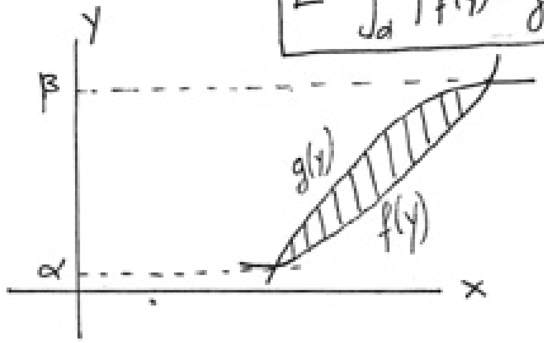
$$\boxed{E=\int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy}$$



Γ) Το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από τα γραφήματα των $f(x)$ και $g(x)$ δίδεται από το τύπο $\boxed{E=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx}$



Δ) Το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από τα γραφήματα των $f(y)$ και $g(y)$ δίδεται από το τύπο : $\boxed{E=\int_{\alpha}^{\beta}|f(y)-g(y)|\,dy}$

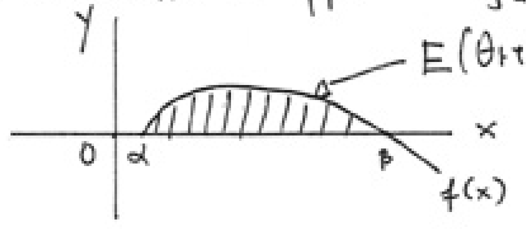


ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

▶ Τα εμβαδά θεωρούνται προσημασμένα και εκφράζονται από θετικούς αριθμούς. Έτσι εμείς κάθε φορά λαμβάνουμε την απόλυτη τιμή της αριθμητικής τιμής του ολοκληρώματος που εκφράζει το εμβαδό της επιφάνειας

▶ α) Αν $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[\alpha,\beta]$ το εμβαδό $E=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ έχει πρόσημο θετικό

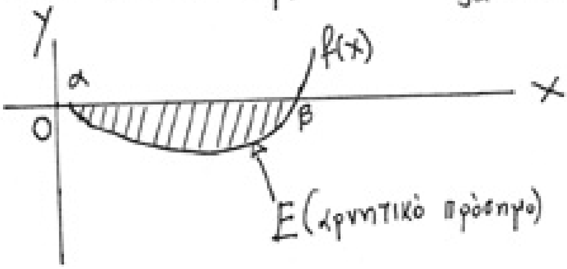
<u>Σχήμα</u>



Γ27

β) Αν $f(x)<0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$ το εμβαδό $E=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ έχει πρόσημο αρνητικό

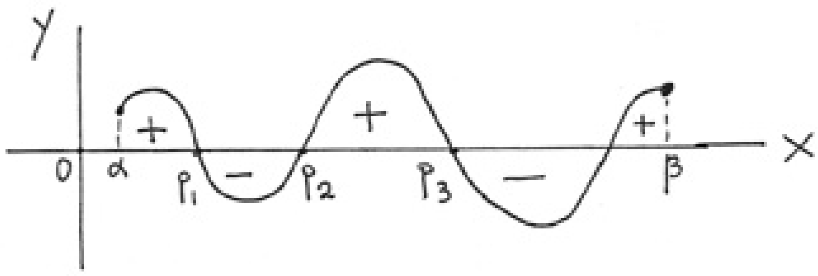
<u>Σχήμα</u>



γ) Αν η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ τότε σημαίνει ότι έχει πλήθος πεπερασμένων ριζών $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_\kappa \in [\alpha,\beta]$ όπου $f(\rho_\kappa)=0$ με $\kappa = 1,2,3,\dots$

Το εμβαδό $E=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \left|\int_{\alpha}^{\rho_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)dx\right| + |\pm \dots + |\pm\int_{\rho_\kappa}^{\beta} f(x)dx|$

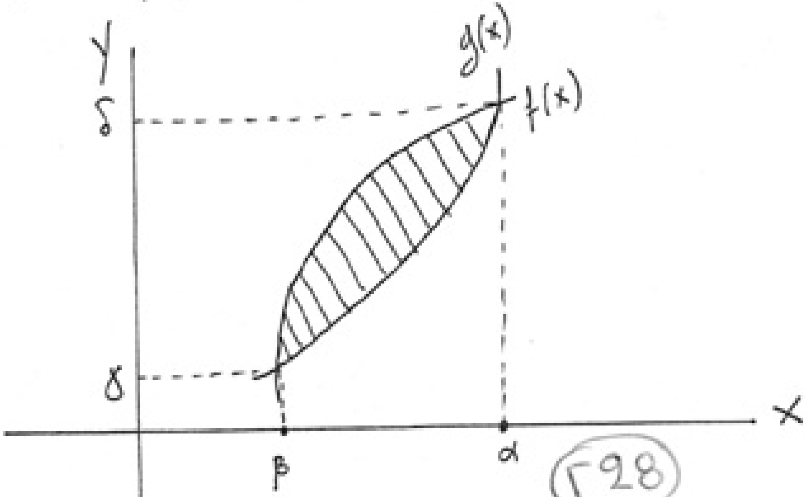
<u>Σχήμα</u>:



▶ Αν ζητείται το εμβαδό μεταξύ δυο καμπυλών $y=f(x)$ και $y=g(x)$ που δε δίδονται τα όρια ολοκλήρωσης τότε λύνουμε το σύστημα των δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους και βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης.

<u>Σχήμα</u>

[Τα (α,δ) και (β,γ) είναι λύσεις του συστήματος των $f(x)$ και $g(x)$]



ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ορισμένα ολοκληρώματα)

1) $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2+9}$ θέτω $x=3t, dx=3dt$ (Επειδή έκανα αλλαγή μεταβλητής πρέπει να κάνω αλλαγή ορίων ή να υπολογίσω το ολοκλήρωμα ως αόριστο και επανερχόμενος στην αρχική μεταβλητή θέτω τα όρια τα οποία δίδονται εξ'αρχής. Προτιμότερη είναι η αλλαγή ορίων η οποία γίνεται ως εξής στη σχέση που συνδέει τη παλαιά μεταβλητή με τη νέα, δηλαδή στην $x=3t$ θέτω x το ανώτερο όριο δηλαδή το 3 και βρίσκω $t=1$ η τιμή αυτή του t είναι το ανώτερο όριο, κατόπιν θέτω όπου x το -3 δηλαδή το κατώτερο όριο και βρίσκω $t=-1$ η τιμή αυτή του t είναι το κατώτερο όριο στη νέα μεταβλητή δηλαδή στο t, αντικαθιστώ και έχω:

$$\int_{-1}^{1} \frac{3dt}{9t^2+9} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\,\text{τοξεφ}\,t \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\left(\text{τοξεφ}\,1 - \text{τοξεφ}(-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right] = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

---

2) $\int_{0}^{2} \sqrt{x+1}\,dx$

ΛΥΣΗ

$$\int_{0}^{2} \sqrt{x+1}\,dx = \int_{0}^{2} (x+1)^{1/2}dx = \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{0}^{2} = \frac{2}{3}\left[(2+1)^{3/2} - 1\right] = \frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 1\right) =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right)}$$

---

3) $$\int_{1}^{9} \frac{dx}{3+5x} = \frac{1}{5}\int_{1}^{9} \frac{5dx}{5x+3} = \frac{1}{5}\log(5x+3)\Big|_{1}^{9} = \frac{1}{5}\left[\log(45+3) - \log(5+3)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\log\left(\frac{48}{8}\right) = \boxed{\frac{1}{5}\log 6}$$

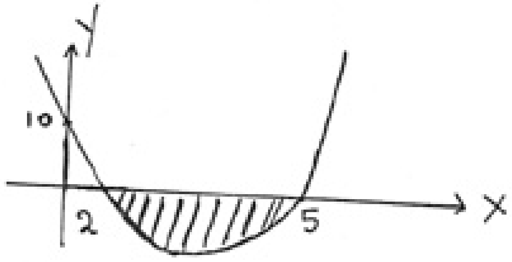
Να υπολογιστούν τα εμβαδά των χωρίων των οριζόμενων από των κάτωθι καμπύλων.

1) $y = x^2 - 7x + 10 \quad y = 0$

Το εμβαδό του χωρίου είναι μεταξύ καμπύλης και του άξονος των x, διότι $y=0$ είναι η εξίσωση του άξονος των x. Θέτω $y=0$ και έχω $x=2, x=5$. Άρα

$E = \int_2^5 y\,dx = \int_2^5 (x^2 - 7x + 10)\,dx = \frac{x^3}{3} - 7\frac{x^2}{2} + 10x \Big|_2^5 = -\frac{9}{2}$ άρα $E = \frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Το ολοκλήρωμα μου έδωσε αρνητικό αποτέλεσμα διότι το εμβαδό στο κάτω μέρος του άξονος των x είναι αρνητικό, στο άνω θετικό, εάν η ολοκλήρωση γίνεται στον άξονα των x. Δεξιά του άξονος των y θετικό, αριστερά αρνητικό, εάν η ολοκλήρωση γίνεται στον άξονα των y.

Μορφή της καμπύλης

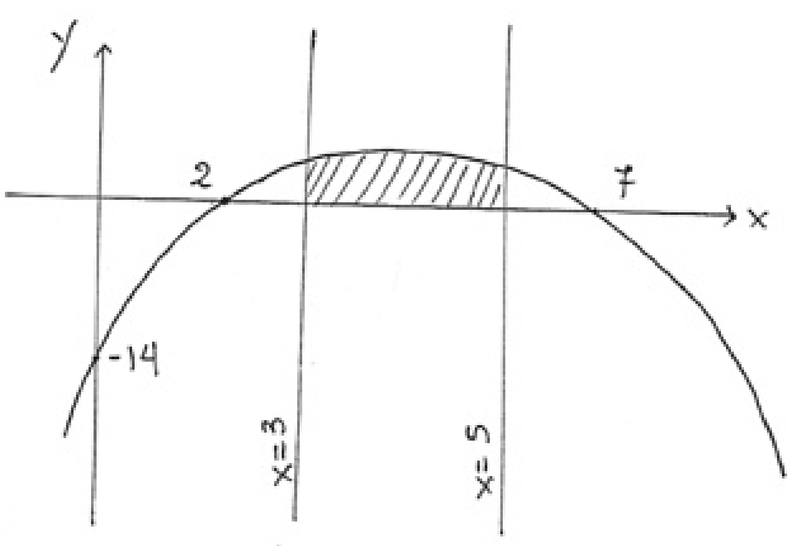


2) $y = -x^2 + 9x - 14 \qquad x=3,\ x=5,\ y=0$

Είναι εμβαδό μεταξύ καμπύλης, άξονος των x και των ευθειών $x=3$, $x=5$

$E = \int_3^5 y\,dx = \int_3^5 (-x^2 + 9x - 14)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} - 14x \Big|_3^5 = \frac{19}{3}$ άρα $E = \frac{19}{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

Μορφή της καμπύλης

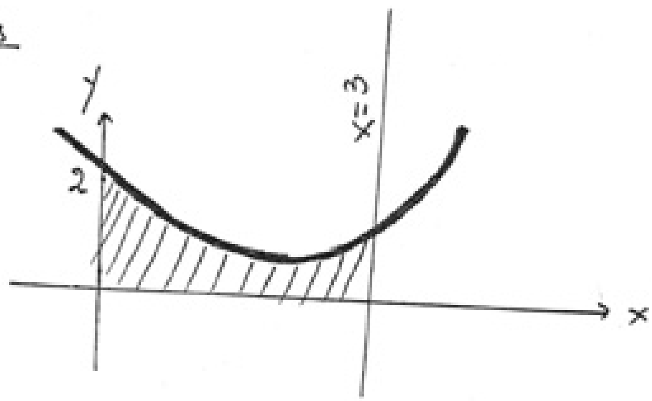


3) $y = 4x^2 + 2 \quad y=0,\ x=0,\ x=3$

Είναι εμβαδόν καμπύλης των αξόνων και της ευθείας $x=3$

$$E = \int_0^3 (4x^2+2)dx = 4\frac{x^3}{3} + 2x \Big|_0^3 = 4\,\frac{27}{3} + 6 - 0 = 36 + 6 = 42 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

<u>Μορφή καμπύλης</u>

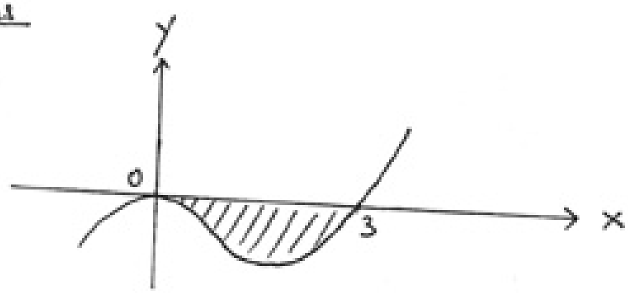


4) $y = x^3 - 3x^2,\ y=0$

Είναι εμβαδόν μεταξύ καμπύλης και του άξονος των x.

$$E = \int_0^3 (x^3 - 3x^2)dx = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{81}{4} - 27 = \frac{81-108}{4} = -\frac{27}{4} \text{ άρα } E = \frac{27}{4}$$

<u>Μορφή καμπύλης</u>

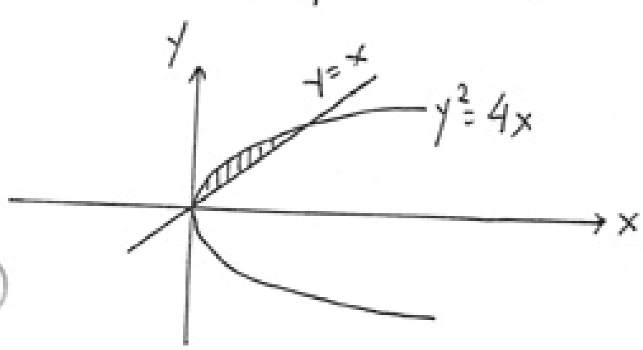


5) $y^2 = 4x \quad y = x$

Είναι εμβαδό μεταξύ δύο καμπυλών άρα $E = \int_\alpha^\beta (y_1 - y_2)dx = \int_0^4 (x - 2\sqrt{x})dx =$

$$= \int_0^4 x\,dx - 2\int_0^4 x^{1/2}dx = \frac{x^2}{2} - 2\,\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^4 = 8 - 4\,\frac{4\cdot 2}{3} = 8 - \frac{32}{3} = -\frac{8}{3} \text{ άρα } E = \frac{8}{3}$$

<u>Μορφή καμπύλης</u>



Γ31

Για να βρούμε τα όρια λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο καμπύλων και εάν η ολοκλήρωσις γίνεται ως προς τον άξονα των x λαμβάνουμε ως όρια τις μεταβολές του x, εάν γίνεται ως προς τον άξονα των y τις μεταβολές του y. Ως y_1 και y_2 λαμβάνω οποιαδήποτε καμπύλη διότι αν αντιστραφεί η τάξη των καμπύλων η τιμή του ολοκληρώματος δεν μεταβάλλεται, αλλάζει δε μόνο κατά σημείο, αλλά εμείς λαμβάνουμε ως εμβαδό την απόλυτη τιμή του ολοκληρώματος. Για να βρούμε τον άξονα ως προς τον οποίο πρέπει να γίνει η ολοκλήρωση εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:

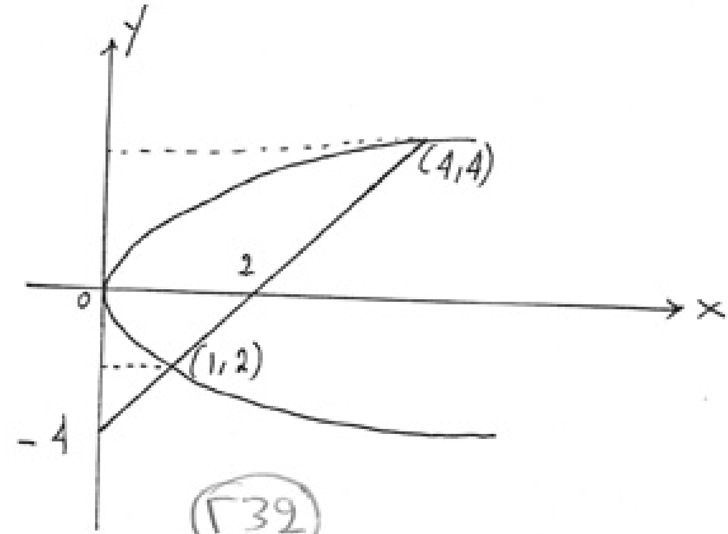
- Βλέπουμε σε ποια των μεταβλητών είναι επιλυτή οι καμπύλες
- Εκ του σχήματος των δύο καμπυλών (για αυτό πρέπει να γίνεται πάντα η γραφική παράσταση αυτών) βλέπουμε σε ποιον από τους άξονες πρέπει να ολοκληρώσουμε ώστε με μια ολοκλήρωση να βρίσκεται ολόκληρο το εμβαδό του χωρίου το οποίο μας ενδιαφέρει, δηλαδή αποφεύγουμε να χωρίσουμε χωρίο σε άλλα υποχωρία οπότε το ζητούμενο εμβαδό θα είναι άθροισμα των εμβαδών των υποχωρίων. Στην άσκηση μας μπορούμε να ολοκληρώσουμε ή ως προς τον άξονα των x ή ως προς τον άξονα των y.

6) $y^2 = 4x$, $y = 2x - 4$

Είναι εμβαδό μεταξύ δύο καμπύλων. Η ολοκλήρωση θα γίνει ως προς τον άξονα των y. $E = \int_{-2}^{4}\left(\frac{y^2}{4} - \frac{y+4}{2}\right)dy = \frac{1}{4}\int_{-2}^{4} y^2 dy - \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\,dy = \frac{1}{4}\frac{y^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{2} - 2y\Big|_{-2}^{4} =$
$= -9$. Άρα $E = 9$. Εάν αντιστραφεί η τάξη των καμπύλων δηλαδή

$$E = \int_{-2}^{4}\left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4}\right)dy = 9$$

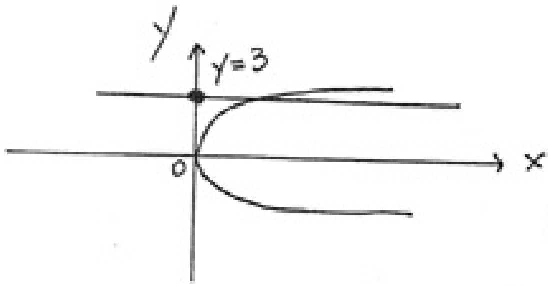
Μορφή καμπύλης



7) $x=2y^2 \quad x=0,\ y=3$

Είναι εμβαδόν μεταξύ καμπύλων του άξονος των y και της ευθείας $y=3$. Η ολοκλήρωση θα γίνει ως προς τον άξονα των y.

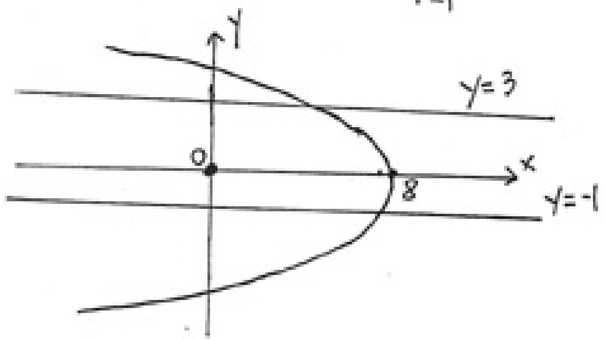
$$E=\int_0^3 x\,dy=\int_0^3 2y^2\,dy=2\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^3=18$$



8) $x=8+2y-y^2 \quad x=0,\ y=-1,\ y=3$

Είναι εμβαδόν μεταξύ καμπύλης του άξονος των y και των ευθειών $y=-1$ και $y=3$. Η ολοκλήρωση θα γίνει ως προς τον άξονα των y.

$$E=\int_{-1}^3 x\,dy=\int_{-1}^3 (8+2y-y^2)\,dy=8y+2\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^3=\frac{92}{3}$$

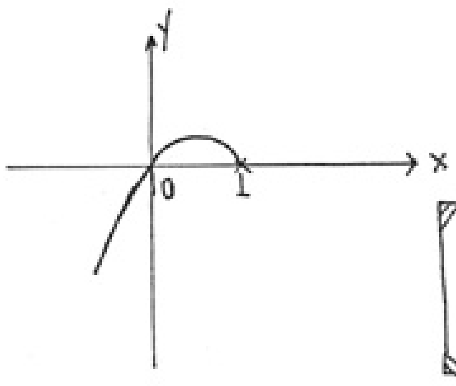


9) $y=x\cdot\sqrt{1-x} \quad y=0$

Είναι εμβαδόν μεταξύ καμπύλης και του άξονος των x. $E=\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

Θέτω $\sqrt{1-x}=t$ άρα $1-x=t^2$, $dx=-2t\,dt$ (κάνω αλλαγή ορίων, θέτω $x=1, t=0$ θέτω $x=0\ t=1$) αντικαθιστώ και έχω: $E=\int_1^0 (1-t^2)\cdot t\cdot(-2t\,dt)=-2\int_1^0 (t^2-t^4)\,dt=$

$$=-2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_1^0=0-\left[-2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]=-\left(-2\,\frac{2}{15}\right)=\frac{4}{15}$$



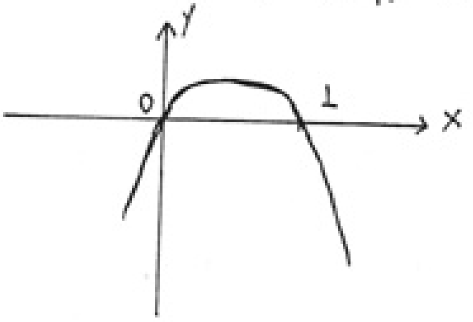
* ΑΣΚΗΣΗ *

($y=x^3+x^2-2x$ και xx') $E=;$

Γ33

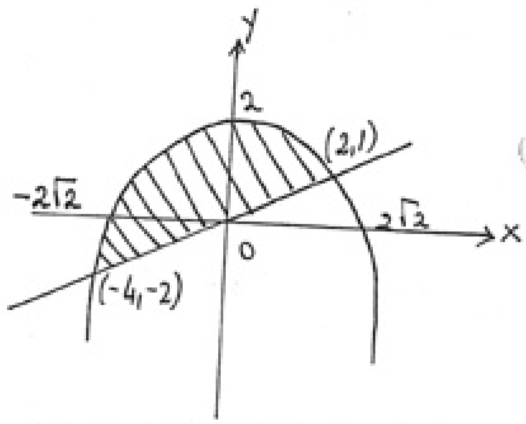
10) $y = x - x^2 \quad y = 0$

$$E = \int_0^1 y\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$ τετρ. μονάδες



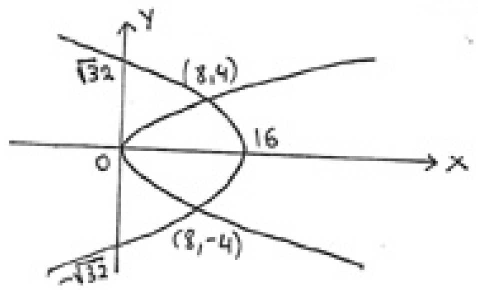
11) $x = 2y \quad x^2 = 8 - 4y$

$$E = \int_{-4}^{2} (y_1 - y_2)\,dx = \int_{-4}^{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{8 - x^2}{4} \right) dx$$



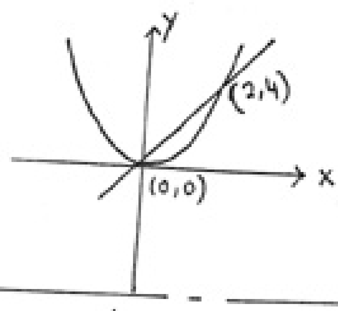
12) $y^2 = 2x \,,\; y^2 = 32 - 2x$

$$E = \int_{-4}^{4} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{32 - y^2}{2} \right) dy$$



13) $y = x^2 \quad y = 2x$

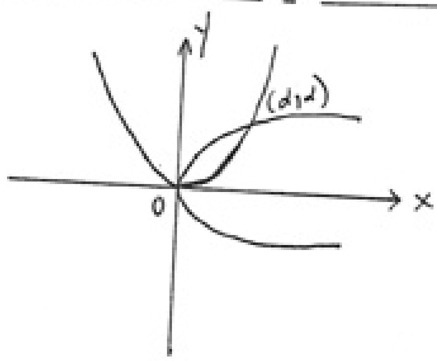
$$E = \int_0^2 (y_1 - y_2)\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$ τετρ. μονάδες



14) $y^2 = \alpha x \quad x^2 = \alpha y \quad \alpha > 0$

$$E = \int_0^\alpha (y_1 - y_2)\,dx = \int_0^\alpha \left(\sqrt{\alpha x} - \frac{x^2}{\alpha} \right) dx = \sqrt{\alpha} \int_0^\alpha x^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha x^2\,dx = \sqrt{\alpha}\, \frac{x^{3/2}}{3/2} -$$

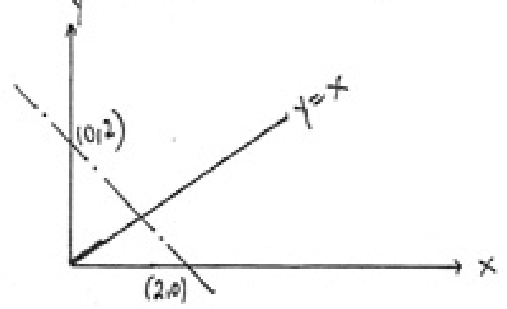
$$- \frac{1}{\alpha} \frac{x^3}{3} \Big|_0^\alpha = \frac{2\sqrt{\alpha}}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3\alpha} x^3 \Big|_0^\alpha = \frac{\alpha^2}{3}$$ τετρ. μονάδες



15) $x+y=2 \quad y=x \quad y=0$

Ολοκληρώνω ως προς τον άξονα των y

$$E=\int_0^1 (x_1-x_2)\,dy = \int_0^1 (2-y-y)\,dy = \int_0^1 (2-2y)\,dy = 2\int_0^1 dy - 2\int_0^1 y\,dy = 2y-y^2\Big|_0^1 = 2-1 = 1$$

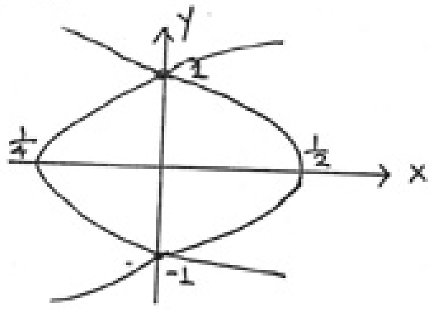


16) $y^2 = 1+4x \quad y^2 = 1-2x$

Ολοκληρώνω ως προς τον άξονα των y.

$$\int_{-1}^1 (x_1-x_2)\,dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1-y^2}{2} - \frac{y^2-1}{4}\right)dy = \int_{-1}^1 \frac{(2-2y^2-y^2+1)}{4}\,dy = \int_{-1}^1 \frac{3-3y^2}{4}\,dy = \frac{3}{4}\int_{-1}^1 dy -$$

$$-\frac{3}{4}\int_{-1}^1 y^2\,dy = \frac{3}{4}y - \frac{3}{4}\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{-3}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4}+\frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

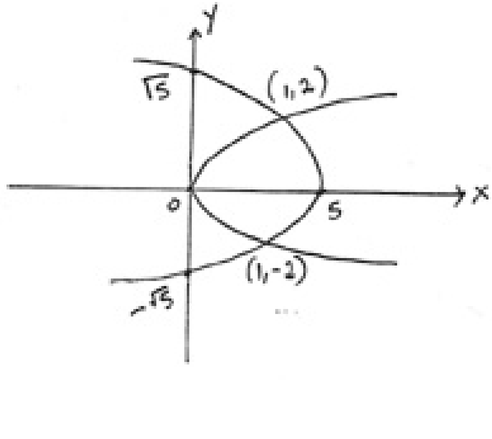


17) $y^2 = 4x \quad y^2 = 5-x$

Ολοκληρώνω ως προς άξονα των y από 0 έως 2 και διπλασιάζω.

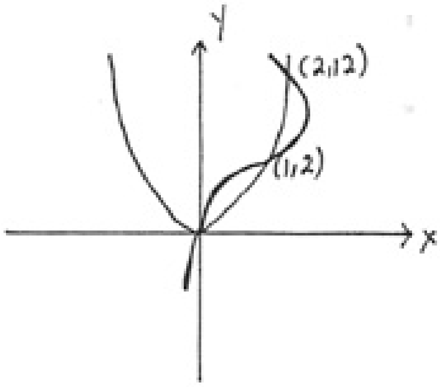
$$E_1 = \int_0^2 (x_1-x_2)\,dy = \int_0^2 \left(5-y^2-\frac{y^2}{4}\right)dy = \int_0^2\left(5-\frac{5y^2}{4}\right)dy = \left(5y-\frac{5}{4}\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{20}{3}$$

άρα $E_{ολ} = 2\cdot E_1 = \frac{40}{3}$



Γ35

18) $y=x^3+2x \quad y=3x^2$



$E_1=\int_0^1 (y_1-y_2)\,dx=\int_0^1 (x^3+2x-3x^2)\,dx=\frac{x^4}{4}+x^2-x^3\Big|_0^1=\frac{1}{4}$

$E_2=\int_1^2 (x^3+2x-3x^2)\,dx=\frac{x^4}{4}+x^2-x^3\Big|_1^2=-\frac{1}{4}$

άρα $E_2=\frac{1}{4}$ Επομένως $E_{ολ}=E_1+E_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

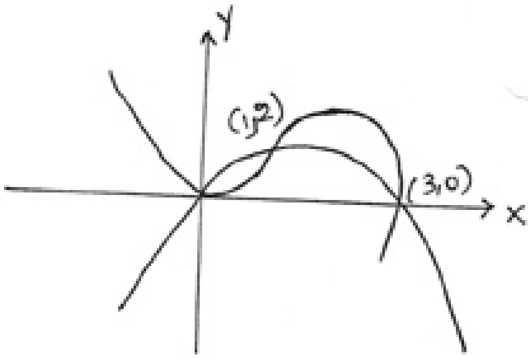
---

19) $y=3x-x^2$
$y=3x^2-x^3$

$E_{ολ}=\int_0^1 (3x-x^2-3x^2+x^3)\,dx+\int_1^3 (3x^2-x^3-3x+x^2)\,dx=$

$=\int_0^1 (3x-4x^2+x^3)\,dx+\int_1^3 (4x^2-3x-x^3)\,dx=3\frac{x^2}{2}-4\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+$

$+\left(4\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^3=\frac{45}{4}$

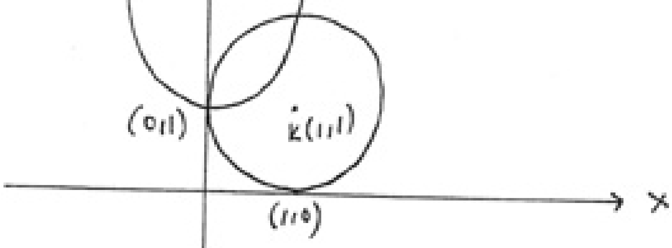


---

20) $y=x^2+1 \quad (y-1)^2=x(2-x)$

$E=\int_0^1 (y_1-y_2)\,dy=\int_0^1 (1+\sqrt{2x-x^2}-x^2-1)\,dx=\int_0^1 (\sqrt{2x-x^2}-x^2)\,dx$

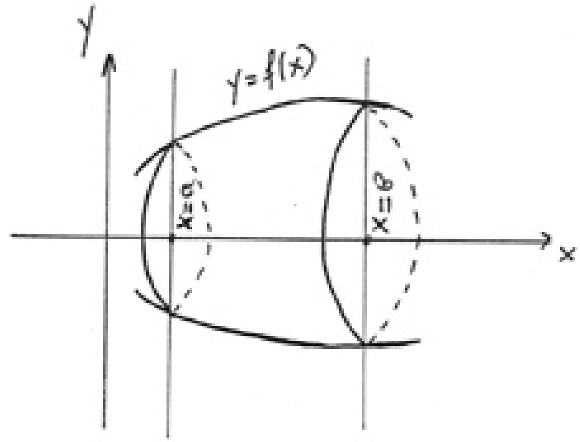
(Λαμβάνω το $y=1+\sqrt{2x-x^2}$ διότι οι τιμές του y είναι μεγαλύτεροι του 1)



ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

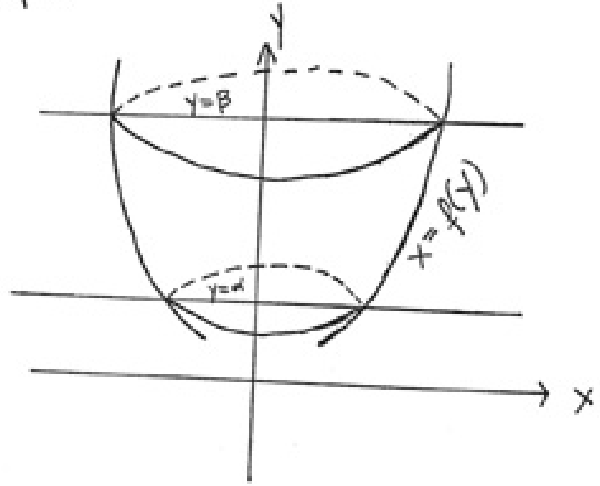
α) Εάν το χωρίο το οριζόμενο υπό της καμπύλης $y=f(x)$ και των ευθειών $x=\alpha$ και $x=\beta$ περιστραφεί περί τον άξονα των x, γράφει ένα στερεό εκ περιστροφής. Ο όγκος αυτού δίδεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα.

$$\boxed{V=\pi\int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx}$$



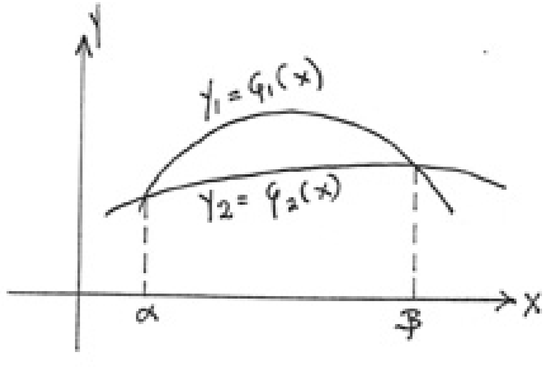
β) Εάν το χωρίο το οριζόμενο υπό τη καμπύλη $x=f(y)$ και των ευθειών $y=\alpha$ και $y=\beta$ περιστραφεί περί τον άξονα των y, γράφει ένα στερεό εκ περιστροφής. Ο όγκος αυτού δίδεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα.

$$\boxed{V=\pi\cdot\int_{\alpha}^{\beta} x^2\cdot dy}$$



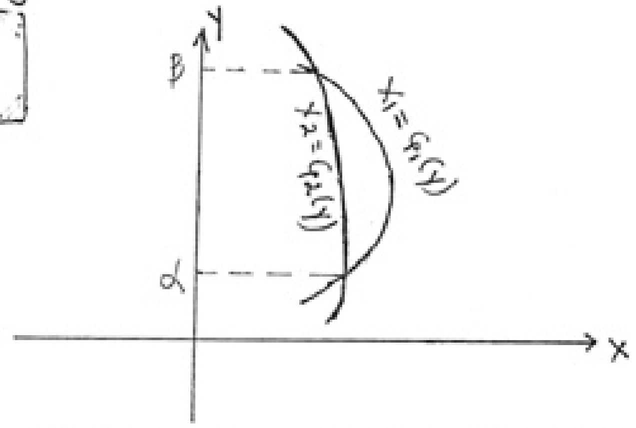
γ) Εάν το χωρίο το οριζόμενο υπό δυο καμπυλών με εξισώσεις $x_1=\varphi_1(y)$ και $x_2=\varphi_2(y)$ περιστραφεί περί τον άξονα των y ο όγκος του προκύπτοντος στερεού δίδεται από τον τύπο

$$\boxed{V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}(y_1^2-y_2^2)\,dx}$$



δ) Εάν χωρίο οριζόμενο από δύο καμπύλων με εξισώσεις $x_1=\varphi_1(y)$ και $x_2=\varphi_2(y)$ περιστραφεί περί τον άξονα των y, ο όγκος του προκύπτοντος στερεού δίδεται από τον τύπο

$$\boxed{V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}(x_1^2-x_2^2)dy}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

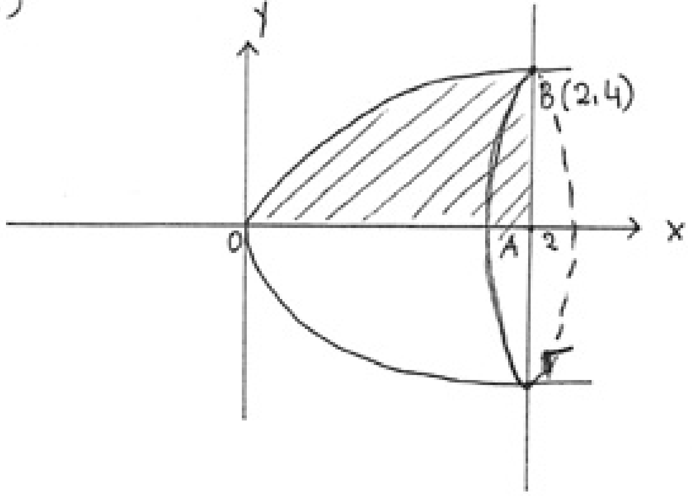
Να υπολογισθεί ο όγκος των στερεών τα οποία προκύπτουν δια περιστροφής των κάτωθι χωρίων των οριζομένων, υπό των κάτωθι καμπύλων.

1) Της παραβολής $y^2=8x$ και της ευθείας $x=2$ περί τον άξονα Οx.

ΛΥΣΗ

$$V=\pi\int_0^2 y^2 dx=\pi\int_0^2 8x\,dx=8\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=16\pi$$

Είναι δε ο ολικός όγκος διότι το στερεό γράφει το (ΟΑΒ) το ίδιο γράφει και το (ΟΑΓ)



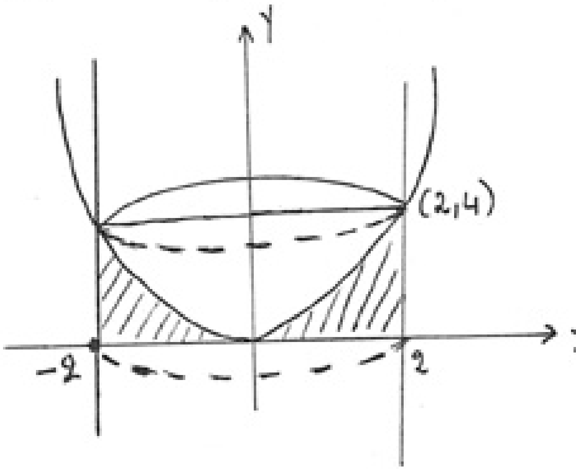
2) Της παραβολής $y^2=8x$ και της ευθείας $x=2$, περί την ευθεία $x=2$.

3) Της καμπύλης $y=x^2$ και των ευθειών $x=2$, $y=0$ περί τον άξονα Oy.

ΛΥΣΗ

$$V=\pi\int_\alpha^\beta (x_1^2-x_2^2)dy=\pi\int_0^4(4-y)dy=\pi\left(4y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4=8\pi$$

Δηλαδή ο όγκος ισούται με τον όγκο του στερεού που γράφει η ευθεία $x=2$ μείον τον όγκο του στερεού που γράφει η καμπύλη $y=x^2$.

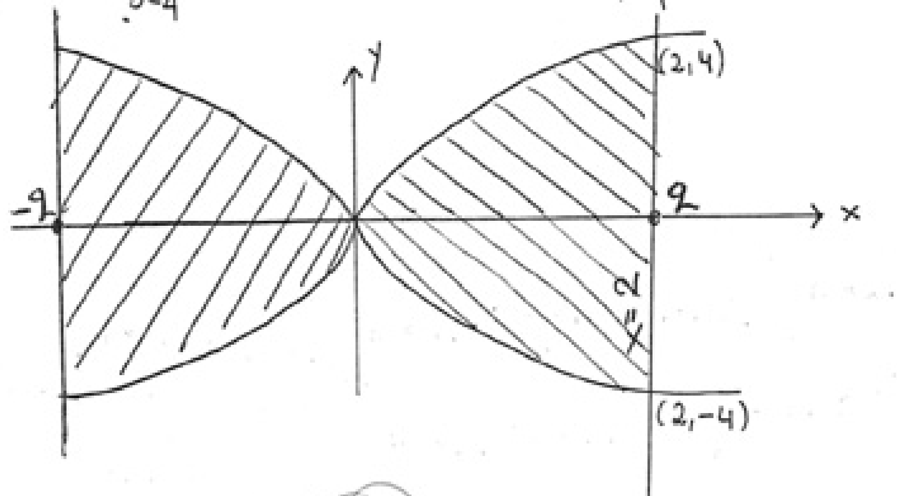


Σημείωση $\longrightarrow$ Εάν λάβω ως x_1, x_2 αντίστροφα θα βρώ στο ολοκλήρωμα αρνητικό αποτέλεσμα οπότε η απόλυτη τιμή είναι ο όγκος.

4) Υπό της παραβολής $y^2=8x$ και της ευθείας $x=2$ περί τον άξονα Oy.

ΛΥΣΗ

$$V=\pi\int_{-4}^4 (x_1^2-x_2^2)dy=\int_{-4}^4\left(4-\frac{y^4}{64}\right)dy=\left(4y-\frac{y^5}{320}\right)\Big|_{-4}^4=\frac{128\pi}{5}$$

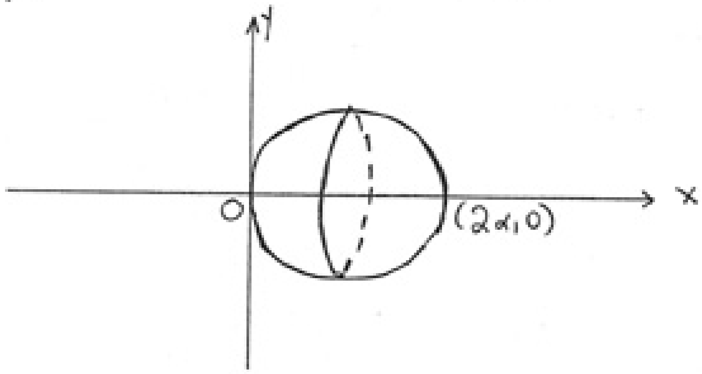


Γ39

5) Της $x^2+y^2-2\alpha x=0$ περί τον άξονα Ox.

ΛΥΣΗ

$$V=\pi\int_0^{2\alpha} y^2 dx=\pi\int_0^{2\alpha}(2\alpha x-x^2)dx=\pi\left(\alpha x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{2\alpha}=\pi\left(4\alpha^3-\frac{8\alpha^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi\alpha^3$$

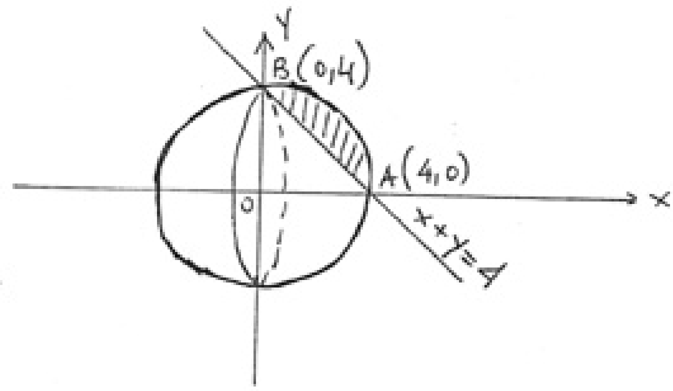


6) Υπό της καμπύλης $x^2+y^2=16$ και της ευθείας $x+y=4$ (μικρό τμήμα) περί τον άξονα Ox.

ΛΥΣΗ

$$V=\pi\int_0^4(y_1^2-y_2^2)dx=\pi\int_0^4\left[(16-x^2)-(4-x)^2\right]dx=\pi\int_0^4(16-x^2-16+8x-x^2)dx=$$

$$=\pi\int_0^4(8x-2x^2)dx=\pi\left(4x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\pi\left(64-\frac{128}{3}\right)=\frac{64\pi}{3}$$



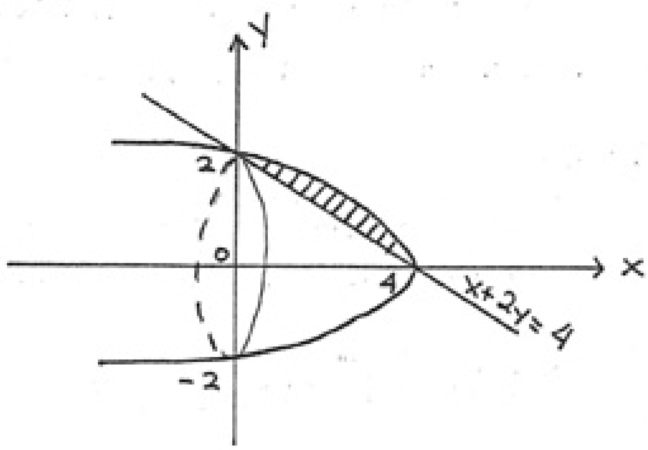
7) Υπό της καμπύλης $y^2=4-x$ και της ευθείας $x+2y=4$ περί τον άξονα Ox.

ΛΥΣΗ

$$V=\pi\int_0^4(y_1^2-y_2^2)dx=\pi\int_0^4\left[(4-x)-\left(\frac{4-x}{2}\right)^2\right]dx=\pi\int_0^4\left(4-x-\frac{16x+x^2-8x}{4}\right)dx=$$

$$=\pi\int_0^4\frac{16-4x-16-x^2+8x}{4}dx=\frac{\pi}{4}\int_0^4(4x-x^2)dx=\frac{\pi}{4}\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\frac{\pi}{4}\left(32-\frac{64}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{96-64}{3}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{32}{3}=\frac{8\pi}{3}$$

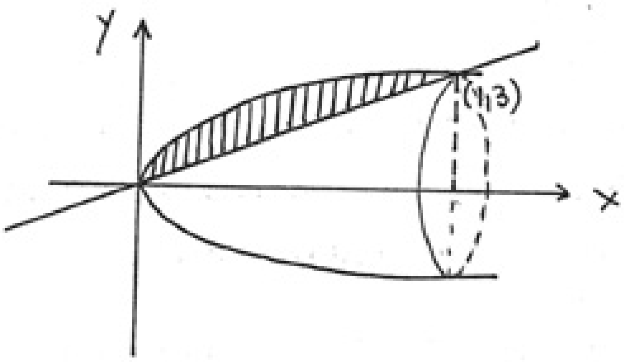


8) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής του χωρίου $y^2=9x$, $y=3x$ περί τον άξονα Ox.

ΛΥΣΗ

Ο ολικός όγκος ισούται με τον όγκο του στερεού που γράφει η καμπύλη $y^2=9x$ μείον τον όγκο του στερεού που γράφει η ευθεία $y=3x$

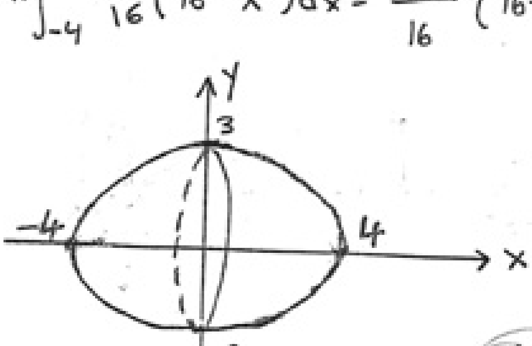
$$V=\pi\int_0^1 9x\,dx-\pi\int_0^1 9x^2\,dx = 9\pi\cdot\frac{x^2}{2}-3\pi x^3\Big|_0^1=\frac{9\pi}{2}-3\pi=\frac{3\pi}{2}$$



9) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής της κλειστής καμπύλης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ περί τον άξονα Ox.

ΛΥΣΗ

Ο όγκος $V=\pi\int_{-4}^{4} y^2\,dx=\pi\int_{-4}^{4}\frac{9}{16}\left(16-x^2\right)dx=\frac{9\pi}{16}\left(16x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-4}^{4}=48\pi$



Γ41