ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

▶ Ορισμός:

Μια διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της. Μια σχέση:

$$\boxed{F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(\nu)}) = 0 \quad \text{όπου } f(x) = y}$$

▶ Παραδείγματα

$$\frac{dy}{dx} = 5x+3 \quad (1) \qquad e^y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \quad (2)$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (\eta\mu x)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x \quad (4)$$

▶ Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου της εξίσωσης. (π.χ. η εξίσωση (1) είναι πρώτης τάξης, η (2) και η (4) είναι δευτέρας τάξης, η (3) είναι τρίτης τάξης).

▶ Βαθμός μιας διαφορικής εξισώσεως που κάθε μέλος της μπορεί να γραφεί σαν ένα πολυώνυμο της άγνωστης συναρτήσεως και των παραγώγων της είναι η δύναμη στην οποία εμφανίζεται η μεγαλύτερη τάξη παράγωγος (π.χ. Η εξίσωση (1) είναι πρώτου βαθμού, η (3) επίσης πρώτου βαθμού, η (4) τρίτου βαθμού η (2) επειδή έχει το e^y (εκθέτη μορφή του y) δεν γράφεται σαν πολυώνυμο της άγνωστης συνάρτησης y, και ως εκ τούτου δεν έχει νόημα να μιλάμε για βαθμό αυτής της εξίσωσης)

▶ Συμβολισμός

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots\dots\dots,\ y^{(\nu)} = \frac{d^\nu y}{dx^\nu}$$

ΛΥΣΕΙΣ Διαφορικών Εξισώσεων

▶ Ορισμός: Λύση μιας διαφορικής εξίσωσης με άγνωστη συνάρτηση y και ανεξάρτητη μεταβλητή x στο διάστημα Δ καλείται μια συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί ταυτοτικά τη διαφορική εξίσωση για κάθε $x \in \Delta$.
(συνήθως οι Διαφορικές Εξισώσεις έχουν άπειρο πλήθος λύσεων. Υπάρχουν και Δ.Ε που έχουν μια λύση ή και καμιά λύση).

▶ Μερική Λύση μιας Δ.Ε είναι μια οποιαδήποτε λύση της Δ.Ε

▶ Γενική Λύση μιας Δ.Ε είναι το σύνολο όλων των λύσεων.

→ Παράδειγμα: Γενική λύση της Δ.Ε $y''+4y=0$ είναι η $y=\alpha\eta\mu 2x+\beta\sigma\upsilon\nu 2x$ και μερική λύση η $y=5\eta\mu 2x-3\sigma\upsilon\nu 2x$ όπου τα α και β είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

▶ Λύση ενός προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών καλείται μια συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και όλες τις συμπληρωματικές συνθήκες.

▶ Παραδείγματα

A) Το πρόβλημα $y''+2y'=e^x$, $y(\pi)=1$, $y'(\pi)=2$ είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών επειδή οι συμπληρωματικές συνθήκες αναφέρονται μόνο στο σημείο π. Το πρόβλημα $y''+2y'=e^x$ $y(0)=1$ $y(1)=1$ είναι ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών επειδή οι συμπληρωματικές συνθήκες αναφέρονται σε δυο σημεία τα $x=0$ και $x=1$.

B) Αν ⓐ $y=\eta\mu 2x$ ⓑ $y=x$ και ⓒ $y=\frac{1}{2}\eta\mu 2x$ κάποιες συναρτήσεις, τότε λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $(y''+4y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1)$ από τις ανωτέρω συναρτήσεις είναι:

ⓐ Η $y=\eta\mu 2x$ είναι η λύση της Δ.Ε και ικανοποιεί τη πρώτη αρχική συνθήκη $y(0)=0$. Δεν ικανοποιεί όμως τη δεύτερη αρχική συνθήκη $(y'=2\sigma\upsilon\nu 2x,\ y'(0)=2\sigma\upsilon\nu 0=2\neq 1)$. Άρα δεν είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

ⓑ Η $y=x$ ικανοποιεί και τις δυο αρχικές συνθήκες όχι όμως και τη Δ.Ε. Άρα δεν είναι λύση του προβλήματος.

Δ2

⑧ Η $y=\frac{1}{2}\eta\mu 2x$ ικανοποιεί τη Δ.Ε και τις δύο αρχικές συνθήκες. Άρα είναι λύση του δεδομένου προβλήματος αρχικών τιμών.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

A Κατηγορία χωριζόμενων μεταβλητών

► Γενική μορφή

$$\boxed{A(x)+B(y)\frac{dy}{dx}=0} \quad ① \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{dy}{dx}=A(x)\cdot B(y)} \quad ②$$

► Γενική λύση ①

$$B(y)\frac{dy}{dx}=-A(x) \Rightarrow B(y)dy=-A(x)dx \Rightarrow \int B(y)dy=-\int A(x)dx+c$$

► Γενική λύση ②

$$\frac{dy}{B(y)}=A(x)dx \Rightarrow \int\frac{dy}{B(y)}=\int A(x)dx+c$$

→ ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθεί η Δ.Ε $\frac{dy}{dx}=x^2y^3$

ΛΥΣΗ

$$\frac{dy}{dx}=x^2y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3}=x^2dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y^3}=\int x^2dx \Rightarrow \int y^{-3}dy=\int x^2dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2}=\frac{x^3}{3}+c \Rightarrow -\frac{1}{2y^2}=\frac{x^3}{3}+c \quad (\text{Γενική λύση Δ.Ε})$$

B Κατηγορία ομογενείς Δ.Ε ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

► Γενική μορφή

$$\boxed{M(x,y)dy+N(x,y)dx=0} \quad ①$$

όπου $N(x,y)$ και $M(x,y)$ ομογενή πολυώνυμα του ίδιου βαθμού ομογένειας.

Σημείωση → Ένα πολυώνυμο $f(x,y,z\ldots)$ λέγεται ομογενή βαθμού ομογένειας ν όταν θέσουμε $x=\kappa x$, $y=\kappa y$, $z=\kappa z,\ldots$ να έχουμε

$$f(\kappa x,\kappa y,\kappa z,\ldots)=\kappa^{\nu}f(x,y,z,\ldots)$$

▶ Γενική λύση της ①

Θέτω $\boxed{y = x \cdot \omega}$ ② (όπου $y = y(x)$, $x = x(x)$ και $\omega = \omega(x)$) παραγωγίζω και έχω $\boxed{\frac{dy}{dx} = \omega + x\frac{d\omega}{dx}}$ ③ . Με τη βοήθεια των ② και ③ κάνω αντικατάσταση στη ① και η προκύπτουσα Δ.Ε είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

⟶ ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθεί η Δ.Ε $(x+y)dy - (x-y)dx = 0$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$. Θέτω $\boxed{y = x\cdot\omega}$ ① και $\boxed{\frac{dy}{dx} = \omega + x\frac{d\omega}{dx}}$ ②

Έτσι με τη βοήθεια των ① και ② έχουμε:

$$\omega + x\frac{d\omega}{dx} = \frac{x - x\omega}{x + x\omega} \Rightarrow \omega + x\frac{d\omega}{dx} = \frac{x(1-\omega)}{x(1+\omega)} \Rightarrow \omega + x\frac{d\omega}{dx} = \frac{(1-\omega)}{(1+\omega)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{d\omega}{dx} = \frac{(1-\omega)}{(1+\omega)} - \omega \Rightarrow x\frac{d\omega}{dx} = \frac{1-\omega-\omega-\omega^2}{(1+\omega)} \Rightarrow x\frac{d\omega}{dx} = \frac{1-2\omega-\omega^2}{(1+\omega)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{dx} = \frac{1-2\omega-\omega^2}{(1+\omega)\,d\omega} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{(\omega+1)d\omega}{1-2\omega-\omega^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{(\omega+1)d\omega}{\omega^2+2\omega-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = -\int\frac{(\omega+1)d\omega}{\omega^2+2\omega-1} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int\frac{d(\omega^2+2\omega-1)}{(\omega^2+2\omega-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}\ln\left|\omega^2+2\omega-1\right| + c_1 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}\ln\left|\omega^2+2\omega-1\right| + \ln c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln\frac{c_1}{\sqrt{\omega^2+2\omega-1}} \Rightarrow x = \frac{c_1}{\sqrt{\omega^2+2\omega-1}}$$ Θέτω και $\boxed{\omega = \frac{y}{x}}$ οπότε

Γενική λύση $$x = \frac{c_1}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1}}$$

Δ4

Γ Κατηγορία Δ.Ε των οποίων το πρώτο μέλος είναι ολικό ή τέλειο διαφορικό συνάρτησης

Οι ΔΕ της μορφής $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ που το αριστερό μέλος τους είναι τέλειο διαφορικό συνάρτησης $f(x,y)$ ώστε:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow df(x,y) = 0 \Rightarrow f(x,y) = C$ (όπου C αυθαίρετη σταθερά) ανήκουν σε αυτή την κατηγορία.

▶ Προϋπόθεση ⟶ για να είναι η $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ τέλειο ή ολικό διαφορικό συνάρτησης πρέπει και αρκεί να είναι:

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ εάν ισχύει η σχέση τότε η ζητούμενη συνάρτηση $f(x,y)$ που είναι και η λύση της Δ.Ε δίδεται από τον τύπο:

$$\boxed{\int_0^x M(x,y)dx + \int_0^y N(x,y)dy = C}$$

(όπου C: αυθαίρετη σταθερά και το y στο πρώτο ολοκλήρωμα λαμβάνεται ως σταθερά)

▶ Παράδειγμα

Να λυθεί η Δ.Ε $(\eta\mu y + y\eta\mu x)dx + (x\sigma\upsilon\nu y - \sigma\upsilon\nu x)dy = 0$

ΛΥΣΗ

Προϋπόθεση: $\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \sigma\upsilon\nu y + \eta\mu x}$ (1) και $\boxed{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \sigma\upsilon\nu y + \eta\mu x}$ (2)

Άρα από (1) και (2) αποδεικνύεται ότι η Δ.Ε είναι τέλειο διαφορικό μιας συνάρτησης $f(x,y)$ η οποία δίδεται από τον τύπο:

$$\int_0^x M(x,y)dx + \int_0^y N(0,y)dy = C \Rightarrow \int_0^x (\eta\mu y + y\eta\mu x)dx + \int_0^y (0\sigma\upsilon\nu y - \sigma\upsilon\nu 0)dy = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x\eta\mu y - y\sigma\upsilon\nu x)\Big|_0^x + \int_0^y (-1)dy = C \Rightarrow (x\eta\mu y - y\sigma\upsilon\nu x) - (0\eta\mu y - y\sigma\upsilon\nu 0) - y\Big|_0^y = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\eta\mu y - y\sigma\upsilon\nu x + y - y = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x\eta\mu y - y\sigma\upsilon\nu x = C} \longleftarrow \text{Γενική λύση}$$

"ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ"

Μια διαφορική εξίσωση $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ δεν είναι πάντα τέλειο διαφορικό συνάρτησης. Μπορούμε όμως μερικές φορές να τη μετασχηματίσουμε σε τέλειο διαφορικό αρκεί να την πολλαπλασιάσουμε με ένα κατάλληλο παράγοντα. Έτσι μια συνάρτηση $K(x,y)$ λέγεται ολοκληρωτικός παράγοντας αν η εξίσωση

$$K(x,y)\cdot\left[f(x,y)dx + g(x,y)dy\right] = 0$$ είναι τέλειο διαφορικό συνάρτησης

Δ Γραμμικές Δ.Ε ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

- Γενική μορφή

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)}$$

→ ΛΥΣΗ

Παράγοντας ολοκλήρωσης της ανωτέρας μορφής είναι $K(x,y) = e^{\int f(x)dx}$

Πολλαπλασιάζουμε την $\frac{dy}{dx} + f(x)\cdot y = g(x)$ με $K(x,y)$ και έχουμε

$$K(x,y)\frac{dy}{dx} + f(x)\cdot y\cdot K(x,y) = K(x,y)\cdot g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[e^{\int f(x)\cdot dx}\right]\frac{dy}{dx} + f(x)\cdot y\cdot\left[e^{\int f(x)dx}\right] = \left[e^{\int f(x)dx}\right]\cdot g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\cdot\left[\left(e^{\int f(x)dx}\right)\cdot y\right]}{dx} = \left[e^{\int f(x)dx}\right]\cdot g(x).$$ Ολοκληρώνοντας τα δυο μέλη βρίσκουμε τη Γενική λύση

- Παράδειγμα

Να λυθεί η Δ.Ε $y' - 3y = 6$

ΛΥΣΗ

Παράγοντας ολοκλήρωσης $k(x,y) = e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$

Πολλαπλασιάζω την Δ.Ε με το παράγοντα ολοκλήρωσης και έχουμε:

$$e^{-3x}(y'-3y) = e^{-3x}\cdot 6 \Rightarrow e^{-3x}\cdot y' - e^{-3x}\cdot 3y = e^{-3x}\cdot 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d(y\cdot e^{-3x})}{dx} = e^{-3x}\cdot 6 \Rightarrow \int \frac{d(y\cdot e^{-3x})}{dx}\cdot dx = 6\int e^{-3x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int d(ye^{-3x}) = \frac{6}{-3}\int e^{(-3x)}\cdot d(-3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y\cdot e^{-3x}) = -2e^{-3x} + c \Rightarrow \boxed{y = -2 + c\cdot e^{3x}} \leftarrow \text{Γενική λύση}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθεί η Δ.Ε $\underline{x(1+y^2) + y(1+x^2)y' = 0}$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ ή $\frac{y}{1+y^2}dy = -\frac{x}{1+x^2}dx$

Στη τελευταία οι μεταβλητές χωρίσθηκαν, οπότε η γενική λύση αυτής βρίσκεται με ολοκλήρωση. Ολοκληρώνουμε και έχουμε:

$\int\frac{y}{1+y^2}dy = -\int\frac{x}{1+x^2}dx$ ή $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln c$ ή $\ln(1+y^2) = \ln\frac{c}{1+x^2}$

ή $1+y^2 = \frac{c}{1+x^2}$ και τελικώς $\boxed{(1+y^2)\cdot(1+x^2) = c}$. Αυτή είναι η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε.

---

2) Να λυθεί η ΔΕ $\underline{y' = x^2y^3}$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $\frac{dy}{dx} = x^2y^3$ ή $\frac{dy}{y^3} = x^2dx$

Στη τελευταία οι μεταβλητές χωρίσθηκαν, οπότε η γενική λύση βρίσκεται με ολοκλήρωση. Ολοκληρώνουμε και έχουμε:

$\int\frac{dy}{y^3} = \int x^2dx + c$ ή $\int y^{-3}dy = \frac{x^3}{3} + c$ ή $\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^3}{3} + c$ ή $-\frac{1}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + c$

ή $\boxed{[illegible]}$. Αυτή είναι η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε

3) Να λυθεί η Δ.Ε $(1+y^2)dx + x\cdot y\,dy = 0$

ΛΥΣΗ

Οι μεταβλητές χωρίζονται διότι γράφεται $xydy = -(1+y^2)dx$ ή $\frac{ydy}{1+y^2} = -\frac{dx}{x}$

οπότε με ολοκλήρωση προκύπτει η γενική λύση αυτής.

$$\int \frac{ydy}{y^2+1} = -\int \frac{dx}{x} \text{ ή } \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = -\ln x + \ln c \text{ ή } \ln\sqrt{y^2+1} = \ln\frac{c}{x} \text{ ή } y^2+1 = \frac{c}{x^2}$$

ή τελικώς $\boxed{x^2(y^2+1)=c}$

---

4) Να λυθεί η Δ.Ε $x\cdot y(1+x^2)y' = 1+y^2$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $x\cdot y(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 1+y^2$ ή $x\cdot y(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$, παρατηρώ ότι οι μεταβλητές χωρίζονται διότι η τελευταία γράφεται: $\frac{ydy}{y^2+1} = \frac{dx}{x(x^2+1)}$

Με ολοκλήρωση της τελευταίας έχουμε τη γενική λύση.

$$\int \frac{ydy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x(x^2+1)} \text{ ή } \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \int \frac{A dx}{x} + \int \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}dx$$ (υπολογίζω τα A, B, Γ. Έχω

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1} \text{ ή } 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + \Gamma x \text{ ή } 1 = (A+B)x^2 + \Gamma x + A$$ οπότε

$A+B=0$, $\Gamma=0$, $A=1$ άρα $B=-1$) Αντικαθιστώ τις τιμές των A, B, Γ και έχω

$$\ln\sqrt{y^2+1} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} \text{ ή } \ln\sqrt{y^2+1} = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln x \text{ ή }$$

$$\ln\sqrt{y^2+1} = \ln\frac{x\cdot c}{\sqrt{x^2+1}} \text{ ή } \sqrt{y^2+1} = \frac{xc}{\sqrt{x^2+1}}$$ ή τελικώς $\boxed{(x^2+1)(y^2+1) = x^2c}$

---

5) Να λυθεί η Δ.Ε $y = \ln\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ή $y = \ln y'$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $\frac{dy}{dx} = e^y$ ή $\frac{dy}{e^y} = dx$ ή $e^{-y}dy = dx$

Οι μεταβλητές χωρίστηκαν, οπότε η γενική λύση προκύπτει με ολοκλήρωση

$$\int e^{-y}dy = \int dx + c \text{ ή } \boxed{-e^{-y} = x+c}$$

Δ8

6) Να λυθεί η Δ.Ε $\theta(1+\rho^2)d\theta + \rho(1+\theta^2)d\rho = 0$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $\rho(1+\theta^2)d\rho = -\theta(1+\rho^2)d\theta$ παρατηρώ ότι οι μεταβλητές χωρίζονται διότι γράφεται $\frac{\rho\, d\rho}{1+\rho^2} = -\frac{\theta\, d\theta}{1+\theta^2}$. Η δε γενική λύση προκύπτει με ολοκλήρωση.

$\int \frac{\rho\, d\rho}{\rho^2+1} = -\int \frac{\theta\, d\theta}{1+\theta^2}$ ή $\frac{1}{2}\ln(\rho^2+1) = -\frac{1}{2}\ln(\theta^2+1) + \frac{1}{2}\ln c$ ή $\ln(\rho^2+1) = \ln\frac{c}{\theta^2+1}$

ή $\rho^2+1 = \frac{c}{\theta^2+1}$ ή τελικώς $\boxed{(\rho^2+1)\cdot(\theta^2+1) = c}$

7) Να λυθεί η Δ.Ε $e^{3x}\cdot e^{2y}\cdot dy - e^{-5y}dx = 0$

ΛΥΣΗ

Παρατηρώ ότι οι μεταβλητές χωρίζονται διότι γράφεται: $e^{3x}\cdot e^{2y}\cdot dy = e^{-5x}\cdot dx$ ή

ή $\frac{e^{2y}\cdot dy}{e^{-5y}} = \frac{dx}{e^{3x}}$ ή $e^{7y}dy = e^{-3x}dx$. Στην τελευταία οι μεταβλητές χωρίσθηκαν

$\int e^{7y}dy = \int e^{-3x}dx + c$ ή $\frac{1}{7}e^{7y} = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$ ή $\boxed{3e^{7y} + 7e^{-3x} = c}$ αυτή είναι η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε.

8) Να λυθεί η Δ.Ε $x^2dy - ydx = 0$ και να βρεθεί η μερική λύση αυτής η οποία για $x=2$ δίδει $y=4$ ή να ορισθεί η ολοκληρωματική καμπύλη (η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια ολοκληρωματικών καμπυλών) η διερχόμενη δια του σημείου Μ(2,4

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $x^2dy = ydx$ ή $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$ ή $\frac{dy}{y} = x^{-2}dx$. Οι μεταβλητές χωρίσθηκαν οπότε η γενική λύση προκύπτει με ολοκλήρωση.

$\int \frac{dy}{y} = \int x^{-2}dx + c$ ή $\ln y = \frac{x^{-1}}{-1} + c$ ή $\ln y = -\frac{1}{x} + c$ ή $y = e^{-\frac{1}{x}+c}$ ή $y = e^{c}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ ή

ή $\boxed{y = c\cdot e^{-\frac{1}{x}}}$ αυτή είναι η γενική λύση.

Για να βρεθεί η μερική ή ειδική λύση η οποία για $x=2$ δίδει $y=4$ ή να ορισθεί η ολοκληρωματική καμπύλη η διερχόμενη δια του σημείου Μ(2,4) πρέπει να ορισθεί μονοσήμαντα η αυθαίρετη σταθερά c. Θέτουμε στη γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε στα x και y τις τιμές αυτών $x=2$, $y=4$. Έχουμε $4 = c\cdot e^{-\frac{1}{2}}$ ή

$c = 4e^{\frac{1}{2}}$ ή $c = 4\sqrt{e}$. Εάν η τιμή αυτή της c τεθεί στη γενική λύση θα έχουμε τη ζητούμενη μερική λύση η οποία είναι $\boxed{y=4\sqrt{e}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}$

---

9) Να λυθεί η Δ.Ε $\underline{(1+e^x)yy'=e^x}$ και να βρεθεί η μερική λύση αυτής η οποία δια $x=1$ δίδει $y=1$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $(1+e^x)y\frac{dy}{dx}=e^x$. Παρατηρώ ότι οι μεταβλητές χωρίζονται διότι γράφεται $(1+e^x)ydy=e^xdx$ ή $ydy=\frac{e^xdx}{e^x+1}$. Στη τελευταία οι μεταβλητές χωρίσθηκαν οπότε η γενική λύση προκύπτει με ολοκλήρωση.

$\int ydy=\int\frac{e^xdx}{e^x+1}$ ή $\frac{y^2}{2}=\ln(e^x+1)+\ln c$ ή $y^2=2\ln(e^x+1)+\ln c$ ή $y^2=\ln(e^x+1)^2+\ln c$ ή $\boxed{y^2=\ln c(e^x+1)^2}$ αυτή είναι η γενική λύση. Για την εύρεση της μερικής λύσης θέτουμε εις την γενική λύση τις τιμές των x και y $x=1, y=1$ και έχουμε $1=\ln c(e^x+1)^2$ ή $c(e+1)^2=e$ ή $c=\frac{e}{(e+1)^2}$. Εαν η τιμή αυτή της c τεθεί εις τη γενική λύση θα έχουμε την ζητούμενη μερική λύση η οποία είναι : $\boxed{y^2=\ln\left[\frac{e}{(e+1)^2}\cdot(e^x+1)^2\right]}$

---

10) Να λυθεί η Δ.Ε $\underline{y'\eta\mu x=y\ln y}$ και να βρεθεί η μερική ή ειδική λύση η οποία δια $x=\frac{\pi}{2}$ δίδει $y=1$ ή να ορισθεί η ολοκληρωματική καμπύλη η διερχόμενη δια του σημείου $M(\frac{\pi}{2},1)$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $\frac{dy}{dx}\eta\mu x=y\ln y$. Οι μεταβλητές χωρίζονται. $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\eta\mu x}$

Η γενική λύση προκύπτει με ολοκλήρωση. $\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{\eta\mu x}$. Το ολοκλήρωμα $\int\frac{dy}{y\ln y}$ ολοκληρώνεται με δυο τρόπους.

► 1ος Τρόπος

Θέτουμε $\ln y=t$, οπότε $\frac{1}{y}dy=dt$ ή $dy=ydt$. Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$\int\frac{ydt}{y\cdot t}=\int\frac{dt}{t}=\ln t=\ln(\ln y)$

Δ10

► **2ος τρόπος**

$\int \frac{dy}{y\, \ell n y} = \int \frac{1}{\ell n y}\cdot\frac{dy}{y}$ το $\frac{dy}{y} = d\, \ell n y$ άρα έχουμε $\int \frac{1}{\ell n y}\cdot d\ell n y = \int \frac{d\ell n y}{\ell n y} = \ell n(\ell n y)$.

Το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\eta \mu x} = \ell n\, \epsilon \varphi \frac{x}{2}$ (ολοκληρώνεται αν θέσουμε $\epsilon\varphi\frac{x}{2} = \omega$)

επομένως η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε είναι $\ell n(\ell n y) = \ell n\, \epsilon\varphi\frac{x}{2} + \ell n c$ ή

ή $\ell n(\ell n y) = \ell n c \cdot \epsilon\varphi\frac{x}{2}$ ή $\ell n y = c\cdot \epsilon\varphi\frac{x}{2}$ ή $y = e^{c\cdot \epsilon\varphi\frac{x}{2}}$.

Για την εύρεση της μερικής λύσεως θέτουμε εις την γενική λύση τις τιμές των x και y $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$ και βρίσκουμε την τιμή της

c. $1 = e^{c\, \epsilon\varphi\frac{\pi}{4}}$ ή $1 = e^{c}$ ή $c = 0$ άρα η μερική λύση είναι $y = 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ — Ομογενής διαφορικής εξίσωσης ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ,

1) Να λυθεί η Δ.Ε $(x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

ΛΥΣΗ

Η δοθείσα είναι ομογενής διότι οι παραστάσεις $M(x,y) = x^2 - y^2$ και $N(x,y) = 2xy$ είναι ομογενείς ως προς x, y βαθμού ομογένειας δύο. Θέτουμε $\frac{y}{x} = \omega$ ή $y = x\cdot\omega$ ①

με $\omega = \omega(x)$. Παραγωγίζουμε την ① ως προς x και έχουμε $y' = \omega + x\omega'$.

Αντικαθιστώντας στη δοθείσα, αυτή γίνεται $(x^2 - x^2\omega^2) + 2x^2\omega(\omega + x\omega') = 0$

ή $x^2(1-\omega^2) + 2x^2\omega(\omega + x\omega') = 0$ με απλοποίηση με x^2 (διότι $x \neq 0$ λόγω της ①)

έχουμε $(1-\omega^2) + 2\omega(\omega + x\omega') = 0$ ή $1 - \omega^2 + 2\omega^2 + 2x\omega\frac{d\omega}{dx} = 0$ ή $1 + \omega^2 + 2x\omega\frac{d\omega}{dx} = 0$ ή

τελικώς $\frac{2\omega d\omega}{\omega^2+1} = -\frac{dx}{x}$. Με ολοκλήρωση έχουμε: $\ell n(\omega^2+1) = -\ell n x + \ell n c$ ή

ή $\ell n(\omega^2+1) = \ell n\frac{c}{x}$ ή $\omega^2 + 1 = \frac{c}{x}$. Θέτουμε $\omega = \frac{y}{x}$ και λαμβάνουμε τη γενική λύση

της δοθείσας Δ.Ε η οποία είναι $\boxed{y^2 + x^2 = cx}$

---

2) Να λυθεί η Δ.Ε $\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx - x\,dy = 0$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$. Η παράσταση $y + \sqrt{x^2+y^2}$ είναι ομογενούς βαθμού ομογένειας ένα. Επίσης η παράσταση x είναι ομογενής βαθμού ομογένειας ένα, άρα η παράσταση $\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ είναι ομογενής βαθμού ομογένειας μηδέν. Θέτουμε $\frac{y}{x} = \omega$

ή $y = x\omega$ ①. Παραγωγίζουμε την ① ως προς x και έχουμε $y'_x = \omega + x\omega'_x$.

Αντικαθιστούμε στη δοθείσα, οπότε αυτή γίνεται:

$\omega + x\omega'_x = \dfrac{x\cdot\omega + \sqrt{x^2+x^2\omega^2}}{x}$ ή $\omega + x\dfrac{d\omega}{dx} = \dfrac{x\omega + x\sqrt{1+\omega^2}}{x}$ ή

ή $\omega + x\dfrac{d\omega}{dx} = \omega + \sqrt{1+\omega^2}$ ή $x\dfrac{d\omega}{dx} = \sqrt{1+\omega^2}$ ή τελικώς $\dfrac{d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} = \dfrac{dx}{x}$

Με ολοκλήρωση έχουμε: $\displaystyle\int\frac{d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} = \ln x + \ln c$ ή $\ln(\omega+\sqrt{1+\omega^2}) = \ln c\cdot x$ ή

ή $\omega + \sqrt{1+\omega^2} = c\cdot x$. Θέτουμε $\omega = \dfrac{y}{x}$ και έχουμε τη γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε η οποία είναι $\boxed{y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2}$

Σημείωση $\longrightarrow$ Το $\displaystyle\int\frac{d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$ ολοκληρώνεται όταν θέσουμε $\sqrt{1+\omega^2} = t - \omega$

Να λυθεί η Δ.Ε $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^4 - 2x^3y}{x^4 - 2y^3x}$

ΛΥΣΗ

Είναι ομογενής διότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής της παράστασης $\dfrac{y^4-2x^3y}{x^4-2y^3x}$ είναι ομογενής βαθμού ομογένειας τέσσερα. Άρα η παράσταση $\dfrac{y^4-2x^3y}{x^4-2y^3x}$ είναι ομογενής βαθμού ομογένειας μηδέν. Θέτουμε $\dfrac{y}{x} = \omega$ ή $y = x\cdot\omega$ (1). Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και έχουμε $y' = \omega + x\omega'$ (2) Αντικαθιστώντας με την (1) και (2) η δοθείσα γίνεται $\omega + x\omega' = \dfrac{x^4\omega^4 - 2x^4\omega}{x^4 - 2x^4\omega^3}$ ή $\omega + x\dfrac{d\omega}{dx} = -\dfrac{\omega^4 - 2\omega}{1-2\omega^3}$ ή $x\dfrac{d\omega}{dx} = -\dfrac{\omega^4-2\omega}{1-2\omega^3} - \omega$ ή

ή $x\dfrac{d\omega}{dx} = \dfrac{-\omega^4 + 2\omega - \omega + 2\omega^4}{1-2\omega^3}$ ή $x\dfrac{d\omega}{dx} = \dfrac{\omega^4+\omega}{1-2\omega^3}$ ή $x\dfrac{d\omega}{dx} = -\dfrac{\omega^4+\omega}{2\omega^3-1}$ ή $\dfrac{(2\omega^3-1)d\omega}{\omega^4+\omega} = -\dfrac{dx}{x}$ ή

ή $\dfrac{3\omega^3 - \omega^3 - 1}{\omega(\omega^3+1)}d\omega = -\dfrac{dx}{x}$ ή $\left[\dfrac{3\omega^3}{\omega(\omega^3+1)} - \dfrac{\omega^3+1}{\omega(\omega^3+1)}\right]d\omega = -\dfrac{dx}{x}$ ή τελικώς $\dfrac{3\omega^2}{\omega^3+1}d\omega - \dfrac{1}{\omega}d\omega = -\dfrac{dx}{x}$

και με ολοκλήρωση έχουμε $\ln(\omega^3+1) - \ln\omega = -\ln x + \ln c$ ή $\ln\dfrac{\omega^3+1}{\omega} = \ln\dfrac{c}{x}$ ή

$\dfrac{\omega^3+1}{\omega} = \dfrac{c}{x}$. Θέτοντας $\omega = \dfrac{y}{x}$ βρίσκουμε τη γενική λύση της δοθείσας, η οποία είναι

$\boxed{x^3 + y^3 = cxy}$

4) Να λυθεί η Δ.Ε $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$

ΛΥΣΗ

Διαιρούμε δια του γινομένου xdx. Προκύπτει $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ ή $\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ η οποία είναι ομογενής. Θέτουμε $\frac{y}{x}=\omega$ ή $y = x\cdot\omega$ (1). Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και έχουμε $y' = \omega + x\omega'$. Αντικαθιστούμε και η εξίσωση γίνεται:

$\omega + x\omega' = \frac{x\omega + \sqrt{x^2+x^2\omega^2}}{x}$ ή $\omega + x\omega' = \omega + \sqrt{1+\omega^2}$ ή $x\omega' = \sqrt{1+\omega^2}$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = \sqrt{1+\omega^2}$

Εις την τελευταία οι μεταβλητές χωρίζονται διότι γράφεται: $\frac{d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{dx}{x}$ και με ολοκλήρωση προκύπτει $\ln(\omega+\sqrt{1+\omega^2}) = \ln x + \ln c$ ή $\omega + \sqrt{1+\omega^2} = cx$. Θέτουμε $\omega = \frac{y}{x}$ και έχουμε τη γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε. η οποία είναι

$y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2$ ή $\sqrt{x^2+y^2} = cx^2 - y$ ή $x^2+y^2 = c^2x^4 - 2cx^2y + y^2$ ή

ή $2cx^2y = c^2x^4 - x^2$ ή τελικώς $\boxed{2cy = c^2x^2 - 1}$ (απλοποιούμε δια x^2 διότι $x\neq 0$)

---

5) Να λυθεί η Δ.Ε $(x+y)dy - (x-y)dx = 0$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ είναι δε ομογενής. Θέτουμε $\frac{y}{x}=\omega$ ή $y=x\cdot\omega$ (1) Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και έχουμε $y' = \omega + x\omega'$ (2). Με αντικατάσταση του y με τη (1) και του y' με την (2) η εξίσωση γίνεται: $\omega + \omega' x = \frac{x - x\omega}{x+x\omega}$ ή $\omega + x\frac{d\omega}{dx} = \frac{1-\omega}{1+\omega}$ ή

ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{1-\omega}{1+\omega} - \omega$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{1-\omega-\omega-\omega^2}{1+\omega}$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{1-2\omega-\omega^2}{\omega+1}$ ή $\frac{(\omega+1)d\omega}{\omega^2+2\omega-1} = -\frac{dx}{x}$

και με ολοκλήρωση προκύπτει $\frac{1}{2}\ln(\omega^2+2\omega-1) = -\ln x + \ln c$ ή $\ln\sqrt{\omega^2+2\omega-1} = \ln\frac{c}{x}$

ή $\sqrt{\omega^2+2\omega-1} = \frac{c}{x}$. Θέτουμε $\omega = \frac{y}{x}$ οπότε προκύπτει η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε $\sqrt{y^2+2xy-x^2} = c$ ή τελικώς $\boxed{y^2+2xy-x^2=c}$

---

6) Να λυθεί η Δ.Ε $(x+2y)dx + ydy = 0$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+2y}{y}$ είναι δε ομογενής. Θέτουμε $\frac{y}{x}=\omega$ ή $y=x\cdot\omega$ (1)

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και έχουμε $y'_x = \omega + x\omega'_x$ (2)

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση οπότε αυτή γίνεται: $\omega + x\omega' = -\frac{x+2x\omega}{x\omega}$ ή $\omega + x\frac{d\omega}{dx} = -\frac{1+2\omega}{\omega}$

ή $x\frac{d\omega}{dx} = -\frac{1+2\omega}{\omega} - \omega$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{-1-2\omega-\omega^2}{\omega}$ ή $\frac{\omega\, d\omega}{\omega^2+2\omega+1} = -\frac{dx}{x}$ και με ολοκλήρωση

προκύπτει $\int\frac{\omega\, d\omega}{\omega^2+2\omega+1} = -\ln x + \ln c$ ή $\int \frac{\omega+1-1}{(\omega+1)^2}d\omega = \ln\frac{c}{x}$ ή $\int\frac{d\omega}{\omega+1} - \int\frac{d\omega}{(\omega+1)^2} = \ln\frac{c}{x}$ ή

ή $\ln(\omega+1) - \int(\omega+1)^{-2}d(\omega+1) = \ln\frac{c}{x}$ ή $\ln(\omega+1) - \frac{(\omega+1)^{-1}}{-1} = \ln cx$ ή $\ln(\omega+1)+\frac{1}{\omega+1} = \ln cx$

Θέτουμε $\omega = \frac{y}{x}$ οπότε προκύπτει η ζητούμενη γενική λύση η οποία είναι

$\ln\left(\frac{y}{x}+1\right) + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = \ln cx$ ή $\boxed{\ln\left(\frac{y+x}{x}\right) + \frac{x}{x+y} = \ln c\cdot x}$

---

7) Να λυθεί η Δ.Ε $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2\sqrt{x\cdot y}-x}$ είναι δε ομογενής. Θέτουμε $\frac{y}{x}=\omega$ ή $y = x\cdot\omega$ ①. Παραγωγίζουμε την ① ως προς x και έχουμε $y' = \omega + x\omega'$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση η οποία γίνεται

$\omega + x\omega' = \frac{x\omega}{2\sqrt{x^2\omega}-x}$ ή $\omega + x\frac{d\omega}{dx} = \frac{x\omega}{2x\sqrt{\omega}-x}$ ή $\omega + x\frac{d\omega}{dx} = \frac{\omega}{2\sqrt{\omega} -1}$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{\omega}{2\sqrt{\omega}-1} - \omega$ ή

ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{\omega - 2\omega\sqrt{\omega} - \omega}{2\sqrt{\omega}-1}$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{-2\omega\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\omega}-1}$ ή $\frac{(2\sqrt{\omega}-1)d\omega}{2\omega\sqrt{\omega}} = -\frac{dx}{x}$ και με ολοκλήρωση

έχουμε $\int\frac{(2\sqrt{\omega}-1)d\omega}{2\omega\sqrt{\omega}} = -\int\frac{dx}{x}$ ή $\int\frac{d\omega}{\omega} - \int\frac{d\omega}{2\omega\sqrt{\omega}} = -\ln x + \ln c$ ή $\ln\omega - \frac12\int\frac{d\omega}{\omega^{3/2}} = \ln\frac{c}{x}$ ή

ή $\ln\omega - \frac12\int\omega^{-\frac32}d\omega = \ln\frac{c}{x}$ ή $\ln\omega - \frac12\cdot\frac{\omega^{-1/2}}{-\frac12} = \ln\frac{c}{x}$ ή $\ln\omega + \frac{1}{\sqrt{\omega}} = \ln\frac{c}{x}$ Θέτουμε $\omega = \frac{y}{x}$

και βρίσκουμε τη γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε η οποία είναι: $\ln\frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{y/x}} = \ln\frac{c}{x}$ ή

ή $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \ln\frac{c}{x} - \ln\frac{y}{x}$ ή $\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln\frac{\frac{c}{x}}{\frac{y}{x}}$ ή τελικώς $\boxed{\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln\frac{c}{y}}$

---

8) Να λυθεί η Δ.Ε $(y^2-3x^2)dx + 2xy\,dy = 0$ και να βρεθεί η μερική λύση η οποία για $x=1$ δίδει $y=1$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-y^2}{2xy}$ είναι δε ομογενής. Θέτουμε $\frac{y}{x}=\omega$ ή $y = x\cdot\omega$ ①. Διαφορίζουμε την ① και έχουμε $dy = \omega\, dx + x\, d\omega$. Διαιρούμε δια dx οπότε: $\frac{dy}{dx} = \omega + x\frac{d\omega}{dx}$ ②

Δ14

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση η οποία γίνεται: $\omega + x\frac{d\omega}{dx} = \frac{3x^2 - x^2\omega^2}{2x^2\omega}$ ή $\omega + x\frac{d\omega}{dx} = \frac{3-\omega^2}{2\omega}$

ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{3-\omega^2}{2\omega} - \omega$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{3-\omega^2-2\omega^2}{2\omega}$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{3-3\omega^2}{2\omega}$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = -3\frac{\omega^2-1}{2\omega}$ ή

ή $\frac{2\omega d\omega}{\omega^2-1} = -3\frac{dx}{x}$ και με ολοκλήρωση έχουμε: $\int\frac{2\omega d\omega}{\omega^2-1} = -3\int\frac{dx}{x}$ ή $\ln(\omega^2-1) = -3\ln x + \ln c$

ή $\ln(\omega^2-1) = \ln\frac{c}{x^3}$ ή $\omega^2 - 1 = \frac{c}{x^3}$ Θέτουμε $\omega = \frac{y}{x}$ και βρίσκουμε τη γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε. Η δε γενική λύση είναι: $\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{c}{x^3}$ ή $\boxed{x(y^2 - x^2) = c}$

Για την εύρεση της μερική λύσεως, θέτουμε στην γενική λύση τις τιμές των x και y $(x=1, y=1)$ και ορίζουμε την c. Είναι δε $c=0$. Επομένως η μερική λύση είναι $x(y^2-x^2)=0$ ή $y^2 = x^2$ ή $\boxed{y = x.}$

---

9) Να λυθεί η ΔΕ $x\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{dy}{dx} = y\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{y}{x}\right) - x$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται: $\frac{dy}{dx} = \frac{y\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{y}{x}\right) - x}{x\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{y}{x}\right)}$. Είναι δε ομογενής διότι οι παραστάσεις $y\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{y}{x}\right) - x$ και $x\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{y}{x}\right)$ είναι ομογενείς βαθμού ομογένειας ένα. Άρα η παράσταση $\frac{y\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{y}{x}\right) - x}{x\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{y}{x}\right)}$ είναι ομογενής βαθμού ομογένειας μηδέν. Θέτουμε $\frac{y}{x} = \omega$ ή $y = x\cdot\omega$ ① Παραγωγίζουμε τη ① ως προς x και έχουμε $y' = \omega + x\omega'$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση η οποία γίνεται

$\omega + x\omega' = \frac{x\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x\omega}{x}\right) - x}{x\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x\omega}{x}\right)}$ ή $\omega + x\frac{d\omega}{dx} = \frac{\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega - 1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega - 1}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \omega$ ή

ή $x\frac{d\omega}{dx} = \frac{\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega - 1 - \omega\,\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ ή $x\frac{d\omega}{dx} = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega\, d\omega = -\frac{dx}{x}$ και με ολοκλήρωση έχουμε: $\int\sigma\upsilon\nu\omega\, d\omega = -\int\frac{dx}{x}$ ή $\eta\mu\omega = -\ln x + \ln c$ ή $\eta\mu\omega = \ln\frac{c}{x}$ ή $\omega = \text{τοξημ}\left(\ln\frac{c}{x}\right)$

Θέτουμε $\omega = \frac{y}{x}$ και έχουμε τη ζητούμενη γενική λύση: $\frac{y}{x} = \text{τοξημ}\left(\ln\frac{c}{x}\right)$ ή

ή $\boxed{y = x\,\text{τοξημ}\left(\ln\frac{c}{x}\right)}$

---

10) Να λυθεί η Δ.Ε $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $y' = \frac{x^2+y^2}{x\cdot y}$. Είναι δε ομογενής. Θέτουμε $\frac{y}{x} = \omega$ ή $y = x\cdot\omega$ ①

Παραγωγίζουμε την ① ως προς x και έχουμε:

$y'=\omega+x\omega'$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση, η οποία γίνεται: $\omega+x\omega'=\dfrac{x^2+x^2\omega^2}{x^2\omega}$ ή

ή $x\dfrac{d\omega}{dx}=\dfrac{1+\omega^2}{\omega}-\omega$ ή $x\dfrac{d\omega}{dx}=\dfrac{1+\omega^2-\omega^2}{\omega}$ ή $x\dfrac{d\omega}{dx}=\dfrac{1}{\omega}$ ή $\omega d\omega=\dfrac{dx}{x}$ και με ολοκλήρωση

έχουμε $\dfrac{\omega^2}{2}=\ln x+\ln c$ ή $\omega^2=2\ln x+2\ln c$ ή $\omega^2=\ln x^2+\ln c$ ή $\omega^2=\ln cx^2$. Θέτουμε $\omega=\dfrac{y}{x}$

και βρίσκουμε τη ζητούμενη γενική λύση η οποία είναι: $\boxed{y^2=x^2\ln cx^2}$

---

11) Να λυθεί η ΔΕ $\underline{xy'-y=\sqrt{y^2-x^2}}$

ΛΥΣΗ

Αυτή γράφεται $y'=\dfrac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}$. Είναι δε ομογενής. Θέτουμε $\dfrac{y}{x}=\omega$ ή $\underline{y=x\cdot\omega}$ (1).

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x, $y'=\omega+x\omega'$. Αντικαθιστούμε και η εξίσωση γίνεται:

$\omega+x\omega'=\dfrac{x\omega+\sqrt{x^2\omega^2-x^2}}{x}$ ή $\omega+x\dfrac{d\omega}{dx}=\dfrac{x\omega+x\sqrt{\omega^2-1}}{x}$ ή $\omega+x\dfrac{d\omega}{dx}=\omega+\sqrt{\omega^2-1}$ ή

ή $x\dfrac{d\omega}{dx}=\sqrt{\omega^2-1}$ ή $\dfrac{d\omega}{\sqrt{\omega^2-1}}=\dfrac{dx}{x}$ και με ολοκλήρωση έχουμε: $\ln(\omega+\sqrt{\omega^2-1})=\ln x+\ln c$ ή

ή $\omega+\sqrt{\omega^2-1}=cx$. Θέτουμε $\omega=\dfrac{y}{x}$ και βρίσκουμε τη ζητούμενη γενική λύση η οποία

είναι: $\dfrac{y}{x}+\sqrt{\dfrac{y^2}{x^2}-1}=cx$ ή $y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2$ ή $\sqrt{y^2-x^2}=cx^2-y$ ή $y^2-x^2=c^2x^4-2cx^2y+y^2$

ή $-x^2=c^2x^4-2cx^2y$ ή $\boxed{2cy=c^2x^2+1}$

---

12) Να λυθεί η Δ.Ε $\underline{xy'=y\ln\frac{y}{x}}$

ΛΥΣΗ

Η δοθείσα γράφεται: $y'=\dfrac{y\ln\frac{y}{x}}{x}$. Είναι δε ομογενής. Θέτουμε $\dfrac{y}{x}=\omega$ ή $\underline{y=x\cdot\omega}$ (1)

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x, $y'=\omega+x\omega'$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση η

οποία γίνεται: $\omega+x\omega'=\dfrac{x\omega\ln\omega}{x}$ ή $\omega+x\dfrac{d\omega}{dx}=\omega\ln\omega$ ή $x\dfrac{d\omega}{dx}=\omega\ln\omega-\omega$ ή

ή $\dfrac{d\omega}{\omega\ln\omega-\omega}=\dfrac{dx}{x}$ και με ολοκλήρωση έχουμε: $\displaystyle\int\frac{d\omega}{\omega(\ln\omega-1)}=\ln x+\ln c$ ή

$\displaystyle\int\frac{d\ln\omega}{\ln\omega-1}=\ln cx$ ή $\ln(\ln\omega-1)=\ln c\cdot x$ ή $\ln\omega-1=cx$ ή $\ln\omega=cx+1$ ή

ή $\omega=e^{cx+1}$ οπότε η ζητούμενη γενική λύση είναι $\boxed{y=x\cdot e^{cx+1}}$

►Σημείωση ⟶ Μια συνάρτηση $f(x,y,z,\ldots)$ λέγεται ομογενής βαθμού ομογένειας ν όταν θέσουμε $x=\kappa x$, $y=\kappa y$, $z=\kappa z,\ldots$ να έχουμε $f(\kappa x,\kappa y,\kappa z,\ldots)=\kappa^\nu f(x,y,z,\ldots)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Δ.Ε. των οποίων το πρώτο μέλος είναι ολικό ή τέλειο διαφορικό

1) Να λυθεί η Δ.Ε $(3x^2+4xy)dx+(2x^2+3y^2)dy=0$

ΛΥΣΗ

Είναι: $\frac{\partial M}{\partial y}=4x$ και $\frac{\partial N}{\partial x}=4x$ άρα $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Επομένως η δοθείσα είναι τέλειο διαφορικό και η γενική λύση αυτής δίδεται δια του τύπου:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy=C \quad \text{δηλαδή}: \int_0^x (3x^2+4xy)\,dx+\int_0^y (2\cdot 0+3y^2)\,dy=c$$

ή $\boxed{x^3+2x^2y+y^3=c}$

---

2) Να λυθεί η Δ.Ε $(3x^2+6xy)dx+(3x^2+3y^2)dy=0$

ΛΥΣΗ

Είναι $\frac{\partial M}{\partial y}=6x$ και $\frac{\partial N}{\partial x}=6x$ άρα $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Επομένως η δοθείσα είναι τέλειο διαφορικό και η γενική λύση αυτής δίδεται από τον τύπο:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy=C \quad \text{δηλαδή}: \int_0^x (3x^2+6xy)\,dx+\int_0^y (3\cdot 0+3y^2)\,dy=C$$

ή $\boxed{x^3+3x^2y+y^3=C}$

---

3) Να λυθεί η Δ.Ε $(\eta\mu y+y\,\eta\mu x)dx+(x\,\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu x)dy=0$

ΛΥΣΗ

Είναι $\frac{\partial M}{\partial y}=\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu x$ και $\frac{\partial N}{\partial x}=\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu x$ άρα $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Επομένως η δοθείσα είναι τέλειο διαφορικό και η γενική λύση αυτής δίδεται από τον τύπο:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy=C \quad \text{δηλαδή}: \int_0^x (\eta\mu y+y\,\eta\mu x)\,dx+\int_0^y (0\cdot\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu 0)\,dy=c$$

ή $x\,\eta\mu y-y\,\sigma\upsilon\nu x\Big|_0^x+\int_0^y(-1)\,dy=c$ ή $x\,\eta\mu y-y\,\sigma\upsilon\nu x-(0\,\eta\mu y-y\,\sigma\upsilon\nu 0)-y\Big|_0^y=c$

ή $x\,\eta\mu y-y\,\sigma\upsilon\nu x+y-y=c$ ή τελικώς $\boxed{x\,\eta\mu y-y\,\sigma\upsilon\nu x=c}$

---

4) Να λυθεί η Δ.Ε $(x+y)dx+(x-y)dy=0$

ΛΥΣΗ

Είναι $\frac{\partial M}{\partial y}=1$ και $\frac{\partial N}{\partial x}=1$ άρα $\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Επομένως η δοθείσα είναι τέλειο διαφορικό και η γενική λύση αυτής δίδεται από τον τύπο:

$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = c$ Δηλαδή: $\int_0^x (x+y)dx + \int_0^y (0-y)dy = c$

ή $\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=c$ ή τελικώς $\boxed{x^2+2xy-y^2=c}$

---

5) Να λυθεί η Δ.Ε $2xydy+(x^2+y^2)dx=0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $M(x,y)=x^2+y^2$, $N(x,y)=2xy$. Επομένως $\frac{\partial M}{\partial y}=2y$ και $\frac{\partial N}{\partial x}=2y$ άρα $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ δηλαδή η δοθείσα είναι τέλειο διαφορικό και η γενική λύση αυτής δίδεται από τον τύπο: $\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = c$ Δηλαδή: $\int_0^x (x^2+y^2)dx + \int_0^y 2\cdot 0\cdot y\cdot dy = c$

ή $\frac{x^3}{3}+y^2\cdot x\Big|_0^x = c$ ή τελικώς $\boxed{x^3+3x^2y=c}$

---

6) Να λυθεί η Δ.Ε $3y(x^2-1)dx+(x^3+8y-3x)dy=0$ και να βρεθεί η μερική λύση η οποία δια $x=0$ δίδει $y=0$ ή να ορισθεί η ολοκληρωματική καμπύλη η οποία διέρχεται δια του σημείου $M(0,0)$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $M(x,y)=3y(x^2-1)=3x^2y-3y$ και $N(x,y)=x^3+8y-3x$ άρα $\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2-3$ και $\frac{\partial N}{\partial x}=3x^2-3$ Επομένως $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ δηλαδή η δοθείσα είναι τέλειο διαφορικό και η γενική λύση αυτής δίδεται από τον τύπο: $\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = c$

Δηλαδή: $\int_0^x (3x^2y-3y)dx + \int_0^y (0+8y+0)dy = c$ ή $x^3y-3xy\Big|_0^x + 4y^2\Big|_0^y = c$

ή τελικώς $\boxed{x^3y-3xy+4y^2=c}$

Για την εύρεση της μερικής λύσεως η οποία δια $x=0$ δίδει $y=0$ ή για να ορίσουμε την ολοκληρωματική καμπύλη την διερχόμενη από το σημείο $M(0,0)$ θέτουμε τις τιμές $x=0, y=0$ στη γενική λύση και βρίσκουμε τις τιμές της c είναι δε $c=0$. Επομένως η μερική λύση είναι $\boxed{x^3y-3xy+4y^2=0}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Γραμμικές Δ.Ε ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

1) Να λυθεί η Δ.Ε $y'-2y=4$

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη Δ.Ε είναι της μορφής $y'+f(x)\cdot y=g(x)$ με $f(x)=-2$ και $g(x)=4$. Δηλαδή γραμμική Δ.Ε πρώτης τάξεως. Έτσι ένας παράγοντας παράγοντας ολοκληρώσεως είναι ο $e^{\int f(x)dx}=e^{\int -2dx}=e^{-2x}$ και πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της δοσμένης με τον παράγοντα ολοκλήρωσης έχουμε: $y' \cdot e^{-2x} - 2ye^{-2x} = 4 \cdot e^{-2x} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \frac{d(y \cdot e^{-2x})}{dx} = 4e^{-2x} \Longleftrightarrow \int \frac{d(y \cdot e^{-2x})}{dx} dx = \int 4 \cdot e^{-2x} dx \Longleftrightarrow \int d(y \cdot e^{-2x}) = -2\int -2e^{-2x} dx + c \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y \cdot e^{-2x} = -2\int d e^{-2x} + c \Longleftrightarrow y \cdot e^{-2x} = -2e^{-2x} + c \Longleftrightarrow y = -2 + \frac{c}{e^{-2x}} \Longleftrightarrow \boxed{y = c \cdot e^{2x} - 2}$$

---

2) Να λυθεί η Δ.Ε $y' - 3xy = x$

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη Δ.Ε είναι της μορφής $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ με $f(x) = -3x$ και $g(x) = x$. Δηλαδή γραμμική Δ.Ε πρώτης τάξεως. Έτσι ένα παράγοντας ολοκληρώσεως είναι ο $e^{\int f(x) \cdot dx}$. Υπολογίζουμε το $\int f(x) dx = \int -3dx = -\frac{3x^2}{2}$ και έτσι ο παράγοντας ολοκληρώσεως είναι ο $e^{-\frac{3x^2}{2}}$. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της δοσμένης Δ.Ε με τον ολοκληρωματικό παράγοντα παίρνω:

$$y' \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}} - 3xy \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}} = x \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}} \Longleftrightarrow \frac{d\left(y \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}}\right)}{dx} = x \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}} \Longleftrightarrow \int \frac{d\left(y \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}}\right)}{dx} dx = \int x \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}} dx$$

$$\Longleftrightarrow \int d\left(y \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}}\right) = \int -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}} dx \Longleftrightarrow y \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2} = -\frac{1}{3}\int d \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}} + c \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}} = -\frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{3x^2}{2}} + c \Longleftrightarrow y = -\frac{1}{3} + \frac{c}{e^{-\frac{3x^2}{2}}} \Longleftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3} + c \cdot e^{\frac{-3x^2}{2}}}$$

---

3) Να λυθεί η Δ.Ε $y' - 3y = 6$

ΛΥΣΗ

Ο παράγοντας ολοκλήρωσης είναι ο $I(x,y) = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$

Πολλαπλασιάζοντας τη Δ.Ε επί $I(x,y)$ έχουμε:

$$e^{-3x} \cdot y - 3e^{-3x} y = 6 \cdot e^{-3x} \quad \text{ή} \quad \frac{d(ye^{-3x})}{dx} = 6 \cdot e^{-3x}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x παίρνουμε τη λύση:

$$\int \frac{d}{dx}(ye^{-3x})dx = \int 6e^{-3x} dx \Longleftrightarrow ye^{-3x} = -2e^{-3x} + c \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{y = c \cdot e^{3x} - 2}$$

4) Να λυθεί η Δ.Ε $y' - 2xy = x$

ΛΥΣΗ

Ο παράγοντας ολοκλήρωσης είναι ο $I(x,y) = e^{\int -2x\,dx} \Rightarrow I(x,y) = e^{-x^2}$. Πολλαπλασιάζοντας τη Δ.Ε επί $I(x,y)$ βρίσκουμε: $e^{-x^2} y' - 2x\cdot e^{-x^2}\cdot y = x\cdot e^{-x^2}$ ή

$\frac{d[y\cdot e^{-x^2}]}{dx} = x\cdot e^{-x^2}$. Ολοκληρώνοντας έχουμε τη λύση:

$$\int \frac{d(ye^{-x^2})}{dx}dx = \int x\cdot e^{-x^2}\cdot dx \Leftrightarrow y\cdot e^{-x^2} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \Leftrightarrow \boxed{y = c\cdot e^{x^2} - \frac{1}{2}}$$

---

5) Να λυθεί η Δ.Ε $y' + (4/x)y = x^4$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $f(x) = \frac{4}{x}$ Άρα $\int f(x)dx = \int \frac{4}{x}dx = 4\ln|x| = \ln x^4$ και $I(x,y) = e^{\int p(x)dx} =$

$= e^{\ln x^4} = x^4$. Πολλαπλασιάζοντας την Δ.Ε επί $I(x,y)$ βρίσκουμε:

$x^4\cdot y' + 4x^3 y = x^8$ ή $\frac{d(yx^4)}{dx} = x^8$. Με ολοκλήρωση βρίσκουμε:

$yx^4 = \frac{1}{9}x^9 + c$ ή $\boxed{y = \frac{c}{x^4} + \frac{1}{9}x^5}$

---

6) Να λυθεί η Δ.Ε $y' + y = \sin x$ (όπου sin ⇒ ημ., cos ⇒ συν.)

ΛΥΣΗ

Έχουμε $f(x) = 1$ και άρα $I(x,y) = e^{\int 1dx} = e^x$. Πολλαπλασιάζοντας επί $I(x,y)$ τη ΔΕ βρίσκουμε: $e^x\cdot y' + e^x\cdot y = e^x \sin x$ ή $\frac{d(ye^x)}{dx} = e^x \sin x$. Ολοκληρώνοντας ως προς x (το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους βρίσκεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες) έχουμε:

$ye^x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$ ή $\boxed{y = ce^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x}$

---

7) Να λυθεί η Δ.Ε $y' - 5y = 0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $f(x) = -5$ και $I(x,y) = e^{\int(-5)dx} = e^{-5x}$. Πολλαπλασιάζοντας τη Δ.Ε επί $I(x,y)$ παίρνουμε την: $e^{-5x} y' - e^{-5x}\cdot y = 0$ ή $\frac{d(ye^{-5x})}{dx} = 0$ που με ολοκλήρωση δίδει: $y\cdot e^{-5x} = c$ ή $\boxed{y = c\cdot e^{5x}}$

8) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' + y = \sin x$, $y(\pi) = 1$.

ΛΥΣΗ

Από την άσκηση (6) γνωρίζουμε ότι η λύση της Δ.Ε είναι:

$y = c \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$. Η αρχική συνθήκη δίδει : $1 = c \cdot e^{-\pi} + \frac{1}{2}$ ή

ή $c = \frac{1}{2}e^{\pi}$. Συνεπώς : $y = \frac{1}{2}e^{\pi} \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \boxed{\frac{1}{2}\left(e^{\pi - x} + \sin x - \cos x\right)}$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λυθούν οι Δ.Ε

- (Α) $dy - y\,dx = x\,dx$
- (Β) $xy' + 3y = x^2$
- (Γ) $xy' + 2y = 3x$
- (Δ) $dy = 3y\,dx + x \cdot e^{3x}\,dx$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

1) <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΨΥΞΕΩΣ</u>

Σύμφωνα με το νόμο ψύξεως του Newton ή ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της θερμοκρασίας ενός σώματος είναι ανάλογη της διαφοράς των θερμοκρασιών του σώματος και του περιβάλλοντος. Ετσι, εάν T είναι η θερμοκρασία του σώματος και Tm η θερμοκρασία του περιβάλλοντος, τότε η ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της θερμοκρασίας του σώματος είναι dT/dt και $dT/dt=-k(T-Tm)$ ή

$$(dT/dt)+kT=kTm$$

όπου k η θετική σταθερή αναλογίας. Η σταθερή αναλογίας πρέπει να είναι θετική έτσι ώστε το dT/dt να είναι αρνητικό, όταν το $T-Tm$ είναι θετικό, οπότε το σώμα ψύχεται.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

Α) Μια μεταλλική ράβδος έχει θερμοκρασία 100° C, όταν τοποθετείται σε χώρο που έχει σταθερή θερμοκρασία 0° C. Εάν μετά από 20 min η θερμοκρασία της ράβδου είναι 50° C, υπολογίστε

α) το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει η ράβδος τους 25° C και

β) τη θερμοκρασία της ράβδου μετά 10 min.

Β) Τοποθετούμε ένα σώμα που έχει θερμοκρασία 50° C σ'ένα θάλαμο με σταθερή θερμοκρασία 100° C. Εάν σε 5 min η θερμοκρασία του σώματος είναι 60° C, υπολογίστε

α) σε πόσα λεπτά το σώμα έφτασε τους 75° C και

β) τη θερμοκρασία του σώματος σε 20 min.

Γ) Ένα σώμα με άγνωστη θερμοκρασία τοποθετείται σε ένα χώρο με σταθερή θερμοκρασία 30° C. Εάν μετά από 10 min η θερμοκρασία του σώματος είναι 0° C και μετά από 20 min είναι 15° C, υπολογίστε την άγνωστη αρχική θερμοκρασία του σώματος.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

2) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΥΞΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΜΕΙΩΣΕΩΣ

Εστω ότι η $N(t)$ παριστάνει την ποσότητα μιας ουσίας ή έναν πληθυσμό που αυξάνει ή μειώνεται. Εάν δεχτούμε ότι η ανά μονάδα χρόνου αύξηση dN/dt της ουσίας ή του πληθυσμού είναι ανάλογη της ποσότητας της ουσίας του πληθυσμού, τότε $dN/dt=kN$ ή

$$(dN/dt)-kN=0$$

όπου k είναι η σταθερή αναλογίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Α) Σ'ένα ραδιενεργό υλικό η ποσότητα που διασπάται (ακριβέστερα μεταστοιχειώνεται) ανά μονάδα χρόνου είναι ανάλογη της ολικής ποσότητας. Εάν αρχικά έχουμε 50mg (milligram) και μετά δύο ώρες έχει διασπαστεί το 10% της αρχικής μάζας, υπολογίστε

α) τη μάζα τη χρονική στιγμή t,

β) τη μάζα μετά τέσσερις ώρες και

γ) το χρόνο που χρειάζεται για να διασπαστεί η μισή μάζα.

Β) Μια βακτηριακή καλλιέργεια αυξάνεται ανάλογα με το μέγεθός της. Η καλλιέργεια παρατηρείται ότι έχει μετά από μία ώρα 1000 κλώνους βακτηρίων και μετά από τέσσερις ώρες 3000 κλώνους βακτηρίων. Υπολογίστε,

α) το πλήθος των κλώνων τη χρονική στιγμή t και

β) το πλήθος των κλώνων της καλλιέργειας αρχικά.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

3) <u>ΠΤΩΣΗ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΑΕΡΑ</u>

Θεωρουμε ένα σωμα μαζας m που πεφτει κατακορυφα κατω από την επιδραση της βαρυτητας και της αντιστασεως του αερα ,που είναι αναλογη της ταχυτητας του σωματος. Δεχομαστε ότι η επιταχυνση της βαρυτητας g και η μαζα είναι σταθερες και παιρνουμε για θετικη την προς τα κατω διευθυνση.Επομενως η συνισταμενη δυναμη που κινει το σωμα είναι $F=B-kv=mg-kv$ (1).

Όμως κατά το νομο του Newton: Η συνολικη δυναμη που προκαλει την κινηση του σωματος ισουται με την ανα μοναδα χρονου μεταβολη της ορμης δηλαδη $F=m.(dv/dt)$ (2).

Από την (1) και (2) εχουμε ότι

$$\mathbf{mg-kv=m.(dv/dt) \Rightarrow (dv/dt)+(k/m).v=g} \quad (3)$$

Η διαφορικη αυτή εξισωση είναι η εξισωση κινησεως του σωματος.

Εάν η αντισταση του αερα είναι αμελητεα, η δεν υπαρχει, τοτε $k=0$ και η (3) γινεται $\mathbf{(dv/dt)=g}$

Οταν $k>0$ η οριακη ταχυτητα οριζεται με την σχεση

$\mathbf{v=(mg)/k}$ απο την (3), αφου $(dv/dt)=0$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

Α) Ένα σώμα με μάζα 5kg αφήνεται από ύψος 100m να πέσει χωρίς αρχική ταχύτητα στη Γη. Εάν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, βρείτε

α) την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t

β) τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t

γ) πόσο χρόνο θα χρειαστεί το σώμα για να φθάσει στο έδαφος.

Β) Ένα σώμα με βάρος 64N (newton) εκτοξεύεται προς τα κάτω από ύψος 100m με αρχική ταχύτητα 10m/s. Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη προς την ταχύτητα του σώματος. Εάν η οριακή ταχύτητα του σώματος είναι 39.2m/s, βρείτε

α) την ταχύτητα του σώματος και

β) τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t.

ΑΕΝ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄

ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΧΑΔΑΛΗΣ Π.

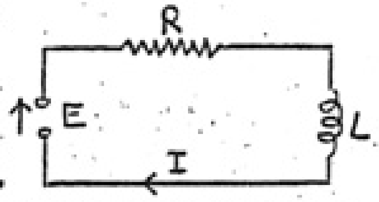
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

4) ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Η βασική εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο ροής ηλεκτρικού φορτίου σ΄ένα απλό κύκλωμα (Σχ. 1) με μια αντίσταση R (σε ohm), μια αυτεπαγωγή L (σε henry) και μια ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) E (σε volt) είναι

$$\mathbf{(dI/dt)+(R/L)I=(E/L)}$$

όπου I η ένταση του ρεύματος (σε ampere).



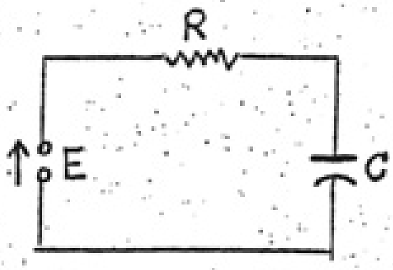
Σχ1

Σ΄ένα κύκλωμα (Σχ. 2) με αντίσταση R και χωρητικότητα C (σε farad) η αντίστοιχη εξίσωση είναι

$$\mathbf{(dq/dt)+(1/RC)q=(E/R)}$$

όπου q (σε coulomb) το ηλεκτρικό φορτίο του πυκνωτή. Μεταξύ των q και I ισχύει η σχέση

$$\mathbf{I=(dq/dt)}$$



Σχ2

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

A) Ένα κύκλωμα περιλαμβάνει μια αντίσταση 50Ω (ohm), μια αυτεπαγωγή 1H (henry) και μια πηγή με ΗΕΔ (ηλεκτρεγερτική δύναμη) 5V (volt). Υπολογίστε το ρεύμα τη χρονική στιγμή t, αν αρχικα είναι μηδέν.

B) Ένα κύκλωμα περιλαμβάνει μια πηγή με ΗΕΔ 400cos 2t V, μια αντίσταση 100Ω και μια χωρητικότητα 10^{-2} F (farad). Αρχικά ο πυκνωτής δεν έχει φορτίο. Υπολογίστε το ρεύμα τη χρονική στιγμή t.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

5) ΟΘΟΓΩΝΙΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

Θεωρούμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών στο επίπεδο xy που ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathbf{F(x,y,c)=0} \qquad (1)$$

όπου c είναι η παράμετρος. Το πρόβλημα είναι να βρούμε μια άλλη μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών, τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας (1)

$$\mathbf{G(x,y,k)=0} \qquad (2)$$

τέτοια ώστε κάθε καμπύλη της νέας οικογένειας (2) να τέμνει κάθετα κάθε καμπύλη της αρχικής οικογένειας (1).

Βρίσκουμε πρώτα τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τις καμπύλες της αρχικής οικογένειας. Παραγωγίζοντας την (1) ως προς x και απαλείφοντας την c μεταξύ της (1) και της εξισώσεως από την παραγώγιση παίρνουμε την

$$\mathbf{(dy/dx)=f(x,y)} \qquad (3)$$

Οι ορθογώνιες τροχιές της (1) είναι λύσεις της διαφορικής εξισώσεως

$$\mathbf{(dy/dx)=-[1/f(x,y)]} \qquad (4)$$

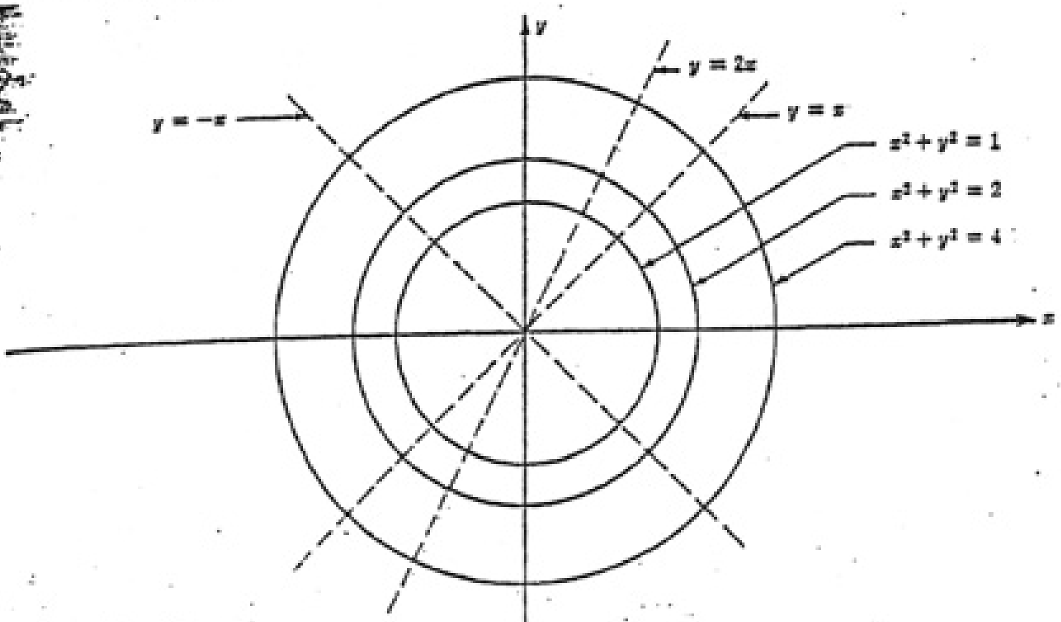
Για πολλές οικογένειες καμπυλών δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς dy/dx και να πάρουμε μια εξίσωση της μορφής (3).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

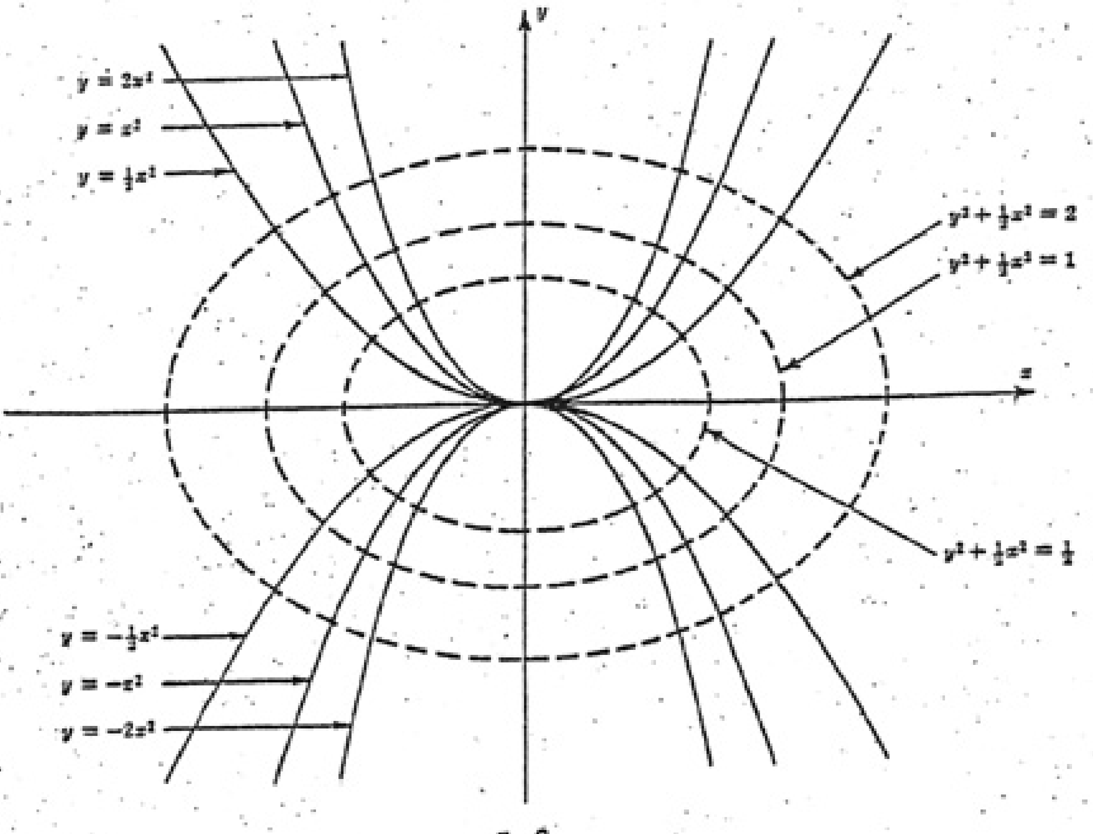
A) Βρείτε τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπυλών $x^2+y^2=c^2$. Βλεπε (Σχ. 1)

B) Βρείτε τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπυλών $y=cx^2$

Βλεπε (Σχ.2)



Σχ. 1



Σχ. 2