

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ  
ΙΔΡΥΜΑ  
ΛΑΡΙΣΑΣ

ΣΧΟΛΗ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ  
ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Τμήμα Πολιτικών Έργων Υποδομής

Εγχειρίδιο  
Αρχών και Μεθόδων  
στην  
**ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ**

Δρ Φιλοθέου Γ. Λόκκα  
Πολιτικού Μηχανικού ΕΜΠ  
Αντιπροέδρου ΤΕΙ Λάρισας  
Λάρισα, Οκτώβριος 2003

Αφιερώνεται  
στην ιερή μνήμη των γονέων μου  
Γεωργίου και Ευδοκίας

# Πίνακας Περιεχομένων

Πρόλογος.....	1
Εισαγωγή.....	2
<b>Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> – Βασικές έννοιες – Ορισμοί .....</b>	<b>4</b>
1 – Σκοπός της Αντοχής των Υλικών .....	4
2 – Η έννοια του φορέα.....	5
3 – Οι απλές καταπονήσεις .....	5
α – Εφελκυσμός ή θλίψη.....	6
β – Διάτμηση .....	6
γ – Στρέψη .....	7
δ – Κάμψη .....	7
ε – Λυγισμός.....	8
4 – Οι σύνθετες καταπονήσεις .....	8
5 – Εσωτερικές δυνάμεις.....	8
6 – Τάσεις.....	9
7 – Εντατική κατάσταση .....	10
8 – Επίπεδη ή διαξονική εντατική κατάσταση .....	11
α. Διερεύνηση της συνάρτησης $\sigma(\phi)$ .....	13
β. Διερεύνηση της συνάρτησης $\tau(\phi)$ .....	14
γ. Συμπεράσματα .....	16
9 – Ο κύκλος του Mohr .....	16
Παράδειγμα.....	19
<b>Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> – Ιδιότητες των υλικών .....</b>	<b>23</b>
1 – Ο νόμος του Hooke .....	23
2 – Το πείραμα του εφελκυσμού .....	24
3 – Τύποι διαγραμμάτων εφελκυσμού .....	28
α) Διαγράμματα με περιοχή αναλογίας & όριο διαρροής .....	29
β) Διαγράμματα με περιοχή αναλογίας χωρίς όριο διαρροής (Χαλκός, αλουμίνιο) .....	29
γ) Διαγράμματα ψαθυρών υλικών (Χυτοσίδηρος, γυαλί, σκυρόδεμα, ορείχαλκος).....	29
Παράδειγμα.....	30
4 – Το πείραμα της θλίψης.....	31
5 – Εγκάρσια παραμόρφωση .....	32

6 – Γενίκευση του νόμου του Hooke .....	33
7 – Γωνιακή παραμόρφωση .....	34
Παράδειγμα.....	35
8 – Συντελεστής ασφάλειας .....	37
Παράδειγμα.....	38
9 – Επίδραση της θερμοκρασίας .....	39
Παράδειγμα.....	40
10 – Ασκήσεις για λύση .....	41
<b>Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> – Εφελκυσμός – Θλίψη.....</b>	<b>43</b>
1 – Εφελκυσμός – Θλίψη, σαν καταπονήσεις.....	43
2 – Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις.....	44
3 – Παραμορφώσεις.....	45
4 – Έλεγχος αντοχής.....	45
5 – Οι τάσεις σε πλάγιες τομές.....	46
6 – Ο κύκλος Mohr σε μοναξονική εντατική κατάσταση .....	47
7 – Κυλινδρικά δοχεία με λεπτά τοιχώματα .....	48
8 – Παραδείγματα .....	50
9 – Στατικά αόριστα προβλήματα εφελκυσμού - θλίψης.....	56
Παραδείγματα.....	57
Ασκήσεις για λύση.....	81
<b>Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> – Διάτμηση.....</b>	<b>85</b>
1 – Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις.....	85
2 – Σύνθλιψη άντυγας οπών .....	86
3 – Έλεγχος αντοχής.....	87
4 – Προβλήματα διάτμησης .....	88
Ασκήσεις για λύση.....	91
<b>Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup> – Στρέψη.....</b>	<b>93</b>
1 – Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις γενικά .....	93
2 – Τάσεις – παραμορφώσεις σε κυλινδρικούς φορείς.....	95
2α – Προσδιορισμός της διατμητικής τάσης $\tau$ .....	95
2β – Προσδιορισμός της γωνίας στροφής $\phi$ .....	98
Παραδείγματα .....	98
3 – Έλεγχος αντοχής.....	103
4 – Στρέψη σε περιστρεφόμενους άξονες (ατράκτους).....	103
5 – Στρέψη ράβδων ΜΗ κυκλικής διατομής .....	105

α) Ορθογωνική διατομή.....	105
β) Τριγωνική διατομή.....	106
6 – Κλειστή διατομή λεπτού πάχους. Διατμητική ροή.....	107
α) Υπολογισμός των διατμητικών τάσεων.....	108
β) Έκφραση της γωνίας στροφής.....	108
Παράδειγμα.....	108
7 – Στρέψη ράβδων με λεπτή σωληνωτή διατομή.....	109
8 – Το πείραμα της στρέψης.....	110
9 – Ανελαστική δράση.....	112
Παράδειγμα.....	114
10 – Στατικά αόριστα προβλήματα.....	115
<b>Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup> – Κάμψη.....</b>	<b>116</b>
1 – Γενικά.....	116
2 – Η δοκός σα φορέας.....	116
3 – Οι στηρίξεις.....	118
4 – Εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις.....	119
5 – Τα φορτία διατομής.....	122
6 – Σήμανση και υπολογισμός των $N$ , $Q$ , $M$ ......	123
Παράδειγμα.....	125
7 – Βασικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών $q$ , $Q$ και $M$ .....	126
8 – Κατασκευή των διαγραμμάτων $Q$ και $M$ .....	128
9 - Παραδείγματα.....	131
10 – Γενικές παρατηρήσεις.....	142
11 – Δυσμενείς φορτίσεις.....	142
12 – Η κάμψη και οι εσωτερικές δυνάμεις.....	145
13 – Οι τάσεις.....	147
α – Οι ορθές τάσεις.....	147
β – Οι διατμητικές τάσεις.....	150
14 – Έλεγχος αντοχής.....	153
15 – Έλεγχος σε κάμψη.....	154
16 – Έλεγχος σε διάτμηση.....	155
17 – Παρατηρήσεις.....	156
18 – Παραδείγματα.....	157
19 – Οι παραμορφώσεις.....	161
20 - Παραδείγματα.....	164

21 – Οι παραμορφώσεις με τη μέθοδο της επιφανειακής ροπής.....	167
Παράδειγμα.....	169
22 – Στατικά αόριστα προβλήματα .....	171
23 – Η μέθοδος της επαλληλίας.....	174
24 – Η μέθοδος της επιφανειακής ροπής .....	175
25 – Ανελαστική κάμψη (χωρίς ισχύ του νόμου Hooke).....	178
26 – Σύνθετες δοκοί (δύο υλικών) .....	182
Παράδειγμα.....	185
27 – Διατμητική παραμόρφωση.....	186
<b>Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup> – Λυγισμός .....</b>	<b>188</b>
1 – Η έννοια του λυγισμού στα υποστυλώματα .....	188
2 – Η θεωρία και ο τύπος του Euler .....	189
Συμπεράσματα .....	193
3 – Επίδραση των συνθηκών στα άκρα του στύλου .....	194
4 – Βέλτιστοι τύποι υποστυλωμάτων.....	195
5 – Ελαστικός και πλαστικός λυγισμός.....	197
6 – Ο τύπος του Tetmayer .....	198
7 – Διερεύνηση – έλεγχος αντοχής .....	199
Παράδειγμα.....	200
8 – Η μέθοδος $\omega$ .....	205
Παράδειγμα.....	207
9 – Ράβδοι σύνθετης και πολυμελούς διατομής .....	209
α) Υπολογισμός ως προς τον άξονα x-x.....	209
β) Υπολογισμός ως προς τον άξονα y-y .....	210
<b>Κεφάλαιο 8<sup>ο</sup> – Παράρτημα .....</b>	<b>213</b>
1 – Η περίπτωση της καθαρής κάμψης.....	213
2 - Η Σχέση μεταξύ των δύο μέτρων ελαστικότητας E και G .....	214
3 – Η ορθή τάση σε ειδικές θέσεις διατομών .....	215
4 – Η σταθερά του Poisson.....	217
5 – Υπολογισμός της καμπυλότητας $1/\rho$ σε τυχόν σημείο της καμπύλης.....	219
6 – Σύντομη ιστορική αναδρομή του λυγισμού .....	220
<b>Πίνακες .....</b>	<b>223</b>

# Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό είναι καρπός του πακέτου ΠΕ<sub>1</sub> του «Προγράμματος Αναμόρφωσης Προπτυχιακών Σπουδών» του ΤΕΙ Λάρισας και γράφτηκε για να καλύψει ένα κενό που υπάρχει στο Τμήμα Πολιτικών – Έργων Υποδομής του Ιδρύματος, πάνω στο μάθημα της Αντοχής των Υλικών, από την έλλειψη αντίστοιχου διδακτικού συγγραμματος.

Καταβλήθηκε ξεχωριστή προσπάθεια ώστε να καλύψει την εγκριθείσα από το Τμήμα προβλεπόμενη διδακτέα ύλη, χωρίς να επεκτείνεται σε θέματα θεωρητικού ή εξεζητημένου χαρακτήρα, αφού το περιεχόμενο του μαθήματος, από τη φύση του είναι αχανές.

Σε ειδικές μόνο περιπτώσεις, όπου κρίθηκε απαραίτητο, έγινε ανάπτυξη ειδικών εννοιών ή αποδείξεων, είτε στο κυρίως κείμενο είτε στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, ώστε να γεφυρωθούν τα κενά των εννοιών ή σχέσεων που ήδη χρησιμοποιήθηκαν σαν απαραίτητες.

Για την καλύτερη κατανόηση σχετικά πολύπλοκων θεωρητικών κεφαλαίων, δόθηκαν εκλεκτικά αντίστοιχα παραδείγματα. Αυτό θεωρήθηκε ιδιαίτερα απαραίτητο για τα στατικά αόριστα προβλήματα εφελκυσμού, τα οποία, μαζί με ορισμένες άλλες προσθήκες, απετέλεσαν καρπό προσωπικών προσπαθειών, που καταβλήθηκαν κατά τη διάρκεια των καταλήψεων του Ιδρύματος στη μεταξύ Χριστουγέννων και Πάσχα 2007 περίοδο.

Γενικότερη όμως επιδίωξή μου, ήταν, τόσο η ανάπτυξη του θεωρητικού μέρους όσο και η παράθεση των αντιστοίχων σχημάτων να γίνουν με **απλότητα** και **σαφήνεια**, ώστε να βοηθήσουν στην καλύτερη αφομοίωση του μαθήματος από τους σπουδαστές.

Με την ελπίδα ότι οι παραπάνω στόχοι μου έχουν κατά ένα μεγάλο μέρος επιτευχθεί, παραδίδω το βιβλίο αυτό σε σπουδαστές αντιστοίχων τμημάτων ΤΕΙ και όχι μόνο, δεχόμενος κάθε καλόπιστη κριτική που θα μπορούσε να φανεί χρήσιμη μελλοντικά.

Δρ Φιλόθεος Γ. Λόκκας  
Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ  
Αντιπρόεδρος ΤΕΙ/Λάρισας

# Εισαγωγή

Η Αντοχή των Υλικών, που εμφανίστηκε σε υποτυπώδη μορφή μόλις πριν από δύο περίπου αιώνες και εξελίχτηκε ραγδαία κάτω από την πίεση των αναγκών που δημιούργησε η βιομηχανική επανάσταση και η υλική πρόοδος, πρόσφερε στο μηχανικό τη δυνατότητα να συμβιβάσει κατά τον πιο αρμονικό τρόπο τους αντιμαχόμενους παράγοντες της ασφάλειας και της οικονομίας, ανάμεσα στους οποίους για πολλούς αιώνες ριψοκινδύνευε η διαίσθηση των κατασκευαστών.

Εκείνο όμως που ουσιαστικά πέτυχε η Αντοχή των Υλικών είναι ότι έκανε την έννοια της ασφάλειας μέγεθος μετρήσιμο, μεταφέροντας έτσι τα θέματα της αντοχής και ευστάθειας των κατασκευών από τη διαίσθηση και εμπειρία στη Μαθηματική Ανάλυση και τη Γεωμετρία. Έτσι οι διαστάσεις των κατασκευών και οι απαιτούμενες ποσότητες των υλικών προσδιορίζονται όχι με βάση τους εμπειρικούς κανόνες, αλλά μαθηματικά κριτήρια, έτσι ώστε να είναι ακριβώς ή περίπου όσες χρειάζονται για να επιτευχθεί ο προορισμός τους, χωρίς επικίνδυνη έλλειψη ή αδικαιολόγητη σπατάλη. Με τον τρόπο αυτό ο Μηχανικός ξεφεύγει από τη θέση ενός εμπειρικού κατασκευαστή και έρχεται στο ύψος του επιστήμονα που εναρμονίζεται συνειδητά στη σπουδαία αρχή της οικονομίας της ύλης, η οποία αρχή φαίνεται να κυριαρχεί σε ολόκληρη τη δημιουργία.

Επιχειρώντας μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση της νέας επιστήμης αξίζει να αναφερθούμε για λίγο στους κυριότερους σταθμούς που επισημαίνουν την πρόοδο που συντελέστηκε. Μετά τις πρώτες αναζητήσεις του δαιμόνιου μηχανικού και καλλιτέχνη **Leonardo da Vinci** (1452–1519) πάνω στον τρόπο που αντιδρούν οι δοκοί στις φορτίσεις, ο πρώτος σημαντικός συγγραφέας πάνω στο θέμα αυτό υπήρξε ο **Galileo Galilei** (1564 –1642) διατυπώνοντας μια θεωρία στις δοκούς που αν και ανακριβής προσδιορίζει τη σχέση φορτίου και διατομής σε δοκό ίσης αντοχής.

Μεγάλο βήμα πρόοδου έγινε το 1678, όταν ανακοινώθηκε από τον **Robert Hooke** (1635–1702) ο νόμος της αναλογίας ανάμεσα στην παραμόρφωση και τη δύναμη με την επιγραμματική του διατύπωση *ut tensio, sic vis*. Ο νόμος αυτός είναι το σπουδαιότερο έρεισμα στο οποίο θεμελιώθηκε η μαθηματική θεωρία του ελαστικού σώματος και ολόκληρη η τεχνική θεωρία του υπολογισμού των κατασκευών. Άλλη αξιόλογη συμβολή έγινε το 1744 από τον **Johann Bernoulli** (1667–1748), Ελβετό Μαθηματικό από τη Βασιλεία, που διατύπωσε την αναλογία ανάμεσα στην καμπυλότητα της ελαστικής γραμμής και την καμπτική ροπή.

Μετά, ο **Leonard Euler** (1707–1783) εξετάζει την ελαστική ισορροπία των θλιβομένων ράβδων, βγάζοντας τους νόμους του ελαστικού λυγισμού που απασχόλησαν επίσης και τον **Lagrange** (1736-1813).

Το 1776 ο **Coulomb** (1736-1806) εξετάζει πάλι το πρόβλημα της κάμψης καθορίζοντας τη θέση της ουδέτερης γραμμής στις δοκούς και βγάζοντας θετικά συμπεράσματα από τη μελέτη κυλινδρικών ράβδων. Είναι ο πρώτος που διατύπωσε την έννοια της επιτρεπόμενης τάσης για κάθε υλικό και καθόρισε τα κριτήρια ασφάλειας ή αστοχίας τους. Το έργο του Coulomb συνέχισε και βελτίωσε ο **L.**



**Navier** (1785-1836) που βρήκε τους νόμους της κάμψης των δοκών και κατέγραψε τις γενικές εξισώσεις ελαστικότητας των στερεών χάρις στην έννοια του μέτρου ελαστικότητας που πρώτος έδωσε ο **Thomas Young** (1773-1829), πολυμαθής Άγγλος από το μικρό χωριό Milverton Somerset. Έτσι προετοιμάστηκε το έδαφος για τους ερευνητές του 19<sup>ου</sup> αιώνα.

Πολλά είναι τα ονόματα των ερευνητών που διετύπωσαν εργασίες μαθηματικού χαρακτήρα στο πρώτο μισό του αιώνα αυτού.

Στο δεύτερο μισό του 19<sup>ου</sup> αιώνα έγιναν νέες σοβαρές εργασίες μαθηματικού χαρακτήρα, που συναρμολογούνται τελικά με το γενικό τίτλο «Μαθηματική θεωρία της ελαστικότητας». Οι εργάτες τόσον της θεωρίας αυτής όσον και της σύγχρονης εποχής ήσαν πάρα πολλοί.

Είναι όμως άξιο προσοχής ότι ανάμεσα σε όλα αυτά τα ονόματα, τρία ήταν εκείνα που έδωσαν τη μεγάλη ώθηση και χάραξαν το σωστό δρόμο. **Hooke**, **Young** και **Navier**. Ο πρώτος ανακάλυψε το θεμελιώδη νόμο της ελαστικότητας πειραματιζόμενος σε ελατήρια. Ο δεύτερος παρατήρησε με προσοχή τα γεγονότα και προσπάθησε να τα συμπεριλάβει σε έναν εμπειρικό νόμο όπου εμφανίζονταν ένας συντελεστής, το μέτρο ελαστικότητας ή σταθερά του Young. Έτσι διατυπώθηκε ο νόμος του Hooke με τον τύπο  $\Delta l = \frac{P \cdot l}{F \cdot E}$ , ο οποίος όταν ήρθε στα χέρια του

μηχανικού Navier, έδωσε τις βάσεις μιας ολόκληρης επιστήμης. Η συνέχεια δεν ήταν τίποτα άλλο, παρά μια καθαρά διανοητική εργασία στο γραφείο που περιλάμβανε λύσεις διαφόρων εξισώσεων.

Για τους μηχανικούς δεν αρκεί να γνωρίζουν περιγραφικά πως κατασκευάζεται ένα έργο, πως υπολογίζονται οι διαστάσεις του, πως εξασφαλίζεται η αντοχή του, πως προϋπολογίζεται η δαπάνη του κλπ. Πρέπει οι ίδιοι να μπορούν να κάνουν με σιγουριά, δεξιότητα και ταχύτητα όλες τις σχετικές μελέτες και υπολογισμούς, πράγμα που προϋποθέτει αρκετή άσκηση και πείρα.

Η κατασκευή με την πάροδο του χρόνου γίνεται επιχείρηση ολοένα και πιο πολύπλοκη. Πολλά προβλήματα από όλους τους τομείς των Θετικών Επιστημών, αλλά και των Οικονομικών και της Φιλοσοφίας συγκλίνουν σε οποιοδήποτε τεχνικό θέμα και απαιτούν συνδυασμένη λύση, γρήγορη και εύστοχη, έτσι ώστε τελικά να προκύψει ένα τεχνικό έργο ασφαλές, χρήσιμο, ωραίο και οικονομικό.

Ο ρόλος της Αντοχής των Υλικών στην πολυσύνθετη αυτή προσπάθεια είναι αποφασιστικός και θεμελιώδης, αφού αυτή είναι βασικά υπεύθυνη και αρμόδια για τη στατική και δυναμική επάρκεια του έργου, που είναι ο πρώτος και κυριότερος όρος της ύπαρξής του.

Για αυτό δίκαια ο κλάδος αυτός της Εφαρμοσμένης Μηχανικής κατέχει την πρώτη θέση ανάμεσα στις πνευματικές αποσκευές των Μηχανικών, προσδιορίζοντας κατά μεγάλο μέρος την επιστημονική τους βαρύτητα και το βαθμό της επαγγελματικής τους φερεγγυότητας.

## Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>

### Βασικές έννοιες – Ορισμοί

#### 1 – Σκοπός της Αντοχής των Υλικών

Όπως είναι γνωστό, τα διάφορα υλικά που χρησιμοποιούμε σήμερα στις κατασκευές, δηλαδή μέταλλα, ξύλα, πέτρες κλπ, τότε μόνο είναι πρακτικά χρήσιμα και εξυπηρετούν τον προορισμό τους, όταν δεν απειλούνται με θραύση κάτω από την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων που καλούνται να αναλάβουν, αλλά αντιστέκονται αποτελεσματικά και μάλιστα κατά τέτοιον τρόπο, ώστε οι αναπόφευκτες παραμορφώσεις να μην υπερβαίνουν ορισμένα όρια, που είτε για αισθητικούς είτε για κατασκευαστικούς λόγους θα ήταν απαράδεκτα στην πράξη.

Μία δοκός πχ, που το βέλος κάμψης της θα ήταν τόσο μεγάλο ώστε να φαίνεται χωρίς ιδιαίτερη προσοχή, δεν είναι γενικά παραδεκτή στις κατασκευές. Το ίδιο και ένας άξονας μηχανής που έπαθε μικρή έστω παραμόρφωση από κάμψη, είναι απαράδεκτος για τη λειτουργία της.

Για τους παραπάνω λόγους είναι απαραίτητο να ξέρουμε μέχρι πιο όριο μπορούμε να φορτίζουμε ακίνδυνα τα διάφορα υλικά στις διάφορες καταπονήσεις που είναι δυνατόν να υποβληθούν.

Η Αντοχή των Υλικών, από πρακτική άποψη έχει κύρια σκοπό:

1. Να προσδιορίσει τα επικίνδυνα όρια φόρτισης των διαφόρων υλικών σε όλες τις δυνατές καταπονήσεις και με βάση αυτά να καθορίσει παραδεκτά όρια φόρτισης σε κάθε περίπτωση.
2. Να υπολογίσει τις διαστάσεις των μελών μιας κατασκευής κατά τέτοιον τρόπο ώστε αυτά να μπορούν με ασφάλεια – χωρίς δηλαδή κίνδυνο θραύσης ή υπερβολικών παραμορφώσεων – να αναλάβουν τα εξωτερικά φορτία.
3. Να υπολογίσει το μέγιστο φορτίο που είναι δυνατό να επιβάλουμε με ασφάλεια σε μια δοσμένη κατασκευή, ή ακόμη να ελέγξει κατά πόσο αυτή είναι ασφαλής κάτω από την ενέργεια δοσμένης φόρτισης (στατικός έλεγχος), ή τέλος να ελέγξει κατά πόσο οι παραμορφώσεις που θα εκδηλωθούν κάτω από την ενέργεια αυτής της φόρτισης, βρίσκονται μέσα στα ανεκτά όρια.

Το πρώτο πετυχαίνεται με πειράματα σε ειδικά Εργαστήρια Αντοχής Υλικών, ενώ το δεύτερο και το τρίτο πετυχαίνονται γενικά με υπολογισμούς άλλοτε απλούς και άλλοτε πολύπλοκους και δύσκολους ανάλογα με τη μορφή των φορτιζομένων σωμάτων και το είδος της καταπόνησης στο οποίο υποβάλλονται.

Στα επόμενα κεφάλαια θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των απλών σωμάτων που συναντάμε σε διάφορες κατασκευές απέναντι στις διάφορες καταπονήσεις που είναι δυνατόν να υποβληθούν.

## 2 – Η έννοια του φορέα

Ονομάζουμε φορέα κάθε κατασκευή που είναι προορισμένη να αναλάβει εξωτερικές δυνάμεις και να τις μεταφέρει με ασφάλεια στις στηρίξεις της.

Στην αντοχή των υλικών, φορείς είναι όλα τα στερεά σώματα που βρίσκονται σε ισορροπία κάτω από την επίδραση φορτίων. Τα σώματα αυτά είναι **ομοιογενή**, δηλαδή έχουν τις ίδιες φυσικές ιδιότητες σε όλα τα σημεία τους, και επί πλέον είναι **ισότροπα**, δηλαδή δείχνουν τα ίδια χαρακτηριστικά ελαστικότητας προς κάθε διεύθυνση.

Σε αντίθεση με τη Μηχανική – I (Στατική) που θεωρεί τα σώματα εντελώς απαραμόρφωτα, η Μηχανική – II (Αντοχή των Υλικών) θεωρεί τα σώματα παραμορφώσιμα, όπως άλλωστε είναι στην πραγματικότητα.

Αυτό σημαίνει ότι κάτω από την ενέργεια φορτίων παθαίνουν μεταβολές μηκών και γωνιών. Φυσικά ο προσδιορισμός του μεγέθους των μεταβολών αυτών, δηλαδή των παραμορφώσεων, είναι μια από τις βασικές δυνατότητες της αντοχής των υλικών όπως προαναφέρθηκε.

## 3 – Οι απλές καταπονήσεις

Όταν σε ένα φορέα που ισορροπεί ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, λέμε ότι αυτός **καταπονείται** ή ότι βρίσκεται σε εντατική κατάσταση.

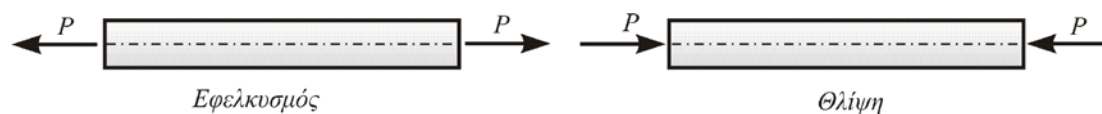
Όπως γνωρίζουμε από τη Στατική, σε κάθε στοιχείο ή μόριο ενός φορέα, πάνω στον οποίο ενεργούν φορτία, αναπτύσσονται **εσωτερικές** δυνάμεις. Στην πραγματικότητα, λόγω συνοχής του υλικού, σε κάθε ιδεατή τομή ενός στοιχείου του φορέα, τα γειτονικά μόρια του υλικού ασκούν μεταξύ τους στοιχειώδεις δυνάμεις. Οι συνισταμένες αυτών των στοιχειωδών δυνάμεων είναι οι παραπάνω εσωτερικές δυνάμεις που στη Στατική γνωρίσαμε ήδη σαν αξονικές, τέμνουσες κλπ. και προσδιορίζονται με βάση τις συνθήκες ισορροπίας.

Ο προσδιορισμός του μεγέθους τόσο των εσωτερικών δυνάμεων όσο και των παραμορφώσεων που προκαλούν, εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο οι εξωτερικές δυνάμεις ασκούνται πάνω στο φορέα.

Ορισμένοι τρόποι ενέργειας των δυνάμεων είναι χαρακτηριστικοί και αποτελούν τις λεγόμενες **απλές καταπονήσεις**, που είναι:

## α – Εφελκυσμός ή Θλίψη

Τέτοια καταπόνηση δημιουργείται από δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις που δρουν στον ευθύγραμμο άξονα του σώματος.



Σχ. 1.3.1

Κατά τον εφελκυσμό, δύο εγκάρσιες διαδοχικές διατομές του σώματος τείνουν να απομακρυνθούν μεταξύ τους ενώ κατά τη θλίψη τείνουν να πλησιάσουν.

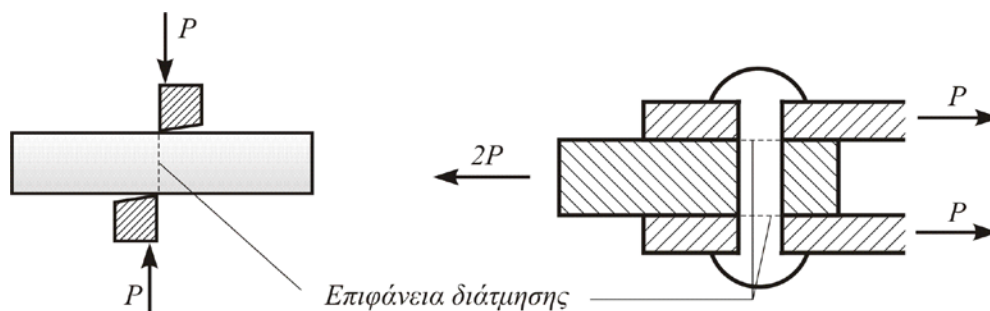
Αν οι δυνάμεις  $P$  δεν δρουν στον ευθύγραμμο κεντροβαρικό άξονα του σώματος, τότε έχουμε τον λεγόμενο **έκκεντρο** εφελκυσμό σε αντιδιαστολή από τον **κεντρικό** ή **αξονικό**.

Παραδείγματα εφελκυσμού είναι τα συρματόσχοινα των γερανών, οι βίδες, οι αλυσίδες, οι γρύλοι, τα υποστυλώματα κλπ.

## β – Διάτμηση

Όταν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον άξονα του σώματος σε απειροστή απόσταση μεταξύ τους, τότε έχουμε τη λεγόμενη καθαρή διάτμηση ή ψαλλιδισμό.

Η επίπεδη διατομή που βρίσκεται ανάμεσα στα φορτία (ή τα περιέχει) ονομάζεται επιφάνεια διάτμησης.



Σχ. 1.3.2

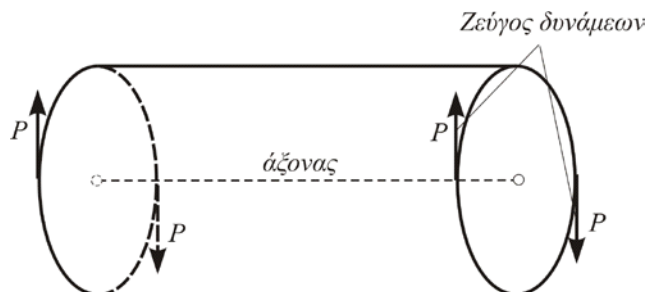
Χαρακτηριστικό στη διάτμηση είναι ότι δύο εγκάρσιες διαδοχικές διατομές του σώματος τείνουν να ολισθήσουν η μια πάνω στην άλλη.

Το φαινόμενο της διάτμησης παρουσιάζεται και γενικότερα, όταν οι δυνάμεις  $P$  απέχουν ικανή απόσταση μεταξύ τους.

Παραδείγματα καθαρής διάτμησης είναι το κόψιμο με ψαλίδι, οι ήλοι (καρφιά) κλπ.

### γ – Στρέψη

Τα φορτία που δημιουργούν τη στρεπτική καταπόνηση είναι δύο ζεύγη δυνάμεων, ίσα και αντίθετα, που ενεργούν σε επίπεδα κάθετα προς τον άξονα του σώματος.



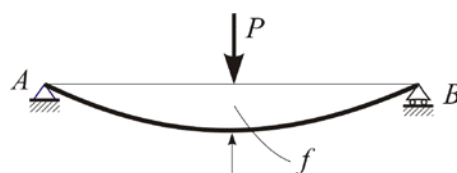
Σχ. 1.3.3

Χαρακτηριστικό στη στρέψη είναι ότι δύο εγκάρσιες διαδοχικές διατομές του σώματος τείνουν να περιστραφούν η μια ως προς την άλλη. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, οι αρχικά ευθύγραμμες γενέτειρες κυλινδρικού σώματος να μετασχηματίζονται σε ελικοειδείς γραμμές.

Παραδείγματα στρέψης έχουμε στη Μηχανολογία (άξονες, τρυπάνια, άτρακτοι κλπ.) και σπανιότερα σε τεχνικά έργα.

### δ – Κάμψη

Εδώ τα φορτία, είτε είναι συγκεντρωμένα είτε συνεχή, περιλαμβάνονται σε ένα μόνον επίπεδο που περιέχει και τον ευθύγραμμο άξονα του σώματος.



Σχ. 1.3.4

Η κάμψη σε ένα τμήμα του φορέα χαρακτηρίζεται σαν καθαρή ή γενική αν στο τμήμα αυτό εμφανίζονται αντίστοιχα μόνο καμπτικές ροπές ή καμπτικές ροπές και τέμνουσες δυνάμεις.

Χαρακτηριστικό στην κάμψη είναι ότι ο αρχικά ευθύγραμμος π.χ. άξονας του φορέα παίρνει καμπύλη μορφή με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ταυτόχρονα εφελκυσμός και θλίψη στις κατώτερες και ανώτερες αντίστοιχα ίνες του φορέα.

Η μέγιστη βύθιση του φορέα ονομάζεται βέλος κάμψης.

Παραδείγματα κάμψης έχουμε στις πλάκες των οικοδομών, στα δοκάρια, στους προβόλους, στα δόντια των οδοντωτών τροχών, στους μοχλούς κλπ.

## ε – Λυγισμός

Ο λυγισμός είναι μια ειδική περίπτωση θλίψης και εμφανίζεται όταν η ελάχιστη διάσταση της εγκάρσιας διατομής του ευθύγραμμου σώματος είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος του. Στην περίπτωση αυτή, αν η συνεχώς αυξανόμενη θλιπτική δύναμη φθάσει σε κάποια κρίσιμη τιμή, τότε το σώμα παίρνει απότομα καμπύλη μορφή.



Σχ. 1.3.5

Η θραύση γίνεται μετά από παραμόρφωση, που είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο λεπτότερο είναι το σώμα.

Ενώ λοιπόν ο λυγισμός μοιάζει σε παραμόρφωση με την κάμψη και σε τρόπο επιβολής των φορτίων με τη θλίψη, διαφέρει ριζικά και από τις δυο αυτές καταπονήσεις, αποτελώντας μια ξεχωριστή κατάσταση έντασης πολύ επικίνδυνη στις κατασκευές.

Παραδείγματα λυγισμού έχουμε στις θλιβόμενες ράβδους ορισμένων δικτυωμάτων, στα υποστυλώματα, στους διωστήρες (μπιέλες) μηχανών κλπ.

## 4 – Οι σύνθετες καταπονήσεις

Ένας φορέας μπορεί να καταπονείται ταυτόχρονα κατά διάφορους τρόπους. Πολύ συχνά συναντάμε π.χ. δοκούς που καταπονούνται σε κάμψη και διάτμηση (δοκοί), κάμψη και εφελκυσμό (ελκυστήρες), κάμψη και θλίψη (προεντεταμένοι φορείς), εφελκυσμό και διάτμηση (κοχλιοφόροι ήλοι) κλπ.

Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι ο φορέας εργάζεται σε **σύνθετη καταπόνηση**.

Οι απλές καταπονήσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω ισχύουν για ομαλή επιβολή των δυνάμεων πάνω στο φορέα. Όταν όμως η δύναμη ενεργεί πάνω στο φορέα βίαια – πράγμα που επιβαρύνει τα αποτελέσματα της δύναμης στο υλικό ανάλογα με την ορμή που δρα πάνω του – τότε μιλάμε για κρουστική καταπόνηση. Η δράση μπορεί τότε να εκδηλωθεί στο σώμα με οποιαδήποτε από τις απλές καταπονήσεις που αναφέρθηκαν.

Τα φορτία που δρουν στις διάφορες κατασκευές, με εξαίρεση το νεκρό βάρος της κατασκευής, σπανιότατα είναι μόνιμα και σταθερά. Έτσι τα ωφέλιμα ή κινητά φορτία αλλάζουν θέσεις και τιμές προκαλώντας έτσι εναλλασσόμενες επιβαρύνσεις από μια ελάχιστη μέχρι μια μέγιστη τιμή (**δυναμική καταπόνηση**).

## 5 – Εσωτερικές δυνάμεις

Οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν σε ένα φορέα που ισορροπεί δεν συνεπάγονται μόνον την ύπαρξη αντιδράσεων του στις θέσεις στήριξης.

Συνεπάγονται ταυτόχρονα και την ύπαρξη **εσωτερικών δυνάμεων**, που στην πιο απλή τους μορφή είναι μοριακές γιατί οφείλονται στη δράση των μορίων μεταξύ τους.

Φυσικά οι εσωτερικές αυτές δυνάμεις δε φαίνονται, εκτός αν χρησιμοποιηθεί η λεγόμενη μέθοδος των **τομών**.

Πραγματικά, αν σε ένα σώμα που ισορροπεί κάτω από ένα σύστημα δυνάμεων, προκαλέσουμε μια επίπεδη τομή (χωρίζοντάς το σε αριστερό και δεξιό), τότε το αριστερό πχ. τμήμα δεν θα ισορροπεί πια, επειδή οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω σ' αυτό και που γενικά δεν ισορροπούν, θα το θέσουν σε κίνηση.

Για την αποκατάσταση της ισορροπίας του θα πρέπει να εφαρμόσουμε στα μέρη της τομής κατάλληλες, σε τεράστιο αριθμό απειροελάχιστες δυνάμεις, που η συνισταμένη τους να είναι ίση και αντίθετη με τη συνισταμένη των δυνάμεων του δεξιού τμήματος.

Οι μοριακές αυτές δυνάμεις είναι οι καλούμενες εσωτερικές δυνάμεις του σώματος που γενικά είναι συνεχείς και ανομοιομορφες. Όμως για λόγους σκοπιμότητας, δεχόμαστε την κατανομή των παραπάνω δυνάμεων **ομοιόμορφη** σ' όλη την επιφάνεια της τομής.

## 6 – Τάσεις

Οι μοριακές δυνάμεις που αναφέραμε πιο πάνω σαν εσωτερικές, όταν υπολογίζονται στη μονάδα επιφάνειας που ασκούνται ονομάζονται **τάσεις**.

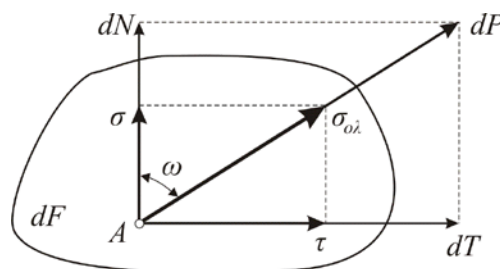
Αν θεωρήσουμε μια συγκεκριμένη επιφάνεια F και τη συνισταμένη P όλων των στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται από όλα τα μέρη της F πάνω στα γειτονικά τους, τότε θα ονομάζουμε τάση το μέγεθος:

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

Η σχέση αυτή, που δείχνει ότι η τάση είναι μέγεθος αντίστοιχο της πίεσης, προϋποθέτει όλες τις παραπάνω στοιχειώδεις δυνάμεις ίσες μεταξύ τους. Αν όμως αυτό δεν συμβαίνει, ορίζουμε σαν τάση, την έκφραση:

$$\sigma = \frac{dP}{dF}$$

όπου dF είναι απειροστή επιφάνεια και dP απειροστή δύναμη, συνισταμένη όλων των **ίσων** στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται από τα μέρη της επιφάνειας dF.



Σχ. 1.6

Θεωρούμε λοιπόν ότι η παραπάνω δύναμη  $dP$  ασκείται λοξά στο σημείο  $A$  της απειροστής επιφάνειας  $dF$  σχηματίζοντας γωνία  $\omega$  με την κάθετη στην επιφάνεια.

Αναλύοντας την  $dP$  σε μια δύναμη  $dN$  κάθετη στην  $dF$  και μια  $dT$  κείμενη στην  $dF$ , θα ονομάζουμε τις εκφράσεις:

$$\begin{aligned}\sigma_{ολ} &= \frac{dP}{dF} && \text{ολική τάση της επιφάνειας } dF \\ \sigma &= \frac{dN}{dF} && \text{ορθή τάση της επιφάνειας } dF \\ \tau &= \frac{dT}{dF} && \text{διατμητική τάση της επιφάνειας } dF\end{aligned}$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει ότι:

$$\sigma = \sigma_{ολ} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \quad \text{και} \quad \tau = \sigma_{ολ} \cdot \eta\mu\omega$$

Είναι φανερό ότι, γενικά, η  $\sigma_{ολ}$  και επομένως και οι συνιστώσες της  $\sigma$  και  $\tau$  θα αλλάξουν τιμή, αν η στοιχειώδης επιφάνεια αλλάξει διεύθυνση.

Πραγματικά, αν  $F_0$  είναι η προβολή της  $F$  σε επίπεδο κάθετο της  $P$ , είναι φανερό ότι η  $P$  δημιουργεί μια σταθερή ορθή τάση  $\sigma_0$  ( $P=F_0\sigma_0$ ). Αν επομένως η  $F$  στραφεί ώστε η προβολή της να γίνει  $F' < F_0$ , τότε η  $F'$  παραλαμβάνει νέα δύναμη  $P' = F'\sigma_0 < F_0\sigma_0 = P$ .

Άρα η νέα ολική τάση, θα είναι:

$$\sigma'_{ολ} = \frac{P'}{F} < \frac{P}{F} = \sigma_{ολ}$$

## 7 – Εντατική κατάσταση

Ονομάζουμε **εντατική κατάσταση** σε κάποιο σημείο ενός σώματος την εικόνα που παρουσιάζουν οι τάσεις σε **όλα** τα επίπεδα που περνάνε από το σημείο αυτό.

Θεωρούμε δηλαδή κάποια μοναδιαία επιφάνεια που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το σημείο  $\Sigma$  π.χ. του σώματος, οπότε για κάθε προσανατολισμό αυτής της επιφάνειας εξετάζουμε την εικόνα που εμφανίζει το διάνυσμα της ολικής τάσης  $\sigma_{ολ}$ , από την οποία εξαρτάται η ορθή και διατμητική τάση.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις εντατικής κατάστασης:

- α.** την αξονική ή μοναξονική εντατική κατάσταση
- β.** την επίπεδη ή διαξονική εντατική κατάσταση και
- γ.** τη χωρική ή τριαξονική εντατική κατάσταση

**Μονοαξονική** εντατική κατάσταση έχουμε όταν για κάθε προσανατολισμό της μοναδιαίας επιφάνειας γύρω από το σημείο  $\Sigma$ , το διάνυσμα της ολικής τάσης  $\sigma_{ολ}$  βρίσκεται πάνω στην ίδια σταθερή ευθεία. Στην περίπτωση π.χ. πρισματικής



ράβδου που καταπονείται αξονικά από δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις (θλίψη ή εφελκυσμός), η παραπάνω σταθερή ευθεία ταυτίζεται με τον άξονα της ράβδου.

**Επίπεδη ή διαξονική** εντατική κατάσταση έχουμε όταν για κάθε προσανατολισμό της μοναδιαίας επιφάνειας γύρω από το σημείο  $\Sigma$ , το διάνυσμα της ολικής τάσης  $\sigma_{ολ}$  βρίσκεται σταθερά πάνω στο ίδιο επίπεδο που ονομάζεται επίπεδο τάσεων. Τέτοια καταπόνηση συναντάμε στην πράξη, όταν το υλικό μιας κατασκευής υπόκειται στη σύγχρονη επίδραση αξονικού εφελκυσμού ή θλίψης, σε δυο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, όπως το κέλυφος ενός κυλινδρικού λέβητα λόγω των εσωτερικών πιέσεων.

**Χωρική ή τριαξονική** εντατική κατάσταση έχουμε όταν για κάθε προσανατολισμό της μοναδιαίας επιφάνειας γύρω από το σημείο  $\Sigma$ , το διάνυσμα της ολικής τάσης  $\sigma_{ολ}$  βρίσκεται σε οποιαδήποτε διεύθυνση στο χώρο, σχηματίζοντας μια κεντρική δέσμη ευθειών με κέντρο το  $\Sigma$ . Τέτοια καταπόνηση συναντάμε στο πείραμα του εφελκυσμού όταν εμφανίζεται ο λαϊμός θραύσης, στη σκληρομετρούμενη επιφάνεια ενός δοκιμίου ακριβώς κάτω από το διεισδυτή, στις εργοστασιακές πρέσες χυτών αντικειμένων, ή υλικών – όπως το αλουμίνιο – που υφίστανται ειδική επεξεργασία εξέλασης κλπ.

## 8 – Επίπεδη ή διαξονική εντατική κατάσταση

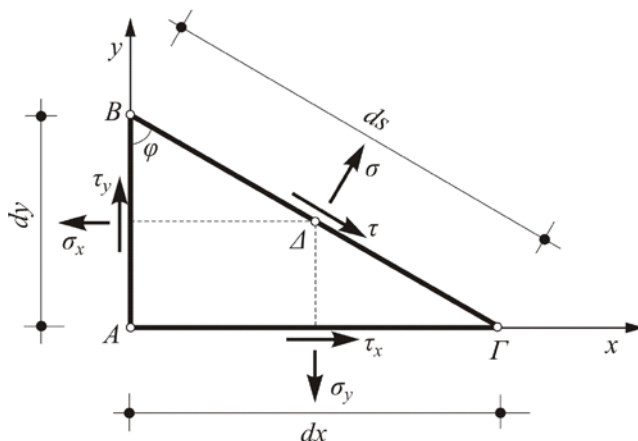
Στην ενότητα αυτή η μελέτη μεταβολής των τάσεων θα περιοριστεί μόνο στα επίπεδα που είναι κάθετα στο επίπεδο που σχηματίζουν οι εξωτερικές τάσεις. Δηλαδή οι στοιχειώδεις επιφάνειες που περνούν από το σημείο  $\Sigma$  του σώματος, ανήκουν σε μια αξονική δέσμη επιπέδων, όπου το σημείο  $\Sigma$  ανήκει στον άξονα, ο δε άξονας είναι κάθετος στο επίπεδο των τάσεων, που είναι το επίπεδο το οποίο ορίζουν οι εξωτερικές αξονικές δυνάμεις εφελκυσμού ή θλίψης, σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.

Για να γίνει δυνατή η περιγραφή της επίπεδης εντατικής κατάστασης θα πρέπει γενικά να είναι γνωστές οι ορθές και διατμητικές τάσεις σε δύο επίπεδα κάθετα μεταξύ τους. Με αυτό σαν προϋπόθεση είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι ορθές και διατμητικές τάσεις που αντιστοιχούν σε κάθε άλλο επίπεδο της δέσμης που θεωρήσαμε πιο πάνω.

Έστω λοιπόν  $A$  το σημείο του άξονα της δέσμης, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος 1.8.1 και δυο επίπεδα  $Ax$  και  $Ay$ , κάθετα μεταξύ τους αλλά και στο επίπεδο των τάσεων  $xAy$ . Στο σχήμα που ακολουθεί, ορίζουμε ως  $\sigma_y$ ,  $\tau_x$  και  $\sigma_x$ ,  $\tau_y$  τις ορθές και διατμητικές αντίστοιχα τάσεις των επιπέδων αυτών, των οποίων το πάχος θεωρείται μοναδιαίο (ο δείκτης δείχνει τον άξονα προς τον οποίο η τάση είναι παράλληλη).

Σε απειροστή απόσταση από το  $A$  θεωρούμε επίπεδο  $B\Gamma$ , πάλι μοναδιαίου πάχους, που σχηματίζει γωνία  $\phi$  με το επίπεδο  $Ay$ . Στο επίπεδο αυτό **ζητάμε να προσδιορίσουμε τις τάσεις που αναπτύσσονται**, δηλαδή την ορθή του τάση  $\sigma$ , καθώς και τη διατμητική του τάση  $\tau$ .

Στο στοιχειώδες τριγωνικό πρίσμα  $AB\Gamma$  που έχει δημιουργηθεί, μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε τις συνθήκες ισορροπίας, ξεκινώντας από το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των ροπών ως προς το σημείο  $\Delta$ .



Σχ. 1.8.1

$$(\Sigma M)_{\Delta}^{+} = 0 \quad \text{Άρα}$$

$$\tau_y \cdot dy \cdot dx/2 - \tau_x \cdot dx \cdot dy/2 = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_x = \tau_y .$$

$$\text{Έστω λοιπόν} \quad \tau_x = \tau_y = \tau_{xy} \quad (1)$$

Η σχέση (1) που είναι γνωστή σαν πρόταση του **Cauchy**, λέει ότι: οι διατμητικές τάσεις σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα είναι ίσες μεταξύ τους, και ή κατευθύνονται και οι δυο προς την κοινή ακμή των επιπέδων, ή απομακρύνονται απ' αυτήν.

Οι δύο άλλες εξισώσεις ισορροπίας της Στατικής, δίνουν:

$$\Sigma X^{\rightarrow+} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma \cdot d_s \cdot \text{συν}\phi + \tau \cdot d_s \cdot \eta\mu\phi - \sigma_x \cdot d_y + \tau_{xy} \cdot d_x = 0 \quad (2\alpha)$$

$$\Sigma Y^{\uparrow+} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma \cdot d_s \cdot \eta\mu\phi - \tau \cdot d_s \cdot \text{συν}\phi - \sigma_y \cdot d_x + \tau_{xy} \cdot d_y = 0 \quad (2\beta)$$

Εκφράζοντας τα  $d_x$  και  $d_y$  συναρτήσει των  $d_s$  και  $\phi$ , δηλαδή

$$d_x = d_s \cdot \eta\mu\phi \quad \text{και} \quad d_y = d_s \cdot \text{συν}\phi , \quad (3)$$

και αντικαθιστώντας τις (3) στις (2), μετά την απαλοιφή του  $d_s$  βρίσκουμε:

$$\sigma \cdot \text{συν}\phi + \tau \cdot \eta\mu\phi = \sigma_x \cdot \text{συν}\phi - \tau_{xy} \cdot \eta\mu\phi \quad (4\alpha)$$

$$\sigma \cdot \eta\mu\phi - \tau \cdot \text{συν}\phi = \sigma_y \cdot \eta\mu\phi - \tau_{xy} \cdot \text{συν}\phi \quad (4\beta)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη επί  $\text{συν}\phi$  και τη δεύτερη επί  $\eta\mu\phi$  και προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει:

$$\sigma = \sigma_x \cdot \text{συν}^2\phi + \sigma_y \cdot \eta\mu^2\phi - 2\tau_{xy} \cdot \eta\mu\phi \cdot \text{συν}\phi \quad (5)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την πρώτη επί  $\eta\mu\phi$  και τη δεύτερη επί  $\text{συν}\phi$  και αφαιρώντας κατά μέλη, προκύπτει:

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \eta\mu\phi \cdot \text{συν}\phi + \tau_{xy} (\text{συν}^2\phi - \eta\mu^2\phi) \quad (6)$$

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$2\eta\mu\phi \cdot \text{συν}\phi = \eta\mu 2\phi \quad \text{και}$$

$$\text{συν}^2\phi - \eta\mu^2\phi = \text{συν} 2\phi , \quad \text{από την οποία προκύπτουν οι}$$

$$\text{συν}^2\phi = (1 + \text{συν} 2\phi)/2 \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\phi = (1 - \text{συν} 2\phi)/2 ,$$

οι σχέσεις (5) και (6), μετά τις πράξεις, παίρνουν τη μορφή:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sigma \nu \nu 2\varphi - \tau_{xy} \eta \mu 2\varphi \quad (7)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \eta \mu 2\varphi + \tau_{xy} \sigma \nu \nu 2\varphi \quad (8)$$

Οι σχέσεις (7) και (8) είναι η τελική μορφή των τάσεων  $\sigma$  και  $\tau$  συναρτήσει των γνωστών τάσεων  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  και της μεταβλητής γωνίας  $\varphi$ .

Ας ζητήσουμε τώρα τις διευθύνσεις των επιπέδων στα οποία η ορθή και διατμητική τάση παίρνουν ακρότατες τιμές.

### α. Διερεύνηση της συνάρτησης $\sigma(\varphi)$

Οι ακρότατες τιμές της σχέσης (7) αντιστοιχούν, όπως είναι γνωστό, στις ρίζες της πρώτης παραγώγου της, δηλαδή:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 2\eta \mu 2\varphi - \tau_{xy} \cdot 2\sigma \nu \nu 2\varphi = 0. \quad (9)$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της (9) είναι το δεύτερο μέλος της (8), η οποία εκφράζει την τάση  $\tau$ . Άρα οι ακρότατες τιμές της  $\sigma$  προκύπτουν όταν η διατμητική τάση μηδενίζεται.

Συνεπώς στα επίπεδα όπου η ορθή τάση παίρνει ακραία τιμή, η αντίστοιχη διατμητική τάση μηδενίζεται. Από την (9) προκύπτει:

$$\sigma \varphi 2\varphi = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (10)$$

Αν  $\varphi_0$  είναι η μικρότερη γωνία του επιπέδου όπου η  $\sigma$  παίρνει ακραία τιμή, ικανοποιώντας τη σχέση (10), τότε παρατηρούμε ότι και το επίπεδο που είναι κάθετο στο προηγούμενο, σχηματίζοντας γωνία  $(\varphi_0 + \pi/2)$ , είναι και αυτό επίπεδο όπου η  $\sigma$  παίρνει ακραία τιμή, διότι:

$$\sigma \varphi 2(\varphi_0 + \pi/2) = \sigma \varphi 2(\varphi_0 + \pi) = \sigma \varphi 2\varphi_0 = -2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y) \quad (11)$$

Όστε λοιπόν στην αξονική δέσμη των επιπέδων που θεωρήσαμε αρχικά, υπάρχουν δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, που σχηματίζουν γωνίες  $\varphi_0$  και  $\varphi_0 + \pi/2$ , πάνω στα οποία η ορθή τάση  $\sigma$  παίρνει ακραίες τιμές, έστω  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ . Υποθέτουμε ότι  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

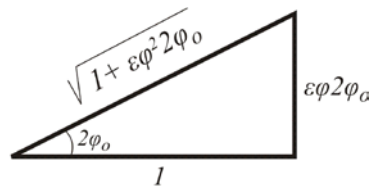
Τα επίπεδα αυτά ονομάζονται **κύρια**, και οι αντίστοιχες πάνω σ' αυτά ορθές τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  **κύριες**. Η  $\sigma_1$  είναι η μέγιστη κύρια τάση, ενώ  $\sigma_2$  η ελάχιστη.

Οι τιμές των τάσεων  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  βρίσκονται από τη σχέση (7), αν θέσουμε σ' αυτή  $\varphi = \varphi_0$  και  $\varphi = \varphi_0 + \pi/2$ , αντίστοιχα.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sigma \nu \nu 2\varphi_0 - \tau_{xy} \eta \mu 2\varphi_0 \quad (12)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sigma \nu \nu 2\varphi_0 + \tau_{xy} \eta \mu 2\varphi_0 \quad (13)$$

Στις σχέσεις (12) και (13) μπορούμε να απαλείψουμε τη γωνία  $\phi_0$ . Πραγματικά, αν στις σχέσεις :



Σχ. 1.8.2

$$\sigma_{\nu 2\phi_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon\phi^2 2\phi_0}} \quad \text{και} \quad \eta_{\mu 2\phi_0} = \frac{\varepsilon\phi 2\phi_0}{\sqrt{1 + \varepsilon\phi^2 2\phi_0}} \quad (14)$$

που προκύπτουν από το τρίγωνο του σχήματος 1.8.2, όπου η βάση θεωρείται μοναδιαία, αντικαταστήσουμε την τιμή της  $\varepsilon\phi 2\phi_0$  που παίρνουμε από τη σχέση (11), προκύπτει:

$$\sigma_{\nu 2\phi_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (15)$$

και

$$\eta_{\mu 2\phi_0} = -\frac{\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}{\sqrt{1 + \frac{4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (16)$$

Ήδη, θέτοντας τις τιμές των  $\sigma_{\nu 2\phi_0}$  και  $\eta_{\mu 2\phi_0}$  που προκύπτουν από τις σχέσεις (15) και (16) στις σχέσεις (12) και (13), μετά την εκτέλεση των πράξεων, βρίσκουμε

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (17)$$

που είναι και οι ζητούμενες ακραίες τιμές των ορθών τάσεων.

### β. Διερεύνηση της συνάρτησης $\tau(\phi)$

Οι ακρότατες τιμές της σχέσης (8), αντιστοιχούν προφανώς στις ρίζες της πρώτης παραγώγου, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\phi} = 0 &\Rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 2\sigma_{\nu 2\phi} - \tau_{xy} \cdot 2\eta_{\mu 2\phi} = 0 \\ &\Rightarrow \varepsilon\phi 2\phi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (18) \end{aligned}$$

Αν  $\phi_1$  είναι η μικρότερη γωνία ενός επιπέδου όπου η  $\tau$  παίρνει ακραία τιμή, ικανοποιώντας τη σχέση (18), τότε και το κάθετο σ' αυτό επίπεδο, που σχηματίζει γωνία  $(\phi_1 + \pi/2)$ , είναι επίσης επίπεδο όπου η  $\tau$  παίρνει ακραία τιμή, αφού:

$$\varepsilon\phi(2\phi_1 + \pi/2) = \varepsilon\phi(2\phi_1 + \pi) = \varepsilon\phi 2\phi_1 = (\sigma_x - \sigma_y)/2\tau_{xy} \quad (19)$$

Όστε λοιπόν στην ίδια αξονική δέσμη των επιπέδων που θεωρήσαμε, υπάρχουν επίσης δύο άλλα κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, που σχηματίζουν γωνίες  $\phi_1$  και  $(\phi_1 + \pi/2)$ , πάνω στα οποία η διατμητική τάση  $\tau$  παίρνει ακραίες τιμές, έστω  $\tau_{\max}$  και  $\tau_{\min}$ .

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (11) και (19), παρατηρούμε ότι:

$$\varepsilon\phi 2\phi_0 \cdot \varepsilon\phi 2\phi_1 = -1 \quad (20)$$

που είναι η συνθήκη καθετότητας μεταξύ των διευθύνσεων  $2\phi_0$  και  $2\phi_1$ . Επομένως θα είναι:

$$2\phi_0 - 2\phi_1 = \pm \pi/2 \quad \text{ή} \quad \phi_0 - \phi_1 = \pm \pi/4, \quad (21)$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι τα επίπεδα όπου η  $\tau$  παίρνει ακραίες τιμές, διχοτομούν τα κύρια επίπεδα.

Οι τιμές των  $\tau_{\max}$  και  $\tau_{\min}$  θα βρεθούν από τη σχέση (8), αν όπου  $\phi$  θέσουμε αντίστοιχα τις τιμές  $\phi_1$  και  $(\phi_1 + \pi/2)$ . Δηλαδή:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \eta\mu 2\phi_1 + \tau_{xy} \sigma\upsilon\nu 2\phi_1 \quad (22)$$

$$\tau_{\min} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \eta\mu 2\phi_1 - \tau_{xy} \sigma\upsilon\nu 2\phi_1 \quad (23)$$

Κάνοντας τώρα χρήση των σχέσεων (14), θέτοντας όπου  $\phi_0$  το  $\phi_1$  και αντικαθιστώντας την τιμή της  $\varepsilon\phi 2\phi_1$  από τη σχέση (19), έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 2\phi_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad \text{και} \quad \eta\mu 2\phi_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (24)$$

Θέτοντας ήδη τις τιμές των  $\sigma\upsilon\nu 2\phi_1$  και  $\eta\mu 2\phi_1$  από τις σχέσεις (24) στις σχέσεις (22) και (23), μετά την εκτέλεση των πράξεων, βρίσκουμε τις ζητούμενες ακραίες τιμές της διατμητικής τάσης:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (25)$$

$$\tau_{\min} = -\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (26)$$

Οι σχέσεις (17), που εκφράζουν τις κύριες τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ , γίνονται τώρα:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{\max} \quad (27)$$

Επίσης, η σχέση (7) που εκφράζει την ορθή τάση, για την περίπτωση ακρότατης διατμητικής τάσης, γίνεται, σε συνδυασμό με τις σχέσεις (24):

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (28)$$

Είναι πάντως αξιοσημείωτο, ότι στα επίπεδα όπου η διατμητική τάση παίρνει ακραίες τιμές, η αντίστοιχη ορθή τάση δεν μηδενίζεται, αλλά έχει την τιμή  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$  που δίνεται από τη σχέση (28).

### γ. Συμπεράσματα

Ανακεφαλαιώνοντας την έρευνα που παρουσιάστηκε στην επίπεδη εντατική κατάσταση, μπορούμε να εξάγουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Σε οποιοδήποτε σώμα που καταπονείται διαξονικά, υπάρχουν πάντοτε γύρω από κάθε σημείο δύο επίπεδα κάθετα μεταξύ τους, που ονομάζονται κύρια, πάνω στα οποία οι ορθές τάσεις παίρνουν ακραίες τιμές. Η μια απ' αυτές είναι η μεγαλύτερη, ενώ η άλλη η μικρότερη από όλες τις ορθές τάσεις που είναι δυνατόν να εμφανιστούν στα επίπεδα που περνούν από το σημείο αυτό.

2. Οι διατμητικές τάσεις στα κύρια επίπεδα είναι μηδενικές.

3. Οι διατμητικές τάσεις παίρνουν τις ακραίες τιμές τους σε επίπεδα που διχοτομούν τα κύρια.

4. Σε δυο οποιαδήποτε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, οι διατμητικές τάσεις που είναι κάθετες προς την κοινή ακμή των επιπέδων αυτών είναι πάντα ίσες και, ή διευθύνονται και οι δυο προς την κοινή ακμή, ή απομακρύνονται απ' αυτήν.

## 9 – Ο κύκλος του Mohr

Απαλείφοντας τη γωνία  $\phi$  στις σχέσεις (7) και (8), δηλαδή υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sigma \nu^2 2\phi + \tau_{xy}^2 \cdot \eta \mu^2 2\phi - 2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sigma \nu 2\phi \cdot \tau_{xy} \cdot \eta \mu 2\phi \quad (7')$$

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \eta \mu^2 2\phi + \tau_{xy}^2 \cdot \sigma \nu^2 2\phi + 2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \eta \mu 2\phi \cdot \tau_{xy} \cdot \sigma \nu 2\phi \quad (8')$$

---


$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (\alpha)$$

Η σχέση (α), αναφερόμενη σε ορθογώνιους άξονες  $\sigma$  και  $\tau$ , παριστάνει περιφέρεια κύκλου που έχει:

- συντεταγμένες κέντρου  $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ , 0 και

- ακτίνα  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ .

Ο κύκλος αυτός ονομάζεται κύκλος τάσεων του Mohr<sup>1</sup>.

Σημειώνεται ότι **μόνο** για την κατασκευή του κύκλου του Mohr η διατμητική τάση είναι θετική όταν τείνει να περιστραφεί δεξιόστροφα ως προς ένα εσωτερικό σημείο του στοιχειώδους πρίσματος.

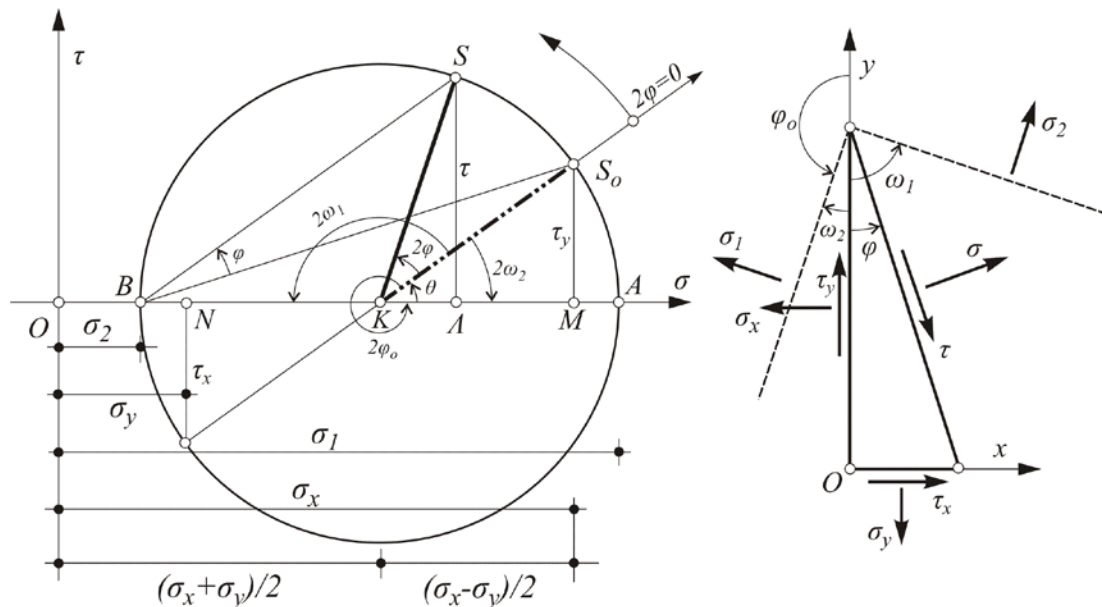
**Κατασκευή**

Πάνω στον άξονα σ παίρνω τμήμα OM = σ<sub>x</sub> και ON = σ<sub>y</sub>. Συνεπώς το μέσον K του τμήματος NM, που έχει συντεταγμένες (σ<sub>x</sub> + σ<sub>y</sub>)/2 και 0, θα είναι το κέντρο του κύκλου του Mohr.

Στο άκρο M του τμήματος OM = σ<sub>x</sub>, παίρνω, κάθετα προς τα πάνω, τμήμα MS<sub>0</sub> ίσο με τη διατμητική τάση τ<sub>y</sub>, η οποία είναι θετική ως δεξιόστροφη προς εσωτερικό σημείο του πρίσματος στο Σχ. 1.9.1. Το τμήμα KS<sub>0</sub> είναι η ακτίνα του κύκλου Mohr, διότι:

$$KS_0 = \sqrt{(KM)^2 + (MS_0)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_y^2} = R$$

Με κέντρο το K και ακτίνα KS<sub>0</sub> γράφω την περιφέρεια του κύκλου του Mohr, που τέμνει τον άξονα σ στα σημεία A ≡ σ<sub>1</sub> και B ≡ σ<sub>2</sub>.



Σχ. 1.9.1

Η ακτίνα KS<sub>0</sub>, της οποίας το άκρο έχει συντεταγμένες που αντιστοιχούν στις τάσεις σ<sub>x</sub>, τ<sub>y</sub> του μοναδιαίου πάχους) επιπέδου Oγ, από όπου μετράται η γωνία φ στο πρίσμα, είναι η αφετηρία ομόφορης μέτρησης της επίκεντρης γωνίας 2φ στον κύκλο. Έτσι προκύπτει το σημείο S, οι συντεταγμένες του οποίου εκφράζουν

<sup>1</sup> **Otto Christian Mohr** (1835 - 1918): Φημισμένος Γερμανός Μηχανικός που ανέπτυξε τη θεωρία του ομόνυμου κύκλου του το 1882.

αντίστοιχα την ορθή και διατμητική τάση που εμφανίζονται στο τυχόν επίπεδο του πρίσματος (βλ. δεξιό σχήμα).

### Απόδειξη

Αν  $\sigma$  και  $\tau$  είναι οι συντεταγμένες του  $S$ , θα είναι:

$$\begin{aligned}\sigma &= OL = OK + KL = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \sin(\theta + 2\varphi) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \sin\theta \cdot \sin 2\varphi - R \eta \mu\theta \cdot \eta \mu 2\varphi = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \sin 2\varphi - R \frac{\tau_y}{R} \eta \mu 2\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_y \eta \mu 2\varphi ,\end{aligned}$$

που είναι η σχέση (7) της Ενότητας 8.

Με παρόμοιο τρόπο, θα είναι:

$$\begin{aligned}\tau &= \Lambda S = R \eta \mu(\theta + 2\varphi) = R \eta \mu\theta \cdot \sin 2\varphi + R \sin\theta \cdot \eta \mu 2\varphi = \\ &= R \frac{\tau_y}{R} \sin 2\varphi + R \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \eta \mu 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \eta \mu 2\varphi + \tau_y \sin 2\varphi ,\end{aligned}$$

που είναι η σχέση (8) της ίδιας Ενότητας 8.

Αν  $2\omega_1$  ή  $2\omega_2$  είναι η επίκεντρη ομόφορη γωνία που αντιστοιχεί στο καθένα από τα δύο κύρια επίπεδα με τάσεις  $\sigma_1$  ή  $\sigma_2$  όπως ορίστηκε πριν, με τη βοήθεια του κύκλου του Mohr μπορούμε εύκολα να λύσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα επίπεδης εντατικής κατάστασης.

Συγκεκριμένα, αν δοθούν τρία από τα μεγέθη  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  μπορούμε εύκολα να καθορίσουμε τα υπόλοιπα τέσσερα με τη βοήθεια καταλλήλων γεωμετρικών κατασκευών.

Αν οι διδόμενες τάσεις  $\sigma_x$  και  $\sigma_y$  είναι οι κύριες τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ , οπότε  $\tau_{xy} = 0$ , οι σχέσεις (7) και (8) απλοποιούνται στις:

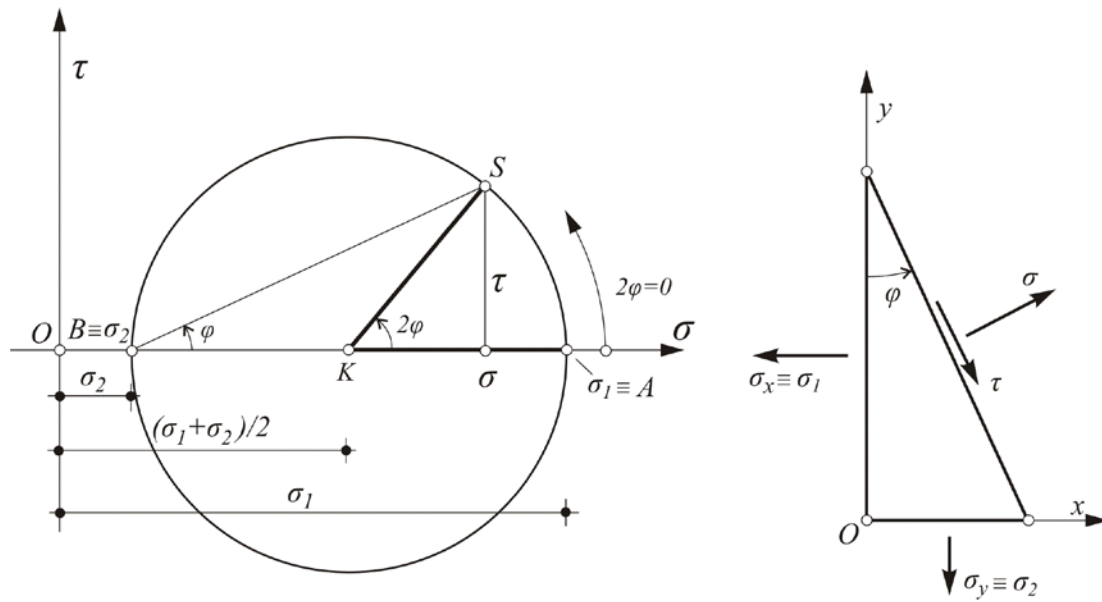
$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi \quad (7'')$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \eta \mu 2\varphi , \quad (8'')$$

οπότε η αντίστοιχη κατασκευή του κύκλου του Mohr, με σκέψεις ανάλογες με την προηγούμενη, απλουστεύεται σημαντικά.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η αφετηρία μέτρησης της επίκεντρης ομόφορης γωνίας  $2\varphi$  είναι ο άξονας  $K\sigma_1$ , επειδή το τυχόν επίπεδο του πρίσματος στρέφεται αριστερόστροφα κατά γωνία  $\varphi$  από το κύριο επίπεδο  $Oy$  που δέχεται την κύρια τάση  $\sigma_1$ .





Σχ. 1.9.2

**Παράδειγμα**

Σε στοιχείο που καταπονείται διαξονικά (Σχ. 1.9.3), οι τάσεις που εμφανίζονται είναι:  $\sigma_x = -5 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 1 \text{ MPa}$  και  $\tau_{xy} = 4 \text{ MPa}$ , όπου:

**1 MPa** =  $10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 100.000 \text{ kg}/10.000 \text{ cm}^2 = \mathbf{10 \text{ kg/cm}^2}$ .

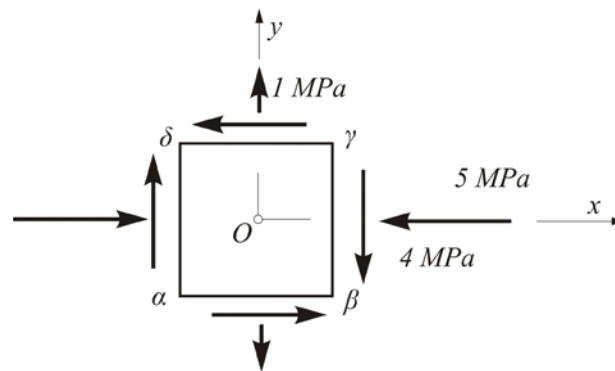
**Ζητούνται:**

α) Να κατασκευαστεί ο κύκλος του Mohr που παριστάνει την παραπάνω εντατική κατάσταση. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας παράλληλα και αναλυτικές σχέσεις, να προσδιοριστούν:

β) Οι κύριες τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  καθώς και η απαιτούμενη στροφή του στοιχείου που αντιστοιχεί σ' αυτές.

γ) Οι τάσεις  $\sigma$  και  $\tau$ , που εμφανίζονται σε στοιχείο που στρέφεται αριστερόστροφα κατά γωνία  $\theta = 45^\circ$  και

δ) Οι ακρότατες τιμές της διατμητικής τάσης  $\tau_{\max}$  και  $\tau_{\min}$ , η προς τούτο απαιτούμενη στροφή του στοιχείου και οι αντίστοιχες ορθές τάσεις στις έδρες του.



Σχ. 1.9.3

**Λύση**

α) Αν  $\sigma - \tau$  είναι το σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων των τάσεων της δοθείσης εντατικής κατάστασης (Σχ. 1.9.4), το κέντρο  $K$  του κύκλου του Mohr θα βρίσκεται προφανώς στον άξονα  $\sigma$ , με τετμημένη

$$\sigma_K = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-5+1}{2} = -2 \text{ MPa} .$$

Η ορθή και διατμητική τάση της έδρας  $\beta\gamma$  (ή  $\alpha\delta$ ), που είναι κάθετη στον άξονα  $x$  του σχήματος 1.9.3, με τιμές  $\sigma_x = -5 \text{ MPa}$  και  $\tau_{xy} = 4 \text{ MPa}$ , καθορίζουν τις συντεταγμένες του σημείου  $S_0$  του κύκλου του Mohr, ο οποίος γράφεται τώρα με κέντρο το  $K$  και ακτίνα την  $KS_0$ , που είναι:

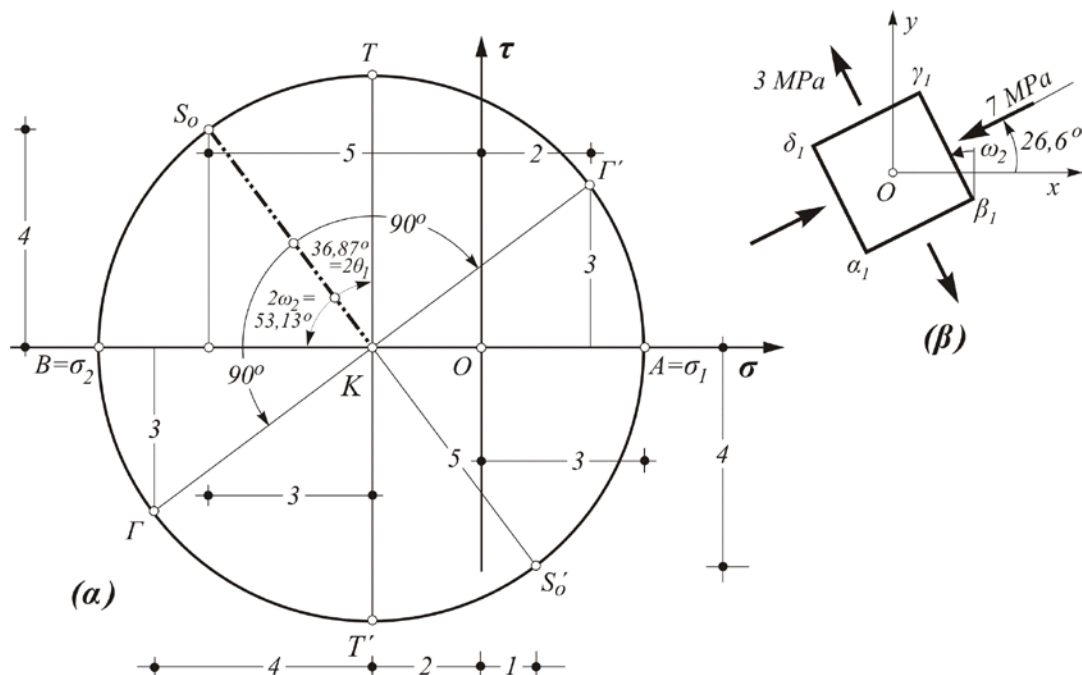
$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ MPa} .$$

Οι συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού σημείου  $S_0'$  εκφράζουν προφανώς τις τάσεις στις έδρες  $\gamma\delta$  ή  $\alpha\beta$  (Σχ. 1.9.3), που είναι κάθετες στις προηγούμενες.

β) Τα σημεία  $A$  και  $B$ , όπου ο κύκλος τέμνει τον άξονα  $\sigma$ , ορίζουν προφανώς τις κύριες τάσεις  $\sigma_1 = 3 \text{ MPa}$  και  $\sigma_2 = -7 \text{ MPa}$ , οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν και αναλυτικά από τη σχέση (17).

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{-5+1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-5+1)^2 + 4 \cdot 4^2} = \langle \begin{matrix} 3 \text{ MPa} \\ -7 \text{ MPa} \end{matrix} .$$

Η γωνία  $S_0KB$  είναι ομόφορα διπλάσια της γωνίας  $\omega_2$  (Σχ. 1.9.4 β) που σχηματίζει το κύριο επίπεδο  $\beta_1\gamma_1$  (που δέχεται την αλγεβρικά μικρότερη κύρια τάση  $\sigma_2$ ) με το επίπεδο  $\beta\gamma$  (Σχ. 1.9.3) που ήταν κάθετο στον άξονα  $x$  (και δέχονταν τις τάσεις  $\sigma_x$  και  $\tau_{xy}$ ).



Σχ. 1.9.4

Η γωνία αυτή, που εκφράζει τη στροφή για την οποία στο στοιχείο θα εμφανίζονταν μόνον οι κύριες τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ , προκύπτει και αναλυτικά από τη σχέση (10).

$$\varepsilon\varphi 2\omega_2 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 4}{-5 - 1} = \frac{4}{3}$$

ή  $2\omega_2 = 53,13^\circ$  και  $\omega_2 = 26,6^\circ$ .

**γ)** Για τον προσδιορισμό των τάσεων που εμφανίζονται στις έδρες του στοιχείου το οποίο στρέφεται αριστερόστροφα κατά  $45^\circ$ , (Σχ. 1.9.5 α), εργαζόμαστε ως εξής:

**1. Τάσεις στην έδρα  $\beta_2\gamma_2$  (ή  $\delta_2\alpha_2$ ), Σχ. 1.9.5α**

Φέρνουμε την ακτίνα ΚΓ έτσι, ώστε να σχηματίζει με την  $KS_0$  αριστερόστροφη γωνία  $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$  και προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. Οι συντεταγμένες αυτές αντιστοιχούν στην ορθή και διατμητική τάση του επιπέδου  $\beta_2\gamma_2$ , το οποίο, πριν από τη στροφή, ήταν κάθετο στον άξονα x.

Οι τάσεις αυτές προσδιορίζονται είτε με κατ' ευθείαν μέτρηση, ή αναλυτικά από τις σχέσεις (7) και (8) για  $\phi = 45^\circ$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{(\beta_2\gamma_2)} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sigma\upsilon\nu 2\phi - \tau_{xy} \eta\mu 2\phi = \\ &= \frac{-5 + 1}{2} + \frac{-5 - 1}{2} \sigma\upsilon\nu 90^\circ - 4 \cdot \eta\mu 90^\circ = -2 - 4 = -6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tau_{(\beta_2\gamma_2)} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \eta\mu 2\phi + \tau_{xy} \sigma\upsilon\nu 2\phi = \frac{-5 - 1}{2} \eta\mu 90^\circ + 4 \cdot \sigma\upsilon\nu 90^\circ = -3 \text{ MPa}$$

**2. Τάσεις στην έδρα  $\gamma_2\delta_2$  (ή  $\alpha_2\beta_2$ )**

Φέρνουμε την ακτίνα ΚΓ' έτσι, ώστε να σχηματίζει με την  $KS_0$  δεξιόστροφη γωνία  $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$  και προσδιορίζουμε αντίστοιχα τις συντεταγμένες του σημείου Γ' (αντιδιαμετρικού του Γ), που αντιστοιχούν στην ορθή και διατμητική τάση, του κάθετου προς το προηγούμενο, επιπέδου  $\gamma_2\delta_2$ . (Το επίπεδο  $\gamma_2\delta_2$  στράφηκε ήδη ως προς το αρχικό  $\beta\gamma$  – που ήταν παράλληλο του  $\gamma$  – κατά δεξιόστροφη γωνία  $45^\circ$ ).

Έτσι για  $\theta = 45^\circ$ , με παρόμοιο τρόπο, προκύπτουν πάλι οι τάσεις:

$$\sigma_{(\gamma_2\delta_2)} = \frac{-5 + 1}{2} + \frac{-5 - 1}{2} \sigma\upsilon\nu(-90^\circ) - 4 \cdot \eta\mu(-90^\circ) = -2 + 4 = 2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{(\gamma_2\delta_2)} = \frac{-5 - 1}{2} \eta\mu(-90^\circ) + 4 \cdot \sigma\upsilon\nu(-90^\circ) = 3 \text{ MPa}.$$

**δ)** Οι ακρότατες τιμές της διατμητικής τάσης  $\tau_{\max}$  και  $\tau_{\min}$ , εύκολα προκύπτει ότι αντιστοιχούν στα σημεία Τ και Τ' του κύκλου, παίρνοντας τιμές ίσες με την ακτίνα του. Ο προσδιορισμός των παραπάνω τιμών θα γίνει από τις σχέσεις (25) και (26).

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-5 - 1)^2 + 4 \cdot 4^2} = \pm 5 \text{ MPa}$$

Η γωνία  $S_0KT$  είναι ομόφορα διπλάσια της γωνίας  $\theta_1$  (Σχ. 1.9.5 β) που σχηματίζει το επίπεδο  $\beta_3\gamma_3$  με το αρχικό  $\beta\gamma$ .

Η γωνία αυτή, που εκφράζει την απαιτούμενη στροφή του στοιχείου για την εμφάνιση ακρότατης διατμητικής τάσης, υπολογίζεται αναλυτικά από τη σχέση (18).

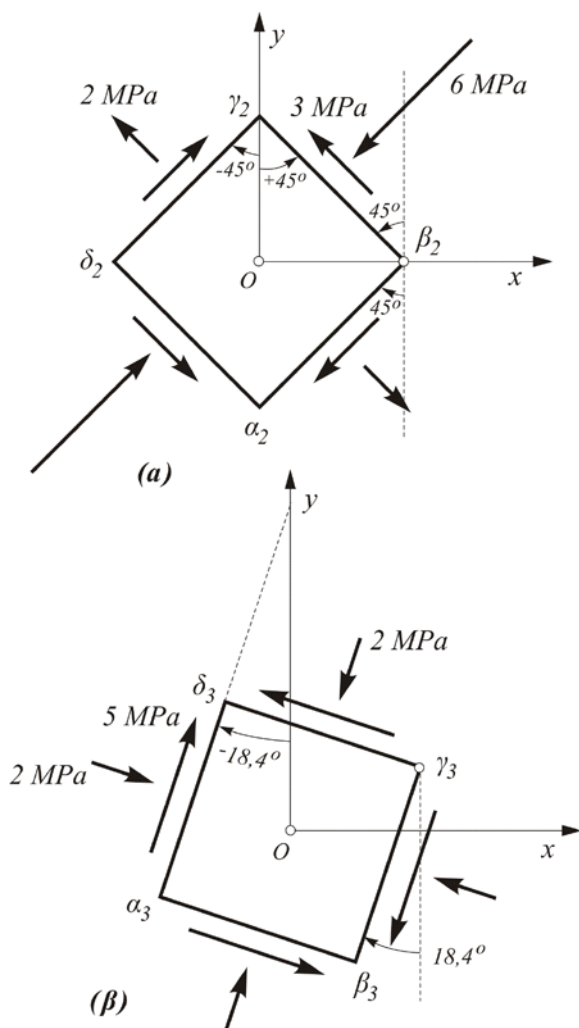
$$\varepsilon\varphi 2\theta_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{-5 - 1}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{ή } 2\theta_1 = -36,87^\circ \text{ και } \theta_1 = -18,43^\circ.$$

Οι ορθές τάσεις που εμφανίζονται στις έδρες του στοιχείου αυτού, αντιστοιχούν προφανώς στα ακρότατα σημεία  $T$  και  $T'$  (Σχ. 1.9.4 α). Φυσικά είναι ίσες μεταξύ τους, γι αυτό έχουν την ίδια τετμημένη με εκείνη που έχει και το κέντρο του κύκλου.

Η τιμή τους προκύπτει από τη σχέση (28)

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-5 + 1}{2} = -2 \text{ MPa}.$$



Σχ. 1.9.5

### Ιδιότητες των υλικών

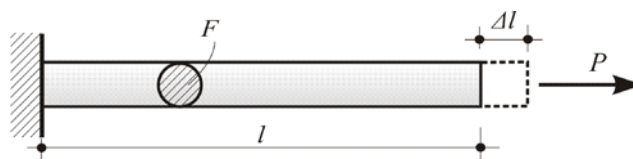
#### 1 – Ο νόμος του Hooke

Σε πειράματα εφελκυσμού που έγιναν σε πρισματικές ράβδους, βρέθηκε ότι για τα πιο πολλά υλικά των κατασκευών, και εφ' όσον η φόρτιση βρίσκεται σε ορισμένα όρια, ισχύει ο παρακάτω νόμος:

«Η επιμήκυνση της ράβδου είναι ανάλογη του φορτίου».

Η απλή αυτή γραμμική σχέση ανάμεσα στην επιμήκυνση της ράβδου και τη δύναμη που την προκαλεί, διατυπώθηκε αρχικά από τον Άγγλο Robert Hooke το 1678 και γι αυτό φέρει το όνομά του.

Αν λοιπόν μια ράβδος μήκους  $l$  και διατομής  $F$  υποβληθεί σε εφελκυστική δύναμη  $P$ , τότε η επιμήκυνση  $\Delta l$  που υφίσταται είναι ανάλογη της  $P$  και του  $l$  και αντιστρόφως ανάλογη της  $F$  και μιας σταθεράς  $E$  που εξαρτάται από το είδος του υλικού της ράβδου, προσδιορίζεται πειραματικά και ονομάζεται **μέτρο ελαστικότητας** του υλικού.



Σχ. 2.1

Έτσι ο παραπάνω νόμος μπορεί τώρα να δοθεί ακριβέστερα με την εξίσωση:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{F \cdot E} \quad (1)$$

Στις δοκιμές εφελκυσμού θα πρέπει η εφελκύουσα δύναμη να είναι πάντα κεντρική. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι ίνες της ράβδου έχουν την ίδια επιμήκυνση, ενώ ταυτόχρονα οι εγκάρσιες διατομές της ράβδου παραμένουν κάθετες στον άξονά της και μετά την παραμόρφωση.

Η εξίσωση (1) παίρνει απλούστερη μορφή αν λάβουμε υπόψη τη γνωστή έννοια της **ορθής τάσης**  $\sigma = P / F$  και την έννοια της **ανηγμένης επιμήκυνσης**, δηλαδή το λόγο:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2)$$

Η ανηγμένη επιμήκυνση είναι καθαρός αριθμός, σαν λόγος δύο μηκών και εκφράζει την επιμήκυνση της ράβδου που αντιστοιχεί ή ανάγεται στη μονάδα του μήκους της. Πραγματικά η εξίσωση (1) γίνεται τώρα:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{F} \cdot \frac{1}{E} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3)$$

και εκφράζει το νόμο του Hooke στην πιο απλή του μορφή.

Από την εξίσωση (3) συμπεραίνουμε ότι το μέτρο ελαστικότητας  $E$  εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες όπως και η ορθή τάση  $\sigma$ .

Εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις, το  $E$  για τα διάφορα υλικά είναι το ίδιο για τον εφελκυσμό και τη θλίψη.

Οι εξισώσεις (1) και (3) ισχύουν και στην περίπτωση θλίψης. Τότε το  $\Delta l$  ονομάζεται **επιβράχυνση**, το  $\varepsilon$  **ανηγμένη επιβράχυνση** και το  $\sigma$  **θλιπτική τάση**.

Ο νόμος του Hooke ισχύει ικανοποιητικά για τους χάλυβες και τα ξύλα εφ' όσον η τάση  $\sigma$  δεν ξεπεράσει ορισμένη τιμή. Πέρα από την τιμή αυτή της τάσης, οι παραμορφώσεις γίνονται μεγαλύτερες από εκείνες που προβλέπει ο νόμος, ο οποίος συνεπώς δεν ισχύει.

Θα ήταν λοιπόν αρκετά ενδιαφέρον, σε μια ράβδο που καταπονείται αξονικά μέχρι τη θραύση της, να γνωρίζαμε πώς μεταβάλλεται η ορθή τάση  $\sigma$ , σε σχέση με την ανηγμένη επιμήκυνση  $\varepsilon$  που προκαλείται.

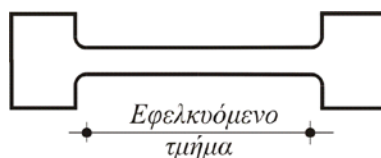
## 2 – Το πείραμα του εφελκυσμού

Ο νόμος της αναλογίας ανάμεσα στην εφελκύουσα δύναμη και την επιμήκυνση είναι κεφαλαιώδους σημασίας και αποτελεί σήμερα τη βάση των υπολογισμών αντοχής σε εφελκυστικές καταπονήσεις. Όμως ισχύει μόνο για ισότροπα υλικά που εφελκύνονται μέχρι κάποια οριακή τιμή που ονομάζεται όριο αναλογίας.

Πέρα από αυτό το όριο η σχέση ανάμεσα στην εφελκύουσα δύναμη και την επιμήκυνση γίνεται αρκετά πολυπλοκότερη.

Για να εξακριβωθούν οι μηχανικές ιδιότητες των διαφόρων υλικών, τα αποτελέσματα των πειραματικών μετρήσεων εικονογραφούνται συνήθως σε ένα διάγραμμα, το οποίο, επειδή δείχνει τη συμπεριφορά του δοκιμαζόμενου υλικού σε εφελκυσμό, ονομάζεται διάγραμμα εφελκυσμού.

Τα πειράματα γίνονται σε τυποποιημένα δοκίμια, των οποίων η μορφή καθορίζεται έτσι, ώστε αφ' ενός μεν να μπορούν να επιβληθούν μεγάλες δυνάμεις στα άκρα τους, αφ' ετέρου δε οι ορθές τάσεις που αναπτύσσονται στο εφελκυτόμενο τμήμα (Σχ. 2.2) να είναι ομοιόμορφες.



Σχ. 2.2

Τυποποιημένος είναι επίσης και ο τρόπος που διεξάγονται τα πειράματα. Τα φορτία επιβάλλονται σιγά - σιγά και, μετά από κάθε επιβολή φορτίου, ισορροπεί το δοκίμιο και μετράται η επιμήκυνσή του.

Η ορθή τάση  $\sigma$  και η ανηγμένη επιμήκυνση  $\varepsilon$  αναφέρονται αντίστοιχα στην **αρχική διατομή**  $F_0$  και το **αρχικό μήκος**  $l_0$  του δοκιμίου.

$$\sigma = P / F_0 \quad \text{και} \quad \varepsilon = \Delta l / l_0 \quad (4)$$

Σε κάθε  $\sigma$  αντιστοιχεί και ένα  $\varepsilon$ . Τα ζευγάρια των τιμών αυτών, τοποθετούνται σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $O\varepsilon\sigma$  για να δώσουν το λεγόμενο διάγραμμα εφελκυσμού του συγκεκριμένου δοκιμίου.

Στο διάγραμμα αυτό τα μεγέθη που υπεισέρχονται προκύπτουν από το νόμο του Hooke στην απλή του μορφή,  $\sigma = \varepsilon \cdot E$ . Η **ανηγμένη επιμήκυνση  $\varepsilon$**  ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα ενώ η **ορθή τάση  $\sigma$**  με τον κατακόρυφο.

Παρακάτω εικονίζεται ένα τυπικό διάγραμμα εφελκυσμού για το μαλακό χάλυβα των σιδηρών κατασκευών.

Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε αρχικά ένα ευθύγραμμο τμήμα  $OA$ , που εκφράζει την αναλογία που υπάρχει ανάμεσα στην ορθή τάση  $\sigma$  και στην ανηγμένη επιμήκυνση  $\varepsilon$  και γι αυτό ονομάζεται **περιοχή αναλογίας**. Στην περιοχή αυτή ισχύει ο νόμος του Hooke  $\sigma = \varepsilon \cdot E$ . Αν σε οποιοδήποτε σημείο της περιοχής αναλογίας αποφορτίσουμε το δοκίμιο, διαπιστώνουμε ότι αυτό επανέρχεται στην αρχική του θέση, συμπεριφερόμενο σαν ελατήριο. Η ορθή τάση  $\sigma_A$  που αντιστοιχεί στο τελευταίο σημείο της περιοχής αναλογίας ονομάζεται **όριο αναλογίας**.

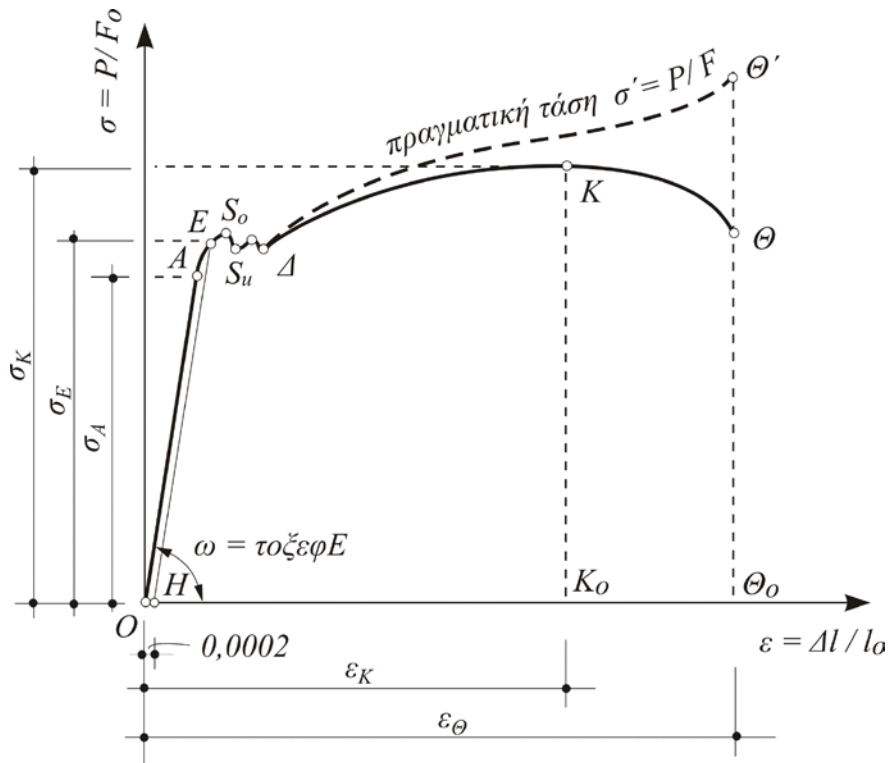
Η κλίση της ευθείας της περιοχής αναλογίας, δηλαδή η τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$  που σχηματίζει η ευθεία  $OA$  με τον άξονα των ανηγμένων επιμηκύνσεων  $O\varepsilon$ , είναι το γνωστό μας μέτρο ελαστικότητας,  $E$ , του υλικού. Πραγματικά, είναι

$$\varepsilon \omega = \sigma / \varepsilon = E. \quad \text{Άρα} \quad \omega = \text{τοξεφ} E \quad (5)$$

Στη σχέση αυτή πρέπει να δοθεί προσοχή, επειδή οι τιμές που εκφράζουν την ορθή τάση  $\sigma$  και την ανηγμένη επιμήκυνση  $\varepsilon$  στους δυο άξονες δεν παριστάνονται με την ίδια κλίμακα.

Επομένως, αν ζητηθεί το μέτρο ελαστικότητας ενός υλικού από το αντίστοιχο διάγραμμα εφελκυσμού του, θα ήταν λάθος να παίρναμε τη γωνία  $\omega$  της ευθείας  $OA$  με τον οριζόντιο άξονα και να εκφράζαμε την τριγωνομετρική της εφαπτομένη. Το σωστό θα ήταν ένα από τα παρακάτω:

- για τυχόν σημείο της ευθείας της περιοχής αναλογίας, αφού αντιστοιχίσουμε την ορθή του τάση με την ανηγμένη του επιμήκυνση, να υπολογίσουμε το λόγο  $\sigma/\varepsilon$ , ή



Σχ. 2.2.2 Διάγραμμα εφελκυσμού από μαλακό χάλυβα

2. να εκφράσουμε την τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$ , πολλαπλασιασμένη όμως επί το λόγο  $\lambda/\lambda'$  των κλιμάκων των δύο αξόνων. Δηλαδή

$$\varepsilon\omega \cdot \lambda/\lambda' = E, \text{ άρα } \omega = \tauοξεφ(E \cdot \lambda'/\lambda) \quad (6)$$

Τιμές του  $E$  για τα διάφορα υλικά υπάρχουν σε αντίστοιχο πίνακα στο τέλος του βιβλίου, μετά το ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

Συνεχίζοντας τη φόρτιση του υλικού, (αυξάνοντας δηλαδή την ορθή τάση πιο πάνω από τη  $\sigma_A$ , ή απλά τραβώντας περισσότερο το δοκίμιο), διαπιστώνουμε ότι η ανηγμένη επιμήκυνση μεταβάλλεται δυσανάλογα με την ορθή τάση, και μάλιστα είναι τόσο μεγαλύτερη από εκείνη που θα δινόταν από το νόμο του Hooke ( $\sigma = \varepsilon \cdot E$ ), όσο η  $\sigma$  είναι μεγαλύτερη της  $\sigma_A$ . Επομένως για το τμήμα αυτό του διαγράμματος η γραμμή  $AE$  είναι καμπύλη και η αντίστοιχη περιοχή ονομάζεται **περιοχή ελαστικότητας**.

Η τάση  $\sigma_E$  που αντιστοιχεί στο τελευταίο σημείο της περιοχής ελαστικότητας ονομάζεται **όριο ελαστικότητας**. Αν στην περιοχή αυτή αποφορτίσουμε το δοκίμιο, παρατηρούμε ότι η ανηγμένη του επιμήκυνση ελαττώνεται, αλλά δεν εξαφανίζεται πλήρως, όπως συμβαίνει στην περιοχή αναλογίας. Εμφανίζεται επομένως στο δοκίμιο μια μόνιμη επιμήκυνση  $\Delta l$ , που ονομάζεται **παραμένουσα παραμόρφωση**.

Συμφωνούμε να ονομάζουμε συμβατικό όριο ελαστικότητας, την τάση  $\sigma_E$  (μεγαλύτερη της  $\sigma_A$ ), που παρουσιάζεται στο δοκίμιο, έτσι ώστε, μετά την αποφόρτίσή του, να εμφανίζεται παραμένουσα παραμόρφωση ίση με δύο δεκάκις χιλιοστά του αρχικού του μήκους. Θα πρέπει δηλαδή μετά την αποφόρτιση του δοκιμίου να έχουμε μια επιμήκυνση:



$$\Delta l = 0,0002 \cdot l_0 \text{ ή } \Delta l / l_0 = \varepsilon = 0,0002 = 0,02 \% , \quad (7)$$

για να μπορούμε να πούμε ότι η τάση  $\sigma_E$ , που εφαρμόστηκε στο δοκίμιο κατά το στάδιο της φόρτισης αντιστοιχούσε στο συμβατικό όριο ελαστικότητας.

Από το διάγραμμα εφελκυσμού ( $\sigma, \varepsilon$ ) κάποιου υλικού, είναι δυνατό να υπολογίσουμε γραφικά το συμβατικό όριο ελαστικότητάς του, αρκεί να πάρουμε στην αρχή του άξονα των ανηγμένων επιμηκύνσεων ένα πολύ μικρό τμήμα ίσο με 0,0002, φυσικά με την κλίμακα που διαλέξαμε για τις ανηγμένες επιμηκύνσεις.

Αν Η είναι το σημείο αυτό, τότε, φέρνοντας την ΗΕ παράλληλη προς την ΟΑ, βρίσκουμε το σημείο τομής της, Ε, με το διάγραμμα. Αν από το Ε φέρουμε παράλληλη προς τον άξονα των  $\varepsilon$ , το σημείο τομής της με τον άξονα των  $\sigma$  είναι η ορθή τάση που αντιστοιχεί στο συμβατικό όριο ελαστικότητας.

Συνεχίζοντας τη φόρτιση του υλικού, μπαίνουμε σε μια νέα περιοχή όπου η συμπεριφορά του υλικού είναι ανώμαλη.

Στην αρχή το υλικό συμπεριφέρεται όπως και στην περιοχή ελαστικότητας, όπου, αυξανόμενων των τάσεων αυξάνονται περισσότερο και οι αντίστοιχες επιμηκύνσεις. Αυτό συμβαίνει μέχρις ότου η ορθή τάση πάρει την τιμή που αντιστοιχεί στο σημείο  $S_0$ . Μετά, και ενώ η ανηγμένη επιμήκυνση συνεχώς αυξάνει, η ορθή τάση μικραίνει μέχρι το σημείο  $S_u$ , για να αυξηθεί πάλι, να μειωθεί κ.ο.κ.

Παρατηρούμε συνεπώς κάποια скаμπανεβάσματα της ορθής τάσης τα οποία συμβαίνουν με διαρκώς αυξανόμενη επιμήκυνση του δοκιμίου. Η περιοχή ΕΔ του διαγράμματος ονομάζεται **περιοχή διαρροής** και σ' αυτή συμβαίνουν κάποιες ανακατατάξεις στη μοριακή δομή του δοκιμίου.

Συγκεκριμένα, τα μόρια του υλικού αλλάζουν προσανατολισμό και, άλλοτε 'γαντζώνονται' μεταξύ τους - οπότε το δοκίμιο εμφανίζει ιδιότητες στερεού υλικού και βρισκόμαστε σε ανοδικά τμήματα της καμπύλης, άλλοτε 'γλιστρούν' μεταξύ τους - οπότε το δοκίμιο εμφανίζει αντίστοιχα ιδιότητες πλαστικού υλικού και βρισκόμαστε σε καθοδικά τμήματα της καμπύλης.

Η μέγιστη τιμή  $\sigma_{S_0}$  που παίρνει η ορθή τάση στην περιοχή αυτή ονομάζεται **ανώτερο όριο διαρροής**, ενώ η ελάχιστη τιμή  $\sigma_{S_u}$  **κατώτερο όριο διαρροής**. Ο μέσος όρος των δύο αυτών τιμών ονομάζεται **όριο διαρροής**.

Μετά το σημείο Δ, ενώ η ανηγμένη επιμήκυνση αυξάνεται συνεχώς, το υλικό δείχνει ξανά ομαλή συμπεριφορά, όμοια μ' εκείνη που έδειχνε στην περιοχή ελαστικότητας ΑΕ, με τη διαφορά ότι οι αυξήσεις των επιμηκύνσεων είναι ακόμα μεγαλύτερες προς τις αντίστοιχες μεταβολές των τάσεων.

Μετά το φαινόμενο της διαρροής, η ανάκτηση και η αύξηση της αντίστασης που παρουσιάζει το δοκίμιο ονομάζεται **κράτυνση** του υλικού και το αντίστοιχο τμήμα της καμπύλης παραμόρφωσης ονομάζεται **περιοχή κρατύνσεως**.

Το φαινόμενο της κράτυνσης συμβαίνει μέχρι το τελευταίο σημείο Κ της αντίστοιχης περιοχής, όπου αντιστοιχεί η ορθή τάση  $\sigma_K$ , την οποία το υλικό δεν μπορεί να ξεπεράσει και ονομάζεται **όριο θραύσης**. Το όριο θραύσης αντιστοιχεί επομένως στο ψηλότερο σημείο του διαγράμματος εφελκυσμού.

Λίγο μετά από το όριο θραύσης, σε κάποια διατομή του δοκιμίου, άγνωστο εκ των προτέρων σε ποια, εμφανίζεται στένωση, που αυξάνεται προοδευτικά και ονομάζεται **λαιμός θραύσης**. Η εμφάνιση του λαιμού θραύσης ταυτίζεται με την ύπαρξη μιας ακόμη περιοχής, της τελευταίας στο διάγραμμα εφελκυσμού, που ονομάζεται **περιοχή θραύσης**. Εδώ οι ορθές τάσεις μικραίνουν με την αύξηση των επιμηκύνσεων, και μετά από λίγο το δοκίμιο σπάζει. Η μείωση των ορθών τάσεων στην περιοχή θραύσης οφείλεται στην προοδευτική μείωση της διατομής λόγω του λαιμού, αλλά και στο γεγονός ότι οι τεταγμένες  $\sigma$  του διαγράμματος εφελκυσμού προέρχονται από την αναγωγή του φορτίου στην **αρχική** και όχι στη συνεσταλμένη διατομή του δοκιμίου.

Η ορθή τάση  $\sigma_{\theta}$ , που αντιστοιχεί στο τελευταίο σημείο της περιοχής θραύσης (που είναι επίσης και το τελευταίο σημείο του διαγράμματος εφελκυσμού), ονομάζεται **τάση θραύσης**.

Η περιοχή κράτυνσης μαζί με την περιοχή θραύσης αποτελούν τη λεγόμενη **πλαστική περιοχή** του διαγράμματος εφελκυσμού.

Αν κατά τη διάρκεια του πειράματος, οι εκάστοτε εφελκυστικές δυνάμεις του δοκιμίου μπορούσαν να ανάγονται στη - θεωρητικά έστω - μικρότερη, συνεσταλμένη διατομή του, τότε το διάγραμμα εφελκυσμού που θα παίρναμε, θα απεικονίζαμε τις λεγόμενες **πραγματικές τάσεις**, και όχι απλά τις **τάσεις**, οι οποίες ως εκ τούτου θεωρούνται **συμβατικές**. Στην περίπτωση αυτή, μέχρι την περιοχή διαρροής του διαγράμματος, όπου οι επιμηκύνσεις που εμφανίζονται στο δοκίμιο δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικές, οι πραγματικές τάσεις φαίνονται σαν να συμπίπτουν με τις συμβατικές. Όμως στην πλαστική περιοχή, όπου οι παραμορφώσεις του δοκιμίου γίνονται πολύ μεγαλύτερες, οι πραγματικές τάσεις αρχίζουν να ξεχωρίζουν, ιδιαίτερα μετά το όριο θραύσης.

Πραγματικά, στην περιοχή θραύσης, οι πραγματικές τάσεις όχι μόνο δεν μικραίνουν, αλλά αυξάνουν σημαντικά. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι με τη μείωση των διατομών του δοκιμίου στην περιοχή του λαιμού, μειώνεται η ικανότητα ανάληψης εφελκυστικών δυνάμεων απ' την πλευρά του δοκιμίου.

Αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που μικραίνουν οι συμβατικές τάσεις. Όμως, οι διατομές του δοκιμίου μικραίνουν πολύ πιο γρήγορα απ' την αντίστοιχη μείωση ανάληψης εφελκυστικών δυνάμεων, με αποτέλεσμα, το πηλίκον της εκάστοτε (μικρής) δύναμης δια της (πολύ μικρότερης) αντίστοιχης διατομής να δίνει μεγαλύτερες τάσεις.

Σαν επιμήκυνση θραύσης δεν λαμβάνεται η  $\epsilon_K$  που αντιστοιχεί στο όριο θραύσης, αλλά η  $\epsilon_{\theta}$  που αντιστοιχεί στη θραύση του δοκιμίου.

Η μέτρηση της  $\epsilon_{\theta}$  δεν είναι εύκολη.

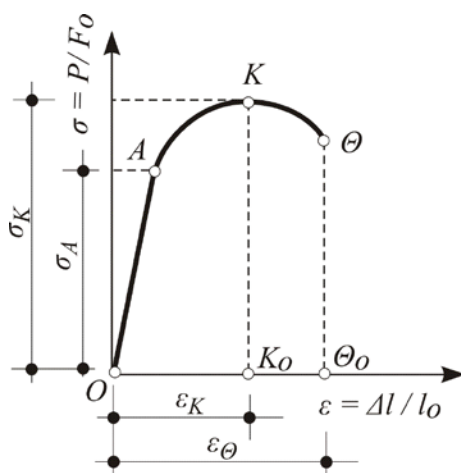
### 3 – Τύποι διαγραμμάτων εφελκυσμού

Ανάλογα με τη φύση του κάθε υλικού, μπορούμε να διακρίνουμε τρεις χαρακτηριστικούς τύπους διαγραμμάτων εφελκυσμού:

**α) Διαγράμματα με περιοχή αναλογίας & όριο διαρροής**

Τέτοια είναι κυρίως τα διαγράμματα του ρευστοπαγή χάλυβα, τα οποία, όπως περιγράψαμε πιο πάνω, παρουσιάζουν ανώτερο και κατώτερο όριο διαρροής με σημαντική περιοχή κρατύνσεως.

**β) Διαγράμματα με περιοχή αναλογίας χωρίς όριο διαρροής (Χαλκός, αλουμίνιο)**

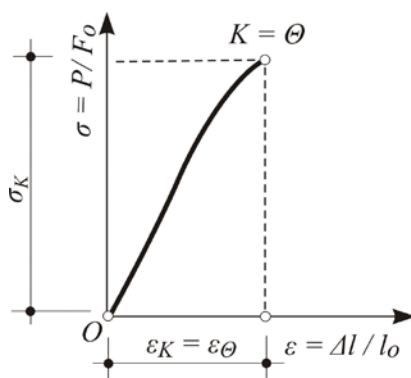


Σχ. 2.3.1

Σε τέτοια υλικά το φορτίο αυξάνει στην αρχή γραμμικά με την αύξηση της επιμήκυνσης μέχρι το όριο αναλογίας.

Μετά η ευθεία γραμμή του διαγράμματος μετατρέπεται, με συνεχή και ομαλή πορεία, σε ανιούσα καμπύλη, διατηρώντας αυξανόμενες τιμές μέχρι το όριο θραύσης. Η καμπύλη αυτή συνεχίζει τελικά με έναν μικρό ομαλό κατίοντα κλάδο μέχρι τη θραύση.

**γ) Διαγράμματα ψαθυρών υλικών (Χυτοσίδηρος, γυαλί, σκυρόδεμα, ορείχαλκος)**



Σχ. 2.3.2

Σ' αυτά τα υλικά το φορτίο αυξάνει συνέχεια μέχρι το όριο θραύσης χωρίς να υπάρχει καμιά σαφής ένδειξη ούτε για το όριο αναλογίας ούτε για το όριο διαρροής, ούτε για την κράτυνση του υλικού. Έτσι, μέσα από έναν γραφικό τρόπο

όπως είναι το διάγραμμα εφελκυσμού, γίνεται σαφής μια ουσιαστική διάκριση ανάμεσα σε δύο κατηγορίες υλικών, τα συνεκτικά ή όλκιμα, και τα ψαθυρά.

**Συνεκτικά** λέγονται τα υλικά που παρουσιάζουν μεγάλη πλαστική περιοχή μέχρι τη θραύση τους.

**Ψαθυρά** είναι τα υλικά που παρουσιάζουν ασήμαντη ή καθόλου πλαστική περιοχή.

Ο βαθμός της συνεκτικότητας ή της ψαθυρότητας ενός υλικού είναι επομένως συνάρτηση του μεγέθους της πλαστικής περιοχής του, στο διάγραμμα εφελκυσμού. Είναι συνεπώς η συνεκτικότητα μια ιδιότητα αντίθετη απ' την ψαθυρότητα.

### Παράδειγμα

Σε μια δοκιμή εφελκυσμού κυλινδρικού δοκιμίου είχαμε τα παρακάτω δεδομένα:

Μήκος δοκιμίου  $l_o = 6 \text{ cm}$

Διάμετρος δοκιμίου  $d_o = 1,2 \text{ cm}$

Φορτίο στο όριο αναλογίας  $P_A = 3.200 \text{ kp} = 32 \text{ kN}$

Φορτίο στο όριο θραύσης  $P_K = 7.500 \text{ kp} = 75 \text{ kN}$

Τελικό φορτίο θραύσης  $P_{\theta\rho} = 5.250 \text{ kp} = 52,5 \text{ kN}$

Επιμήκυνση στο όριο αναλογίας  $\Delta l_A = 0,12 \text{ mm}$

Ολικό μήκος μετά τη θραύση  $\Delta l_{\theta} = 7,5 \text{ cm}$

Διάμετρος διατομής θραύσης (λαϊμού)  $d_{\theta} = 0,9 \text{ cm}$

Ζητούνται:

- 1) Το όριο αναλογίας
- 2) Το όριο θραύσης
- 3) Η διάταση και η στένωση
- 4) Η πραγματική τάση θραύσης και
- 5) Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του δοκιμίου.

### Λύση

Αν  $F_o$  και  $F_{\theta}$  είναι αντίστοιχα η αρχική και τελική διατομή του δοκιμίου, θα έχουμε:

$$F_o = \frac{\pi d_o^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} = 1,131 \text{ cm}^2 \text{ και}$$

$$F_{\theta} = \frac{\pi d_{\theta}^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,9^2}{4} = 0,64 \text{ cm}^2.$$

Η ανηγμένη επιμήκυνση που αντιστοιχεί στο όριο αναλογίας είναι

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta l_A}{l_o} = \frac{0,012}{6} = 0,002.$$

Τα ζητούμενα, λαμβάνοντας υπόψη τις μονάδες που αναφέρθηκαν στη σελίδα 22, υπολογίζονται τώρα με τη δοσμένη σειρά, όπως παρακάτω:

$$1) \text{ Όριο αναλογίας: } \sigma_A = \frac{P_A}{F_o} = \frac{3.200}{1,131} = 2.829 \text{ kp/cm}^2 = 282,9 \text{ MPa}$$

$$2) \text{ Όριο θραύσης: } \sigma_K = \frac{P_K}{F_o} = \frac{7.500}{1,131} = 6.631 \text{ kp/cm}^2 = 663,1 \text{ MPa}$$

$$3) \text{ Διάταση: } \delta = \frac{l_\theta - l_o}{l_o} 100 = \frac{7,5 - 6}{6} 100 = 25 \%$$

$$\text{Στένωση: } y = \frac{F_o - F_\theta}{F_o} 100 = \frac{1,131 - 0,64}{1,131} 100 = 43,4 \%$$

4) Πραγματική τάση θραύσης:

$$\sigma_{\theta\rho,\pi\rho} = \frac{P_{\theta\rho}}{F_\theta} = \frac{5.250}{0,64} = 8.203 \text{ kp/cm}^2 = 820,3 \text{ MPa}$$

5) Μέτρο ελαστικότητας:

$$E = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_A} = \frac{2.829}{0,002} = 1.414.500 \text{ kp/cm}^2 = 141,45 \text{ GPa}.$$

## 4 – Το πείραμα της θλίψης

Τα πειράματα που αφορούν θλιπτική καταπόνηση, γίνονται σε δοκίμια που έχουν ιδιαίτερη μορφή και είναι μικρού μήκους, κυλινδρικά ή τετραγωνικά.

Ο τρόπος εκτέλεσης του πειράματος και η διαδικασία του διαγράμματος είναι ανάλογη με εκείνη στον εφελκυσμό.

Όμως εδώ υπάρχει κάποια δυσκολία στην άσκηση του θλιπτικού φορτίου, επειδή η τριβή πάνω στις επιφάνειες που ασκείται η πίεση, εμποδίζει την ελεύθερη πλευρική διόγκωση του δοκίμιου και επομένως εισάγει διατμητικές τάσεις.

Τα αποτελέσματα του πειράματος είναι εντελώς όμοια με εκείνα του εφελκυσμού. Δηλαδή παρουσιάζονται τα ίδια χαρακτηριστικά σημεία που αντιστοιχούν στο όριο αναλογίας, διαρροής και θραύσης, δίνοντας πολύτιμες πληροφορίες στις μηχανικές ιδιότητες των υλικών, και συμπληρώνοντας έτσι την πειραματική έρευνα.

Ξεχωριστό ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα πειράματα θλίψης στα ψαθυρά υλικά (χυτοσίδηρος πέτρες σκυρόδεμα κλπ.), που άλλωστε προορίζονται σχεδόν αποκλειστικά για θλιπτικές καταπονήσεις.

Στα κυβικά δοκίμια σκυροδέματος, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των τάσεων σε πλάγιες τομές, το μοναδικό αίτιο θραύσης είναι η υπέρβαση της διατμητικής τους αντοχής. Γι αυτό παρουσιάζουν μορφή θραύσης που έχει σχήμα διπλής πυραμίδας.

Στα ξύλα, όταν οι ίνες είναι παράλληλες στον άξονα επιβολής του φορτίου, η θραύση γίνεται με σπάσιμο των ινών σε λοξή γωνία.

Επειδή τα ψαθυρά υλικά είναι πιο ανθεκτικά σε καταπόνηση από ορθές παρά από διατμητικές τάσεις, το επίπεδο της θραύσης παρουσιάζεται κεκλιμένο ως προς τον άξονα επιβολής του φορτίου.

Κατά τη γωνία αυτή – συνήθως 45° - η διατμητική επενέργεια γίνεται μέγιστη, λόγω μεγιστοποίησης της διατμητικής τάσης.

Οι διαστάσεις των δοκιμίων επηρεάζουν τη μορφή της θραύσης. Η κυλινδρική μορφή των δοκιμίων χρησιμοποιείται συνήθως για το χυτοσίδηρο με σχέση μήκους δοκιμίου προς διάμετρο διατομής

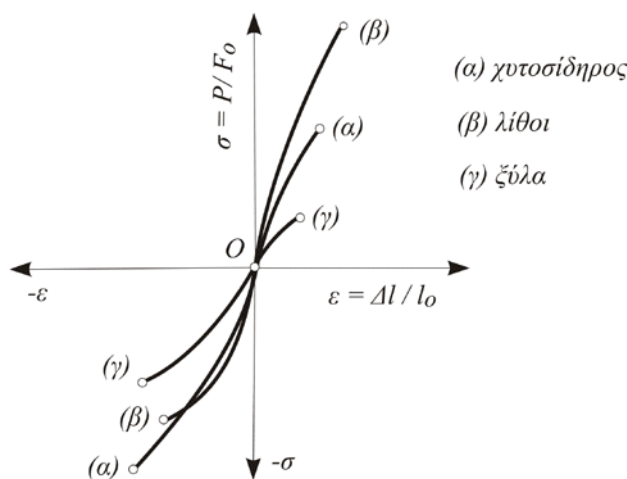
$$l/d = 2 \quad (8)$$

Για τους διάφορους τύπους λίθων και σκυροδεμάτων έχει εισαχθεί γενικά η κυβική μορφή των δοκιμίων.

Το διάγραμμα της θλίψης, στρέφει, στη γενική περίπτωση, τα κοίλα προς τον άξονα των ανηγμένων επιμηκύνσεων. Λίγες είναι οι εξαιρέσεις, όπως π.χ. στα δέρματα, όπου η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τον άξονα των τάσεων.

Όμως σε μερικά υλικά, όπως π.χ. το ελαστικό κόμμι, η καμπύλη παρουσιάζει σημείο καμπής. Στρέφει προς τον άξονα των ανηγμένων επιμηκύνσεων πρώτα τα κοίλα και μετά τα κυρτά.

Σε άλλα υλικά, όπως π.χ. μάρμαρο, συμβαίνει το αντίθετο.



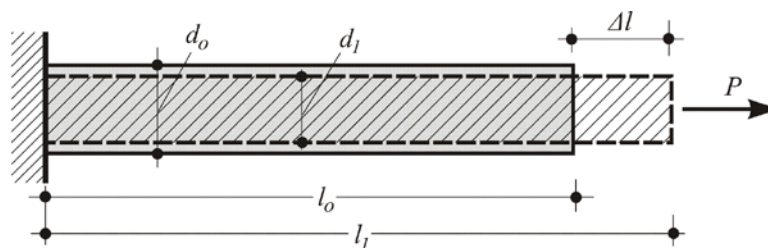
Σχ. 2.4

Το διάγραμμα τάσεων ανηγμένων επιμηκύνσεων για τα ψαθυρά υλικά έχει τη μορφή του παραπάνω σχήματος, με τα όρια διαρροής και θραύσης συγχεόμενα και με μικρές συνήθως παραμορφώσεις θραύσης.

Αξιοσημείωτο είναι ότι ο χυτοσίδηρος, οι λίθοι, το σκυρόδεμα παρουσιάζουν αντοχή σε εφελκυσμό πολύ μικρότερη από εκείνη της θλίψης, ενώ το ξύλο δείχνει μεγάλη αντοχή σε εφελκυσμό.

## 5 – Εγκάρσια παραμόρφωση

Όταν μια πρισματική ράβδος καταπονείται αξονικά, εμφανίζει, όπως γνωρίσαμε ήδη από το νόμο του Hooke, μία μεταβολή  $\Delta l$  στο μήκος της. Όμως ταυτόχρονα με τη μεταβολή αυτή, εμφανίζεται και μια εγκάρσια παραμόρφωση, που στην περίπτωση του εφελκυσμού είναι συστολή, ενώ στη θλίψη διαστολή.



Σχ. 2.5

Με τη διαστασιολόγηση του παραπάνω σχήματος, ο λόγος

$$\varepsilon_q = \frac{d_1 - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0} \quad (9)$$

ονομάζεται **ανηγμένη εγκάρσια παραμόρφωση**.

Ειδικότερα, η  $\varepsilon_q$  στον εφελκυσμό ονομάζεται ανηγμένη εγκάρσια **συστολή**, ενώ στη θλίψη ανηγμένη εγκάρσια **διαστολή**.

Πειραματικά αποδεικνύεται ότι για το ίδιο υλικό, ο λόγος:

$$\left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} \right| = m = \frac{1}{\mu} \quad (10)$$

είναι σταθερός. Η απόλυτη τιμή δικαιολογείται από το γεγονός ότι τα μεγέθη  $\varepsilon$  και  $\varepsilon_q$  είναι πάντοτε ετερόσημα.

Ο αριθμός  $m$  ονομάζεται σταθερά του Poisson, ενώ ο συντελεστής  $\mu$  συντελεστής εγκάρσιας συστολής.

Αποδεικνύεται ότι σε κάθε περίπτωση είναι  $m > 2$ . Για τους χάλυβες η τιμή του  $\mu$  κυμαίνεται από 0.25 έως 0.33 (συνήθως λαμβάνεται  $\mu = 0.30$ ), ενώ για το σκυρόδεμα από 0.10 έως 0.15.

## 6 – Γενίκευση του νόμου του Hooke

Η τελευταία σχέση της προηγούμενης παραγράφου, γράφεται και:

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon = -\frac{\mu \cdot \sigma}{E} \quad (11)$$

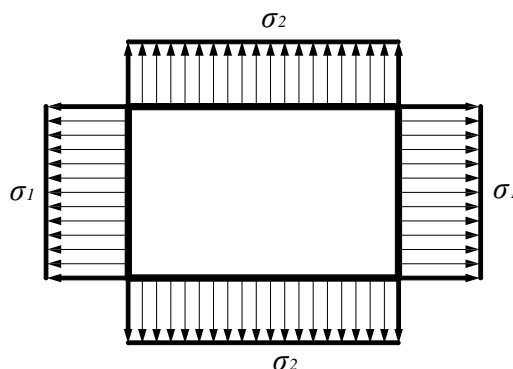
Ύστερα από τα παραπάνω είναι δυνατόν να γενικευθεί ο νόμος του Hooke, για την περίπτωση που ένα σώμα, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, υπόκειται σε ορθές τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  κατά δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.

Κατά τη διεύθυνση της  $\sigma_1$ , το σώμα υπόκειται σε ανηγμένη επιμήκυνση

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_1}{E} \quad (12)$$

λόγω της τάσης  $\sigma_1$ , αλλά και σε ανηγμένη εγκάρσια συστολή

$$\varepsilon_{q_x} = -\mu \frac{\sigma_2}{E} \quad \text{λόγω της τάσης } \sigma_2.$$



Σχ. 2.6

Αν λοιπόν  $\varepsilon_1$  είναι η ολική ανηγμένη επιμήκυνση κατά τη διεύθυνση της  $\sigma_1$ , θα είναι:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_{q_x} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) \quad (13)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι η ολική ανηγμένη επιμήκυνση κατά τη διεύθυνση της  $\sigma_2$ , είναι:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_y + \varepsilon_{q_y} = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) \quad (14)$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις εκφράζουν το γενικευμένο νόμο του Hooke. Αν η τάση  $\sigma_2$ , π.χ. είναι θλιπτική, τότε θα είναι:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 + \mu\sigma_2). \quad (15)$$

## 7 – Γωνιακή παραμόρφωση

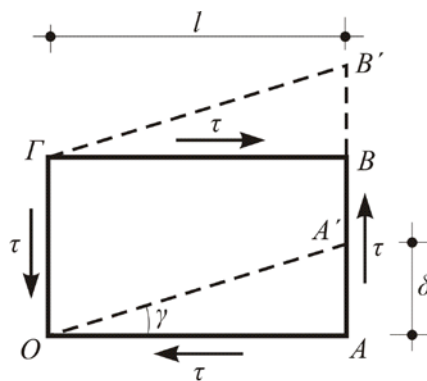
Στο εσωτερικό ενός σώματος μοναδιαίου πάχους, που καταπονείται σε επίπεδη εντατική κατάσταση θεωρούμε ένα στοιχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, στις έδρες του οποίου ενεργούν μόνο διατμητικές τάσεις.

Η κατάσταση αυτή προκύπτει σαν αποτέλεσμα της επίπεδης εντατικής κατάστασης που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, όπου όμως, το υπό εξέταση στοιχείο έχει περιστραφεί κατά γωνία  $45^\circ$ .

Σύμφωνα με θεώρημα που αποτελεί τη λεγόμενη πρόταση Cauchy, οι διατμητικές αυτές τάσεις είναι ίσες μεταξύ τους, έστω  $\tau$ , και ανά δύο, ή κατευθύνονται προς την κοινή ακμή του πρίσματος, ή απομακρύνονται από αυτήν.

Κάτω από την ενέργεια των τάσεων  $\tau$ , το αρχικά ορθογώνιο στοιχείο – που θα λέμε ότι καταπονείται σε **καθαρή διάτμηση** – μετασχηματίζεται σε πλαγιογώνιο.





Σχ. 2.7.1

Αν  $\gamma$  είναι η πολύ μικρή γωνία που σχηματίζεται από την αρχική και τελική έδρα  $OA$  και  $OA'$  του παραλληλεπιπέδου, θα είναι:

$$\epsilon\phi\gamma \approx \gamma = \frac{\delta}{l} \quad (16)$$

Η γωνία  $\gamma$ , εκφρασμένη σε ακτίνια, ονομάζεται **γωνία ολίσθησης** ή **γωνιακή παραμόρφωση** και είναι καθαρός αριθμός.

Εκφράζει λοιπόν το  $\gamma$ , την ολίσθηση των απέναντι εδρών πρίσματος, που απέχουν μεταξύ τους κατά μονάδα.

Αποδεικνύεται πειραματικά (όπως και στον εφελκυσμό), ότι, με την προϋπόθεση ότι το υλικό υπακούει στο νόμο του Hooke, **η γωνία ολίσθησης  $\gamma$ , σαν αποτέλεσμα της διατμητικής τάσης  $\tau$ , είναι ανάλογη προς αυτήν**, και επομένως μπορούμε να γράψουμε, όπως στον τύπο που εκφράζει την ανηγμένη επιμήκυνση,  $\epsilon = \sigma / E$ , τη σχέση:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (17)$$

όπου το  $G$  είναι ένα μέγεθος σταθερό με διαστάσεις τάσης.

Η τιμή του εξαρτάται από τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού και είναι αντίστοιχο του μέτρου ελαστικότητας  $E$  στον εφελκυσμό. Γι αυτό ονομάζεται **δεύτερο μέτρο ελαστικότητας** ή **μέτρο διάτμησης** ή **μέτρο ολίσθησης**.

Αποδεικνύεται ότι ανάμεσα στα δύο μέτρα ελαστικότητας (πρώτο και δεύτερο), ισχύει η σχέση:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (18)$$

Τιμές του  $E$  και  $G$  για διάφορα υλικά υπάρχουν στο τέλος του βιβλίου (Πίνακας Ι).

### Παράδειγμα

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η κάτοψη ενός κύβου ακμής  $a = 20 \text{ cm}$  που καταπονείται σε καθαρή διάτμηση με διατμητική τάση  $\tau = 600 \text{ kp/cm}^2$ . Αν το μέτρο Ελαστικότητας του υλικού είναι  $E = 780.000 \text{ kp/cm}^2$  και ο συντελεστής εγκάρσιας συστολής (λόγος του Poisson)  $\mu = 0,3$ , να υπολογιστούν:

- α) Η γωνιακή παραμόρφωση  $\gamma$   
 β) Η ολίσθηση της πλευράς AB ως προς την πλευρά ΓΟ  
 γ) Η ανηγμένη επιμήκυνση της διαγωνίου OB.

### Λύση

**α)** Η γωνιακή παραμόρφωση  $\gamma$  συνδέεται με τη διατμητική τάση  $\tau$  μέσω της σχέσης (17) που εκφράζει το νόμο του Hooke για τη διάτμηση, δηλαδή

$$\gamma = \tau/G,$$

όπου  $G$  είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού, του οποίου η τιμή προκύπτει από τη σχέση (18)

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{780.000}{2(1+0,3)} = 300.000 \text{ kp/cm}^2.$$

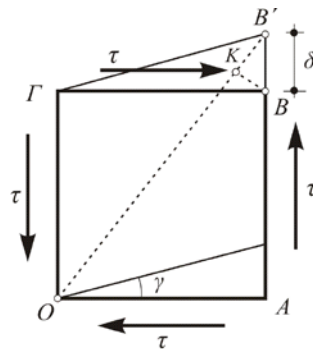
$$\text{Άρα: } \gamma = \frac{600}{300.000} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

**β)** Αν  $\delta$  είναι η ολίσθηση της πλευράς AB ως προς την ΓΟ, τότε θα είναι (σχέση 16):

$$\delta = \alpha \cdot \gamma = 20 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,4 \text{ mm}.$$

**γ)** Αν από το B φέρουμε την κάθετο BK στη διαγώνιο OB', τότε το τμήμα KB' είναι προφανώς η επιμήκυνση  $\Delta l$  της διαγωνίου OB, της οποίας το μήκος είναι  $l = a\sqrt{2}$ . Αλλά είναι:

$$KB' = \Delta l = \delta \cdot \sin 45 = \frac{\delta\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha\gamma\sqrt{2}}{2}.$$



Σχ. 2.7.2

$$\text{Άρα } \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\alpha\gamma\sqrt{2}}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Τον ίδιο συσχετισμό ανάμεσα στα μεγέθη  $\gamma$  και  $\varepsilon$  εκφράζει και η σχέση (5) του Παραρτήματος, Κεφάλαιο 8 σελ. 238, μολονότι εκεί χρησιμοποιήθηκε διαφορετικό σκεπτικό, που οδήγησε άλλωστε σε διαφορετικό αποτέλεσμα.

Όστε η ανηγμένη επιμήκυνση της διαγωνίου OB, (ίση προφανώς με την ανηγμένη επιβράχυνση της ΑΓ), είναι το μισό της γωνιακής παραμόρφωσης, δηλαδή  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

## 8 – Συντελεστής ασφάλειας

Είναι φανερό ότι η καταπόνηση μιας κατασκευής δεν πρέπει ποτέ να φτάνει στα τελικά όρια της αντοχής της, γιατί κάτι τέτοιο θα προκαλούσε τη θραύση της ή ανεπιθύμητες παραμορφώσεις. Αυτό σημαίνει ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται στο εσωτερικό της κατασκευής πρέπει να είναι μικρότερες από ένα όριο.

Οι τάσεις αυτές ονομάζονται **τάσεις λειτουργίας** ή συνηθέστερα **υπάρχουσες τάσεις** και συμβολίζονται με  $\sigma_{\text{υπ}}$  οι ορθές και  $\tau_{\text{υπ}}$  οι διατμητικές.

Η τάση που δεχόμαστε ή ανεχόμαστε να αναπτυχθεί οριακά σε μια διατομή του φορέα για να έχουμε ασφαλή κατασκευή και λειτουργία, ονομάζεται **επιτρεπόμενη τάση**. Η ορθή τάση συμβολίζεται με  $\sigma_{\text{επ}}$ , ενώ η διατμητική με  $\tau_{\text{επ}}$ .

Συνεπώς για την ασφάλεια των κατασκευών θα πρέπει πάντα να είναι:

$$\sigma_{\text{υπ}} \leq \sigma_{\text{επ}} \quad \text{και} \quad \tau_{\text{υπ}} \leq \tau_{\text{επ}}. \quad (19)$$

Ο καθορισμός της επιτρεπόμενης τάσης είναι ένα δύσκολο πρόβλημα στην Αντοχή των Υλικών, επειδή κάθε κατασκευή θα πρέπει να είναι:

α. **ασφαλής**, που σημαίνει ότι η επιτρεπόμενη τάση πρέπει να έχει χαμηλή τιμή, και

β. **οικονομική**, που σημαίνει ότι η κατασκευή πρέπει να έχει μικρές διατομές, πράγμα που οδηγεί σε μεγάλες επιτρεπόμενες τάσεις.

Πρέπει δηλαδή να συμβιβάζονται δύο απαιτήσεις που είναι αντίθετες μεταξύ τους. Για το λόγο αυτό, στο ίδιο υλικό, η επιτρεπόμενη τάση κυμαίνεται σε ορισμένα όρια, ανάλογα με το είδος της κατασκευής και τον τρόπο καταπόνησης.

Συνήθως σαν κριτήριο για τον καθορισμό της επιτρεπόμενης τάσης λαμβάνεται όχι το όριο ελαστικότητας, αλλά το όριο διαρροής  $\sigma_s$ , ή το όριο θραύσης  $\sigma_k$ .

Ο αριθμός που καθορίζει πόσες φορές μικρότερη από το όριο διαρροής ή θραύσης πρέπει να είναι η επιτρεπόμενη τάση, ονομάζεται **συντελεστής ασφάλειας** έναντι διαρροής ή θραύσης αντίστοιχα και συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα  $\nu$ .

Είναι δηλαδή:

$$\nu_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\text{επ}}} \quad \text{ή} \quad \nu_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{\text{επ}}} \quad (20)$$

Ο συντελεστής ασφάλειας  $\nu$  είναι αριθμός θετικός και μεγαλύτερος της μονάδας. Η εκλογή του δεν αφήνεται στην κρίση του Μηχανικού, αλλά καθορίζεται δεσμευτικά από Κρατικούς Κανονισμούς.

Άλλωστε για τις διάφορες κατασκευές πρέπει να λαμβάνονται υπόψη ορισμένοι παράγοντες που παίζουν γενικά αρνητικό ρόλο, όπως:

1. Ελαττώματα στο υλικό των σωμάτων, π.χ. φυσαλίδες στο χυτοσίδηρο και τον ορείχαλκο, ρωγμές ή ρόζοι στο ξύλο κλπ.
2. Φθορά των υλικών λόγω παλαιότητας ή χρήσης,

3. Ενδεχόμενες αρχικές τάσεις κατασκευής,
4. Συμβατική εκτίμηση των φορτίων υπολογισμού,
5. Απρόβλεπτες δυναμικές φορτίσεις, όπως κρούσεις, ταλαντώσεις, φρενάρισμα, σεισμικές δονήσεις κλπ. και
6. Απλουστευτικές παραδοχές στη διαδικασία των υπολογισμών.

Για τους παραπάνω λόγους θα πρέπει η εκλογή του  $\nu$  να εκφράζει ένα λογικό συμβιβασμό ανάμεσα στον παράγοντα 'ασφάλεια' και στον παράγοντα 'οικονομία'.

Με την επιλογή του συντελεστή ασφάλειας, η επιτρεπόμενη τάση

$$\sigma_{επ} = \frac{\sigma_s}{\nu_s} \quad \text{ή} \quad \sigma_{επ} = \frac{\sigma_{\kappa}}{\nu_{\kappa}} \quad (21)$$

βρίσκεται πάντα στην περιοχή αναλογίας όπου ισχύει ο νόμος του Hooke και επομένως μπορούν να γίνουν υπολογισμοί.

Οι συντελεστές ασφάλειας για διάφορα υλικά είναι περίπου:

Χάλυβας:  $\nu = 1,5$  έως  $1,7$  για το όριο διαρροής

$\nu = 2$  έως  $3$  για το όριο θραύσης

Ξύλο:  $\nu = 3$  έως  $4,5$

Λιθοδομή – πλινθοδομή:  $\nu = 8$  έως  $20$ .

### Παράδειγμα

Κύλινδρος μικρού μήκους, με δακτυλιοειδή διατομή πάχους  $t$ , φορτίζεται αξονικά με θλιπτική δύναμη  $P = 450$  kN. Το όριο θραύσης του υλικού είναι  $\sigma_{\kappa} = 270$  MPa και ο συντελεστής ασφάλειας αυτού έναντι θραύσης  $\nu_{\kappa} = 3$ . Αν  $d$  είναι η ελάχιστη απαιτούμενη εξωτερική διάμετρος του κυλίνδρου, έτσι ώστε  $d = 5 \cdot t$ , να υπολογιστούν τα  $t$  και  $d$ .

### Λύση

Η επιτρεπόμενη θλιπτική τάση που μπορεί να εμφανιστεί στον κύλινδρο, προκύπτει από τη σχέση (21) και είναι:

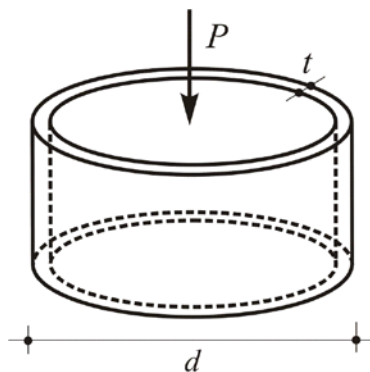
$$\sigma_{επ} = \frac{\sigma_{\kappa}}{\nu} = \frac{270}{3} = 90 \text{ MPa}$$

Η απαιτούμενη διατομή μπορεί τώρα να υπολογιστεί από τη σχέση (19)

$$\sigma_{υπ} \leq \sigma_{επ} \quad \text{ή} \quad \frac{P}{F_{απ}} \leq \sigma_{επ} \quad \text{Άρα:}$$

$$F_{απ} \geq \frac{P}{\sigma_{επ}} = \frac{450}{90} \cdot \frac{10^3 \text{ N}}{10^6 \text{ N}} = 50 \text{ cm}^2$$

Αν  $d$  είναι η εξωτερική διάμετρος, τότε  $d - 2t$  θα είναι η εσωτερική, θα είναι:



Σχ. 2.8

$$F_{\alpha\pi} = \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi (d-2t)^2}{4} = \frac{\pi}{4} (d+d-2t)(d-d+2t) = \pi \cdot t(d-t).$$

Θα πρέπει λοιπόν

$$\pi t(d-t) \geq 50,$$

ή, λόγω του περιορισμού  $d = 5t$ ,

$$\pi t(5t-t) \geq 50 \quad \text{ή} \quad 4\pi t^2 \geq 50 \quad \text{και} \quad t \geq 1,99 \text{ cm.}$$

Εκλέγεται λοιπόν  $t = 2 \text{ cm}$ , οπότε  $d = 5 \cdot 2 = 10 \text{ cm}$ .

## 9 – Επίδραση της θερμοκρασίας

Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι κάθε στερεό σώμα θερμαινόμενο διαστέλλεται, ενώ ψυχόμενο συστέλλεται.

Ο νόμος της θερμοκρασιακής αυτής παραμόρφωσης, είναι:

$$\Delta l_t = a_t \cdot l \cdot \Delta \theta \quad (22)$$

όπου  $\Delta l_t$  η μεταβολή κάθε γραμμικής διάστασης  $l$  του σώματος, του οποίου η θερμοκρασία μεταβάλλεται κατά  $\Delta \theta$ . Ο συντελεστής  $a_t$  είναι χαρακτηριστικός για κάθε υλικό, έχει διαστάσεις  $\text{grad}^{-1}$  και ονομάζεται συντελεστής γραμμικής διαστολής. Τιμές του  $a_t$  για διάφορα υλικά υπάρχουν στον Πίνακα I (τέλος του βιβλίου).

Η σχέση (22) γράφεται και:

$$\frac{\Delta l_t}{l} = a_t \cdot \Delta \theta = \varepsilon_t. \quad (23)$$

Το  $\varepsilon_t$  ονομάζεται **ανηγμένη** παραμόρφωση λόγω θερμοκρασίας και είναι επιμήκυνση ή επιβράχυνση, για  $\Delta \theta > 0$  ή για  $\Delta \theta < 0$  αντίστοιχα.

Είναι φανερό ότι όταν το σώμα είναι ελεύθερο, οποιαδήποτε μεταβολή θερμοκρασίας δεν μεταβάλλει την εντατική του κατάσταση. Όταν όμως έχει συνδέσμους που παρεμποδίζουν τη μεταβολή των διαστάσεών του, τότε κατά τη διεύθυνση αυτή της παρεμπόδισης εμφανίζονται σημαντικές τάσεις, που πρέπει να

ληφθούν σοβαρά υπόψη. Οι τάσεις αυτές εξαρτώνται από τη γεωμετρική μορφή του σώματος, τους συνδέσμους και το μέγεθος της θερμοκρασιακής μεταβολής.

Σημειώνεται ότι αν το σώμα βρίσκεται ήδη σε εντατική κατάσταση, τότε σ' αυτή προστίθεται και εκείνη που οφείλεται στη διαφορά θερμοκρασίας, δηλαδή ισχύει και εδώ ο νόμος της επαλληλίας.

Η μεταβολή θερμοκρασίας πρέπει να είναι σταδιακή και ακίνδυνη.

Για τον προσδιορισμό των τάσεων, που προκαλούνται σε μια ράβδο μήκους  $l$  με ακλόνητους συνδέσμους, όταν ασκείται διαφορά θερμοκρασίας κατά  $\Delta\theta$ , σκεπτόμαστε ως εξής:

Αν η ράβδος ήταν ελεύθερη να επιμηκυνθεί, τότε η αύξηση του μήκους της  $\Delta l_t$ , λόγω αύξησης της θερμοκρασίας κατά  $\Delta\theta$ , θα δίνονταν προφανώς από τη σχέση (α).

Λόγω όμως των ακλόνητων συνδέσμων, η επιμήκυνση αυτή,  $\Delta l_t$ , παρεμποδίζεται. Αυτό γίνεται επειδή οι σύνδεσμοι της ράβδου ασκούν αξονικά μια θλιπτική δύναμη  $P_t$ , η οποία, σύμφωνα με το νόμο του Hooke, προκαλεί επιβράχυνση  $\Delta l$ , η οποία είναι ίση με τη  $\Delta l_t$ .

Ώστε λοιπόν, αν  $F$  είναι το εμβαδόν της διατομής της ράβδου και  $E$  το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της, θα είναι:

$$\Delta l_t = \Delta l \quad \Rightarrow \quad \alpha_t \cdot l \cdot \Delta\theta = \frac{P_t \cdot l}{F \cdot E} \quad (24)$$

Αλλά το πηλίκον

$$\sigma = \frac{P_t}{F} \quad (25)$$

είναι η ορθή θλιπτική τάση που αναπτύσσεται στη ράβδο. Άρα:

$$\alpha_t \cdot \Delta\theta = \frac{\sigma}{E}, \quad \text{ή} \quad \sigma = \alpha_t \cdot E \cdot \Delta\theta. \quad (26)$$

Η τελευταία σχέση, λόγω της (β), μπορεί να γραφεί και σαν:

$$\sigma = \varepsilon_t \cdot E, \quad (27)$$

όπου  $\varepsilon_t$  η ανηγμένη επιμήκυνση της ράβδου λόγω  $\Delta\theta > 0$ .

Είναι προφανές, ότι όταν παρουσιάζεται μείωση της θερμοκρασίας, δηλαδή  $\Delta\theta < 0$ , ο τότε προσδιορισμός της εφελκυστικής ορθής τάσης που εμφανίζεται στη ράβδο, ακολουθεί ακριβώς το ίδιο σκεπτικό.

### Παράδειγμα

Οι σιδηροτροχιές τρένου έχουν μήκος 15 m και τοποθετούνται σε εποχή, με μέση θερμοκρασία, που προβλέπεται ότι θα είναι κατώτερη από την ανώτατη θερινή θερμοκρασία κατά 35°C. Αν το μέτρο ελαστικότητας και ο συντελεστής γραμμικής διαστολής του υλικού των σιδηροτροχιών είναι αντίστοιχα  $E = 200 \text{ GPa}$  και  $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ , να υπολογιστούν:

α) Το απαραίτητο διάκενο μεταξύ δύο σιδηροτροχιών και

β) Οι θλιπτικές τάσεις που θ' αναπτυχθούν αν προβλεφθεί μόνο το μισό διάκενο από αυτό που απαιτείται.

### Λύση

**α)** Το απαραίτητο διάκενο μεταξύ των σιδηροτροχιών θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με τη διαστολή (επιμήκυνση)  $\Delta l_t$  που οι ίδιες παθαίνουν λόγω αύξησης της θερμοκρασίας. Η διαστολή αυτή, που υπολογίζεται από τη σχέση (22), είναι:

$$\Delta l_t = \alpha_t \cdot l \cdot \Delta \theta = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 15.000 \cdot 35 = 6,3 \text{ mm.}$$

**β)** Αν κατά την κατασκευή προβλεφθεί μόνο το μισό του διακένου αυτού, δηλαδή 3,15 mm, το άλλο μισό που δεν υπάρχει, γίνεται αιτία παρεμπόδισης των άκρων των σιδηροτροχιών, με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται θλιπτικές τάσεις κατά Hooke, οι οποίες, σύμφωνα με τη σχέση (27), είναι:

$$\sigma_t = \varepsilon_t \cdot E = \frac{\Delta l}{l} \cdot E = \frac{0,00315}{15} \cdot 2 \cdot 10^5 = 42 \text{ MPa.}$$

## 10 – Ασκήσεις για λύση

**1** Σε πείραμα θλίψης τετραγωνικού πρίσματος μήκους 8 cm και διατομής 4x4 cm<sup>2</sup> είχαμε τα παρακάτω στοιχεία: Επιβράχυνση δοκιμίου με φορτίο 72 kN ίση με 0,02 mm, και αντίστοιχη επιβράχυνση με φορτίο 180 kN ίση με 0,05 mm.

Να υπολογιστεί το μέτρο ελαστικότητας του παραπάνω υλικού.

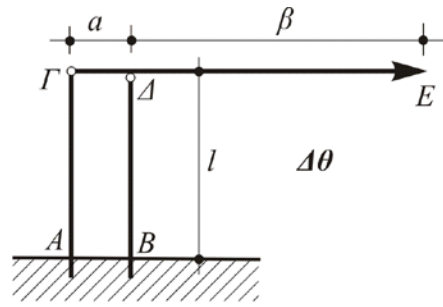
Απάντηση:  $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ MPa.}$

**2** Χαλύβδινος ελκυστήρας μήκους 12 μέτρων, υπόκειται σε εφελκυστική δύναμη 140 kN. Λαμβάνοντας συντελεστή ασφάλειας έναντι διαρροής  $\nu_s = 1,7$ , αν το όριο διαρροής και το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι αντίστοιχα  $\sigma_s = 238 \text{ MPa}$  και  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ , να υπολογιστούν η διάμετρος του ελκυστήρα και η μεταβολή του μήκους του.

Απάντηση:  $d = 36 \text{ mm, } \Delta l = 7,85 \text{ mm.}$

**3** Ο μηχανισμός του σχήματος, που αποτελεί τη βάση λειτουργίας μηχανικού θερμομέτρου, αποτελείται από τις κατακόρυφες ράβδους ΑΓ (τουγκστένιο) και ΒΔ (μαγνήσιο) που είναι πακτωμένες στα Α και Β, ενώ συνδέονται αρθρωτά στα σημεία Γ και Δ με την οριζόντια ράβδο – δείκτη ΓΕ.

Αν  $\alpha_t$  και  $\alpha_m$  είναι αντίστοιχα οι συντελεστές γραμμικής διαστολής των πακτωμένων ράβδων, να υπολογιστεί η κατακόρυφη μετατόπιση  $\delta$  του δείκτη Ε, για ομοιόμορφη αύξηση θερμοκρασίας κατά  $\Delta \theta$ .



Σχ. 2.10

Απάντηση:  $\delta = l \cdot \Delta\theta [\alpha_m + (a_m - a_t)\beta/\alpha]$ .



### Εφελκυσμός – Θλίψη

#### 1 – Εφελκυσμός – Θλίψη, σαν καταπονήσεις

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3α του 1<sup>ου</sup> κεφαλαίου, ο εφελκυσμός είναι η απλή καταπόνηση σε μια ράβδο, όπου εφαρμόζονται αξονικά φόρτια, δηλαδή δυνάμεις, που, έχοντας σαν φορέα τον άξονα της ράβδου, τείνουν να απομακρύνουν μεταξύ τους δύο εγκάρσιες διατομές της.

Με τον ίδιο τρόπο ορίστηκε και η θλίψη, με τη μόνη διαφορά, ότι εδώ τα φορτία ασκούνται έτσι, ώστε δύο ενδιάμεσες διατομές να τείνουν να πλησιάσουν μεταξύ τους.

Κρίνοντας λοιπόν από τον τρόπο που επιβάλλονται τα φορτία, οι δύο αυτές καταπονήσεις εμφανίζονται ακριβώς ίδιες. Όμως αν εξετάσουμε τις παραμορφώσεις που προκαλούν, θα δούμε ότι έχουν μια βασική διαφορά.

Μια εφελκυσμένη ράβδος τεντώνεται, οπότε, αν υπάρχουν ανωμαλίες στον άξονά της, τείνουν να εξαφανιστούν. Όσο περισσότερο φορτίζεται η ράβδος, τόσο πιο ευθύγραμμος γίνεται ο άξονάς της.

Μια θλιβόμενη όμως ράβδος συμπιέζεται, οπότε, οι τυχόν ανωμαλίες στον άξονά της τείνουν να αυξηθούν και να μεγαλώσουν. Όσο περισσότερο φορτίζεται η ράβδος, τόσο περισσότερο ο άξονάς της τείνει να ξεφύγει από την ευθυγραμμία.

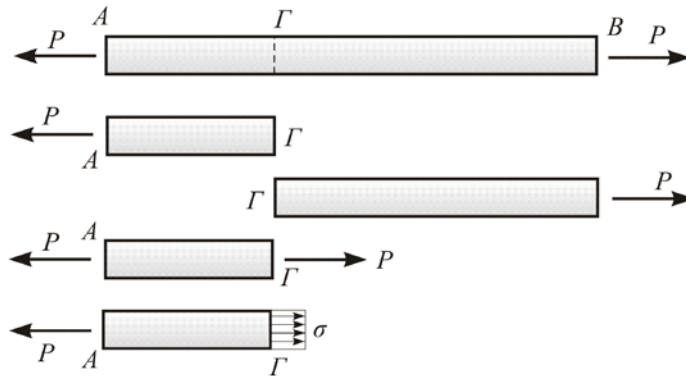
Όστε λοιπόν ενώ στον εφελκυσμό έχουμε αύξηση της ευστάθειας της ράβδου, στη θλίψη έχουμε μείωση αυτής.

Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, το γεγονός αυτό οδηγεί στην εμφάνιση του λυγισμού, που είναι καταπόνηση πολύ δυσμενέστερη από εκείνη της θλίψης. Επομένως είναι απαραίτητο, σε περίπτωση θλίψης, να είμαστε σίγουροι ότι πρόκειται για μια απλή θλιπτική καταπόνηση, αποκλείοντας την περίπτωση λυγισμού. Αυτό βέβαια μπορεί να γίνει με ένα απλό κριτήριο που θίξαμε ήδη στην παράγραφο 3α, αλλά αναλυτική παρουσίαση γίνεται στο σχετικό κεφάλαιο περί λυγισμού.

Με αυτές τις προϋποθέσεις, ότι λεχθεί για τον απλό εφελκυσμό ισχύει και για τη θλίψη.

## 2 – Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις

Θεωρούμε τη ράβδο του σχήματος όπου ενεργούν αξονικά δύο δυνάμεις  $P$  ίσες και αντίθετες. Πραγματοποιώντας τομή στη διατομή  $\Gamma$ , η ράβδος χωρίζεται σε δύο τμήματα,  $A\Gamma$  και  $\Gamma B$ , τα οποία δεν ισορροπούν πια, γιατί στο καθένα απ' αυτά ενεργεί μόνον η δύναμη  $P$ .



Σχ. 3.2

Εξετάζοντας π.χ. το τμήμα  $A\Gamma$ , βλέπουμε ότι για να ισορροπήσει θα πρέπει να εφαρμόσουμε στο κεντροειδές της διατομής  $\Gamma$  μια αξονική δύναμη  $P$ . Η δύναμη αυτή, είναι η **εσωτερική δύναμη** στη διατομή  $\Gamma$ , που ονομάζεται συνήθως **ορθή** ή **αξονική**.

Όμως, επειδή το τμήμα  $A\Gamma$  βρίσκονταν ήδη σε ισορροπία προ της τομής, συμπεραίνουμε ότι τα μόρια της δεξιάς παρειάς της διατομής  $\Gamma$ , ασκούσαν πάνω στα μόρια της αριστερής παρειάς της, στοιχειώδεις δυνάμεις, που η συνισταμένη τους ήταν η εσωτερική δύναμη  $P$ .

Οι στοιχειώδεις αυτές δυνάμεις, που ασκούνται από μόριο σε μόριο, δεν εκφράζονται χωριστά, αλλά δίνεται η συνισταμένη τους  $\sigma$ , στη μονάδα επιφάνειας της διατομής,

$$\sigma = \frac{P}{F},$$

που γνωρίσαμε ήδη σαν **ορθή τάση**.

Η παραπάνω σχέση ισχύει όταν οι στοιχειώδεις δυνάμεις για όλα τα μόρια της διατομής είναι ίσες μεταξύ τους.

Πραγματικά, αυτό συμβαίνει στον απλό εφελκυσμό, μακριά όμως από ειδικές θέσεις, όπως π.χ. είναι τα σημεία των διατομών όπου ασκούνται συγκεντρωμένες δυνάμεις, σε διατομές που εμφανίζουν κενά, οπές, εγχοπές κλπ. (δείτε την ενότητα 3 του 8<sup>ου</sup> κεφαλαίου στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ).

Με την παραπάνω σχέση υπολογίζεται η υπάρχουσα ορθή τάση  $\sigma_{\text{οπ}}$  (εφελκυστική ή θλιπτική) σε σχέση με την αξονική δύναμη  $P$  και το εμβαδόν της διατομής  $F$ .

### 3 – Παραμορφώσεις

Οι παραμορφώσεις που είναι δυνατόν να εμφανιστούν στην αξονική καταπόνηση έχουν ήδη περιγραφεί στο προηγούμενο κεφάλαιο και αφορούν:

α. Την επιμήκυνση  $\Delta l$  ή την ανηγμένη επιμήκυνση  $\varepsilon$  που δίνονται από το νόμο του Hooke:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} \quad \text{ή} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

β. Την ανηγμένη εγκάρσια συστολή:

$$\varepsilon_q = -\mu \varepsilon.$$

### 4 – Έλεγχος αντοχής

Χρησιμοποιώντας τη σχέση που εκφράζει την ορθή τάση στην παράγραφο 2, υπολογίζουμε την υπάρχουσα ορθή τάση:

$$\sigma_{\upsilon\pi} = \frac{P_{\upsilon\pi}}{F_{\upsilon\pi}}, \quad (\alpha)$$

η οποία, σε συνδυασμό με τη σχέση που αναφέρεται στην ενότητα 8 του 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου για την ασφάλεια των κατασκευών, γίνεται:

$$\sigma_{\upsilon\pi} = \frac{P_{\upsilon\pi}}{F_{\upsilon\pi}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}, \quad (\beta)$$

όπου  $\sigma_{\varepsilon\pi}$  η επιτρεπόμενη ορθή τάση του υλικού.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί με τρεις διαφορετικές μορφές και επομένως να χρησιμοποιηθεί για τρεις διαφορετικούς σκοπούς:

α. **Έλεγχο τάσεων**, όπου δίνονται η δύναμη  $P$  και η διατομή  $F$  και ζητείται η τάση που αναπτύσσεται. Εδώ υπολογίζουμε την υπάρχουσα τάση,  $\sigma_{\upsilon\pi}$ , από τη σχέση (α) και στη συνέχεια ελέγχουμε αν είναι  $\sigma_{\upsilon\pi} < \sigma_{\varepsilon\pi}$ , δηλαδή χρησιμοποιούμε ολόκληρη τη σχέση (β).

β. **Διαστασιολόγηση**, όπου δίνονται η δύναμη  $P$  και η επιτρεπόμενη τάση  $\sigma_{\varepsilon\pi}$  και ζητείται η απαιτούμενη διατομή  $F_{\alpha\pi}$ .

$$\sigma_{\upsilon\pi} = \frac{P_{\upsilon\pi}}{F_{\alpha\pi}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \Rightarrow \quad F_{\alpha\pi} \geq \frac{P_{\upsilon\pi}}{\sigma_{\varepsilon\pi}}$$

γ. **Ικανότητα φόρτισης ή φορτοϊκανότητα**, όπου δίνεται το υλικό του φορέα, δηλαδή η επιτρεπόμενη τάση του, μαζί με τη διατομή  $F$  και ζητείται η δύναμη που μπορεί να αναληφθεί.

$$\sigma_{\upsilon\pi} = \frac{P}{F_{\upsilon\pi}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \Rightarrow \quad P \leq F_{\upsilon\pi} \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}$$

Η τιμή  $P = F \cdot \sigma_{\text{επ}}$  δίνει το μέγιστο φορτίο  $P_{\text{max}}$  που επιτρέπεται να φέρει η ράβδος.

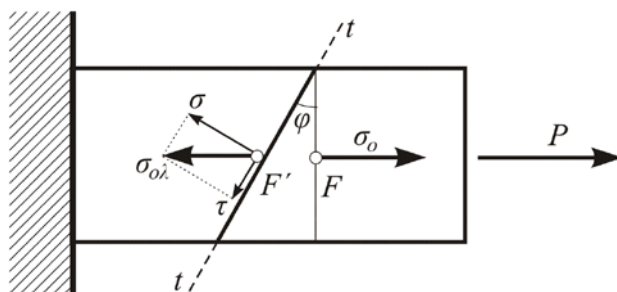
Σημειώνεται ότι για τη χρήση της σχέσης (β), αν η διατομή  $F$  που δίνεται:

1. είναι μεταβαλλόμενη, θα χρησιμοποιηθεί η μικρότερη,  $F_{\text{min}}$
2. έχει κενά, θα ληφθεί υπόψη το **καθαρό** εμβαδόν της.

## 5 – Οι τάσεις σε πλάγιες τομές

Θεωρούμε τη ράβδο του παρακάτω σχήματος που εφελκύεται αξονικά με δύναμη  $P$ . Αν  $F$  είναι η εγκάρσια διατομή της, τότε η ορθή τάση που αναπτύσσεται, θα είναι:

$$\sigma_o = \frac{P}{F} \quad (1)$$



Σχ. 3.5

Έστω τώρα μια πλάγια τομή  $t-t$ , γωνίας  $\phi$  ως προς την  $F$ . Αν  $F'$  είναι το εμβαδόν της, θα είναι:

$$F' = \frac{F}{\sigma\upsilon\nu\phi} \quad (2)$$

Η ολική τάση  $\sigma_{\text{ολ}}$  που ενεργεί στην πλάγια τομή  $F'$  έχει προφανώς τη διεύθυνση της  $P$ , και είναι:

$$\sigma_{\text{ολ}} = \frac{P}{F'} = \frac{P}{F} \sigma\upsilon\nu\phi = \sigma_o \cdot \sigma\upsilon\nu\phi \quad (3)$$

Αναλύοντας τώρα τη  $\sigma_{\text{ολ}}$  στις συνιστώσες της  $\sigma$  και  $\tau$  (ορθή και διατμητική τάση της  $F'$ ) κάθετα και παράλληλα αντίστοιχα προς την τομή  $t-t$ , έχουμε:

$$\sigma = \sigma_{\text{ολ}} \cdot \sigma\upsilon\nu\phi = \sigma_o \cdot \sigma\upsilon\nu^2\phi = \frac{\sigma_o}{2} (1 + \sigma\upsilon\nu 2\phi) \quad (4)$$

$$\tau = \sigma_{\text{ολ}} \cdot \eta\mu\phi = \sigma_o \cdot \eta\mu\phi \cdot \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\sigma_o}{2} \eta\mu 2\phi \quad (5)$$

Διερευνώντας τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι:

1. Για  $\phi = 0^\circ$ , οπότε  $\eta\mu 2\phi = 0$  και  $\sigma\upsilon\nu 2\phi = 1$ , θα έχουμε:

$$\sigma = \sigma_o = \sigma_{\text{max}} \quad \text{και} \quad \tau = 0,$$

2. Για  $\phi = 45^\circ$ , οπότε  $\eta\mu 2\phi = 1$  και  $\sigma\upsilon\nu 2\phi = 0$ , θα είναι:

$$\sigma = \frac{\sigma_o}{2} \quad \text{και} \quad \tau = \frac{\sigma_o}{2} = \tau_{\max},$$

3. Για  $\phi = 90^\circ$ , οπότε  $\eta\mu 2\phi = 0$  και  $\sigma\upsilon\nu 2\phi = -1$ , θα είναι:

$$\sigma = 0 \quad \text{και} \quad \tau = 0.$$

## 6 – Ο κύκλος Mohr σε μοναξονική εντατική κατάσταση

Από τις σχέσεις (4) και (5) της προηγούμενης ενότητας, μπορούμε να οδηγηθούμε στην κατασκευή του κύκλου Mohr για την περίπτωση **καθαρού εφελκυσμού ή θλίψης**, απαλείφοντας τη γωνία  $\phi$ .

Πραγματικά, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$$\sigma - \frac{\sigma_o}{2} = \frac{\sigma_o}{2} \sigma\upsilon\nu 2\phi \quad (6)$$

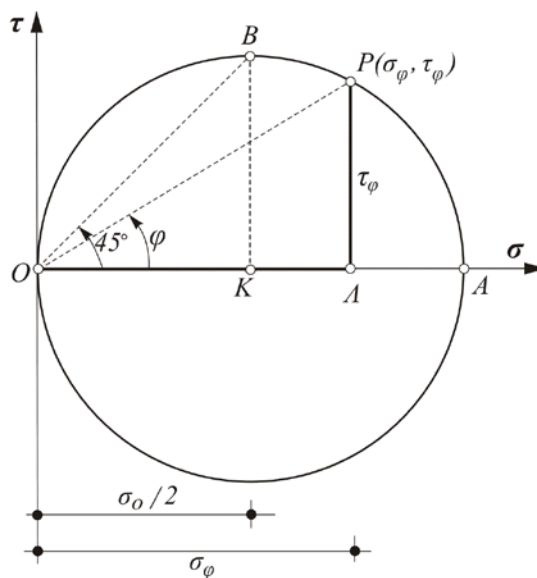
$$\tau = \frac{\sigma_o}{2} \eta\mu 2\phi \quad (7)$$

Υψώνοντας τις σχέσεις (6) και (7) στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε την εξίσωση

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_o}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_o}{2}\right)^2, \quad (8)$$

η οποία, σε σύστημα συντεταγμένων  $\sigma, \tau$  παριστάνει περιφέρεια κύκλου, που έχει ως κέντρο το σημείο  $K(\sigma_o/2, 0)$  και ακτίνα  $r = \sigma_o/2$ .

Αυτός είναι ο κύκλος του Mohr που περιγράφει πλήρως τη μονο-αξονική εντατική κατάσταση και μπορούν με τη βοήθειά του να λυθούν γραφικά όλα τα προβλήματα στα οποία δίνονται δύο από τα μεγέθη  $\sigma_\phi, \tau_\phi$  και  $\phi$  και ζητείται το τρίτο.



Σχ. 3.6

Στο σημείο P ( $\sigma_\phi$ ,  $\tau_\phi$ ) αντιστοιχεί η λοξή τομή που κλίνει υπό γωνία  $\phi$  προς την εγκάρσια, όπου ενεργεί η ορθή τάση (ΟΛ) =  $\sigma_\phi$  και η διατμητική τάση (ΛΡ) =  $\tau_\phi$ .

Αξιοσημείωτο είναι ότι η μέγιστη διατμητική τάση εμφανίζεται σε επίπεδα που σχηματίζουν γωνία  $45^\circ$  (σημείο Β) ή  $135^\circ$  ως προς την εγκάρσια διατομή. Αυτό, για τα υλικά που έχουν μικρή αντοχή σε διάτμηση, έχει σαν συνέπεια, η θραύση τους λόγω αξονικού φορτίου, να γίνεται σε επίπεδα που σχηματίζουν γωνίες  $45^\circ$  με την εγκάρσια διατομή.

Επειδή η ορθή τάση  $\sigma_o$  είναι κύρια τάση, ο παραπάνω κύκλος του Mohr στη μονοαξονική εντατική κατάσταση, αποτελεί ειδική περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης όπου δίνονται οι κύριες τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ .

Πραγματικά, εδώ είναι:  $\sigma_1 = \sigma_o$  και  $\sigma_2 = 0$ ,

οπότε ο κύκλος του Mohr κατασκευάζεται εφαπτόμενος του άξονα των  $\tau$ , με διάμετρο  $\sigma_o$ .

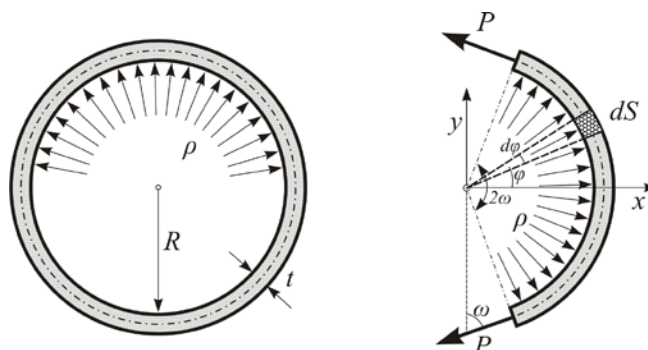
## 7 – Κυλινδρικά δοχεία με λεπτά τοιχώματα

Παράδειγμα τέτοιων δοχείων είναι οι αεροσυμπιεστές (κ. κοφλέρ), οι λέβητες, κλπ. Έχουν λεπτά τοιχώματα πάχους  $t$ , και είναι κυλινδρικής μορφής με μέση ακτίνα  $R$ , ενώ τα άκρα τους καταλήγουν σε σφαιρικά συνήθως ελάσματα.

Στο εσωτερικό τους υπάρχει ρευστό με υπερπίεση  $p$ , που είναι η διαφορά εξωτερικής και εσωτερικής πίεσης.

Μολονότι οι δυνάμεις που ασκούνται λόγω της  $p$  είναι κάθετες στον άξονα του σώματος, η καταπόνησή του δεν είναι κάμψη, αλλά απλός εφελκυσμός.

Για την απόδειξη αυτού, και ταυτόχρονα τον προσδιορισμό των εσωτερικών δυνάμεων, που αναπτύσσονται σ' οποιαδήποτε εγκάρσια ή κατά μήκος τομή, θεωρούμε ένα τμήμα του τοιχώματος του δοχείου που κόβεται από δύο τομές κάθετα στον άξονα που απέχουν μεταξύ τους κατά μονάδα. Στη συνέχεια, από το βραχιόλι που προέκυψε, θεωρούμε ένα τμήμα του, που αποκόπτεται με δύο άλλες τομές σε μορφή κυκλικού τόξου, σχηματίζοντας έτσι έναν όνυχα που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία  $2\omega$ .



Σχ. 7.1

Το τμήμα αυτό βρίσκεται σε ισορροπία κάτω από τις πιέσεις  $p$  που ασκούνται στο εσωτερικό του τοίχωμα, και τις εσωτερικές δυνάμεις  $P$  που ενεργούν στις ακραίες διατομές, οι οποίες για λόγους συμμετρίας, είναι ίσες μεταξύ τους.

Επομένως θα ισχύει ο μηδενισμός του αλγεβρικού αθροίσματος των οριζοντίων δυνάμεων, δηλ.

$$\begin{aligned}\sum x^{\rightarrow+} &= 0 \Rightarrow \int_{-\omega}^{+\omega} dS \cdot \rho \cdot \sigma \nu \varphi - 2P\eta\mu\omega = 0 \Rightarrow \\ \int_{-\omega}^{+\omega} (R \cdot d\varphi) \cdot \rho \cdot \sigma \nu \varphi - 2P\eta\mu\omega &= 0 \Rightarrow \\ R \cdot \rho \int_{-\omega}^{+\omega} \sigma \nu \varphi d\varphi &= 2P\eta\mu\omega \Rightarrow \\ R \cdot \rho [\eta\mu\varphi]_{-\omega}^{+\omega} &= 2P\eta\mu\omega \Rightarrow \\ R \cdot \rho (\eta\mu\omega + \eta\mu\omega) &= 2P\eta\mu\omega,\end{aligned}$$

και τελικά

$$R \cdot \rho = P = \text{σταθ}.$$

Ώστε λοιπόν η εσωτερική δύναμη P είναι ανεξάρτητη από τη γωνία  $\omega$  και έχει σταθερή τιμή για κάθε διατομή του δακτυλίου.

Άρα ο δακτύλιος, και επομένως τα περιμετρικά τοιχώματα του δοχείου, καταπονούνται σε εφελκυσμό.

Αν τώρα  $\sigma_t$  είναι η ορθή τάση που αναπτύσσεται στην παράπλευρη επιφάνεια του δακτυλίου, θα είναι:

$$P = t \cdot 1 \cdot \sigma_t = R \cdot \rho \Rightarrow \sigma_t = \frac{R \cdot \rho}{t} \quad (9)$$

Η τάση  $\sigma_t$  ονομάζεται **εφαπτομενική**.

Όμως η  $\sigma_t$  δεν είναι η μόνη τάση που εμφανίζεται στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου. Είναι φανερό ότι η πίεση που αναπτύσσεται στους δύο πάτους του κυλίνδρου δημιουργεί τάσεις  $\sigma_\alpha$  που είναι παράλληλες προς τον άξονα του δοχείου και ονομάζονται **επιμήκειες** τάσεις.

Ο υπολογισμός τους γίνεται αν ληφθεί υπόψη η δύναμη Π που ασκείται σε κάθε πάτο του κυλίνδρου

$$\Pi = \pi \cdot R^2 \rho,$$

και η δύναμη αυτή κατανεμηθεί στην εγκάρσια διατομή του κυλίνδρου, που είναι κυκλικός δακτύλιος και έχει εμβαδόν:

$$F = 2\pi \cdot R \cdot t.$$

Επομένως θα είναι:

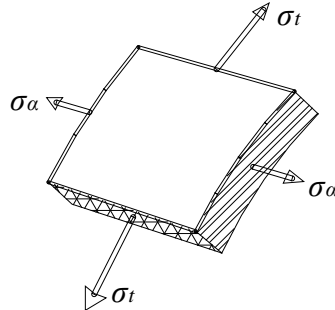
$$\Pi = F \cdot \sigma_\alpha \Rightarrow \pi \cdot R^2 \rho = 2\pi \cdot R \cdot t \cdot \sigma_\alpha$$

$$\text{και τελικά} \quad \sigma_\alpha = \frac{R \cdot \rho}{2t}. \quad (10)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (9) και (10), παρατηρούμε ότι

$$\sigma_t = 2\sigma_\alpha.$$

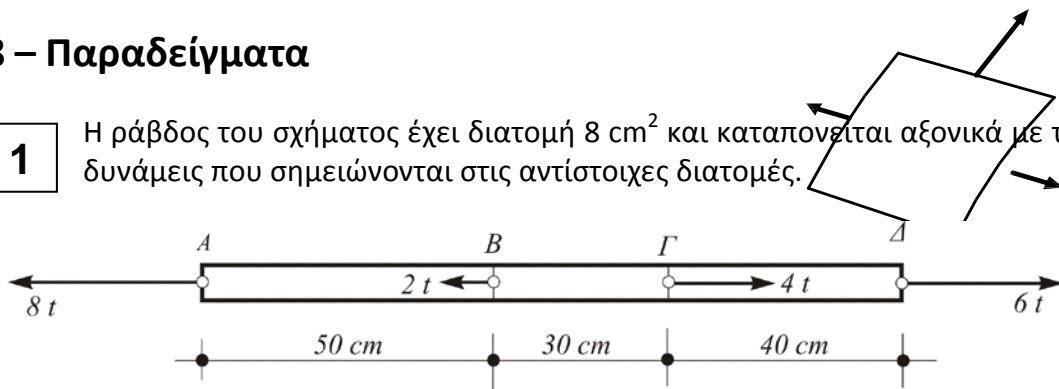
Έτσι, κάθε στοιχείο της παράπλευρης επιφάνειας του δοχείου που προκύπτει με δύο τομές κάθετες στον άξονα και δύο τομές που να περιέχουν τον άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, βρίσκεται σε επίπεδη εντατική κατάσταση.



Σχ. 7.2

## 8 – Παραδείγματα

**1** Η ράβδος του σχήματος έχει διατομή  $8 \text{ cm}^2$  και καταπονείται αξονικά με τις δυνάμεις που σημειώνονται στις αντίστοιχες διατομές.



Σχ. 3.8.1

Αν  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ , να υπολογιστούν:

- Οι τάσεις που αναπτύσσονται σε κάθε τμήμα και
- Η μεταβολή μήκους της ράβδου.

### Λύση

**α)** Μετά τη διαπίστωση της ισορροπίας των οριζοντίων δυνάμεων της ράβδου ( $\Sigma \chi^{\rightarrow} = 0$ ), προσδιορίζουμε την αξονική δύναμη που εμφανίζεται σε κάθε τμήμα χωριστά, παίρνοντας το αλγεβρικό άθροισμα των δυνάμεων αριστερά ή δεξιά από τυχούσα διατομή που ανήκει στο εξεταζόμενο τμήμα.

Έτσι οι ορθές τάσεις (εφελκυστικές ή θλιπτικές) κάθε τμήματος θα προκύψουν σαν πηλίκο της εκάστοτε δύναμης δια της αντίστοιχης διατομής του εξεταζομένου τμήματος. Δηλαδή:

Τμήμα AB (δυνάμεις από αριστερά)

$$N_{AB} = + 8 t \text{ (εφελκυστική)} \rightarrow \sigma_{AB} = 8.000/8 = + 1.000 \text{ kp/cm}^2$$

Τμήμα BΓ (δυνάμεις από αριστερά)

$$N_{B\Gamma} = 8 + 2 = + 10 t \text{ (εφελκυστική)} \rightarrow \sigma_{B\Gamma} = 10.000/8 = + 1.250 \text{ kp/cm}^2$$



Τμήμα ΓΔ (δυνάμεις από δεξιά)

$$N_{\Gamma\Delta} = +6 \text{ t (εφελκυστική)} \rightarrow \sigma_{\Gamma\Delta} = 6.000/8 = +750 \text{ kp/cm}^2.$$

**β)** Η μεταβολή μήκους της ράβδου μπορεί τώρα να υπολογιστεί με δύο τρόπους.

1) Προσδιορίζοντας το αλγεβρικό άθροισμα των επί μέρους επιμηκύνσεων (ή επιβραχύνσεων) κάθε τμήματος, αφού είναι γνωστή η αντίστοιχη αξονική δύναμη. Χρησιμοποιείται ιδιαίτερα όταν η διατομή είτε το υλικό της ράβδου είναι διαφορετικά κατά τμήματα. Έτσι έχουμε:

Τμήμα ΑΒ

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l_{AB}}{F_{AB} \cdot E_{AB}} = \sigma_{AB} \frac{l_{AB}}{E_{AB}} = 1.000 \frac{50}{2 \cdot 10^6} = 0,025 \text{ cm} = +0,25 \text{ mm}$$

Τμήμα ΒΓ

$$\Delta l_{B\Gamma} = \sigma_{B\Gamma} \frac{l_{B\Gamma}}{E_{B\Gamma}} = 1.250 \frac{30}{2 \cdot 10^6} = 0,019 \text{ cm} = +0,19 \text{ mm}$$

Τμήμα ΓΔ

$$\Delta l_{\Gamma\Delta} = \sigma_{\Gamma\Delta} \frac{l_{\Gamma\Delta}}{E_{\Gamma\Delta}} = 750 \frac{40}{2 \cdot 10^6} = 0,015 \text{ cm} = +0,15 \text{ mm}$$

$$\text{Άρα: } \Delta l_{ολ} = 0,25 + 0,19 + 0,15 = \mathbf{0,59 \text{ mm.}}$$

2) Με τη μέθοδο της επαλληλίας, που εφαρμόζεται μόνο σε ράβδους σταθερής διατομής και υλικού, όπως εδώ.

Θεωρούμε το ένα άκρο της ράβδου, π.χ. το Α, πακτωμένο, δηλαδή αμετακίνητο και προσδιορίζουμε το αλγεβρικό άθροισμα των επιμηκύνσεων (ή επιβραχύνσεων) που θα προκαλούσε κάθε δύναμη χωριστά, αν δρούσε μόνη της στο μήκος της ράβδου που ορίζεται, από τη διατομή όπου εφαρμόζεται η δύναμη μέχρι το σταθερό άκρο, το Α.

Η εφελκυστική ή θλιπτική δύναμη ως προς το σταθερό άκρο, καθορίζει αντίστοιχα την επιμήκυνση ή επιβράχυνση. Έτσι είναι:

$$\Delta l_B = -\frac{2.000 \cdot 50}{F \cdot E} = -10 \frac{10^4}{F \cdot E} \text{ cm}$$

$$\Delta l_{\Gamma} = +\frac{4.000 \cdot (50 + 30)}{F \cdot E} = 32 \frac{10^4}{F \cdot E} \text{ cm}$$

$$\Delta l_{\Delta} = +\frac{6.000 \cdot (50 + 30 + 40)}{F \cdot E} = 72 \frac{10^4}{F \cdot E} \text{ cm}$$

$$\text{Άρα: } \Delta l_{ολ} = \frac{10^4}{F \cdot E} (-10 + 32 + 72) = \frac{94 \cdot 10^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^6} = 0,059 \text{ cm} = 0,59 \text{ mm}$$

**2** Ράβδος σταθερής διατομής είναι κρεμασμένη από το ένα άκρο και φέρει σαν φορτίο μόνο το δικό της βάρος. Από τα στοιχεία της ράβδου δίνονται το μήκος  $l$ , η διατομή  $F$ , το μέτρο ελαστικότητας  $E$  και το ειδικό βάρος  $\gamma$ . Να υπολογιστεί η επιμήκυνση  $\Delta l$  που παθαίνει η ράβδος.

### Λύση

Η εφελκυστική δύναμη που εμφανίζεται σε κάθε οριζόντια διατομή της ράβδου, προκαλείται από το βάρος του υλικού που βρίσκεται κάτω από αυτή και συνεπώς είναι μεταβαλλόμενο μέγεθος.

Η συνολική επομένως επιμήκυνση της ράβδου είναι αποτέλεσμα των μερικών επιμηκύνσεων που εμφανίζονται σε κάθε απειροστό τμήμα της, το οποίο εφελκύεται με το βάρος της υπόλοιπης ράβδου που κρέμεται κάτω απ' αυτό.

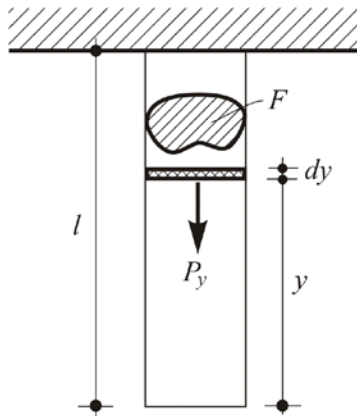
Αν λοιπόν  $dy$  είναι το μήκος στοιχειώδους τμήματος της ράβδου που απέχει απόσταση  $y$  από το κάτω άκρο της, τότε η εφελκυστική δύναμη που ασκείται σ' αυτό είναι:

$$P_y = F \cdot \gamma \cdot y$$

Η δύναμη αυτή προκαλεί στο στοιχειώδες τμήμα επιμήκυνση  $\Delta dy$ , η οποία κατά Hooke είναι:

$$\Delta dy = \frac{P_y \cdot dy}{F \cdot E} = \frac{F \cdot y \cdot \gamma \cdot dy}{F \cdot E} = \frac{\gamma}{E} y \cdot dy$$

Ολοκληρώνοντας σε όλο το μήκος της ράβδου, προκύπτει η συνολική επιμήκυνση



Σχ. 3.8.2

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \frac{\gamma}{E} \int_0^l y dy = \frac{\gamma}{E} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^l = \frac{\gamma l^2}{2E}$$

Σημειώνεται ότι η ολική επιμήκυνση που παράγεται από το βάρος της ίδιας της ράβδου είναι **ανεξάρτητη** της διατομής της και ισούται με τη **μισή** επιμήκυνση απ' εκείνη που θα προκαλούσε μια δύναμη ίση με το βάρος της ράβδου, αν δρούσε αξονικά στο άκρο της, με τη ράβδο σε **οριζόντια** θέση.

Πραγματικά, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

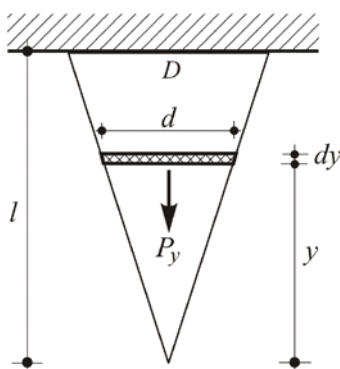
$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{(\gamma \cdot l \cdot F)l}{2F \cdot E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{W \cdot l}{F \cdot E},$$

όπου  $W$  το βάρος της ράβδου.

**3** Κωνική ράβδος κυκλικής διατομής, κρέμεται από τη βάση της όπως στο σχήμα. Με γνωστά τα  $l$ ,  $D$ ,  $E$  και  $\gamma$ , να υπολογιστεί η επιμήκυνση  $\Delta l$  λόγω ιδίου βάρους.

### Λύση

Ακολουθώντας το σκεπτικό της προηγούμενης άσκησης, η δύναμη  $P_y$ , που ασκείται εφελκυστικά στο στοιχειώδες τμήμα της ράβδου του σχήματος, μήκους  $dy$  και διαμέτρου  $d$  και είναι



Σχ. 3.8.3

$$P_y = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} y \cdot \gamma,$$

προκαλεί επιμήκυνση  $\Delta dy$ , που είναι:

$$\Delta dy = \frac{P_y \cdot dy}{F \cdot E} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} y \cdot \gamma \cdot dy}{\frac{\pi \cdot d^2}{4} E} = \frac{\gamma}{3E} y \cdot dy.$$

Άρα η ολική επιμήκυνση,  $\Delta l$ , της ράβδου θα είναι:

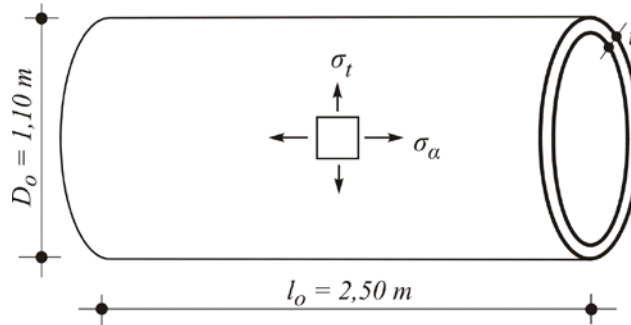
$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \frac{\gamma}{3E} \int_0^l y dy = \frac{\gamma}{3E} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^l = \frac{\gamma \cdot l^2}{6E}.$$

Και εδώ παρατηρούμε ότι η επιμήκυνση  $\Delta l$  είναι ανεξάρτητη της διαμέτρου  $D$  της κωνικής βάσης και ισούται με τη **μισή** επιμήκυνση που θα προκαλούσε μια δύναμη ίση με το βάρος της κωνικής ράβδου, τοποθετημένη όμως στην άκρη παρόμοιας **κυλινδρικής** ράβδου σε οριζόντια θέση, με διατομή ίση με την κωνική βάση. Πραγματικά, είναι:

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{6E} = \frac{\left(\frac{1}{3}\gamma \cdot l \cdot F\right) 3l}{6F \cdot E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{W \cdot l}{F \cdot E},$$

όπου  $W$  το βάρος της κωνικής ράβδου.

**4** Αεροθάλαμος μήκους 2,50 m και διαμέτρου 1,10 m πρέπει να λειτουργήσει με υπερπίεση  $p = 10$  at. Αν  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $\mu = 0,3$  και  $\sigma_{\varepsilon\pi} = 100$  MPa, ζητούνται:



Σχ. 3.8.4

α) Ο καθορισμός του ελάχιστου πάχους τοιχώματος  $t$  σε ακέραια mm,

β) οι τάσεις κατά διατομή και γενέτειρα που θ' αναπτυχθούν στο υλικό της παράπλευρης επιφάνειας μετά την εκλογή του πάχους, καθώς και η μέγιστη διατμητική τάση  $\tau_{\max}$ ,

γ) Η ανηγμένη αύξηση του μήκους, της διαμέτρου και της παράπλευρης επιφάνειας του αεροθαλάμου και

δ) Η αντίστοιχη αύξηση των προηγούμενων μεγεθών (μήκος, διάμετρος, παράπλευρη επιφάνεια).

### Λύση

**α)** Όπως είναι γνωστό η σχέση που συνδέει τις τάσεις  $\sigma_t$  και  $\sigma_\alpha$  που αναπτύσσονται στην παράπλευρη επιφάνεια του αεροθαλάμου είναι  $\sigma_t = 2\sigma_\alpha$  όπου  $\sigma_t$  η μεγαλύτερη (κατά διατομή τάση), η οποία, κατά τη σχέση (9), είναι:

$$\sigma_t = \frac{R \cdot p}{t}$$

Επομένως κριτήριο για τον προσδιορισμό του πάχους του τοιχώματος θα αποτελέσει η παραπάνω τάση  $\sigma_t$ , η τιμή της οποίας δεν θα πρέπει να ξεπερνά την  $\sigma_{\varepsilon\pi}$ , δηλαδή:

$$\sigma_t \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \text{ή} \quad \frac{R \cdot p}{t} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \text{και} \quad t \geq \frac{R \cdot p}{\sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{55 \cdot 10}{1000} = 0,55 \text{ cm.}$$

Συνεπώς εκλέγεται πάχος τοιχώματος  $t = 6$  mm.

**β)** Οι τάσεις  $\sigma_t$  και  $\sigma_\alpha$  που θ' αναπτυχθούν τώρα κατά διατομή και γενέτειρα αντίστοιχα, είναι:

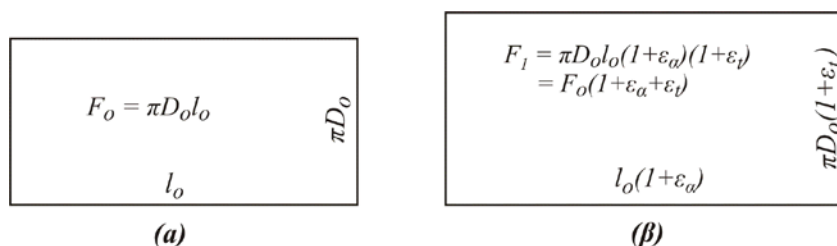
$$\sigma_t = \frac{R \cdot \rho}{t} = \frac{55 \cdot 10}{0,6} = 917 \text{ kp/cm}^2 < \sigma_{\varepsilon\pi} \text{ και}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_t}{2} = 458 \text{ kp/cm}^2.$$

Η μέγιστη διατμητική τάση  $\tau_{\max}$ , προκύπτει από τη σχέση (12):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_a}{2} = 229 \text{ kp/cm}^2.$$

**γ)** Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του αεροθαλάμου πριν από την παραμόρφωση είναι ένα ορθογώνιο μήκους  $l_o$  και ύψους  $\pi D_o$  όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχ. 3.8.5

Μετά τη λειτουργία του αεροθαλάμου, λόγω των τάσεων  $\sigma_t$  και  $\sigma_a$  που αναπτύσσονται, η παράπλευρη επιφάνεια αυξάνεται, με αποτέλεσμα, οι νέες διαστάσεις του ορθογωνίου που θα προκύψουν να είναι (σχ. β)

$$\text{μήκος } l_1 = l_o(1 + \varepsilon_a) \text{ και}$$

$$\text{ύψος } \pi D_1 = \pi D_o(1 + \varepsilon_t),$$

όπου  $\varepsilon_a$  και  $\varepsilon_t$  είναι αντίστοιχα η ανηγμένη αύξηση του μήκους και του ύψους (δηλαδή της διαμέτρου) του νέου ορθογωνίου, οι οποίες από το γενικευμένο νόμο του Hooke είναι:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E}(\sigma_a - \mu\sigma_t) = \frac{\sigma_t}{E}\left(\frac{1}{2} - \mu\right) = \frac{917}{2 \cdot 10^6}(0,5 - 0,3) = 9,17 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_a) = \frac{\sigma_t}{E}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = \frac{917}{2 \cdot 10^6}(1 - 0,15) = 3,9 \cdot 10^{-4}.$$

Αν τώρα  $F_o$  και  $F_1$  είναι αντίστοιχα η αρχική και τελική επιφάνεια του ορθογωνίου, θα έχουμε:

$$F_o = \pi \cdot l_o D_o \quad \text{και}$$

$$F_1 = \pi \cdot l_1 D_1 = \pi \cdot l_o D_o (1 + \varepsilon_a)(1 + \varepsilon_t) = F_o(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_t),$$

παραλείποντας χωρίς αισθητό σφάλμα τον παράγοντα  $\varepsilon_a \cdot \varepsilon_t$ .

Συνεπώς η ανηγμένη αύξηση της παράπλευρης επιφάνειας του αεροθαλάμου, είναι:

$$\varepsilon_F = \frac{F_1 - F_o}{F_o} = \frac{F_o(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_t - 1)}{F_o} = \varepsilon_a + \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E}\left(\frac{1}{2} - \mu + 1 - \frac{\mu}{2}\right), \text{ ή}$$

$$\varepsilon_F = \frac{\sigma_t}{E} \cdot \frac{3}{2}(1-\mu) = \frac{917}{2 \cdot 10^6}(1-0,3) \cdot 1,5 = 4,81 \cdot 10^{-4}.$$

**δ)** Η αντίστοιχη αύξηση που προκύπτει τώρα για το μήκος, τη διάμετρο και την παράπλευρη επιφάνεια, είναι:

$$\Delta l = l_0 \cdot \varepsilon_\alpha = 2.500 \cdot 9,17 \cdot 10^{-5} = 0,23 \text{ mm},$$

$$\Delta D = D_0 \cdot \varepsilon_t = 1.100 \cdot 3,9 \cdot 10^{-4} = 0,43 \text{ mm και}$$

$$\Delta F = F_0 \cdot \varepsilon_F = \pi \cdot 110 \cdot 250 \cdot 4,81 \cdot 10^{-4} = 41,55 \text{ cm}^2.$$

## 9 – Στατικά αόριστα προβλήματα εφελκυσμού - θλίψης

Προκειμένου να εκφράσουμε την ισορροπία ενός σώματος θα λέμε ότι εμφανίζεται **στατικά αόριστο** πρόβλημα, όταν οι στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας που διατίθενται από τη Στατική δεν επαρκούν για τον καθορισμό των εσωτερικών δυνάμεων ή αντιδράσεων του σώματος.

Η διαφορά ανάμεσα στον αριθμό που εκφράζει τις άγνωστες δυνάμεις που θέλουμε να υπολογίσουμε και στον αριθμό των εξισώσεων ισορροπίας της Στατικής που διατίθενται, παριστάνει το βαθμό **στατικής αοριστίας**.

Έτσι, στην περίπτωση ενός στατικά αόριστου προβλήματος, αν στις υπεράριθμες άγνωστες δυνάμεις δώσουμε αυθαίρετες τιμές, τότε θα προκύψουν για τις υπόλοιπες άγνωστες δυνάμεις συγκεκριμένες τιμές. Τούτο βέβαια – δικαιολογημένα - δημιουργεί την εντύπωση ότι υπάρχουν «άπειρες λύσεις».

Όμως, από τις «άπειρες αυτές λύσεις», **μια** μόνον θα ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Το ποια θα είναι αυτή, θα βρεθεί με συμπληρωματικές εξισώσεις, ισάριθμες του βαθμού στατικής αοριστίας, που θα εκφράζουν τις **συνθήκες συμβιβασμού των παραμορφώσεων**.

Την πρόσθετη ή πρόσθετες αυτές εξισώσεις, παίρνουμε, αφού παρατηρήσουμε προσεκτικά την παραμόρφωση του σώματος και εκφράσουμε τη συσχέτιση των ποικίλων παραμορφώσεων μεταξύ τους.

Η συσχέτιση αυτή μπορεί να προκύπτει σαν αποτέλεσμα:

1. Της γεωμετρίας του φορέα
2. Κάποιου συγκεκριμένου περιορισμού, ή
3. Της απλής κοινής λογικής.

Προκύπτει συνεπώς, από ένα στατικά αόριστο πρόβλημα εφελκυσμού, μια κατάσταση, η οποία δεν είναι πάντα απλή και εύκολη.

Για καλλίτερη εμπέδωση αυτής της πολύ σημαντικής κατάστασης, που ουσιαστικά εκφράζει την ομορφιά και το μεγαλείο της σκέψης που σχετίζεται με τον επιστημονικό χώρο της Αντοχής των Υλικών, ακολουθούν διάφορα παραδείγματα που δημιουργήθηκαν και λύθηκαν από τον γράφοντα, με αποκλειστικό σκοπό τη διεύρυνση του τρόπου σκέψης του σπουδαστή στην αντιμετώπιση απλών ή πολυπλοκότερων προβλημάτων αυτής της μορφής.

## 10 - Παραδείγματα

**1** Πρισματική ράβδος που είναι πακτωμένη στα άκρα της, φορτίζεται στις διατομές 1, 2, ... i, με τα αξονικά φορτία  $P_1, P_2, \dots P_i$  αντίστοιχα.

Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις που εμφανίζονται στις στηρίξεις A και B, όταν στη ράβδο:

- α) ενεργεί μόνο η δύναμη  $P_1$  και
- β) ενεργούν όλες οι δυνάμεις μαζί.

### Λύση

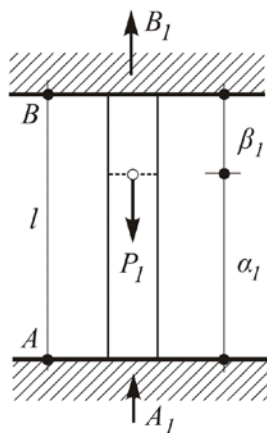
**α)** Αν  $P_1$  είναι η μοναδική δύναμη που ενεργεί στη διατομή 1 της ράβδου, προκαλώντας στις στηρίξεις A και B αντιδράσεις  $A_1$  και  $B_1$  αντίστοιχα, τότε θα είναι:

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \rightarrow A_1 + B_1 - P_1 = 0 \rightarrow A_1 + B_1 = P_1 \quad (a)$$

Είναι προφανές ότι η εξίσωση (α) δεν επαρκεί για τον υπολογισμό των δύο αγνώστων  $A_1$  και  $B_1$ . Γι αυτό θ' αναζητήσουμε άλλη μια εξίσωση, η οποία θα **συμβιβάζει** τις παραμορφώσεις.

Αν  $a_1$  και  $\beta_1$  είναι οι αποστάσεις της διατομής 1 από τις στηρίξεις A και B αντίστοιχα, τότε παρατηρούμε ότι η μεν  $A_1$  θλίβει το κάτω τμήμα της ράβδου, μήκους  $a_1$ , προκαλώντας επιβράχυνση

$$\Delta a_1 = \frac{A_1 \cdot a_1}{E \cdot F},$$



Σχ. 3.10.1

ενώ ταυτόχρονα η  $B_1$  εφελκύει το πάνω τμήμα της ράβδου, μήκους  $\beta_1$ , προκαλώντας επιμήκυνση

$$\Delta \beta_1 = \frac{B_1 \cdot \beta_1}{E \cdot F},$$

η οποία είναι αναγκαστικά **ίση** με τη  $\Delta a_1$ , αφού το μήκος διατηρείται σταθερό.

Το συμβιβαστό δηλαδή των παραμορφώσεων εκφράζεται εδώ με την απλή σκέψη, ότι κατά τη μετακίνηση της διατομής 1 προς τα κάτω λόγω της δύναμης  $P_1$ , εμφανίζεται στο τμήμα  $\beta_1$  τόση επιμήκυνση, όση είναι η επιβράχυνση του τμήματος

$\alpha_1$ , έτσι ώστε το αλγεβρικό άθροισμα των παραμορφώσεων της ράβδου να είναι μηδέν, αφού τα στηρίγματά της είναι αμετακίνητα. Δηλαδή:

$$\Sigma \Delta l = 0 \quad \text{ή} \quad -\Delta \alpha_1 + \Delta \beta_1 = 0$$

$$\text{Άρα} \quad \frac{A_1 \cdot a_1}{E \cdot F} = \frac{B_1 \cdot \beta_1}{E \cdot F} \quad \text{ή} \quad A_1 \cdot \alpha_1 = B_1 \cdot \beta_1$$

$$\text{και} \quad \frac{A_1}{\beta_1} = \frac{B_1}{\alpha_1} = \frac{A_1 + B_1}{\beta_1 + \alpha_1} = \frac{P_1}{I}. \quad \text{Συνεπώς}$$

$$A_1 = \frac{P_1}{I} \beta_1 \quad \text{και} \quad B_1 = \frac{P_1}{I} \alpha_1 \quad (\beta)$$

Ισχύει επομένως και εδώ ο κανόνας που ισχύει για τις αντιδράσεις αμφιέρεστης δοκού η οποία φορτίζεται με μία κατακόρυφη δύναμη, δηλαδή «αντίδραση ίσον δύναμη επί αντιβραχίονα δια του ανοίγματος».

Σημειώνεται εδώ ότι η φορά των  $A_1$  και  $B_1$  θα πρέπει να είναι πάντα **αντίθετη** της  $P_1$ , ώστε να προκύπτει πράγματι εφελκυσμός στο πίσω της δύναμης τμήμα της ράβδου και θλίψη στο μπροστινό της.

**β)** Σε περίπτωση δράσης περισσότερων της μιας αξονικών δυνάμεων, όχι αναγκαστικά της ίδιας φοράς, οι αντιδράσεις  $A'$  και  $B'$  που θα εμφανιστούν στις στηρίξεις, θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των επί μέρους αντιδράσεων, οι οποίες προκύπτουν από τις σχέσεις (β), δηλαδή:

$$A' = \sum A_i = \frac{1}{I} \sum (P_i \cdot \beta_i) \quad \text{και} \quad B' = \sum B_i = \frac{1}{I} \sum (P_i \cdot a_i).$$

Η διαδικασία υπολογισμού των αντιδράσεων συνοψίζεται τελικά στα παρακάτω:

1) Εκλέγουμε αυθαίρετα τη φορά των δύο αντιδράσεων

2) Καθορίζουμε (έστω προς τα πάνω) τη θετική φορά των αξονικών δυνάμεων και

3) Εκφράζουμε το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των γινομένων όλων των αξονικών δυνάμεων,  $N_i$  (φορτίων και αντιδράσεων), που δρουν στη ράβδο, επί τις αποστάσεις αυτών (των δυνάμεων) από το ένα άκρο της ράβδου, π.χ. το B, οπότε βρίσκουμε την αντίδραση  $A'$ .

Κάθε όρος του γινομένου είναι θετικός, εφόσον η αντίστοιχη δύναμη είναι ομόφορη προς την καθορισθείσα θετική φορά των αξονικών δυνάμεων. Δηλαδή:

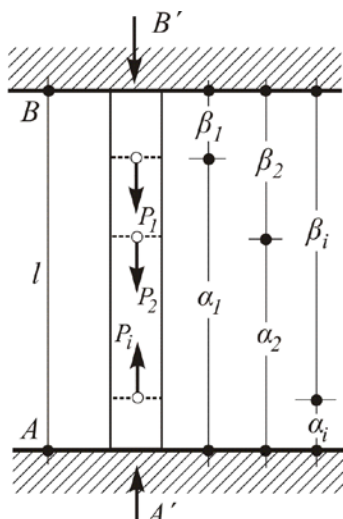
$$\sum (N_i \beta_i)_B^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A' I + P_i \beta_i - P_2 \beta_2 - P_1 \beta_1 = 0 \Rightarrow A' = \dots \quad (\text{i1})$$

$$\text{ή} \quad \sum (N_i a_i)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -B' I + P_i a_i - P_2 a_2 - P_1 a_1 = 0 \Rightarrow B' = \dots \quad (\text{i2})$$

Αν το πρόσημο που θα προκύψει για την αντίδραση είναι θετικό, σημαίνει ότι η αυθαίρετη φορά που ορίστηκε για την αντίδραση είναι σωστή, αν όμως είναι αρνητικό, σημαίνει ότι η φορά είναι λάθος και η σωστή είναι η αντίθετή της. Μετά τον προσδιορισμό της μιας αντίδρασης, χρησιμοποιούμε την εξίσωση

$$\sum N_i^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A' + P_i - P_2 - P_1 - B' = 0, \quad (\text{ii})$$





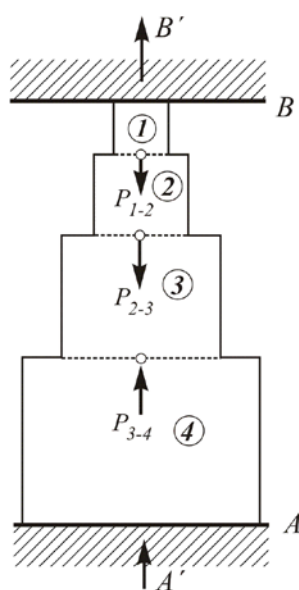
Σχ. 3.10.2

που είναι η γνωστή μας στερεοστατική εξίσωση, για να βρούμε την άλλη αντίδραση.

Έτσι η δεύτερη των εξισώσεων (i) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν επαλήθευση, εκτός αν και η δεύτερη αντίδραση προκύψει από τη δεύτερη των σχέσεων (i), οπότε η (ii) παραμένει πλέον για επαλήθευση.

**2** Το σύστημα των τεσσάρων (ή και περισσότερων) ομοαξονικών πρισματικών ράβδων του σχήματος, με διαφορετικές διατομές και υλικά, δέχεται, στις διατομές διαχωρισμού των υλικών των ράβδων του, αξονικές δυνάμεις  $P_{1-2}, P_{2-3}, P_{3-4}$  κ.ο.κ. που δεν έχουν απαραίτητα την ίδια φορά.

Γνωρίζοντας το μήκος, τη διατομή και το μέτρο ελαστικότητας κάθε ράβδου, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις που εμφανίζονται στις ανυποχώρητες πακτώσεις  $A$  και  $B$ .



Σχ. 3.10.3

**Λύση**

Αν  $A'$  και  $B'$  είναι οι αντιδράσεις του συστήματος όπως σημειώνονται στις στηρίξεις, η στερεοστατική εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων θα δώσει:

$$\sum Y^{\uparrow} = 0 \quad \Rightarrow \quad A' + P_{3-4} - P_{2-3} - P_{1-2} + B' = 0 \quad (i)$$

Η επί πλέον εξίσωση που χρειαζόμαστε, θα προκύψει από τη συνθήκη συμβιβαστού των παραμορφώσεων, που εδώ θα εκφραστεί με το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των επιμηκύνσεων ή επιβραχύνσεων των ράβδων του συστήματος, αφού τα άκρα του είναι ανυποχώρητα. Συνεπώς για κάθε ράβδο του συστήματος, η διαδικασία που ακολουθείται περιλαμβάνει:

α) Προσδιορισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των δυνάμεων που ενεργούν κάτω ή πάνω από μια τυχαία διατομή της. Η επιλογή γίνεται συνήθως με κριτήριο το από πού οι δυνάμεις είναι λιγότερες και θετικές είναι εκείνες που εφελκύνουν τη διατομή, ενώ αρνητικές εκείνες που τη θλίνουν.

β) Έκφραση της επιμήκυνσης ή επιβραχύνσης που προκύπτει σε κάθε ράβδο ανάλογα με το πρόσημο της αξονικής δύναμης και

γ) Μηδενισμός του αλγεβρικού αθροίσματος των επιμηκύνσεων ή επιβραχύνσεων των ράβδων του συστήματος. Έτσι θα έχουμε:

Ράβδος 1: Δυνάμεις από πάνω

$$N_1 = B' \quad \Rightarrow \quad \Delta l_1 = + \frac{B l_1}{E_1 F_1}$$

Ράβδος 2: Δυνάμεις από πάνω

$$N_2 = B' - P_{1-2} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_2 = + \frac{(B' - P_{1-2}) l_2}{E_2 F_2}$$

Ράβδος 3: Δυνάμεις από κάτω

$$N_3 = -(A' + P_{3-4}) \quad \Rightarrow \quad \Delta l_3 = - \frac{(A' + P_{3-4}) l_3}{E_3 F_3}$$

Ράβδος 4: Δυνάμεις από κάτω

$$N_4 = -A' \quad \Rightarrow \quad \Delta l_4 = - \frac{A l_4}{E_4 F_4}$$

$$\text{Άρα: } \sum \Delta l_i = 0 \quad \Rightarrow \quad + \frac{B l_1}{E_1 F_1} + \frac{(B' - P_{1-2}) l_2}{E_2 F_2} - \frac{(A' + P_{3-4}) l_3}{E_3 F_3} - \frac{A l_4}{E_4 F_4} = 0 \quad (ii)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (i) και (ii) προκύπτουν οι τιμές των αντιδράσεων  $A'$  και  $B'$ . Το θετικό ή αρνητικό πρόσημο της τιμής υποδηλώνει τη σωστή ή λάθος φορά που εκλέχτηκε για την αντίδραση.

**3** Δίνεται το σύστημα των ομοαξονικών ράβδων 1, 2, ... i, που βρίσκεται ανάμεσα στις ανυποχώρητες στηρίξεις A και B. Γνωρίζοντας το μήκος  $l$ , τη διατομή  $F$ , το συντελεστή γραμμικής διαστολής  $\alpha_t$  και το μέτρο ελαστικότητας  $E$  κάθε ράβδου, να υπολογιστούν:

- α) Οι αντιδράσεις που εμφανίζονται στις στηρίξεις και  
 β) Οι τάσεις που αναπτύσσονται χωριστά σε κάθε ράβδο, αν η θερμοκρασία του συστήματος αυξηθεί κατά  $\Delta\theta$ .

### Λύση

**α)** Αν το σύστημα των ράβδων ήταν ελεύθερο να μεταβάλλει το μήκος του, π.χ. αν δεν υπήρχε η στήριξη Β, τότε η επιμήκυνση λόγω διαφοράς θερμοκρασίας σε τυχούσα ράβδο θα ήταν

$$\Delta l_i^\theta = l_i \cdot \alpha_{ti} \cdot \Delta\theta = \Delta\theta (l_i \alpha_{ti}) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

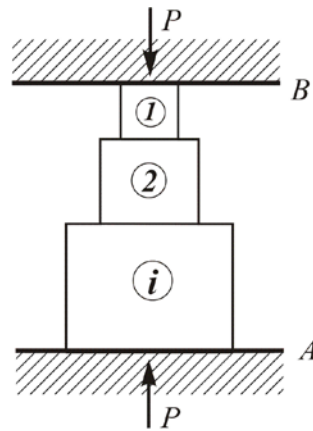
και επομένως η ολική επιμήκυνση του συστήματος θα ήταν αντίστοιχα

$$\Delta l_{ολ}^\theta = \sum \Delta l_i^\theta = \Delta\theta \cdot \sum (l_i \alpha_{ti}).$$

Μια θλιπτική όμως δύναμη  $P$ , ίδια για όλες τις ράβδους, ασκείται τώρα αξονικά από τη στήριξη Β, για να επιβάλλει στο σύστημα μια επιβράχυνση  $\Delta l_{ολ}^P$ , η οποία κατά Hooke είναι ίση με τη  $\Delta l_{ολ}^\theta$ .

Εμφανίζονται λοιπόν στις στηρίξεις οι **ίσες και αντίθετες** αντιδράσεις  $P$ , ενώ το **συνολικό** μήκος των ράβδων του συστήματος διατηρείται σταθερό, χωρίς βέβαια να αποκλείεται η σχετική μετακίνηση των διαχωριστικών διατομών μεταξύ των ράβδων.

Αλλά η επιβράχυνση λόγω  $P$ , που υφίσταται η τυχούσα ράβδος, είναι



Σχ. 3.10.4

$$\Delta l_i^P = \frac{P \cdot l_i}{F_i \cdot E_i} = P \left( \frac{l_i}{F_i \cdot E_i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

και συνεπώς η αντίστοιχη ολική επιβράχυνση του συστήματος είναι

$$\Delta l_{ολ}^P = \sum \Delta l_i^P = P \sum \left( \frac{l_i}{F_i \cdot E_i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

$$\text{Άρα } \Delta l_{ολ}^\theta = \Delta l_{ολ}^P, \quad \text{δηλαδή} \quad \Delta\theta \cdot \sum (l_i \alpha_{ti}) = P \sum \left( \frac{l_i}{F_i \cdot E_i} \right),$$

και επομένως 
$$P = \frac{\Delta\theta \cdot \Sigma(I_i a_i)}{\Sigma\left(\frac{I_i}{F_i E_i}\right)}$$

**β)** Μετά τον προσδιορισμό της  $P$ , οι θλιπτικές (λόγω  $\Delta\theta > 0$ ) τάσεις που θ' αναπτυχθούν χωριστά σε κάθε ράβδο, θα βρεθούν από τη σχέση:

$$\sigma_i = \frac{P}{F_i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

**4** Η κυλινδρική ράβδος του υλικού 1 περιβάλλεται, όπως φαίνεται στο σχήμα, από τις ισομήκεις ράβδους των υλικών 2, ...  $i$ , που είναι δακτυλιοειδούς διατομής και το σύστημα, που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο άκαμπτες πλάκες, συμπιέζεται αξονικά με δύναμη  $P$ .

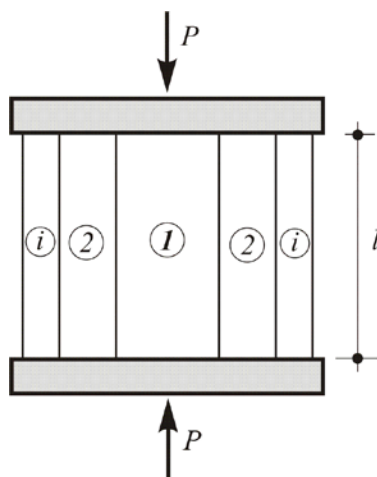
Γνωρίζοντας τη διατομή  $F$  και το μέτρο ελαστικότητας  $E$  του υλικού κάθε ράβδου, να υπολογιστούν οι τάσεις που θ' αναπτυχθούν χωριστά σε κάθε υλικό.

### Λύση

Αν  $P_1, P_2, \dots, P_i$  είναι οι θλιπτικές δυνάμεις που παραλαμβάνονται από τις αντίστοιχες ράβδους του συστήματος, τότε η στερεοστατική εξίσωση ισορροπίας γράφεται

$$P_1 + P_2 + \dots + P_i = P \quad (\alpha)$$

Για τον προσδιορισμό αυτών των  $i$  αγνώστων δυνάμεων, χρειάζονται προφανώς  $i - 1$  ακόμη εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές θα προκύψουν αν «συμβιβάσουμε» τις παραμορφώσεις,

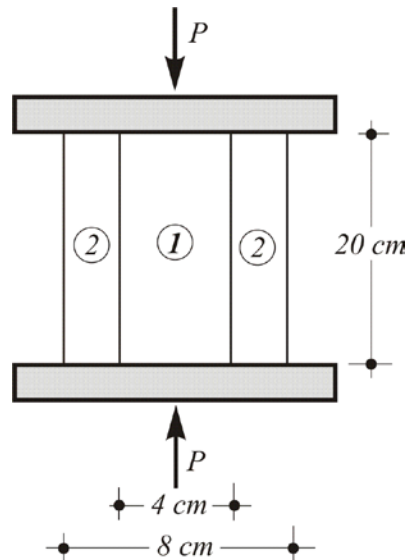


Σχ. 3.10.5

Πραγματικά, παρατηρούμε εδώ ότι όλες οι ράβδοι του συστήματος, παθαίνουν, λόγω της  $P$  την ίδια επιβράχυνση, αφού οι πλάκες είναι άκαμπτες.

Δηλαδή είναι  $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \dots = \Delta l_i$ . Άρα:





Σχ. 3.10.6

**Λύση**

Αν το σύστημα ήταν ελεύθερο και εμφανιζόταν αύξηση της θερμοκρασίας κατά  $\Delta\theta$  °C, τότε οι επιμηκύνσεις των δύο υλικών θα ήσαν αντίστοιχα:

$$\Delta l_1 = l \cdot \alpha_{t1} \cdot \Delta\theta \quad \text{και} \quad \Delta l_2 = l \cdot \alpha_{t2} \cdot \Delta\theta.$$

Επειδή όμως  $\alpha_{t2} > \alpha_{t1}$ , το αλουμίνιο επιμηκύνεται περισσότερο από το χάλυβα, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται μια διαφορά μήκους, που είναι:

$$\Delta l^\theta = \Delta l_2 - \Delta l_1 = l(\alpha_{t2} - \alpha_{t1})\Delta\theta.$$

Για να παραληφθεί τώρα το θλιπτικό φορτίο των 5 ton μόνο από το αλουμίνιο, θα πρέπει η δύναμη αυτή, P, να 'εξαφανίσει' την επιμήκυνση  $\Delta l^\theta$ , προκαλώντας στο αλουμίνιο επιβράχυνση, η οποία κατά Hooke είναι:

$$\Delta l^P = \frac{P \cdot l}{E_2 \cdot F_2}.$$

$$\text{Άρα } \Delta l^\theta = \Delta l^P \quad \text{ή} \quad l \cdot (\alpha_{t2} - \alpha_{t1}) \cdot \Delta\theta = \frac{P \cdot l}{E_2 \cdot F_2},$$

$$\text{και τελικά: } \Delta\theta = \frac{P}{E_2 \cdot F_2 (\alpha_{t2} - \alpha_{t1})}.$$

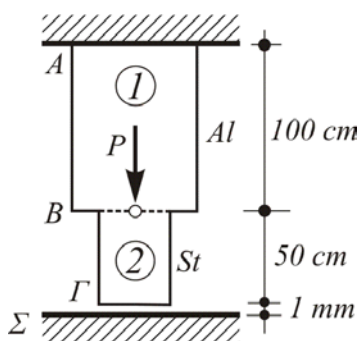
Από τα δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει

$$F_2 = \frac{\pi(8^2 - 4^2)}{4} = 37,7 \text{ cm}^2 \text{ και}$$

$$\alpha_{t2} - \alpha_{t1} = (22 - 12)10^{-6} = 10^{-5} / ^\circ\text{C}.$$

$$\text{Άρα } \Delta\theta = \frac{5.000}{7 \cdot 10^5 \cdot 37,7 \cdot 10^{-5}} = 18,9 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

**6** Η ράβδος του σχήματος που ακολουθεί αποτελείται από τα πρισματικά μέρη αλουμινίου (1) και χάλυβα (2). Αν το κενό ΓΣ είναι  $\delta = 1 \text{ mm}$ , να υπολογιστούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στα δύο πρισματικά μέρη, όταν:



Σχ. 3.10.7

α) Στη διατομή Β ενεργεί προς τα κάτω δύναμη  $P = 15 \text{ t}$ .

β) Χωρίς τη δύναμη  $P$ , η θερμοκρασία αυξηθεί κατά  $\Delta\theta = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ . Στην περίπτωση αυτή,

1) πόση δύναμη πρέπει να ασκηθεί προς τα πάνω στη διατομή Β, ώστε το χαλύβδινο πρισματικό μέρος να είναι απαλλαγμένο τάσεων, και

2) ποια θα είναι τότε η τάση του αλουμινίου.

**ΔΙΝΟΝΤΑΙ:**

Συντελεστής γραμμικής διαστολής:  $\alpha_i \text{ (grad}^{-1}\text{)}$

Μέτρο ελαστικότητας:  $E \text{ (kp/cm}^2\text{)}$

Μήκος:  $l \text{ (cm)}$

Διατομή:  $F \text{ (cm}^2\text{)}$

**Αλουμίνιο (1)    Χάλυβας (2)**

$22 \cdot 10^{-6}$      $12 \cdot 10^{-6}$

$1,1 \cdot 10^6$      $2,1 \cdot 10^6$

100    50

10    5

### Λύση

α) Για να καλυφθεί το κενό ΓΣ, θα πρέπει - κατά Hooke - να ασκηθεί προς τα κάτω στη διατομή Β δύναμη

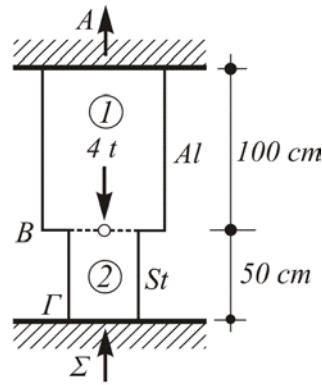
$$P_1 = E_1 F_1 \frac{\delta}{l_1} = 1,1 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot \frac{0,1}{100} = 11.000 \text{ kp}$$

Είναι επομένως φανερό ότι μετά την επαφή της διατομής Γ με τη στήριξη, η δύναμη των  $15 - 11 = 4 \text{ t}$ , που περισσεύει, θα θλίψει το χάλυβα, προκαλώντας ταυτόχρονα πρόσθετο εφελκυσμό στο αλουμίνιο (δείτε το υπ' αριθμ. 2 γενικότερο πρόβλημα).

Αν λοιπόν Σ και Α οι αντιδράσεις που προκαλεί στις στηρίξεις η δύναμη των  $4 \text{ t}$ , (δεν ξεχνούμε ότι στη στήριξη Α υπάρχει ήδη η εφελκυστική αντίδραση των  $11 \text{ t}$ ), θα είναι:

$$\Sigma + A = 4 \text{ t} \quad (\text{a})$$

Επίσης, για τις παραμορφώσεις των δύο πρισματικών μερών, θα έχουμε:



Σχ. 3.10.8

Τμήμα (1), δυνάμεις από πάνω:  $\Delta l_1 = \frac{A \cdot l_1}{E_1 F_1}$

Τμήμα (2), δυνάμεις από κάτω:  $\Delta l_2 = \frac{\Sigma \cdot l_2}{E_2 F_2}$ ,

και λόγω του ανυποχώρητου των στηρίξεων

$$\sum \Delta l_i = 0 \Rightarrow \frac{A \cdot 100}{1,1 \cdot 10^6 \cdot 10} - \frac{\Sigma \cdot 50}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 5} = 0$$

ή  $\frac{A}{1,1} = \frac{\Sigma}{2,1}$ , δηλαδή  $A = \frac{1,1}{2,1} \cdot \Sigma$  (β)

Η (α) λόγω της (β) γίνεται:

$$\Sigma + \frac{1,1}{2,1} \cdot \Sigma = 4 \Rightarrow \Sigma \cdot \left(1 + \frac{1,1}{2,1}\right) = 4 \quad \text{και}$$

$$\Sigma = 2,625 \text{ t,} \quad \text{οπότε} \quad A = \frac{1,1}{2,1} \cdot 2,625 = 1,375 \text{ t.}$$

Έτσι οι αξονικές δυνάμεις και οι αντίστοιχες τάσεις που εμφανίζονται τελικά στα δύο υλικά, είναι:

Τμήμα (1):  $N_1 = P_1 + A = 11 + 1,375 = 12,375 \text{ t}$

και  $\sigma_1 = \frac{12.375}{10} = 1.237,5 \text{ kp/cm}^2$ ,

Τμήμα (2):  $N_2 = -\Sigma = -2,625 \text{ t}$

και  $\sigma_2 = -\frac{2.625}{5} = -525 \text{ kp/cm}^2$ .

**β)** Αν το σύστημα δεν είχε καθόλου τον περιορισμό της στήριξης Σ, η αύξηση της θερμοκρασίας θα παρουσίαζε επιμήκυνση

$$\Delta l^\vartheta = \Delta l_1^\vartheta + \Delta l_2^\vartheta = \alpha_{t1} l_1 \Delta \vartheta + \alpha_{t2} l_2 \Delta \vartheta = \Delta \vartheta (\alpha_{t1} l_1 + \alpha_{t2} l_2),$$

η οποία, με τα δεδομένα του προβλήματος, είναι:

$$\Delta l^\vartheta = 50(22 \cdot 1000 + 12 \cdot 500) \cdot 10^{-6} = 1,4 \text{ mm} > 1 \text{ mm} = \delta.$$



Επομένως η κάτω στήριξη αντιδρά, με αποτέλεσμα να εμφανιστεί μια κοινή θλιπτική δύναμη, που θα προκαλέσει και στις δύο ράβδους, συνολική επιβράχυνση

$$\Delta l = \Delta l^{\theta} - \delta = 1,4 - 1 = 0,4 \text{ mm} = 0,04 \text{ cm}.$$

Αν  $X$  είναι η κοινή αυτή δύναμη, θα έχουμε

$$\frac{X \cdot l_1}{E_1 F_1} + \frac{X \cdot l_2}{E_2 F_2} = \Delta l \quad \text{ή} \quad X \left( \frac{100}{1,1 \cdot 10^6 \cdot 10} + \frac{50}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 5} \right) = 0,04,$$

$$\text{οπότε} \quad \mathbf{X = 2.887,5 \text{ kp.}}$$

Άρα οι τάσεις στα δύο πρισματικά μέρη θα είναι:

$$\sigma_1 = \frac{2.887,5}{10} = 288,75 \text{ kp/cm}^2 \quad \text{και} \quad \sigma_2 = \frac{2.887,5}{5} = 577,5 \text{ kp/cm}^2.$$

**β<sub>1</sub>)** Για να είναι τώρα το χαλύβδινο μέρος απαλλαγμένο τάσεων, η προς τα πάνω δύναμη,  $\Phi$ , που πρέπει ν' ασκηθεί στη διατομή Β, οφείλει να προκαλέσει μόνο στο εξ' αλουμινίου μέρος, επιβράχυνση, ίση με  $\Delta l$ . Δηλαδή

$$\Delta l = \frac{\Phi \cdot l_1}{E_1 F_1}, \quad \text{οπότε} \quad \Phi = E_1 F_1 \frac{\Delta l}{l_1} = 1,1 \cdot 10^6 \cdot 10 \frac{0,04}{100} = 4.400 \text{ kp}.$$

**β<sub>2</sub>)** Γίνεται τώρα φανερό ότι η συνολική θλιπτική δύναμη που δρα στο αλουμίνιο, είναι:

$$N_{\alpha} = X + \Phi = 2.887,5 + 4.400 = 7.287,5 \text{ kp},$$

οπότε η αντίστοιχη θλιπτική τάση, είναι:

$$\sigma_a = \frac{7.287,5}{10} = 728,75 \text{ kp/cm}^2.$$

**7** Ο χαλύβδινος κοχλίας (1) του σχήματος συνδέεται με το χάλκινο περίβλημα (2), έτσι, ώστε το περικόχλιο, με βήμα  $\beta = 2,4 \text{ mm}$ , να αφήνει το σύστημα χαλαρό.

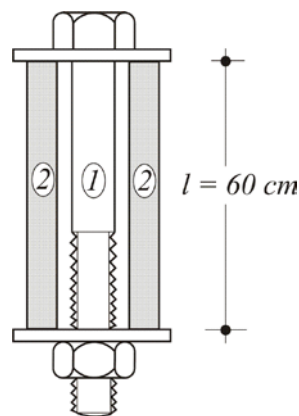
Να υπολογιστούν οι **τάσεις** που εμφανίζονται στα δύο υλικά:

**α)** όταν η εξωτερική θερμοκρασία αυξηθεί κατά  $\Delta\theta = 40^{\circ}\text{C}$ . Στην περίπτωση αυτή, πόσο αριστερόστροφα πρέπει να περιστραφεί το περικόχλιο για να χαλαρώσει πάλι το σύστημα;

**β)** όταν το περικόχλιο περιστραφεί δεξιόστροφα κατά  $90^{\circ}$  και

**γ)** όταν συνδυαστούν ταυτόχρονα μείωση της θερμοκρασίας κατά  $20^{\circ}\text{C}$  και δεξιόστροφη περιστροφή του περικοχλίου κατά  $180^{\circ}$ .

<b>ΔΙΝΟΝΤΑΙ</b>	<b>Χάλυβας (1)</b>	<b>Χαλκός (2)</b>
Συντελεστής γραμμικής διαστολής $\alpha_t$ : ( $\text{grad}^{-1}$ )	$12 \cdot 10^{-6}$	$16 \cdot 10^{-6}$
Μέτρο ελαστικότητας $E$ : ( $\text{kp/cm}^2$ )	$2,1 \cdot 10^6$	$1,25 \cdot 10^6$
Εμβαδόν διατομής $F$ : ( $\text{cm}^2$ )	8	12



Σχ. 3.10.9

**Λύση**

**α)** Αν τα υλικά ήσαν ελεύθερα, οι επιμηκύνσεις που θα εμφανιζόταν στο περίβλημα (2) και τον κοχλία (1) αντίστοιχα, λόγω  $\Delta\theta > 0$ , θα ήσαν:

$$\Delta l_2^{\vartheta} = l a_{t2} \Delta\theta \quad \text{και} \quad \Delta l_1^{\vartheta} = l a_{t1} \Delta\theta,$$

με αποτέλεσμα, επειδή  $a_{t2} > a_{t1}$ , να παρουσιαστεί στα δύο υλικά μια διαφορά μήκους, που είναι:

$$\Delta l = \Delta l_2^{\vartheta} - \Delta l_1^{\vartheta} = l(a_{t2} - a_{t1})\Delta\theta = 600(16 - 12) \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 0,096 \text{ mm}.$$

Λόγω όμως του υπάρχοντος περικοχλίου, η διαφορά αυτή του μήκους εμποδίζεται, οπότε τα δύο υλικά εντείνονται αξονικά με την ίδια δύναμη, έστω  $T$ , που είναι εφελκυστική για τον κοχλία και θλιπτική για το περίβλημα.

Η αμοιβαία αυτή δύναμη επιμηκύνει τον κοχλία κατά  $\Delta l_1^T$  ενώ ταυτόχρονα επιβραχύνει το περίβλημα κατά  $\Delta l_2^T$ , έτσι ώστε να είναι:

$$\Delta l_1^T + \Delta l_2^T = \Delta l. \quad \text{Συνεπώς:}$$

$$\frac{T \cdot l}{E_1 F_1} + \frac{T \cdot l}{E_2 F_2} = \Delta l = l(a_{t2} - a_{t1})\Delta\theta, \quad \text{Άρα}$$

$$T \left( \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) = (a_{t2} - a_{t1})\Delta\theta \quad \text{και} \quad T = \frac{(a_{t2} - a_{t1})\Delta\theta}{\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2}} \quad (\alpha)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι αν τα δύο υλικά είναι ίδια, δηλαδή  $a_{t2} = a_{t1}$ , η αμοιβαία δύναμη μηδενίζεται και συνεπώς η μεταβολή της θερμοκρασίας δεν προκαλεί τάσεις στα δύο υλικά.

Θέτοντας ήδη τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει:

$$T = \frac{(16-12) \cdot 10^{-6} \cdot 40}{\frac{1}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 8} + \frac{1}{1,25 \cdot 10^6 \cdot 12}} = \frac{4 \cdot 40}{\frac{1}{16,8} + \frac{1}{15}} = 1.268 \text{ kp},$$

οπότε οι τάσεις στα δύο υλικά είναι αντίστοιχα:

$$\sigma_1 = \frac{1.268}{8} = 158,5 \text{ kp/cm}^2 \text{ και } \sigma_2 = \frac{1.268}{12} = 105,7 \text{ kp/cm}^2.$$

Για να επανέλθει το σύστημα ξανά στη χαλάρωση, θα πρέπει το περικόχλιο να υποχωρήσει κατά  $\Delta l$ .

Αν λοιπόν  $\phi$  είναι η αριστερόστροφη γωνία που θα μετατοπίσει το περικόχλιο κατά  $\Delta l$ , επειδή:

στις  $360^\circ$  υποχωρεί κατά  $\beta$

$$\text{«-» } \phi \quad \text{«-» } \Delta l, \quad \text{θα είναι } \phi = 360 \frac{\Delta l}{\beta},$$

$$\text{οπότε βρίσκουμε } \phi = 360 \frac{0,096}{2,4} = 14,4^\circ.$$

**β)** Κατά την περιστροφή του περικοχλίου, το περίβλημα (2) θλίβεται αξονικά με δύναμη έστω  $P$ , ενώ ταυτόχρονα ο κοχλίας (1) εφελκύεται με ίση και αντίθετη δύναμη.

Η θλιπτική και εφελκυστική παραμόρφωση που εμφανίζεται τώρα στα δύο υλικά έχει σαν (αλγεβρικό) άθροισμα τη μετατόπιση του περικοχλίου, που είναι:

$$\Delta h = \frac{90}{360} \beta = \frac{\beta}{4}.$$

Αν λοιπόν  $\Delta l_1^P$  και  $\Delta l_2^P$  είναι αντίστοιχα η επιμήκυνση του κοχλίου και η επιβράχυνση του περιβλήματος, επειδή

$\Delta l_1^P + \Delta l_2^P = \Delta h$ , θα έχουμε κατά Hooke,

$$\frac{Pl}{E_1 F_1} + \frac{Pl}{E_2 F_2} = \frac{\beta}{4} \quad \text{ή} \quad Pl \left( \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) = \frac{\beta}{4}$$

$$\text{και } P = \frac{\beta}{4l} \cdot \frac{E_1 F_1}{1 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2}}. \quad (\beta)$$

Αντικαθιστώντας ήδη τα δεδομένα του προβλήματος, βρίσκουμε

$$P = \frac{0,24}{4 \cdot 60} \cdot \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 8}{1 + \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 8}{1,25 \cdot 10^6 \cdot 12}} = \frac{4,032 \cdot 10^6}{508,8} = 7,924 \cdot 10^3 = 7.924 \text{ kp},$$

οπότε οι τάσεις στα δύο υλικά είναι αντίστοιχα

$$\sigma_1 = \frac{7.924}{8} = 990 \text{ kp/cm}^2 \text{ και } \sigma_2 = \frac{7.924}{12} = 660 \text{ kp/cm}^2.$$

**γ)** Είναι φανερό ότι και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις η αξονική καταπόνηση του συστήματος είναι όμοια, συνδυάζοντας εφελκυσμό για τον κοχλίο και θλίψη για το περίβλημα. Η ομοιότητα αυτή προέρχεται από την εμφάνιση μεταξύ των δύο υλικών – του κοχλίου και του περιβλήματος – κάποιας διαφοράς

μήκους  $\Delta l$  που δημιουργείται είτε μόνη της, όταν  $\Delta\theta > 0$ , ή με δική μας πρωτοβουλία, αν περιστραφεί το περικόχλιο.

Συνεπώς ο συνδυασμός των παραπάνω καταστάσεων, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, θα έχει αθροιστικά αποτελέσματα στο σύστημα.

Έτσι η αξονική δύναμη  $A$ , που θα προκύψει αντίθετη στα δύο υλικά, θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών που παίρνουν οι άγνωστοι των εξισώσεων (α) και (β). Δηλαδή:

$$A = -\frac{20}{40}T + 2P = -634 + 15.848 = 15.214 \text{ kp},$$

οπότε οι αντίστοιχες τάσεις είναι

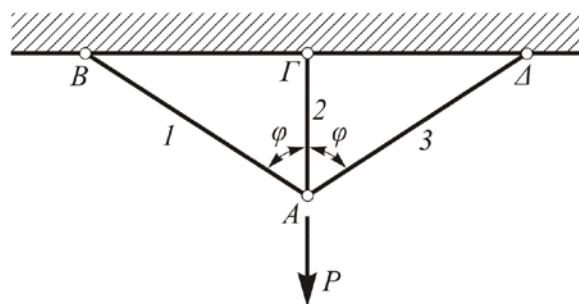
$$\sigma_1 = \frac{15.214}{8} = 1902 \text{ kp/cm}^2 \quad \text{και} \quad \sigma_2 = \frac{15.214}{12} = 1268 \text{ kp/cm}^2.$$

8

Η κατασκευή του σχήματος αποτελείται από τρεις χαλύβδινες ράβδους που έχουν την ίδια διατομή  $F$ . Να υπολογιστούν οι **δυνάμεις** των ράβδων, όταν:

- Στον κόμβο  $A$  ενεργεί η κατακόρυφη δύναμη  $P$ ,
- Η θερμοκρασία αυξηθεί κατά  $\Delta\theta$  και
- Συνδυαστούν οι παραπάνω περιπτώσεις.

**Δίνονται:**  $P = 1000 \text{ kp}$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ ,  $F = 1 \text{ cm}^2$ ,  $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $\Delta\theta = 50^\circ\text{C}$  και  $\phi = 45^\circ$ .

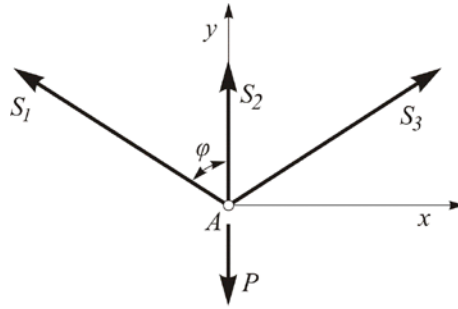


Σχ. 3.10.10

### Λύση

**α)** Θεωρώντας εφελκυστικές τις δυνάμεις των ράβδων  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  και εξετάζοντας αναλυτικά την ισορροπία του κόμβου  $A$ , είναι φανερό ότι οι συνθήκες μηδενισμού των οριζοντίων και κατακόρυφων δυνάμεων που διαθέτουμε από τη Στατική δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό των τριών αγνώστων που εμφανίζονται.

Το γεγονός ότι είναι  $S_1 = S_3$ , που φαίνεται άλλωστε, λόγω συμμετρίας κόμβου – φόρτισης, δεν εξυπηρετεί, αφού κανονικά προκύπτει από τη συνθήκη  $\Sigma X^{\rightarrow} = 0$ .

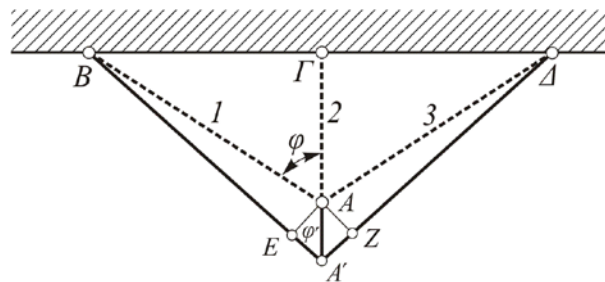


Σχ. 3.10.11

Ουσιαστικά λοιπόν για τους δύο αγνώστους  $S_1$  και  $S_2$ , η μόνη εξίσωση που διατίθεται από τη Στατική είναι η

$$\Sigma \gamma^{\uparrow+} = 0 \rightarrow 2S_1 \sigma \nu \nu \phi + S_2 - P = 0 \quad (\alpha)$$

Η άλλη εξίσωση θα προκύψει αν λάβουμε υπόψη τις παραμορφώσεις που εμφανίζονται στις ράβδους και τις «συμβιβάσουμε» μεταξύ τους. Δηλαδή αν βρούμε και εκφράσουμε τη μαθηματική εξίσωση που συνδέει την επιμήκυνση της μιας ράβδου σε σχέση με την επιμήκυνση της άλλης.



Σχ. 3.10.12

Θεωρώντας σε σκαρίφημα την παραμόρφωση της κατασκευής, παρατηρούμε ότι όλες οι ράβδους επιμηκώνονται, έτσι ώστε το σημείο A, μετακινούμενο κατακόρυφα, να φτάσει στο A'.

Συνεπώς η επιμήκυνση της ράβδου 2 είναι η  $AA'$ , ενώ των ράβδων 1 και 3 οι  $EA'$  και  $ZA'$  αντίστοιχα. (Τα σημεία E και Z ορίζονται, αν από τον κόμβο A φέρουμε τις κάθετες στις ράβδους 1 και 3 αντίστοιχα). Έτσι είναι:

$$EA' = \Delta l_1, \quad AA' = \Delta l_2 \quad (\text{και } ZA' = EA' = \Delta l_3).$$

Σημειώνεται ότι λόγω του μικρού μήκους της  $AA'$  σε σχέση με τη ράβδο 2, η γωνία  $\phi'$  λαμβάνεται, χωρίς σφάλμα, ίση με τη  $\phi$ . Έτσι, από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει:

$$EA' = AA' \sigma \nu \nu \phi' \quad \text{ή} \quad \Delta l_1 = \Delta l_2 \sigma \nu \nu \phi, \quad (\beta)$$

που είναι η εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Η (β) γράφεται:

$$\frac{S_1 l_1}{EF} = \frac{S_2 l_2}{EF} \sigma \nu \nu \phi,$$

και επειδή  $l_2 = l_1 \sigma \nu \nu \phi$ , έπεται:

$$S_1 l_1 = S_2 l_1 \sigma \nu \nu^2 \phi \quad \rightarrow \quad S_1 = S_2 \sigma \nu \nu^2 \phi. \quad (\beta')$$

Θέτοντας ήδη την τιμή αυτή της  $S_1$  στην (α) παίρνουμε:

$$2S_2\sigma\upsilon\nu^2\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi + S_2 - P = 0 \quad \text{ή} \quad S_2(2\sigma\upsilon\nu^3\varphi + 1) = P,$$

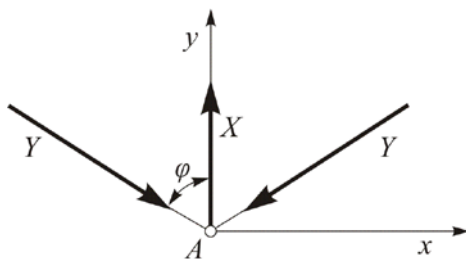
οπότε 
$$S_2 = \frac{P}{1 + 2\sigma\upsilon\nu^3\varphi}.$$

Η τιμή της  $S_1$  προκύπτει τώρα από τη σχέση (β')

$$S_1 = \frac{P\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{1 + 2\sigma\upsilon\nu^3\varphi} = S_3.$$

**β)** Στην περίπτωση που καταργείται η δύναμη  $P$  και εμφανίζεται αύξηση της θερμοκρασίας, είναι φανερό ότι όλες οι ράβδοι τείνουν να επιμηκυνθούν. Επειδή όμως ο κόμβος  $A$  δεν αφήνει 'ελεύθερη' την επιμήκυνση αλλά 'περιορίζει' την παραμόρφωση του συστήματος, και μάλιστα μέσα στα προηγούμενα πλαίσια, έπεται ότι εμφανίζεται σε όλες τις ράβδους αξονική καταπόνηση, που είναι θλιπτική για ορισμένες και εφελκυστική για τις υπόλοιπες ράβδους.

Έστω λοιπόν ότι η ράβδος **2** εφελκύεται με δύναμη  $X$ , οπότε  $Y$  θα είναι η **θλιπτική** δύναμη των ράβδων **1** και **3**. (Το τελικό πρόσημο καθορίζει τη σωστή φορά). Η εξίσωση (α) που εκφράζει τώρα την ισορροπία του κόμβου  $A$ , γίνεται:



Σχ. 3.10.13

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \quad \rightarrow \quad X - 2Y\sigma\upsilon\nu\varphi = 0. \quad (\alpha_1)$$

Η ομοιότητα της προηγούμενης με την τωρινή παραμόρφωση του συστήματος, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε και εδώ την εξίσωση (β), δηλαδή τη σχέση

$$\Delta l_1 = \Delta l_2\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad (\beta')$$

σαν εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων, με την προϋπόθεση όμως, ότι τώρα οι παραμορφώσεις είναι αποτέλεσμα και της θερμοκρασιακής μεταβολής και της αξονικής δύναμης. Οι παραμορφώσεις αυτές είναι:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = l_1 a_t \Delta\theta - \frac{Y \cdot l_1}{EF} \quad \text{και}$$

$$\Delta l_2 = l_2 a_t \Delta\theta + \frac{X \cdot l_2}{EF}.$$

Επειδή όμως  $l_2 = l_1\sigma\upsilon\nu\varphi$  και  $X = 2Y\sigma\upsilon\nu\varphi$  λόγω της  $(\alpha_1)$ , η παραπάνω εξίσωση (β) γίνεται τώρα

$$I_1 a_t \Delta\theta - \frac{Y \cdot I_1}{EF} = \left( I_1 \sigma \nu \varphi \cdot a_t \Delta\theta + \frac{2 Y \sigma \nu \varphi \cdot I_1 \sigma \nu \varphi}{EF} \right) \sigma \nu \varphi$$

$$\text{ή } a_t \Delta\theta (1 - \sigma \nu^2 \varphi) = \frac{Y}{EF} (1 + 2 \sigma \nu^3 \varphi)$$

$$\text{και } Y = \frac{1 - \sigma \nu^2 \varphi}{1 + 2 \sigma \nu^3 \varphi} E F a_t \Delta\theta.$$

Η δύναμη  $X$  προκύπτοντας τώρα από την εξίσωση ( $\alpha_1$ ), είναι:

$$X = \frac{\sigma \nu \varphi - \sigma \nu^3 \varphi}{0,5 + \sigma \nu^3 \varphi} E F a_t \Delta\theta$$

Παρατηρούμε ότι το μήκος των ράβδων σε καμία από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις δεν επηρεάζει την αξονική τους καταπόνηση.

**γ)** Εφαρμόζοντας τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος στις τελικές σχέσεις που εκφράζουν τις δυνάμεις των ράβδων για το συνδυασμό των παραπάνω δύο περιπτώσεων, υπολογίζοντας τις παραστάσεις:

$$E F a_t \Delta\theta = 2 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 1200 \text{ kp},$$

$$\sigma \nu 45 = 0,707, \quad \sigma \nu^2 45 = 0,5, \quad \sigma \nu^3 45 = 0,354$$

θα έχουμε:

Για τη δύναμη  $\Sigma_1$  της ράβδου 1:

$$\Sigma_1 = S_1 + Y = \frac{1000 \cdot 0,5}{1 + 2 \cdot 0,354} - \frac{1 - 0,5}{1 + 2 \cdot 0,354} 1200 = 292,7 - 351,3 = -58,6 \text{ kp}$$

Για τη δύναμη  $\Sigma_2$  της ράβδου 2:

$$\Sigma_2 = S_2 + X = \frac{1000 \cdot 0,5}{1 + 2 \cdot 0,354} + \frac{0,707 - 0,354}{0,5 + 0,354} 1200 = 585,5 + 496 = 1.081,5 \text{ kp}.$$

**9**

Η δοκός AB του σχήματος είναι άκαμπτη και απαραμόρφωτη φορτίζεται με ομοιόμορφη φόρτιση εντάσεως  $q$  t/m. Στην άκρη A στηρίζεται με άρθρωση, ενώ στα σημεία 1 και 2 αναρτάται μέσω των ράβδων 1 και 2 αντίστοιχα, που τη συγκρατούν σε οριζόντια θέση. Αν το μήκος της δοκού είναι  $l = 5$  m, να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων:

α) Λόγω φορτίου  $q = 1$  t/m.

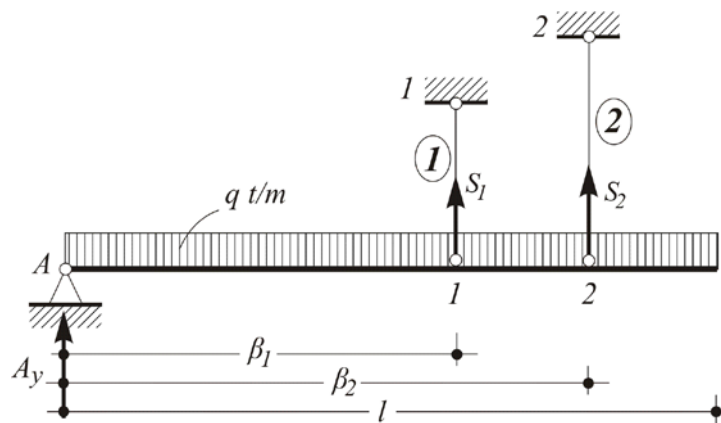
β) Λόγω διαφοράς θερμοκρασίας κατά  $\Delta\theta = 40^\circ\text{C}$ .

γ) Όταν συνδυαστούν οι παραπάνω δύο περιπτώσεις.

**ΔΙΝΟΝΤΑΙ :**

	(1)	(2)
Συντελεστής γραμμικής διαστολής: $\alpha$ ( $\text{grad}^{-1}$ )	$16 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$
Μέτρο ελαστικότητας: $E$ ( $\text{kp}/\text{cm}^2$ )	$1,3 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^6$
Μήκος ράβδου: $l$ (m)	1,2	1,5
Διατομή ράβδου: $F$ ( $\text{cm}^2$ )	14	16
Απόσταση ράβδου από τη στήριξη A: $\beta$ (m)	3	4

**Λύση**



Σχ. 3.10.14

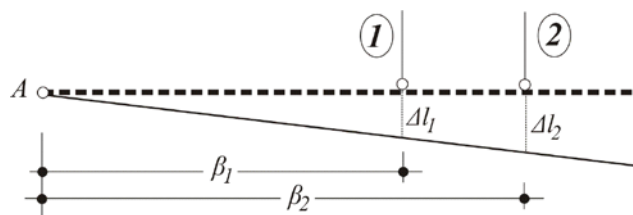
**α)** Είναι φανερό ότι οι συνθήκες ισορροπίας  $\Sigma y^{\uparrow+} = 0$  και  $(\Sigma M)^{\curvearrowright+} = 0$  δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό των αντιδράσεων  $A_y$ ,  $S_1$  και  $S_2$  που εικονίζονται. (Η συνθήκη  $\Sigma x^{\rightarrow+} = 0$ , οδηγεί απλά στην  $A_x = 0$ ).

Χρειαζόμαστε επομένως μια επί πλέον εξίσωση, την οποία θα πάρουμε συμβιβάζοντας τις παραμορφώσεις των ράβδων.

Επειδή σκοπός του προβλήματος είναι ο προσδιορισμός μόνο των δυνάμεων  $S_1$  και  $S_2$ , αποφεύγουμε τη συνθήκη  $\Sigma y^{\uparrow+} = 0$ , όπου εμφανίζεται και η  $A_y$ , χρησιμοποιώντας μόνο την

$$(\Sigma M)_A^{\curvearrowright+} = 0 \Rightarrow \frac{ql^2}{2} - S_1\beta_1 - S_2\beta_2 = 0 \Rightarrow S_1\beta_1 + S_2\beta_2 = \frac{ql^2}{2}. \quad (\alpha)$$

Εξετάζοντας σε σκαρίφημα την παραμόρφωση του συστήματος, παρατηρούμε ότι, αν  $\Delta l_1$  και  $\Delta l_2$  είναι αντίστοιχα οι επιμηκύνσεις των ράβδων 1 και 2, λόγω του άκαμπτου της δοκού, θα έχουμε



Σχ. 3.10.15

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{(A1)}{(A2)} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad \text{ή} \quad \beta_2 \Delta l_1 = \beta_1 \Delta l_2, \quad (\beta)$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση συμβιβασμού των παραμορφώσεων. Ατή γράφεται:

$$\beta_2 \frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} = \beta_1 \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2} \quad \text{ή} \quad S_2 = \frac{\beta_2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2} S_1, \quad (\beta_1)$$

οπότε η (α) γίνεται:



$$\beta_1 S_1 + \beta_2 \frac{\beta_2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2} S_1 = \frac{q l^2}{2} \Rightarrow S_1 \left( \beta_1 + \frac{\beta_2^2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2} \right) = \frac{q l^2}{2}$$

$$\text{και } S_1 = \frac{q l^2}{2 \left( \beta_1 + \frac{\beta_2^2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2} \right)}$$

Από τη  $(\beta_1)$  προκύπτει τώρα η δύναμη της ράβδου 2

$$S_2 = \frac{1}{\frac{\beta_1 E_1 F_1 l_2}{\beta_2 E_2 F_2 l_1}} \cdot \frac{q l^2}{2 \left( \beta_1 + \frac{\beta_2^2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2} \right)} = \frac{q l^2}{2 \left( \beta_2 + \frac{\beta_1^2 E_1 F_1 l_2}{\beta_2 E_2 F_2 l_1} \right)}$$

**β)** Φυσιολογικά η αύξηση της θερμοκρασίας θα προκαλέσει στις ράβδους επιμηκύνσεις, που είναι αντίστοιχα

$$\Delta l_1^\vartheta = l_1 a_1 \Delta \vartheta \text{ και } \Delta l_2^\vartheta = l_2 a_2 \Delta \vartheta.$$

Αν οι επιμηκύνσεις αυτές πληρούν την εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων, η οποία εξίσωση διατηρεί την ισχύ της αφού η δοκός δεν παραμορφώνεται, αν δηλαδή

$$\beta_2 \Delta l_1^\vartheta = \beta_1 \Delta l_2^\vartheta, \quad (\beta')$$

όπως ορίζει η  $(\beta)$ , τότε δεν παράγεται στις ράβδους επί πλέον ένταση, επειδή αυτές επιμηκύνονται σαν να ήταν ελεύθερες.

Όμως, στη συνήθως αντίθετη περίπτωση, εμφανίζεται αξονική καταπόνηση, η οποία είναι εφελκυστική στη μία ράβδο και θλιπτική στην άλλη.

Έστω λοιπόν  $\Theta_1$  και  $\Theta_2$  οι δυνάμεις των ράβδων, τις οποίες αυθαίρετα παίρνουμε θετικές, οπότε το τελικό πρόσημο θα καθορίσει τη σωστή φορά. Οι δυνάμεις αυτές γίνονται η αιτία να αναπροσαρμόσουν οι ράβδοι – κατά Hooke - τις **επιμηκύνσεις** τους, από  $\Delta l_1^\vartheta$  και  $\Delta l_2^\vartheta$  σε  $\Delta l_1^\theta$  και  $\Delta l_2^\theta$  αντίστοιχα, έτσι ώστε να συμβιβάζονται μεταξύ τους ικανοποιώντας τη  $(\beta')$ .

Τότε η συνθήκη  $(\Sigma M)_{A^+} = 0$ , θα δώσει

$$\beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Theta_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \Theta_1 \quad (\alpha')$$

Η  $(\beta')$  γίνεται τώρα

$$\beta_2 \Delta l_1^\vartheta = \beta_1 \Delta l_2^\vartheta \quad \text{ή} \quad \Delta l_2^\theta = \frac{\beta_2}{\beta_1} \Delta l_1^\theta, \quad \text{δηλαδή}$$

$$l_2 a_2 \Delta \theta + \frac{\Theta_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \left( l_1 a_1 \Delta \theta + \frac{\Theta_1 l_1}{E_1 F_1} \right), \quad \text{ή λόγω της } (\alpha'),$$

$$\Delta \theta \left( l_2 a_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} l_1 a_1 \right) = \frac{\Theta_1 l_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} + \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \Theta_1 \right) \frac{l_2}{E_2 F_2} = \Theta_1 \left( \frac{l_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{l_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2} \right).$$

$$\text{Άρα: } \Theta_1 = \frac{\left( I_2 a_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} I_1 a_1 \right) \Delta\theta}{\frac{I_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{I_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2}},$$

οπότε από την (α') θα προκύψει η άλλη δύναμη

$$\Theta_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \Theta_1 = \frac{\left( I_1 a_1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} I_2 a_2 \right) \Delta\theta}{\frac{I_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{I_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2}}.$$

Είναι φανερό ότι οι δυνάμεις  $\Theta_1$  και  $\Theta_2$  μηδενίζονται αν

$$I_1 a_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} I_2 a_2,$$

επειδή τότε ικανοποιείται η (β').

**γ)** Είναι φανερό ότι ο συνδυασμός των παραπάνω δύο περιπτώσεων, θα δώσει σαν τελικές δυνάμεις των ράβδων το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών που προκύπτουν αντίστοιχα από την κάθε περίπτωση.

Δηλαδή

$$\Sigma_1 = S_1 + \Theta_1 = \frac{q l^2}{2 \left( \beta_1 + \frac{\beta_2^2 E_2 F_2 I_1}{\beta_1 E_1 F_1 I_2} \right)} + \frac{\left( I_2 a_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} I_1 a_1 \right) \Delta\theta}{\frac{I_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{I_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2}}$$

$$\Sigma_2 = S_2 + \Theta_2 = \frac{q l^2}{2 \left( \beta_2 + \frac{\beta_1^2 E_1 F_1 I_2}{\beta_2 E_2 F_2 I_1} \right)} - \frac{\left( I_1 a_1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} I_2 a_2 \right) \Delta\theta}{\frac{I_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{I_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2}}.$$

Αλλά βάσει των δεδομένων, είναι:

$$1. \quad q l^2 = \frac{1000}{100} 500^2 = 2,5 \cdot 10^6 \text{ kp} \cdot \text{cm},$$

$$2. \quad \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{I_1}{I_2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2,1}{1,3} \cdot \frac{16}{14} \cdot \frac{1,2}{1,5} = 1,97,$$

$$3. \quad \frac{I_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{I_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2} = \frac{120 \cdot 400}{1,3 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 300} + \frac{150 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 16 \cdot 400} =$$

$$= (8,97 + 3,35) \cdot 10^{-6} = 12,14 \cdot 10^{-6} \text{ cm/kp},$$

$$4. \quad I_1 a_1 = 120 \cdot 16 \cdot 10^{-6} = 1,920 \cdot 10^{-6} \text{ cm/}^\circ \text{C} \quad \text{και}$$

$$5. \quad I_2 a_2 = 150 \cdot 12 \cdot 10^{-6} = 1,800 \cdot 10^{-6} \text{ cm/}^\circ \text{C}.$$

Άρα είναι:

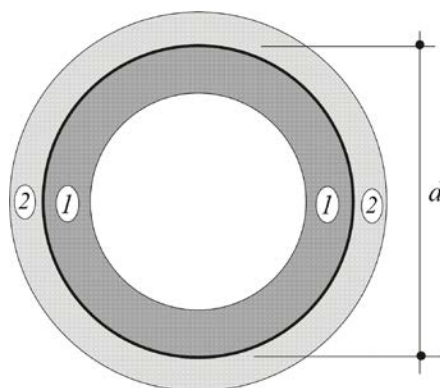
$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \frac{2,5 \cdot 10^6}{2(300 + 400 \cdot 1,97)} + \frac{\left(1.800 - \frac{4}{3} \cdot 1.920\right) \cdot 10^{-6} \cdot 40}{12,14 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 1.149 - 2.504 = -\mathbf{1.355 \text{ kp}}, \\ \Sigma_2 &= \frac{2,5 \cdot 10^6}{2\left(400 + 300 \cdot \frac{1}{1,97}\right)} + \frac{\left(1.920 - \frac{3}{4} \cdot 1.800\right) \cdot 10^{-6} \cdot 40}{12,14 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 2.263 + 1.878 = \mathbf{4.141 \text{ kp}}.\end{aligned}$$

**10**

Ο δακτύλιος του σχήματος έχει μήκος ίσο με τη μονάδα και είναι σύνθετος, αποτελούμενος από τον εσωτερικό εξ' αλουμινίου δακτύλιο (1) και τον εξωτερικό (2) από χάλυβα, με μέτρα ελαστικότητας  $E_1$  και  $E_2$  αντίστοιχα. Αν τα πάχη  $t_1$  και  $t_2$  των δακτυλίων είναι μικρά σε σχέση με τη διάμετρο του κύκλου συνεπαφής  $d$  και οι συντελεστές γραμμικής διαστολής είναι  $\alpha_1 > \alpha_2$ , να υπολογιστούν οι τάσεις που εμφανίζονται στα δύο υλικά,

α) όταν η εξωτερική θερμοκρασία αυξηθεί κατά  $\Delta\theta$ , και

β) όταν στη θερμοκρασία περιβάλλοντος η εσωτερική διάμετρος του (2) είναι μικρότερη της εξωτερικής διαμέτρου του (1) κατά  $\delta$ , οπότε βέβαια η κατασκευή συναρμολογείται ύστερα από θέρμανση του (2), ο οποίος, μετά την ψύξη του, σφίγγει τον (1).



Σχ. 3.10.16

### Λύση

α) Επειδή  $\alpha_1 > \alpha_2$ , η αύξηση της θερμοκρασίας θα επιφέρει στην περιφέρεια του δακτυλίου (1) μεγαλύτερη επιμήκυνση από την αντίστοιχη του (2). Επομένως οι δύο δακτύλιοι συμπιέζονται μεταξύ τους, με αποτέλεσμα τη σύνθλιψη του εσωτερικού από τον εξωτερικό, ο οποίος εφελκύεται.

Αν καλέσουμε  $x$  την αμοιβαία ομοιόμορφη πίεση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια συνεπαφής των δακτυλίων (αντίστοιχη της υπερπίεσης  $p$  στα κυλινδρικά δοχεία με λεπτά τοιχώματα), οι ορθές τάσεις που εμφανίζονται στα δύο υλικά, δίνονται από τη σχέση (9) της αντίστοιχης ενότητας

$$\sigma_1^\theta = -\frac{R \cdot x}{t_1} = -\frac{x \cdot d}{2t_1} \quad \text{και} \quad \sigma_2^\theta = \frac{x \cdot d}{2t_2}.$$

Η πίεση  $x$ , θα βρεθεί τώρα αν εκφράσουμε την προφανή συνθήκη, ότι κατά τη θέρμανση, οι δύο δακτύλιοι εμφανίζουν την ίδια περιφερειακή επιμήκυνση, που είναι, για τον εσωτερικό δακτύλιο (1)

$$\Delta l_1 = \alpha_1 l_0 \Delta \theta - \frac{\sigma_1^\theta}{E_1} l_0 = \left( \alpha_1 \Delta \theta - \frac{x \cdot d}{2t_1 E_1} \right) l_0 = \pi \cdot d \left( \alpha_1 \Delta \theta - \frac{x \cdot d}{2t_1 E_1} \right)$$

και για τον εξωτερικό δακτύλιο (2)

$$\Delta l_2 = \pi \cdot d \left( \alpha_2 \Delta \theta + \frac{x \cdot d}{2t_2 E_2} \right)$$

αντίστοιχα. Όστε λοιπόν, είναι:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \Delta \theta - \frac{x \cdot d}{2t_1 E_1} = \alpha_2 \Delta \theta + \frac{x \cdot d}{2t_2 E_2}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \theta = \frac{x \cdot d}{2} \left( \frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) \quad \text{και} \quad x = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \theta}{\frac{d}{2} \left( \frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right)}.$$

Έτσι, οι ορθές τάσεις που εμφανίζονται στα δύο υλικά, είναι:

$$\sigma_1^\theta = -\frac{x \cdot d}{2t_1} = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \theta}{\frac{d}{2} \left( \frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right)} \cdot \frac{d}{2t_1} = -\frac{1}{t_1} \cdot \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \theta}{\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2}} \quad (\text{i})$$

$$\text{και} \quad \sigma_2^\theta = \frac{x \cdot d}{2t_2} = \frac{1}{t_2} \cdot \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \theta}{\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2}} \quad \text{αντίστοιχα.} \quad (\text{ii})$$

Από τα παραπάνω εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\sigma_1^\theta}{\sigma_2^\theta} = \frac{t_2}{t_1},$$

κάτι που δείχνει ότι οι τάσεις των δύο υλικών είναι αντιστρόφως ανάλογοι προς τα πάχη των σφηνομένων δακτυλίων.

**β)** Κατά τη συναρμολόγηση ο δακτύλιος (2) θερμαίνεται. Όταν η διάμετρος του αυξηθεί ικανοποιητικά, τότε παύει η θέρμανση, οπότε, μετά την τοποθέτησή του (1) εσωτερικά, ψύχεται.

Κατά το στάδιο της ψύξης, όταν οι δύο δακτύλιοι έλθουν σε επαφή, αρχίζει με αυξανόμενο ρυθμό να εμφανίζεται στην επιφάνεια επαφής των δακτυλίων ομοιόμορφη περιφερειακή πίεση, που οδηγεί στην ανάπτυξη θλιπτικών τάσεων στο δακτύλιο (1) και εφελκυστικών στο (2).

Αν  $\rho$  είναι η τιμή της πίεσης αυτής μετά την ολοκλήρωση της ψύξης, οι ορθές τάσεις που εμφανίζονται στα δύο υλικά όπως προηγουμένως, είναι

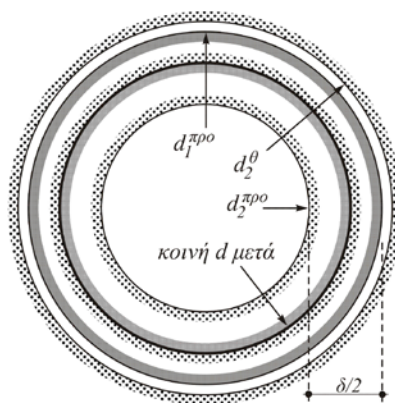
$$\sigma_1 = -\frac{R \cdot \rho}{t_1} = -\frac{\rho \cdot d}{2t_1} \quad \text{και} \quad \sigma_2 = \frac{\rho \cdot d}{2t_2} \quad (\alpha)$$

Η **ελάττωση**  $\delta_1$  που έγινε κατά την ψύξη στην εξωτερική διάμετρο του (1) θα είναι

$$\delta_1 = \varepsilon_1 d = \frac{\sigma_1}{E_1} d = \frac{\rho \cdot d}{2t_1} \cdot \frac{d}{E_1} = \frac{\rho \cdot d^2}{2E_1 t_1}.$$

Αντίστοιχα, η **παραμένουσα** πλέον μετά την ψύξη, **αύξηση** της εσωτερικής διαμέτρου του (2), είναι  $\delta_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} d = \frac{\rho \cdot d^2}{2E_2 t_2}$ .

Η άγνωστη πίεση  $\rho$  θα βρεθεί τώρα από τη συνθήκη:  $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ ,



Σχ. 3.10.17

που αποτελεί και την εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων.

Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\frac{\rho \cdot d^2}{2E_2 t_2} + \frac{\rho \cdot d^2}{2E_1 t_1} = \delta \quad \text{ή} \quad \frac{\rho \cdot d^2}{2} \left( \frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) = \delta,$$

οπότε 
$$\rho = \frac{2\delta}{d^2} \cdot \frac{E_1 t_1}{1 + \frac{E_1 t_1}{E_2 t_2}}.$$

Οι τιμές των τάσεων υπολογίζονται τώρα βάσει των σχέσεων (α)

$$\sigma_1 = -\frac{\rho \cdot d}{2t_1} = -\frac{2\delta}{d^2} \cdot \frac{E_1 t_1}{1 + \frac{E_1 t_1}{E_2 t_2}} \cdot \frac{d}{2t_1} = -\frac{\delta}{d} \cdot \frac{E_1}{1 + \frac{E_1 t_1}{E_2 t_2}} \quad (\beta)$$

και 
$$\sigma_2 = \frac{2\delta}{d^2} \cdot \frac{E_1 t_1}{1 + \frac{E_1 t_1}{E_2 t_2}} \cdot \frac{d}{2t_2} = \left( \frac{\delta}{d} \cdot \frac{E_1}{1 + \frac{E_1 t_1}{E_2 t_2}} \right) \cdot \frac{t_1}{t_2} = -\sigma_1 \frac{t_1}{t_2}. \quad (\gamma)$$

**11**

Για την περίπτωση β' του προηγούμενου προβλήματος, να υπολογιστούν α) Οι τάσεις που θα εμφανιστούν στα δύο υλικά, αν είναι

$$t_1 = t_2, \delta = 0,1 \text{ mm}, d = 30 \text{ cm}, E_1 = 8 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2, E_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \text{ και}$$

β) Οι μεταβολές των τάσεων αυτών, αν μετά τη συναρμολόγηση και ψύξη του (2) η θερμοκρασία αυξηθεί κατά 35°C.

$$\text{Να ληφθεί: } \alpha_1 = 22 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C} \text{ και } \alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}.$$

**Λύση**

**α)** Οι τάσεις των δύο υλικών θα προκύψουν προφανώς από τις σχέσεις (β) και (γ) του προηγούμενου προβλήματος. Επειδή όμως

$$t_1 = t_2, \quad \text{ή} \quad t_1/t_2 = 1,$$

έπεται ότι οι τάσεις αυτές θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$-\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\delta}{d} \cdot \frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{E_2}} = \frac{0,01}{30} \cdot \frac{8 \cdot 10^5}{1 + \frac{8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^6}} = 190,5 \text{ kp/cm}^2.$$

**β)** Η μεταβολή των τάσεων αυτών θα βρεθεί αντίστοιχα από τις σχέσεις (i) και (ii), όπου, με σκέψεις ανάλογες, βρίσκουμε ότι είναι

$$-\sigma_1^\theta = \sigma_2^\theta = \frac{(a_1 - a_2)\Delta\theta}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} = \frac{(22 - 12) \cdot 10^{-6} \cdot 35}{\left(\frac{1}{0,8} + \frac{1}{2}\right) \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ kp/cm}^2.$$

**12**

Να υπολογιστούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στο σώτρο<sup>2</sup> και στο επίσωτρο<sup>3</sup> του σιδηροδρομικού τροχού από χάλυβα, όταν είναι γνωστό ότι η εξωτερική διάμετρος του σώτρου είναι  $d = 1000 \text{ mm}$ , ενώ η εσωτερική διάμετρος του επισώτρου, προ της εν θερμώ προσαγωγής του στη στεφάνη του σώτρου,  $d' = 999 \text{ mm}$ .

Στη συνέχεια να υπολογιστεί η ελάχιστη απαιτούμενη αύξηση της θερμοκρασίας του επισώτρου, για να είναι δυνατή η προσαρμογή του στο σώτρο. Δίνονται επί πλέον: Διατομή σώτρου  $F_1 = 3.000 \text{ mm}^2$ , διατομή επισώτρου  $F_2 = 9.000 \text{ mm}^2$ , συντελ. γραμμικής διαστολής  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$  και μέτρο ελαστικότητας  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ .

**Λύση**

Πριν εφαρμόσουμε τις σχέσεις (β) και (γ) του προβλήματος 10, παρατηρούμε ότι, αν  $b$  είναι το πλάτος του τροχού, τότε ο λόγος των παχών σώτρου – επισώτρου θα είναι:

(<sup>2</sup>) **Σώτρο:** Η από ξύλο ή μέταλλο περιφέρεια του τροχού οχήματος, όπου προσαρμόζονται οι ακτίνες.

(<sup>3</sup>) **Επίσωτρο:** Το από χάλυβα ή ελαστικό περίβλημα του σώτρου.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1 b}{t_2 b} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{3.000}{9.000} = \frac{1}{3}. \text{ Και επειδή είναι}$$

$$\frac{\delta}{d} = \frac{1}{1000} = 10^{-3} \quad \text{και} \quad \frac{E_1}{E_2} = 1,$$

οι ζητούμενες τάσεις σώτρου – επισώτρου θα είναι:

$$\sigma_{\text{σώτρου}} = \sigma_1 = -\frac{10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^6}{1+1/3} = -1500 \text{ kp/cm}^2 \text{ και}$$

$$\sigma_{\text{επισώτρου}} = \sigma_2 = -\frac{t_1}{t_2} \sigma_{\text{σώτρου}} = \frac{1500}{3} = 500 \text{ kp/cm}^2.$$

Για να είναι δυνατή η προσαρμογή του επισώτρου στη στεφάνη του σώτρου, θα πρέπει η διάμετρος του πρώτου ν' αυξηθεί τουλάχιστον κατά

$$\Delta d' = 1 \text{ mm}.$$

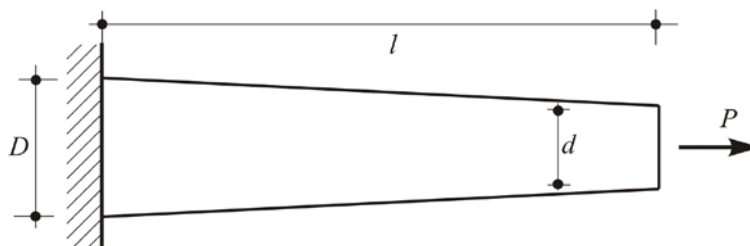
Αν επομένως  $\Delta\theta$  είναι η προς τούτο αύξηση της θερμοκρασίας, θα είναι

$$\Delta d' = d' \cdot \alpha \cdot \Delta\theta, \text{ οπότε}$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta d'}{d' \cdot \alpha} = \frac{1}{999 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = 83,4 \text{ }^\circ\text{C}.$$

## Ασκήσεις για λύση

- ① Η ράβδος του σχήματος είναι ομοιόμορφα μεταβαλλόμενης κυκλικής διατομής και εφελκύεται αξονικά με δύναμη  $P$ . Αν  $D$  και  $d$  είναι οι διάμετροι των ακραίων διατομών της ράβδου,  $l$  το μήκος της και  $E$  το μέτρο ελαστικότητάς της, να υπολογιστεί η επιμήκυνση λόγω  $P$ .



Σχ. 3.10.18

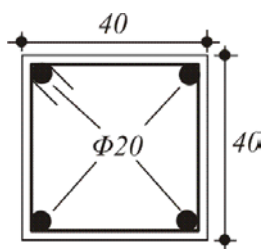
$$\text{Απάντηση: } \Delta l = \frac{4P \cdot l}{\pi \cdot E \cdot D \cdot d}$$

- ② Υποσύλωμα οπλισμένου σκυροδέματος, τετραγωνικής διατομής,  $40 \times 40 \text{ cm}$ , φέρει θλιπτικό φορτίο  $60 \text{ t}$  και είναι οπλισμένο με  $4\Phi 20$ .

Αν το μέτρο ελαστικότητας του σκυροδέματος είναι  $E_b = 140.000 \text{ kp/cm}^2$  ενώ του χάλυβα  $E_e = 15 \cdot E_b$ , να υπολογιστούν:

α) Οι θλιπτικές τάσεις  $\sigma_b$  και  $\sigma_e$  που αναπτύσσονται στο σκυρόδεμα και το χάλυβα αντίστοιχα και

β) Η ανηγμένη επιβράχυνση του στύλου.

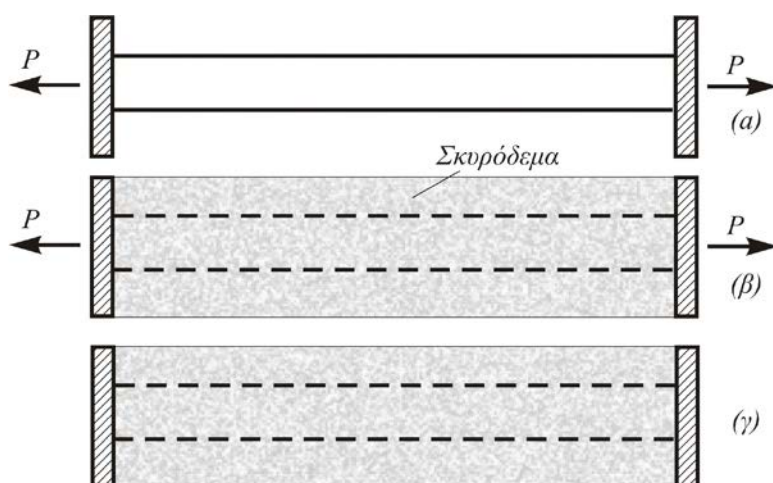


Σχ. 3.10.19

Απάντηση: α)  $\sigma_b = 33,6 \text{ kP/cm}^2$ ,  $\sigma_e = 504 \text{ kP/cm}^2$   
β)  $\varepsilon = 2,4 \cdot 10^{-4}$

- 3) Το προεντεταμένο σκυρόδεμα κατασκευάζεται μερικές φορές με τον ακόλουθο τρόπο. Χαλύβδινες ράβδοι πολύ υψηλής αντοχής, τεντώνονται με ειδικό υδραυλικό μηχανισμό που επιβάλλει σ' αυτές εφελκυστική δύναμη  $P$ .

Τότε χύνεται το σκυρόδεμα που τις σκεπάζει, για να σχηματίσει πχ. την εικονιζόμενη δοκό του σχ. β.



Σχ. 3.10.20

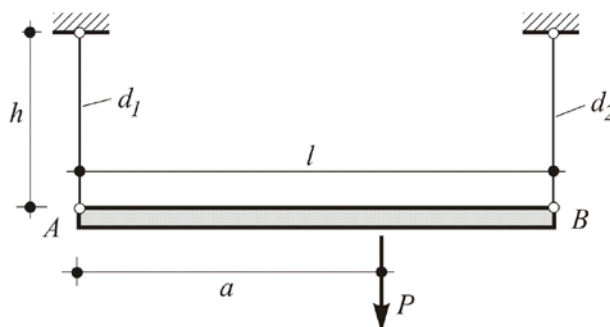
Μετά την πήξη του σκυροδέματος και την απόκτηση της κατάλληλης αντοχής του, οι υδραυλικοί μηχανισμοί παύουν πλέον να εξασκούν την  $P$  και απομακρύνονται (σχ. γ). Έτσι η δοκός βρίσκεται σε εντατική κατάσταση με εφελκυσμό στο χάλυβα και θλίψη στο σκυρόδεμα.

Έστω ότι η  $P$  δημιουργεί αρχικά στις ράβδους εφελκυστική τάση  $\sigma_0 = 5.000 \text{ kP/cm}^2$ . Αν τα μέτρα ελαστικότητας χάλυβα σκυροδέματος έχουν λόγο  $E_e:E_b = 10:1$  ενώ αντίστοιχα οι διατομές τους έχουν λόγο  $F_e:F_b = 1:40$ , να υπολογιστούν οι τάσεις που αναπτύσσονται τελικά στα δύο υλικά.



Απάντηση:  $\sigma_e = 4.000 \text{ kp/cm}^2$ ,  $\sigma_b = 100 \text{ kp/cm}^2$ .

- 4) Η δοκός AB του σχήματος είναι άκαμπτη και κρέμεται από τα άκρα της A και B μέσω δύο ράβδων, οι οποίες είναι από το ίδιο υλικό, έχουν το ίδιο μήκος και διαμέτρους  $d_1$  και  $d_2$ .

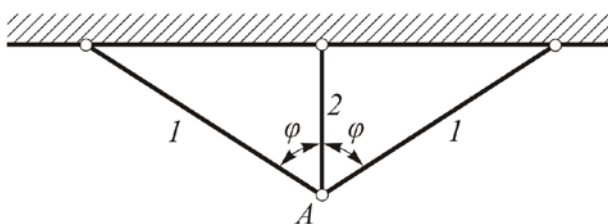


Σχ. 3.10.21

Παραλείποντας το ίδιο βάρος δοκού και ράβδων, να υπολογιστεί σε ποια απόσταση από το A πρέπει να ενεργήσει κατακόρυφα συγκεντρωμένο φορτίο P, ώστε η δοκός να παραμείνει οριζόντια.

Απάντηση:  $a = \frac{d_2^2}{d_1^2 + d_2^2} l$ .

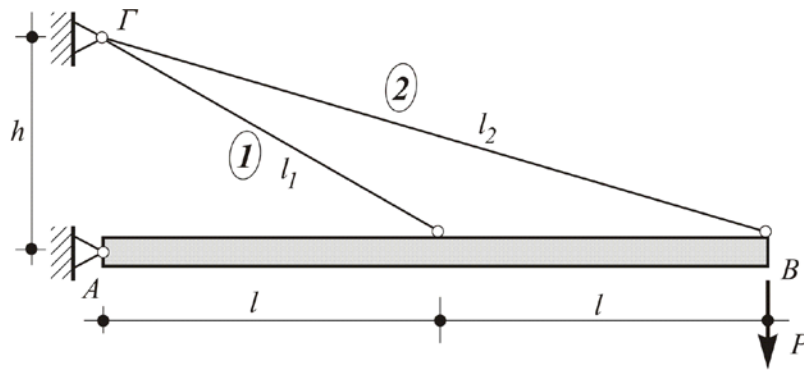
- 5) Του εικονιζόμενου συμμετρικού δικτυώματος να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων του, αν η θερμοκρασία μόνον της μεσαίας ράβδου αυξηθεί κατά  $\Delta\theta$ . Να ληφθούν E, F, και  $\alpha$  τα ίδια για όλες τις ράβδους.



Σχ. 3.10.22

Απάντηση:  $S_1 = \frac{\sigma \nu^2 \varphi}{1 + 2\sigma \nu^3 \varphi} E F \alpha \Delta\theta$ ,  $S_2 = -\frac{2\sigma \nu^3 \varphi}{1 + 2\sigma \nu^3 \varphi} E F \alpha \Delta\theta$ .

- 6) Η άκαμπτη ράβδος AB του σχήματος στηρίζεται με τη βοήθεια μιας άρθρωσης στο A και δύο ράβδων οι οποίες είναι από το ίδιο υλικό και έχουν διατομές  $F_1$  και  $F_2$ .



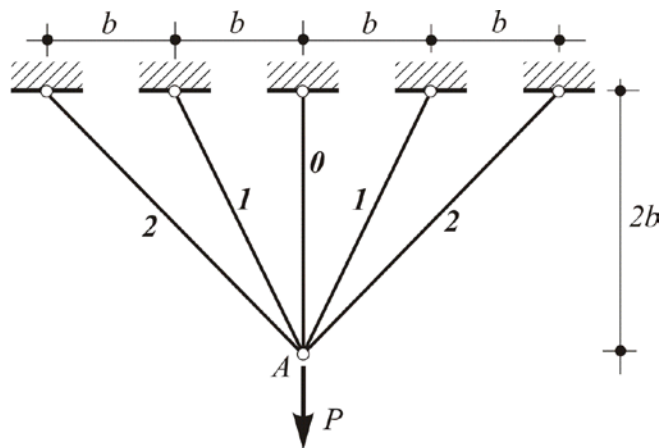
Σχ. 3.10.23

Με δοσμένη τη διαστασιολόγηση της κατασκευής και θεωρώντας τα βάρη των μελών της αμελητέα, να υπολογιστούν οι εφελκυστικές δυνάμεις των ράβδων 1 και 2 μετά την τοποθέτηση του φορτίου P στο B.

Απάντηση: 
$$S_1 = \frac{2P}{4h \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{l_1^2}{l_2^3} + \frac{h}{l_1}}, \quad S_2 = \frac{2P}{\frac{h}{2} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{l_2^2}{l_1^3} + 2 \frac{h}{l_2}}$$

7 Η κατασκευή του σχήματος αποτελείται από πέντε χαλύβδινες ράβδους διαμέτρου  $d = 1 \text{ cm}$ .

Αν  $\sigma_{\text{επ}} = 1400 \text{ kp/cm}^2$ , να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη τιμή του φορτίου P.



Σχ. 3.10.24

Απάντηση:  $P_{\text{επ}} = 3.450 \text{ kp}$ .

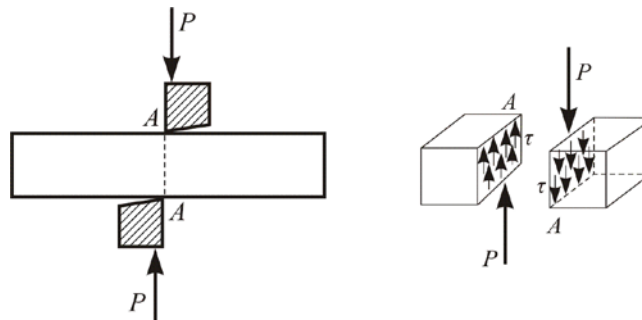
## Διάτμηση

### 1 – Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις

Στις περιπτώσεις που μελετήσαμε ως τώρα η καταπόνηση του φορέα ήταν αξονική και οι τάσεις πάντοτε ορθές, δηλαδή η διεύθυνσή τους κάθετη στην καταπονούμενη επιφάνεια.

Είναι όμως δυνατόν η τάση να βρίσκεται ή να είναι παράλληλη προς την καταπονούμενη επιφάνεια, οπότε ονομάζεται **διατμητική** και συμβολίζεται με το γράμμα  $\tau$ .

Τη διάτμηση ορίσαμε ήδη στο πρώτο κεφάλαιο σαν μια καταπόνηση που εμφανίζεται όταν δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες, ενεργούν κάθετα στον άξονα μιας ράβδου σε απειροστή απόσταση μεταξύ τους. Τότε η διατομή AA της ράβδου καταπονείται σε διάτμηση.



Σχ. 4.1.1

Η εσωτερική διατμητική δύναμη είναι ίση με  $P$  και είναι η συνισταμένη όλων των διατμητικών στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των μορίων, που θεωρούνται – χωρίς να είναι – ομοιόμορφα κατανεμημένες.

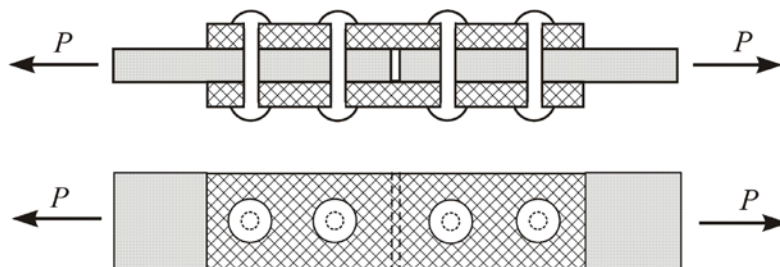
Το μέρος της δύναμης που αντιστοιχεί στη μονάδα επιφάνειας της διατομής είναι η διατμητική τάση  $\tau$ .

Η εύρεση του νόμου μεταβολής των τάσεων  $\tau$  πάνω στη διατομή είναι πρόβλημα πολύ δύσκολο, αν όχι αδύνατο. Γι αυτό αρκούμαστε στον προσδιορισμό της **μέσης τιμής** της διατμητικής τάσης:

$$\tau = \frac{P}{F} \quad (\alpha)$$

όπου  $F$  το εμβαδόν της διατομής.

Η σχέση αυτή είναι αρκετά προσεγγιστική και ισχύει περισσότερο για ψαθυρά παρά για συνεκτικά υλικά, επειδή τα ψαθυρά υλικά θραύονται με σχεδόν επίπεδη διατομή, πράγμα που δεν συμβαίνει με τα συνεκτικά, όπου η διάτμηση συνδυάζεται τοπικά στη διατομή και με εφελκυσμό.



Σχ. 4.1.2

Χαρακτηριστική μορφή διάτμησης, όπου εφαρμόζεται η σχέση (α), παρουσιάζεται στις ηλώσεις. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι οι διατμητικές δυνάμεις που παραλαμβάνουν οι ήλοι δεν είναι ίσες μεταξύ τους. Όμως χάριν απλότητας, δεχόμαστε στις εφαρμογές ότι η συνολική διατμητική δύναμη των ήλων, που συνήθως είναι εφελκυστική δύναμη για τις λάμες, παραλαμβάνεται εξ' ίσου από κάθε ήλο.

Επίσης η ήλωση μπορεί να είναι μονότμητη, δίτμητη, κοκ. αν το πλήθος των επιφανειών διάτμησης σε κάθε ήλο είναι αντίστοιχα ένα, δύο κλπ.

Στο παράδειγμα του σχήματος, όπου παρουσιάζεται η ένωση δύο ελασμάτων με αρμοκαλύπτρες, επειδή κάθε έλασμα συνδέεται μέσω 2 ήλων, η δύναμη που παραλαμβάνει κάθε ήλος είναι:

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2}.$$

Και επειδή κάθε ήλος είναι δίτμητος, η διατμητική δύναμη που παραλαμβάνει κάθε επιφάνεια διάτμησης, είναι:

$$T = \frac{T_1}{2} = \frac{P}{4}.$$

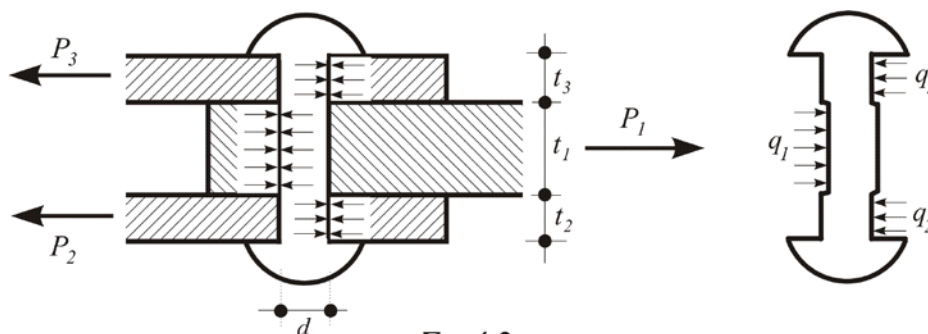
## 2 – Σύνθλιψη άντυγας οπών

Η σύνδεση ελασμάτων με ήλους ή κοχλίες, είναι πολύ συνηθισμένη στις σιδηρές κατασκευές (στέγες, γέφυρες κλπ.). Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται σε λεπτομέρεια το τμήμα του δεξιού ήλου του προηγούμενου σχήματος.

Η δύναμη  $P_1$  του ελάσματος 1 ισορροπείται από τις  $P_2 = P_3 = P_1/2$  των ελασμάτων 2 και 3.

Η μεταβίβαση της δύναμης  $P_1$  από το έλασμα 1 στα ελάσματα 2 και 3 γίνεται με τη βοήθεια του ήλου, διαμέτρου  $d$ . Ο ήλος λοιπόν, αναλαμβάνοντας τη δύναμη

από το έλασμα 1, τη μεταδίδει – καταπονούμενος ταυτόχρονα σε διάτμηση – στα ελάσματα 2 και 3 μέσω τάσεων που θλίβουν την κοίλη επιφάνεια των οπών και γι αυτό λέγονται **τάσεις σύνθλιψης άντυγας**,  $q$ .



Σχ. 4.2

Στο σχήμα έχει απομονωθεί ο ήλος και σχεδιάστηκαν οι τάσεις που ασκούν οι παράπλευρες επιφάνειες των οπών των ελασμάτων, πάνω στον ήλο. Οι ίσες και αντίθετες τάσεις ασκούνται από τον ήλο, σε παράπλευρη επιφάνεια:

$$F = t \cdot d,$$

όπου  $t$  το πάχος του ελασματος και  $d$  η διάμετρος του ήλου.

Φυσικά και εδώ δεχόμαστε ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων.

Για το παραπάνω σχήμα, η τάση σύνθλιψης άντυγας για το κάθε έλασμα, θα είναι:

$$q_1 = \frac{P_1}{F_1} = \frac{P_1}{t_1 \cdot d}$$

$$q_2 = q_3 = \frac{P_1}{2F_2} = \frac{P_1}{2t_2 \cdot d}.$$

### 3 – Έλεγχος αντοχής

Όπως στην περίπτωση του εφελκυσμού, έτσι και στην καθαρή διάτμηση, οι συνθήκες αντοχής που χρησιμοποιούμε, είναι:

$$\tau_{υπ} = \frac{P_{υπ}}{F_{υπ}} \leq \tau_{επ} \quad (\alpha)$$

$$q_{υπ} = \frac{P_{υπ}}{t_{υπ} \cdot d} \leq q_{επ} \quad (\beta)$$

όπου  $\tau_{επ}$  και  $q_{επ}$  οι επιτρεπόμενες αντίστοιχα διατμητική τάση και τάση σύνθλιψης άντυγας.

Στις εφαρμογές, οι συνθήκες (α) και (β) χρησιμοποιούνται εντελώς ανάλογα προς την αντίστοιχη συνθήκη αντοχής στον εφελκυσμό, δηλαδή για:

#### 1. Έλεγχος τάσεων, όπου δίνονται:

α)  $P, F, \tau_{\epsilon\pi}$  και ζητείται η επαλήθευση της σχέσης  $\tau_{\upsilon\pi} = \frac{P}{F} \leq \tau_{\epsilon\pi}$

β)  $P, t, d$  και ζητείται η επαλήθευση της σχέσης  $q_{\upsilon\pi} = \frac{P}{t \cdot d} \leq q_{\epsilon\pi}$

**2. Διαστασιολόγηση, όπου δίνονται:**

α)  $P, \tau_{\epsilon\pi}$  και ζητείται η απαιτούμενη επιφάνεια διάτμησης  $F_{\alpha\pi} \geq \frac{P}{\tau_{\epsilon\pi}}$

β)  $P, d, q_{\epsilon\pi}$  και ζητείται το απαιτούμενο πάχος ελάσματος  $t_{\alpha\pi} \geq \frac{P}{d \cdot q_{\epsilon\pi}}$

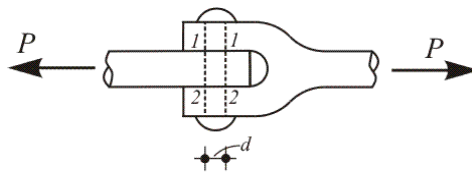
**3. Ικανότητα φόρτισης, όπου δίνονται:**

α)  $F, \tau_{\epsilon\pi}$  και ζητείται η μέγιστη διατμητική δύναμη  $P \leq F \cdot \tau_{\epsilon\pi}$

β)  $t, d, q_{\epsilon\pi}$  και ζητείται η μέγιστη δύναμη της άντυνας  $P \leq t \cdot d \cdot q_{\epsilon\pi}$ .

## 4 – Προβλήματα Διάτμησης

**1** Η εφελκόμενη δύναμη που μεταβιβάζεται μέσω του αρθρωτού συνδέσμου του σχήματος είναι  $P = 6 \text{ t}$ . Να υπολογιστεί η διάμετρος του ήλου που θα χρησιμοποιηθεί για το σκοπό αυτό, αν η επιτρεπόμενη διατμητική του τάση είναι  $\tau_{\epsilon\pi} = 450 \text{ kp/cm}^2$ .



Σχ. 4.4.1

### Λύση

Επειδή ο ήλος είναι δίτητος, έπεται ότι κάθε μία από τις διατμητικές του επιφάνειες (1-1 και 2-2), το εμβαδόν των οποίων απαιτείται να είναι

$$F_{\alpha\pi} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,78 d^2,$$

παραλαμβάνει δύναμη  $T = P/2$ .

Έτσι, η υπάρχουσα διατμητική τάση σε κάθε διατομή θα πρέπει να είναι μικρότερη της επιτρεπομένης, δηλαδή

$$\tau_{\upsilon\pi} = \frac{P}{2F_{\alpha\pi}} \leq \tau_{\epsilon\pi}, \quad \text{οπότε}$$

$$F_{\alpha\pi} \geq \frac{P}{2\tau_{\epsilon\pi}} = \frac{6.000}{2 \cdot 450} = 6,67 \text{ cm}^2.$$

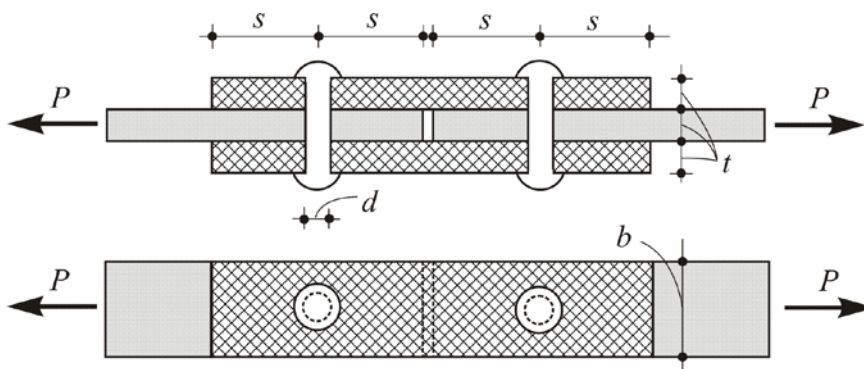
Το εμβαδό αυτό, που αντιστοιχεί σε κύκλο με διάμετρο

$$d = \sqrt{\frac{6,67}{0,78}} = 2,92 \text{ cm},$$

μας οδηγεί στην εκλογή ήλου με διάμετρο  $d = 30 \text{ mm}$ .

**2** Ο σύνδεσμος του σχήματος αποτελείται από ισοπαχή ελάσματα και φέρει εφελκυστική δύναμη  $P = 10 \text{ t}$ . Με δοσμένες τις χαρακτηριστικές τιμές των επιτρεπομένων τάσεων, δηλαδή:

- επιτρεπόμενη διατμητική τάση ήλου:  $\tau_{\varepsilon\pi} = 500 \text{ kp/cm}^2$ ,
- επιτρεπόμενη εφελκυστική τάση ελάσματος:  $\sigma_{\varepsilon\pi} = 1.400 \text{ kp/cm}^2$ ,
- επιτρεπόμενη σύνθλιψη άντυγας ελάσματος:  $q_{\varepsilon\pi} = 1.000 \text{ kp/cm}^2$ ,



Σχ. 4.4.2

να υπολογιστούν:

- οι διάμετροι των ήλων και
- οι διαστάσεις των συνδεόμενων ελασμάτων.

### Λύση

Από τη διαμόρφωση του συνδέσμου, παρατηρούμε ότι ολόκληρη η δύναμη  $P$  του αριστερού ή δεξιού τμήματος παραλαμβάνεται από τον αντίστοιχο ήλο, ο οποίος είναι δίτητος.

Αν λοιπόν  $F_{\alpha\pi}$  είναι η διατομή των ήλων που εξασφαλίζει τη διατμητική τους αντοχή, θα πρέπει

$$\tau_{\upsilon\pi} = \frac{P}{2F_{\alpha\pi}} \leq \tau_{\varepsilon\pi}, \quad \text{δηλαδή}$$

$$F_{\alpha\pi} \geq \frac{P}{2\tau_{\varepsilon\pi}} = \frac{10.000}{2 \cdot 500} = 10 \text{ cm}^2. \quad \text{Άρα}$$

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} \geq 10 \text{ cm}^2 \quad \text{ή} \quad d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\pi}} = 3,57 \text{ cm},$$

οπότε εκλέγουμε την πλησιέστερη προς τα άνω διάμετρο  $d = 36 \text{ mm}$ .

**β)** Αν τώρα  $t$  είναι το πάχος των ελασμάτων, θα πρέπει τούτο να είναι αρκετό ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος σύνθλιψης της άντυγας της οπής. Και επειδή ο κίνδυνος αυτός βρίσκεται στο ενδιάμεσο έλασμα που φέρει όλη τη δύναμη, ο έλεγχος σύνθλιψης της άντυγας θα πρέπει να γίνει μόνο σ' αυτό.

Έτσι θα έχουμε:

$$q_{\upsilon\pi} = \frac{P}{t \cdot d} \leq q_{\varepsilon\pi}, \quad \text{οπότε}$$

$$t \geq \frac{P}{d \cdot q_{\varepsilon\pi}} = \frac{10.000}{3,6 \cdot 1.000} = 2,78 \text{ cm.}$$

Εκλέγεται συνεπώς πάχος ελασμάτων  $t = 28 \text{ mm}$ .

Σε ότι αφορά το πλάτος  $b$  των συνδεομένων ελασμάτων, θα πρέπει τούτο να είναι τέτοιο, ώστε, η ωφέλιμη διατομή  $F_{\omega}$  του ενδιάμεσου πάλιν ελάσματος, που απομένει μετά την αφαίρεση της οπής, να μπορεί να παραλάβει ολόκληρο το φορτίο εφελκυσμού. Δηλαδή:

$$\sigma_{\nu\pi} = \frac{P}{F_{\omega}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}, \quad \text{οπότε}$$

$$F_{\omega} \geq \frac{P}{\sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{10.000}{1.400} = 7,14 \text{ cm}^2.$$

Αλλά είναι:  $F_{\omega} = (b - d) \cdot t$ . Άρα

$$b \cdot t = F_{\omega} + d \cdot t \quad \text{ή} \quad b = \frac{F_{\omega}}{t} + d = \frac{7,14}{2,8} + 3,6 = 6,15 \text{ cm,}$$

οπότε εκλέγεται πλάτος ελασμάτων  $b = 62 \text{ mm}$ .

Τέλος για να αποφύγουμε τον κίνδυνο ρωγμής στο έλασμα, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε μια ελάχιστη απόσταση  $s$  μεταξύ του κέντρου του ήλου και του άκρου του ελάσματος. Αν για τον έλεγχο σε διάσχιση λάβουμε σαν επιτρεπόμενη τάση  $\sigma_{\varepsilon\pi} = 0,5 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi} = 700 \text{ kp/cm}^2$ , τότε το απαιτούμενο μήκος  $s$ , θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

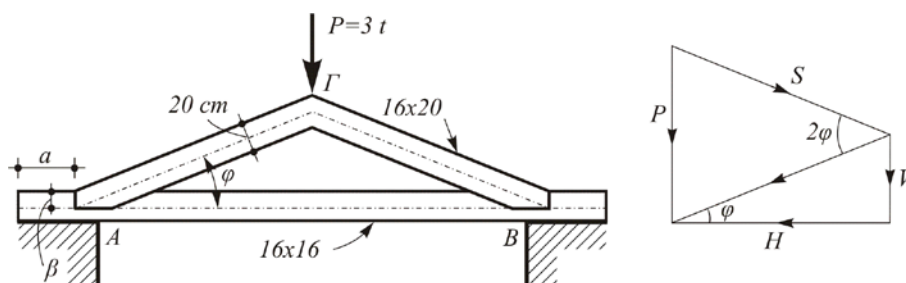
$$\sigma_{\nu\pi} = \frac{P}{2s \cdot t} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}, \quad \text{οπότε}$$

$$s \geq \frac{P}{2t \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{10.000}{2 \cdot 2,8 \cdot 700} = 2,55 \text{ cm,} \quad \text{κάτι που ισχύει, αφού το κέντρο του}$$

μοναδικού ήλου απέχει από το άκρο του ελάσματος  $62/2 = 31 \text{ mm} > 25,5 \text{ mm}$ .

**3** Για τη στήριξη της ξύλινης κατασκευής του σχήματος, με την εικονιζόμενη διαστασιολόγηση, όπου η γωνία κλίσεως του αμείβοντος με την οριζόντια είναι  $\phi = 22^\circ$ , ζητείται να υπολογιστούν

- α) Η απόσταση  $a$  που είναι απαραίτητη για να αναλάβει τη δύναμη που προέρχεται από την οριζόντια συνιστώσα του αμείβοντος, και
- β) το απαιτούμενο για τον ίδιο σκοπό βάθος εντορμίας  $\beta$ .



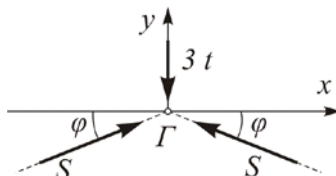
Σχ. 4.4.3

Αμελώντας την τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα στις συνδεόμενες επιφάνειες, να ληφθούν σαν χαρακτηριστικές τιμές αντοχής του ξύλου παράλληλα προς τις ίνες του:  $\tau_{\varepsilon\pi} = 9 \text{ kp/cm}^2$ , και  $\sigma_{\varepsilon\pi, \theta\lambda.} = 85 \text{ kp/cm}^2$ .



**Λύση**

**α)** Ο υπολογισμός της οριζόντιας συνιστώσας,  $H$ , του αμείβοντος, μπορεί να γίνει είτε γραφικά με τη βοήθεια του δυναμοπολυγώνου, όπου, μετά την ανάλυση της  $P$  στις δύο γνωστές διευθύνσεις και τον προσδιορισμό της  $S$ , λαμβάνεται η οριζόντια προβολή  $H$ , είτε αναλυτικά από την ισορροπία του κόμβου  $\Gamma$ .



Σχ. 4.4.4

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \quad \rightarrow \quad -3 + 2S \cdot \eta\mu\varphi = 0$$

$$\text{Άρα} \quad S = \frac{3}{2\eta\mu 22^\circ} = 4t,$$

και συνεπώς  $S_x = H = 4\sigma\upsilon\nu 22^\circ = 3,7t$ .

Για την ασφάλεια σε διάτμηση, θα πρέπει

$$\tau_{\upsilon\pi} = \frac{H}{F_{\alpha\pi}} \leq \tau_{\epsilon\pi},$$

όπου, λόγω του γνωστού πλάτους (16 cm) της κατασκευής,  $F_{\alpha\pi} = 16 \cdot \alpha \text{ cm}^2$ .

$$\text{Άρα} \quad 16 \cdot \alpha \geq \frac{H}{\tau_{\epsilon\pi}} \quad \text{ή} \quad \alpha \geq \frac{H}{16\tau_{\epsilon\pi}} = \frac{3.700}{16 \cdot 9} = 25,7 \text{ cm}.$$

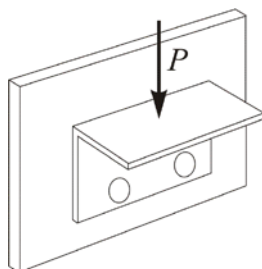
**β)** Αν  $\beta$  είναι το απαιτούμενο βάθος της εντορμίας, τότε αυτό θα πρέπει να είναι αρκετό, ώστε η θλιπτική τάση που αναπτύσσεται τοπικά στο κατακόρυφο τοίχωμά της - εμβαδού  $16 \cdot \beta$  - λόγω της οριζόντιας δύναμης,  $H$ , του αμείβοντος, να μην ξεπερνάει την επιτρεπόμενη. Δηλαδή:

$$\sigma_{\upsilon\pi.\theta\lambda} = \frac{H}{16 \cdot \beta} \leq \sigma_{\epsilon\pi.\theta\lambda}, \quad \text{οπότε}$$

$$\beta \geq \frac{H}{16 \cdot \sigma_{\epsilon\pi.\theta\lambda}} = \frac{3.700}{16 \cdot 85} = 2,72 \text{ cm}.$$

**Ασκήσεις για λύση**

- ① Στην πρακτική των κατασκευών συχνά χρησιμοποιούμε μεταλλικούς ή ξύλινους τάκους προκειμένου να στηρίξουμε οριζόντια ράφια, δοκούς κλπ.

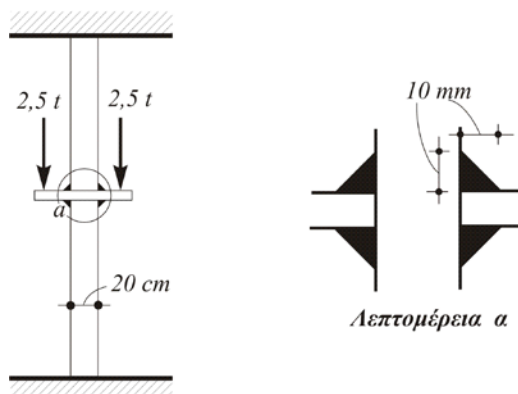


Σχ. 4.4.5

Στην κατασκευή του σχήματος, δύο ήλοι διαμέτρου  $d = 3 \text{ mm}$ , παραλαμβάνουν, μέσω τάκου, κατακόρυφη δύναμη  $P$ . Αν η μέση επιτρεπόμενη τιμή της διατμητικής τάσης των ήλων είναι  $\tau_{\text{επ}} = 450 \text{ kp/cm}^2$  να υπολογιστεί η  $P_{\text{max}}$ .

Απάντηση:  $P_{\text{max}} = 63,5 \text{ kp}$ .

- 2) Η κατασκευή του σχήματος αποτελείται από χαλύβδινο κυλινδρικό στύλο ο οποίος φέρει εγκάρσια πλάκα. Η σύνδεση της πλάκας γίνεται με περιμετρική ηλεκτροσυγκόλληση (εξωρραφή) επάνω και κάτω, όπως φαίνεται στη λεπτομέρεια.

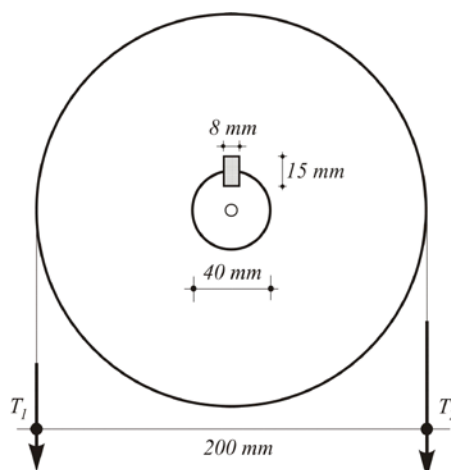


Σχ. 4.4.6

Με τη διαστασιολόγηση που εικονίζεται στο σχήμα, να υπολογιστεί η μέση διατμητική τάση που αναπτύσσεται μεταξύ συγκόλλησης και στύλου.

Απάντηση:  $\tau_{\text{υπ.μεσ}} = 15,9 \text{ kp/cm}^2$ .

- 3) Για να μπορεί μια τροχαλία να μεταφέρει την περιστροφική της κίνηση μέσω άξονα, προσαρμόζεται, όπως φαίνεται στο σχήμα, μια σφήνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου.



Σχ. 4.4.7

Με τη διαστασιολόγηση του σχήματος, αν οι εκατέρωθεν κατακόρυφες δυνάμεις του ιμάντα της τροχαλίας είναι  $T_1 = 200 \text{ kp}$  και  $T_2 = 300 \text{ kp}$ , η δε σφήνα έχει βάθος  $60 \text{ mm}$ , να υπολογιστεί η μέση διατμητική τάση που θα αναπτυχθεί στη διατμητική επιφάνεια της σφήνας.

Απάντηση:  $\tau_{\text{υπ.μεσ}} = 104,2 \text{ kp/cm}^2$ .

### Στρέψη

#### 1 – Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις γενικά

Τη στρέψη γνωρίσαμε ήδη σαν καταπόνηση στο πρώτο κεφάλαιο. Θα λέμε λοιπόν για μια ράβδο με ευθύγραμμο άξονα ότι καταπονείται σε **στρέψη**, όταν ενεργούν πάνω σ' αυτή ζεύγη δυνάμεων, τα επίπεδα των οποίων είναι κάθετα στον άξονά της.

Τα ζεύγη αυτά των δυνάμεων προκαλούν σε κάθε διατομή της ράβδου **ροπή στρέψης**, που είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των προς τα αριστερά ή δεξιά της διατομής ζευγών.

Η δράση της ροπής στρέψης πάνω στη διατομή της ράβδου, εκδηλώνεται με την ανάπτυξη **διατμητικών** τάσεων στη διατομή, ενώ η αντίστοιχη παραμόρφωση είναι η **στροφή** της διατομής ως προς τη γειτονική της. Έτσι τα δύο μεγάλα θέματα που μπαίνουν στη μελέτη της στρέψης, είναι ο προσδιορισμός των διατμητικών τάσεων  $\tau$ , που θα τις ονομάζουμε πλέον τάσεις στρέψης και ο υπολογισμός της γωνίας στροφής των διατομών.

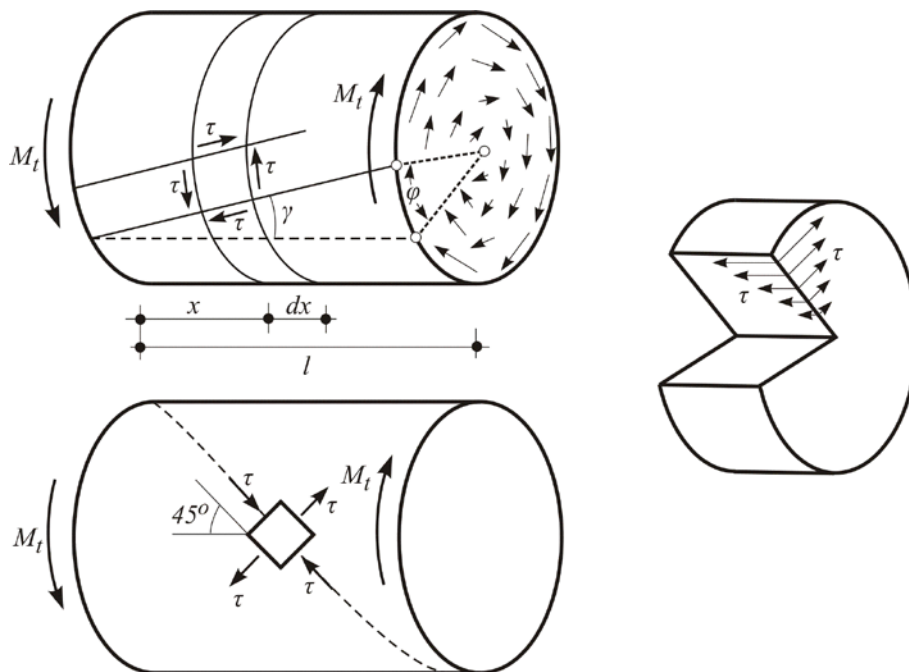
Τα προβλήματα αυτά βρίσκουν ικανοποιητικές λύσεις μόνον όταν η διατομή της ράβδου έχει απλό γεωμετρικό σχήμα (κύκλος, έλλειψη, ορθογώνιο κλπ.). Επειδή το φαινόμενο της στρέψης για ράβδους με τυχούσα διατομή ξεφεύγει από τα όρια του γνωστικού μας πεδίου, θα εξετάσουμε τη στρέψη μόνο σε ράβδους κυκλικής διατομής.

Στις περιοχές του περιγράμματος της διατομής οι τάσεις είναι εφαπτομενικές. Όσο όμως πλησιάζουμε το κεντροειδές της διατομής, οι τάσεις αλλάζουν μέγεθος και φορά κατά τρόπο που εξαρτάται από τη μορφή της διατομής, πάντως μειούμενες μέχρι μηδενισμού τους, όπως συμβαίνει στο λεγόμενο 'μηδενικό σημείο' της διατομής, που είναι το κεντροειδές της.

Οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στη διατομή, συνοδεύονται, σύμφωνα με την πρόταση του Cauchy και από ίσες διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται σε διατομές που περιέχουν τον άξονα της ράβδου.

Έτσι, υλικά όπως το ξύλο, που η διατμητική τους αντοχή κατά την έννοια του μήκους είναι μικρότερη της αντίστοιχης αντοχής κατά την έννοια του πλάτους,

σχηματίζουν τις πρώτες ρωγμές λόγω στρέψης στην επιφάνειά τους, κατά τη διεύθυνση του άξονα. Χαρακτηριστική είναι η αστοχία ενός καλαμιού που υποβάλλεται σε στρέψη μέχρι θράυσης.



Σχ. 5.1

Επίσης, η εμφάνιση διατμητικών τάσεων στις διατομές  $x$  και  $x+dx$ , δημιουργεί στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου την περίπτωση καθαρής διάτμησης, η οποία ισοδυναμεί με την παρουσία ίσων εφελκυστικών και θλιπτικών ορθών τάσεων, έντασης  $\tau$ , σε στοιχείο που κλίνει  $45^\circ$  ως προς τον άξονα της ράβδου.

Έτσι υλικά, όπως η κιμωλία, που η αντοχή τους σε εφελκυσμό είναι μικρότερη από την αντοχή τους σε διάτμηση, θραύονται λόγω στρέψης, σχηματίζοντας ελικοειδή διατομή υπό γωνία  $45^\circ$ .

Η στρεπτική παραμόρφωση, που συνίσταται στη στροφή των διατομών μεταξύ τους, έχει σαν αποτέλεσμα, ευθείες που αρχικά ήταν παράλληλες προς τον άξονα, να μετατρέπονται σε ελικοειδείς καμπύλες.

Οι παραμορφώσεις αυτές είναι τόσο μικρές, ώστε σε σχέση με τις διατμητικές τάσεις που τις προκαλούν, να ισχύει πάντα ο τύπος του Hooke για τη διάτμηση

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (1)$$

που γνωρίσαμε ήδη στην παράγραφο της γωνιακής παραμόρφωσης.

## 2 – Τάσεις – παραμορφώσεις σε κυλινδρικούς φορείς

Ο υπολογισμός των τάσεων και στρεπτικών παραμορφώσεων που εμφανίζονται σε ράβδους κυκλικής ή δακτυλιοειδούς διατομής στηρίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

1. Όλες οι διατομές της ράβδου παραμένουν **επίπεδες** και μετά την παραμόρφωση. Επίσης διατηρούν το σχήμα τους, το μέγεθος και τη μεταξύ τους απόσταση. Αυτό αποδεικνύει για άλλη μια φορά (πέρα από την περίπτωση της καθαρής διάτμησης), την απουσία των ορθών τάσεων στις εγκάρσιες και διαμήκεις τομές της ράβδου.

2. Κάθε διατομή περιστρέφεται σαν απόλυτα στερεός δίσκος. Αυτό σημαίνει ότι η διατομή περιστρέφεται σαν **σύνολο**, δηλαδή οι ακτίνες της παραμένουν **ευθείες**.

Τα διανύσματα των τάσεων στρέψης θα είναι επομένως εφαπτόμενα σε ομόκεντρους κύκλους, που γράφονται με κέντρο το κεντροειδές της διατομής.

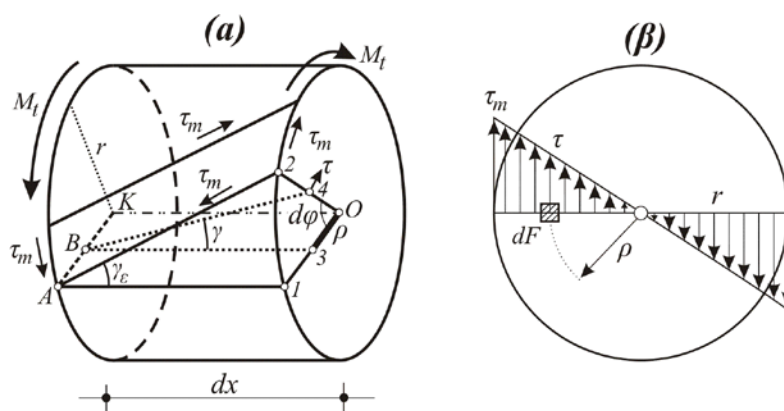
Ύστερα από τα παραπάνω, θεωρούμε ράβδο κυκλικής διατομής ακτίνας  $r$ , μήκους  $l$ , πάνω στην οποία ενεργεί σταθερή ροπή στρέψης  $M_t$ , δηλαδή μια ράβδο που καταπονείται σε **καθαρή στρέψη**, αναζητώντας τη διατμητική τάση  $\tau$  τυχόντος σημείου, ως και τη στροφή  $\phi$  της διατομής του ως προς την αρχική.

### 2α – Προσδιορισμός της διατμητικής τάσης $\tau$

Στη στρεπτική καταπόνηση του σχήματος, παρατηρούμε ότι η στρεπτική ροπή  $M_t$  προκαλεί την περιστροφή της ακραίας διατομής ως προς την αρχική της, κατά μια γωνία  $\phi$ , που είναι γνωστή σαν **γωνία περιστροφής**.

Αποκόπτοντας ένα στοιχειώδες τμήμα της ράβδου μήκους  $dx$ , και εξετάζοντας τη σχετική περιστροφή  $d\phi$  της δεξιάς διατομής ως προς την αριστερή, διαπιστώνουμε τα εξής:

Η ακτίνα  $O1$ , πήρε, μετά την παραμόρφωση, τη θέση  $O2$ . Επίσης η ευθεία  $A1$ , που αρχικά ήταν παράλληλη προς τον άξονα, πήρε τελικά τη θέση  $A2$ , σχηματίζοντας γωνία  $\gamma_\epsilon$  με την  $A1$ .



Σχ. 5.2.1

Κατά τον ίδιο τρόπο, η ευθεία  $B3$ , που απέχει απόσταση  $\rho$  από τον άξονα  $KO$ , πήρε τελικά τη θέση  $B4$ , σχηματίζοντας γωνία  $\gamma$  με τη  $B3$ . Είναι φανερό ότι:

$$\varepsilon\varphi\gamma_\varepsilon \approx \gamma_\varepsilon = \frac{(12)}{dx} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx} = r\theta_1, \text{ και} \quad (2)$$

$$\text{γενικά: } \varepsilon\varphi\gamma \approx \gamma = \frac{(34)}{dx} = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dx} = \rho\theta_1, \quad (3)$$

$$\text{όπου: } \theta_1 = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (4)$$

Η ποσότητα  $\theta_1$  εκφράζει τη γωνία περιστροφής δύο διατομών που απέχουν μοναδιαία απόσταση ( $dx=1$ ) και γι αυτό ονομάζεται **ανηγμένη γωνία στροφής**.

Είναι φανερό ότι η γωνία  $\varphi$  και επομένως και η  $d\varphi/dx$  είναι συναρτήσεις του  $x$ . Στην περίπτωση όμως της καθαρής στρέψης ο λόγος  $d\varphi/dx$  είναι σταθερός σε όλο το μήκος της ράβδου, που έχει την ίδια στρεπτική ροπή. Επομένως η (4) γίνεται:

$$\theta_1 = \frac{\varphi}{l} \quad (5)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (3), προκύπτει:

$$\gamma = \rho\theta_1 = \rho \frac{\gamma_\varepsilon}{r} \quad \text{ή} \quad \gamma = \gamma_\varepsilon \frac{\rho}{r} \quad (6)$$

Η σχέση (6) δείχνει ότι από όλες τις ίνες (ευθείες) της ράβδου, εκείνες που σχηματίζουν τη μεγαλύτερη  $\gamma$  είναι οι γενέτειρες της παράπλευρης επιφάνειας, όπου,  $\rho = r$ .

Ισχύοντος όμως του νόμου του Hooke για τη διάτμηση - σχέση (1) - είναι:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \rho\theta_1 \quad \text{και συνεπώς:} \quad \tau = \rho G\theta_1. \quad (7)$$

Η σχέση (7) εκφράζει τη διατμητική τάση σε σχέση με την ανηγμένη γωνία στροφής και την απόσταση  $\rho$  του σημείου από το κέντρο της κυκλικής διατομής, δείχνοντας ταυτόχρονα ότι οι μέγιστες τιμές αντιστοιχούν στα σημεία της εξωτερικής επιφάνειας.

Η κατανομή των διατμητικών τάσεων κατά μήκος μιας διαμέτρου της διατομής φαίνεται στο σχήμα 5.2.1 β.

Θεωρώντας λοιπόν τις ίνες της ράβδου που ανήκουν στην ίδια **ομόκεντρη** περιφέρεια της διατομής ( $\rho = \text{σταθ.}$ ), η διατμητική τάση  $\sigma'$  αυτές μεταβάλλεται ανάλογα προς την ανηγμένη γωνία στροφής της διατομής, κάτι που σαν κατάσταση, είναι ανάλογη μ' εκείνη του εφελκυσμού.

Η σχέση που συνδέει τη στρεπτική ροπή  $M_t$  με τη γωνία στροφής  $\varphi$ , μπορεί τώρα να καθοριστεί από τη συνθήκη ότι η συνισταμένη ροπή των στοιχειωδών δυνάμεων που προέρχονται από τις διατμητικές τάσεις ως προς το κέντρο της διατομής **ισούται** με τη ροπή στρέψης  $M_t$ .

Πραγματικά, στο στοιχείο του σχήματος, επιφάνειας  $dF$ , που απέχει απόσταση  $\rho$  από το κέντρο της διατομής, ενεργεί στοιχειώδης δύναμη  $\tau \cdot dF$ , ενώ η ροπή της ως προς το κέντρο του κύκλου είναι  $\rho \cdot \tau \cdot dF$ . Άρα η ροπή όλων των στοιχειωδών δυνάμεων, θα είναι:

$$M_t = \int_F \rho \cdot \tau \cdot dF \quad (8)$$

ή, θέτοντας την τιμή της  $\tau$  από τη σχέση (7),

$$M_t = \int_F \rho^2 G \theta_1 dF = G \theta_1 \int_F \rho^2 dF = G \theta_1 J_p, \quad (9)$$

όπου  $J_p$  η πολική ροπή αδράνειας της διατομής ως προς πόλο το κέντρο του κύκλου. Από τη σχέση (9) προκύπτει ότι:

$$\theta_1 = \frac{M_t}{G \cdot J_p} \quad (10)$$

που δείχνει ότι η ανηγμένη γωνία στροφής  $\theta_1$ , είναι ανάλογη προς τη στρεπτική ροπή  $M_t$  και αντιστρόφως ανάλογη προς το γινόμενο  $G \cdot J_p$ , που είναι γνωστό σαν **μέτρο δυστρεψίας** του σώματος.

Αντικαθιστώντας την τιμή της  $\theta_1$  στην (7), παίρνουμε τελικά,

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot \rho. \quad (11)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}, \quad (12)$$

που εκφράζει την πολική ροπή αδράνειας κυκλικής διατομής, η (11) γίνεται:

$$\tau = \frac{2M_t}{\pi r^4} \cdot \rho. \quad (13)$$

Η μέγιστη διατμητική τάση  $\tau_{\max}$  θα εμφανιστεί, όπως προαναφέρθηκε, στην περίμετρο της διατομής, όπου  $\rho = r$ , και θα είναι:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi r^3}. \quad (14)$$

Αν η ράβδος είναι **δακτυλιοειδούς** και όχι κυκλικής διατομής, με εσωτερική και εξωτερική ακτίνα  $r$  και  $R$  αντίστοιχα, τότε, επειδή

$$J_{p\delta} = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4), \quad (15)$$

η διατμητική τάση θα είναι

$$\tau = \frac{M_t}{J_{p\delta}} \cdot \rho \quad (r < \rho < R), \quad (16)$$

με μέγιστη τιμή, στα σημεία της εξωτερικής περιμέτρου της διατομής όπου είναι  $\rho = R$ , την

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_{p\delta}} \cdot R = \frac{M_t}{J_{p\delta} / R} = \frac{M_t}{W_{p\delta}} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{2} R^3 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]} \quad (17)$$

Το μέγεθος  $W_{p\delta}$ , που είναι το πηλίκον της πολικής ροπής αδράνειας προς την απόσταση του/των ακρότατων σημείων της διατομής από το κέντρο της,

ονομάζεται **πολική ροπή αντίστασης** της διατομής και εκφράζεται σε μονάδες μήκους<sup>3</sup>.

Σημειώνεται ότι για την κυκλική διατομή είναι

$$W_{pκ} = \frac{\pi r^4}{2} / r = \frac{\pi r^3}{2},$$

και συνεπώς, παρατηρώντας και τη σχέση (12), ανεξάρτητα από το είδος της διατομής της ράβδου, η μέγιστη διατμητική τάση που εμφανίζεται στη διατομή μπορεί γενικά να εκφράζεται με τη σχέση

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}. \quad (18)$$

## 2β – Προσδιορισμός της γωνίας στροφής φ

Η ολική γωνία στροφής φ των ακραίων διατομών της ράβδου προσδιορίζεται πολύ απλά αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (10) και (5) μεταξύ τους. Πραγματικά, είναι:

$$\theta_1 = \frac{M_t}{G \cdot J_p} = \frac{\varphi}{l}, \quad \text{άρα} \quad \varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_p} = \frac{2M_t \cdot l}{G \cdot \pi \cdot r^4} \quad (19)$$

Η γωνία φ είναι καθαρός αριθμός και εκφράζεται σε ακτίνια.

Η ποσότητα  $G \cdot J_p / l$  ονομάζεται **δυστρεψία** της ράβδου και παριστάνει τη στρεπτική ροπή που απαιτείται για να περιστραφούν οι ακραίες διατομές της ράβδου κατά μοναδιαία γωνία στροφής μεταξύ τους.

Σε αντιστοιχία προς τις καταπονήσεις των φορέων, όπου ορίζονται οι επιτρεπόμενες τάσεις, ορίζεται και στις παραμορφώσεις, για τη γωνία  $\theta_1$  μια επιτρεπόμενη τιμή, ως ανηγμένη γωνία στροφής, που συμβολίζεται με  $\theta_{1επ}$ .

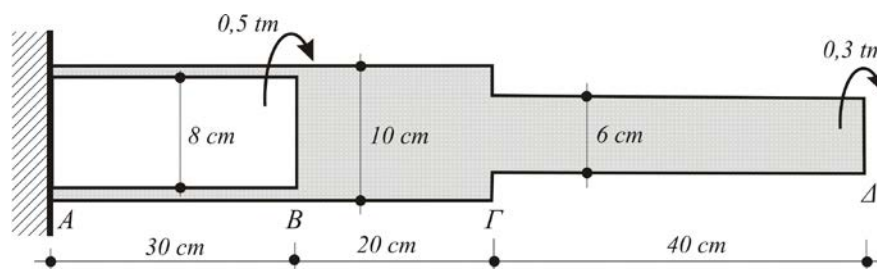
Η τιμή της  $\theta_{1επ}$  είναι χρήσιμη στις διάφορες μηχανολογικές κατασκευές που καταπονούνται σε στρέψη, π.χ. ατράκτους, όπου η τιμή της συνήθως είναι  $0,25^\circ/m$ .

## Παραδείγματα

1

Η ράβδος του σχήματος είναι κυλινδρική – σωληνωτή κατά τμήματα και δέχεται τις στρεπτικές ροπές που εικονίζονται στις αντίστοιχες διατομές.

Αν το μέτρο διάτμησης είναι  $G = 800.000 \text{ kp/cm}^2$ , να υπολογιστούν:



Σχ. 5.2.2



α) Οι μέγιστες διατμητικές τάσεις που εμφανίζονται στα τμήματα AB, ΒΓ και ΓΔ, καθώς και

β) Η ολική στροφή των ακραίων διατομών Α και Δ της ράβδου.

### Λύση

**α)** Είναι φανερό ότι η στρεπτική ροπή που εμφανίζεται στη ράβδο έχει σταθερή, αλλά διαφορετική σε κάθε τμήμα τιμή. Η έννοια του τμήματος εδώ ταυτίζεται με το μήκος της ράβδου που περιλαμβάνεται μεταξύ των διατομών άσκησης των στρεπτικών ροπών, και όχι, όπως στην εκφώνηση, με το μήκος εκείνο που χαρακτηρίζεται από σταθερή διατομή της ράβδου.

Θεωρώντας θετικές τις δεξιόστροφες ροπές και παίρνοντας από δεξιά το αλγεβρικό τους άθροισμα (αποφεύγοντας έτσι τον προσδιορισμό της ροπής στήριξης  $M_A$ ), η στρεπτική ροπή που αντιστοιχεί στο κάθε τμήμα, θα είναι:

$$\text{Τμήμα } \mathbf{B\Delta} : M_{tB\Delta} = 0,3 \text{ tm} = 0,3t \cdot 1\text{m} = 300\text{kp} \cdot 100\text{cm} = 30.000 \text{ kp} \cdot \text{cm}$$

$$\text{Τμήμα } \mathbf{AB} : M_{tAB} = 0,3 + 0,5 = 0,8 \text{ tm} = \dots 0,8 \cdot 10^5 \dots = 80.000 \text{ kp} \cdot \text{cm}.$$

Εξ' άλλου, η πολική ροπή αδράνειας για καθένα από τα τμήματα σταθερής διατομής της ράβδου, είναι:

$$J_{\rho AB} = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2}(5^4 - 4^4) = 569,72 \text{ cm}^4$$

$$J_{\rho B\Gamma} = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi \cdot 5^4}{2} = 981,75 \text{ cm}^4$$

$$J_{\rho \Gamma\Delta} = \frac{\pi \rho^4}{2} = \frac{\pi \cdot 3^4}{2} = 127,23 \text{ cm}^4.$$

Επομένως οι μέγιστες διατμητικές τάσεις, που εμφανίζονται αντίστοιχα στα τμήματα AB, ΒΓ και ΓΔ είναι:

$$\tau_{AB} = \frac{M_{tAB} \cdot R}{J_{\rho AB}} = \frac{80.000 \cdot 5}{579,62} = 690,10 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau_{B\Gamma} = \frac{M_{tB\Gamma} \cdot r}{J_{\rho B\Gamma}} = \frac{30.000 \cdot 5}{981,75} = 152,79 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau_{\Gamma\Delta} = \frac{M_{t\Gamma\Delta} \cdot \rho}{J_{\rho \Gamma\Delta}} = \frac{30.000 \cdot 3}{127,23} = 707,38 \text{ kp/cm}^2$$

**β)** Η ολική στροφή των ακραίων διατομών της ράβδου θα βρεθεί σαν αλγεβρικό άθροισμα των επί μέρους στροφών, δηλαδή των στροφών που εμφανίζονται μεταξύ των ακραίων διατομών κάθε τμήματος σταθερής πολικής ροπής αδράνειας.

Οι επί μέρους αυτές στροφές είναι αποτέλεσμα των (προσημασμένων) στρεπτικών ροπών που δρουν στο κάθε τμήμα.

Θεωρώντας και εδώ θετικές τις δεξιόφορες στροφές, θα είναι:

$$\varphi_{ολ} = \varphi_{\Delta\Gamma} + \varphi_{\Gamma B} + \varphi_{B A}$$

Όμως οι παραπάνω επί μέρους στροφές είναι:

$$\varphi_{\Delta\Gamma} = \frac{M_{t\Delta\Gamma} \cdot l_{\Delta\Gamma}}{G \cdot J_{p\Delta\Gamma}} = \frac{30.000 \cdot 40}{800.000 \cdot 127,23} = 11,79 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{\Gamma\text{B}} = \frac{M_{t\Gamma\text{B}} \cdot l_{\Gamma\text{B}}}{G \cdot J_{p\Gamma\text{B}}} = \frac{30.000 \cdot 20}{800.000 \cdot 981,75} = 0,76 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

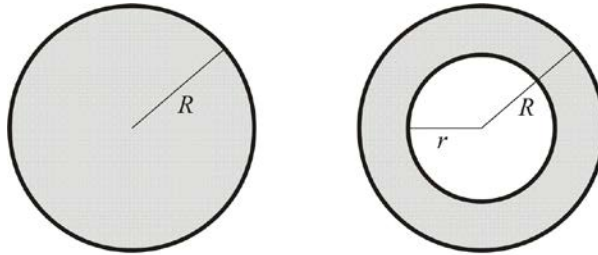
$$\varphi_{\text{B}\Delta} = \frac{M_{t\text{B}\Delta} \cdot l_{\text{B}\Delta}}{G \cdot J_{p\text{B}\Delta}} = \frac{80.000 \cdot 30}{800.000 \cdot 579,62} = 5,17 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Άρα  $\varphi_{ολ} = (11,79 + 0,76 + 5,17) \cdot 10^{-3} = 0,01772 \text{ rad}$

ή  $\varphi_{ολ} = 0,01772 \frac{180^\circ}{\pi} = 1,015^\circ = 1^\circ 0' 55''$ .

**2**

Οι δύο ράβδοι του σχήματος (κυλινδρική και σωληνωτή) είναι κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό, έχουν το ίδιο μήκος  $l$ , την ίδια εξωτερική ακτίνα και φέρουν την ίδια στρεπτική ροπή  $T$ .



Σχ. 5.2.3

Αν ο λόγος της εσωτερικής προς την εξωτερική ακτίνα της σωληνωτής ράβδου είναι  $\lambda = r/R = 0,6$  να συγκριθούν:

- Οι μέγιστες διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους
- Οι γωνίες περιστροφής των ακραίων διατομών τους και
- Τα βάρη τους.

### Λύση

**α)** Αν  $J_{p\kappa}$  και  $J_{p\sigma}$  είναι αντίστοιχα η πολική ροπή αδράνειας της κυλινδρικής και σωληνωτής διατομής, επειδή:

$$J_{p\kappa} = \frac{\pi R^4}{2} \quad \text{και}$$

$$J_{p\sigma} = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi R^4}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right] = J_{p\kappa} (1 - \lambda^4),$$

έπεται ότι ο λόγος των μέγιστων διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στη σωληνωτή και κυλινδρική ράβδο, θα είναι:

$$\frac{\tau_{\sigma \max}}{\tau_{\kappa \max}} = \frac{T \cdot R / J_{p\sigma}}{T \cdot R / J_{p\kappa}} = \frac{J_{p\kappa}}{J_{p\sigma}} = \frac{J_{p\kappa}}{J_{p\kappa} (1 - \lambda^4)} = \frac{1}{1 - \lambda^4} = 1,15.$$

**β)** Ο παραπάνω λόγος των μέγιστων τάσεων είναι ο ίδιος με το λόγο των γωνιών περιστροφής των ακραίων διατομών τους, διότι

$$\frac{\theta_{\sigma}}{\theta_{\kappa}} = \frac{\theta_{1\sigma} \cdot l}{\theta_{1\kappa} \cdot l} = \frac{\frac{T}{G \cdot J_{\rho\sigma}}}{\frac{T}{G \cdot J_{\rho\kappa}}} = \frac{J_{\rho\kappa}}{J_{\rho\sigma}} = \frac{1}{1-\lambda^4} = 1,15.$$

**γ)** Τα βάρη των δύο ράβδων είναι ανάλογα προς τις διατομές τους. Αν λοιπόν  $F_{\kappa}$  και  $F_{\sigma}$  είναι αντίστοιχα η διατομή της κυλινδρικής και σωληνωτής ράβδου, επειδή

$$F_{\kappa} = \pi R^2 \quad \text{και}$$

$$F_{\sigma} = \pi(R^2 - r^2) = \pi R^2(1 - \lambda^2) = 0,64 \cdot F_{\kappa},$$

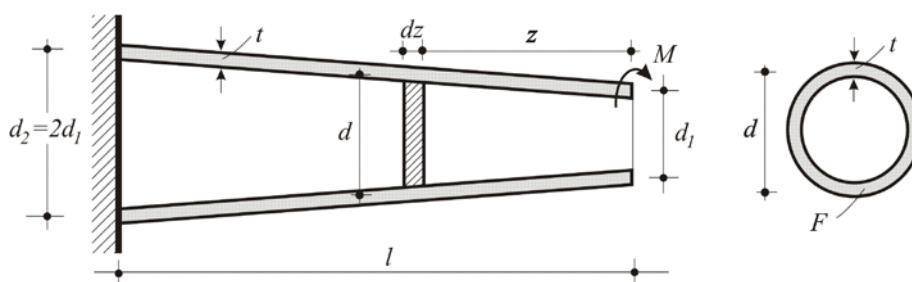
έπεται ότι το βάρος της σωληνωτής ράβδου θα είναι το 64% του βάρους της κυλινδρικής.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν καθαρά το βασικό πλεονέκτημα που εμφανίζεται στις σωληνωτές διατομές που καταπονούνται σε στρέψη.

Πραγματικά, στο παράδειγμα αυτό η σωληνωτή ράβδος έχει 15% μεγαλύτερη διατμητική τάση και γωνία περιστροφής, αλλά 36% λιγότερο βάρος.

Φυσικά οι αναλογίες αυτές αλλάζουν όταν ο λόγος της εσωτερικής προς την εξωτερική ακτίνα (ή διάμετρο) είναι διαφορετικός.

**3** Η ράβδος του σχήματος είναι σωληνωτή, μεταβλητής διαμέτρου και μικρού αλλά σταθερού πάχους.



Σχ. 5.2.4

Αν  $G$  είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού, με τη σημειούμενη διαστασιολόγηση και φόρτιση, να υπολογιστεί η ολική γωνία στρέψης των ακραίων διατομών της ράβδου.

### Λύση

Η στρεπτική ροπή  $M$  είναι σταθερή σε όλο το μήκος της ράβδου. Όμως η ανηγμένη γωνία στρέψης, λόγω του μεταβλητού της διατομής, δεν είναι σταθερή.

Αν  $d\theta$  η γωνία στρέψης που εμφανίζεται σε στοιχειώδες τμήμα της ράβδου, μήκους  $dz$ , που απέχει απόσταση  $z$  από την ακραία μικρή διατομή, τότε θα είναι:

$$d\theta = \frac{M \cdot dz}{G \cdot J_p}, \quad (\alpha)$$

όπου  $J_p$  η πολική ροπή αδράνειας της διατομής του στοιχειώδους τμήματος, η οποία, λόγω του μικρού πάχους  $t$ , εξ' ορισμού είναι:

$$J_p = F \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot d \cdot t \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot d^3 \cdot t$$

Η ολική γωνία στροφής  $\theta$ , θα προκύψει ολοκληρώνοντας τη σχέση (α) σ' όλο το μήκος  $l$  της ράβδου, δηλαδή:

$$\theta = \int_0^l d\theta = \int_0^l \frac{M \cdot dz}{G \frac{\pi}{4} d^3 t} = \frac{4M}{\pi G t} \int_0^l \frac{dz}{d^3} \quad (\beta)$$

όπου  $d = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} z$ .

Θέτω  $y = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} z$ , (γ)

οπότε  $dy = \frac{d_2 - d_1}{l} dz$  ή  $dz = \frac{l}{d_2 - d_1} dy$ ,

ενώ τα όρια του ολοκληρώματος γίνονται αντίστοιχα:

Για  $z = 0 \rightarrow y = d_1$  και για  $z = l \rightarrow y = d_2$

Άρα η (β) τροποποιείται τώρα στην

$$\theta = \frac{4M}{\pi G t} \cdot \frac{l}{d_2 - d_1} \cdot \int_{d_1}^{d_2} \frac{dy}{y^3} = \frac{4Ml}{\pi G t (d_2 - d_1)} \left[ \frac{y^{-2}}{-2} \right]_{d_1}^{d_2}, \text{ ή}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{4Ml}{-2\pi G t (d_2 - d_1)} [d_2^{-2} - d_1^{-2}] \\ &= \frac{2Ml (d_1^{-2} - d_2^{-2})}{\pi G t (d_2 - d_1)}. \end{aligned}$$

Και επειδή  $d_2 = 2d_1$ , προκύπτει

$$\theta = \frac{2Ml}{\pi G t d_1} \left( \frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{4d_1^2} \right) = \frac{2Ml}{\pi G t d_1} \cdot \frac{3}{4d_1^2},$$

ή τελικά  $\theta = \frac{3Ml}{2\pi G t d_1^3}$ .

### 3 – Έλεγχος αντοχής

Ο έλεγχος των τάσεων που γίνεται σε μια στρεπτικά καταπονούμενη ράβδο, σε συνδυασμό με τον έλεγχο των γωνιών στροφής της, είναι μεγάλης σημασίας και εξασφαλίζει τόσο την αντοχή της ράβδου, όσο και την απουσία απaráδεκτων

παραμορφώσεων σ' αυτή. Ο διπλός αυτός έλεγχος γίνεται με την ικανοποίηση των σχέσεων:

$$\tau_{\omega\pi} = \tau_{\max} \leq \tau_{\varepsilon\pi} \quad (20)$$

$$\theta_{\omega\pi} = \theta_1 \leq \theta_{\varepsilon\pi}. \quad (21)$$

#### 4 – Στρέψη σε περιστρεφόμενους άξονες (ατράκτους)

Όπως ήδη αναφέραμε, η επιβολή της  $\theta_{\varepsilon\pi}$  αφορά τις ράβδους κυκλικής διατομής που υφίστανται στρεπτική καταπόνηση. Τέτοιες ράβδοι είναι οι περιστρεφόμενοι άξονες (κ. άτρακτοι).

Όταν ένας περιστρεφόμενος άξονας έχει μεγάλο μήκος, τότε υποφέρει συνήθως από κινήσεις ταλάντωσης, οι οποίες, εκτός του ότι είναι ενοχλητικές, μπορούν να έρθουν σε συντονισμό με περιοδικές εξωτερικές επιδράσεις οπότε η ασφάλεια της εγκατάστασης μπαίνει σε σοβαρό κίνδυνο.

Γι' αυτό, πέρα από τη δυσκαμψία, επιβάλλεται να έχει η άτρακτος και αρκετή δυστρεψία.

Για την επάρκεια της δυστρεψίας, ο προσδιορισμός της διαμέτρου της ατράκτου θα γίνει με την προϋπόθεση ότι αληθεύουν και οι δύο σχέσεις (20) και (21).

Επειδή προσρισμός των ατράκτων είναι να μεταφέρουν ισχύ, θα πρέπει να θυμηθούμε ότι η ισχύς  $N$  είναι το έργο  $W$  που παράγεται στη μονάδα του χρόνου  $t$ , δηλαδή:

$$N = \frac{W}{t} = \frac{P \cdot S}{t}$$

όπου  $P$  η προβολή της δύναμης πάνω στην ευθεία μετακίνησης του σημείου εφαρμογής της και  $S$  ο δρόμος που αυτό διατρέχει.

Επειδή το πηλίκο  $S/t$  έχει την έννοια της ταχύτητας, η παραπάνω σχέση της ισχύος μπορεί να γραφεί και

$$N = P \cdot v \quad (\text{kp} \cdot \text{m}/\text{sec}) \quad (22)$$

Στην πράξη η ισχύς εκφράζεται σε ίππους HP ( $1\text{HP} = 75 \text{ kp} \cdot \text{m}/\text{sec}$ ), οπότε η σχέση (22) γίνεται:

$$N_{HP} = \frac{P \cdot v}{75} \quad (23)$$

Όταν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα με  $n$  στροφές το λεπτό, τότε η γραμμική του ταχύτητα σε απόσταση  $R$ (m) από τον άξονα, είναι:

$$v = \frac{2\pi nR}{60} \quad \text{m}/\text{sec}. \quad (24)$$

Επομένως η σχέση (23) γίνεται

$$N_{HP} = \frac{2\pi \cdot n \cdot R \cdot P}{75 \cdot 60} = \frac{M_t \cdot \pi \cdot n}{2.250} \quad \text{kp} \cdot \text{m}/\text{sec}, \quad (25)$$

όπου  $M_t = P \cdot R$  είναι η στρεπτική ροπή που ασκείται στην άτρακτο.

Από τη σχέση (25) προκύπτει ότι για δοσμένη ισχύ, η απαιτούμενη στρεπτική ροπή, είναι

$$M_t = \frac{2.250}{\pi} \cdot \frac{N}{n} \quad (\text{kp} \cdot \text{m}), \quad \text{ή}$$

$$M_t = 71.620 \cdot \frac{N}{n} \quad (\text{kp} \cdot \text{cm}). \quad (26)$$

Επομένως η μέγιστη τάση στρέψης σε άξονα που μεταβιβάζει ισχύ  $N$  ίππων, σύμφωνα με τη σχέση (14), είναι

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi r^3} = \frac{16M_t}{\pi D^3} = \frac{1.145.920 N}{\pi D^3 n} \quad (\text{kp/cm}^2), \quad \text{ή τελικά}$$

$$\tau_{\max} = \frac{36 \cdot 10^5 N}{\pi^2 D^3 n} \quad (\text{kp/cm}^2). \quad (27)$$

Η ανηγμένη γωνία στροφής  $\theta_1$ , που προκύπτει από τη σχέση (10), είναι αντίστοιχα:

$$\theta_1 = \frac{M_t}{G \cdot J_p} = \frac{72 \cdot 10^5 \cdot N}{\pi^2 D^4 G \cdot n} \quad \text{σε ακτίνια, ή}$$

$$\theta_1 = \frac{180^\circ}{\pi} \theta_1 = \frac{1296 \cdot 10^6 N}{\pi^3 D^4 G \cdot n} \quad \text{σε μοίρες.} \quad (28)$$

Σε όλους τους παραπάνω τύπους η ισχύς δίνεται σε ίππους. Όταν δίνεται σε kW πρέπει να μετατρέπεται σε ίππους, σύμφωνα με τη γνωστή σχέση:

$$1 \text{ HP} = 0,736 \text{ kW} \quad \text{ή} \quad 1 \text{ kW} = 1,36 \text{ HP}.$$

Οι περιστρεφόμενοι άξονες (άτρακτοι) καταπονούνται σε στρέψη και κάμψη. Συνήθως η καμπτική ροπή που δέχεται ο άξονας δεν είναι γνωστή. Γνωστή όμως είναι η στρεπτική ροπή, που προκύπτει από τη μεταβιβαζόμενη ισχύ και τον αριθμό στροφών σύμφωνα με τη σχέση (26).

Εξ' αιτίας αυτού του γεγονότος, η απαιτούμενη διάμετρος υπολογίζεται αρχικά με μόνο κριτήριο τη ροπή στρέψης, αλλά η τιμή της  $\tau_{\text{επ}}$  λαμβάνεται χαμηλή (περίπου η μισή από αυτή που ισχύει για το αντίστοιχο υλικό).

Όμως η διάμετρος που θα προκύψει εκλέγεται εκ των υστέρων σε σύνθετη καταπόνηση κάμψης και στρέψης, ώστε να εξασφαλίζεται η ασφαλής λειτουργία της ατράκτου.

## 5 – Στρέψη ράβδων ΜΗ κυκλικής διατομής

Κατά το στάδιο προσδιορισμού των τάσεων και παραμορφώσεων που αναπτύσσονται σε στρεπτικά καταπονούμενες ράβδους κυκλικής διατομής, τέθηκε ως προϋπόθεση, ότι οι διατομές της ράβδου μετά τη στρέψη:

1. παραμένουν επίπεδες, και

## 2. στρέφονται σαν σύνολο.

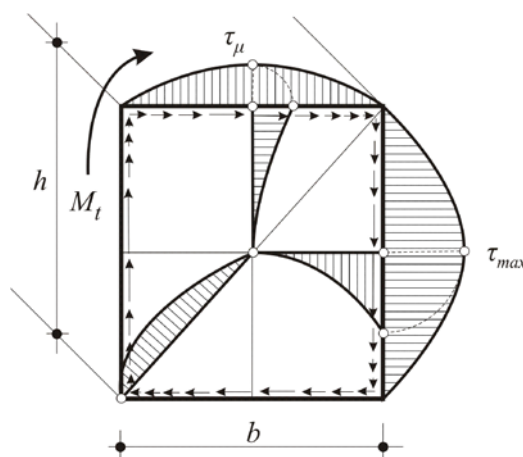
Στην περίπτωση ράβδων **μη** κυκλικής διατομής, **καμία** από τις παραπάνω προϋποθέσεις δεν ισχύει. Εδώ οι μη κυκλικές διατομές δεν παραμένουν επίπεδες, αλλά στρεβλώνονται. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, ευθείες των διατομών αυτών να γίνονται καμπύλες, με αντίστοιχη καμπύλωση και των παραπλεύρων επιφανειών των ράβδων.

Τα φαινόμενα αυτά οφείλονται στην ανομοιόμορφη κατανομή των τάσεων στη διατομή, χωρίς αυτές να αυξάνουν με την απομάκρυνσή τους από το κέντρο της διατομής.

Ο προσδιορισμός των διατμητικών τάσεων για μη κυκλικές διατομές που καταπονούνται σε στρέψη είναι πρόβλημα δυσχερέστατο, που δεν λύνεται με τις στοιχειώδεις αρχές και μεθόδους της αντοχής των υλικών. Παρακάτω θα εξετάσουμε μόνο την ορθογωνική και τριγωνική διατομή.

**α) Ορθογωνική διατομή**

Εδώ οι διατμητικές τάσεις βαίνουν αυξανόμενες πάνω στις διαμέσους. Στις διαγώνιες όμως, ενώ αυξάνονται αρχικά, ελαττώνονται στη συνέχεια, για να μηδενιστούν στις κορυφές, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχ. 5.5.1

Αυστηρή διερεύνηση του προβλήματος δόθηκε για πρώτη φορά το 1854 από το Γάλλο de Saint – Venant, που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μέγιστη διατμητική τάση αναπτύσσεται στο μέσον της μεγαλύτερης πλευράς του ορθογωνίου.

Αν λοιπόν  $b$  και  $h$  είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου με  $h > b$ , η μέγιστη διατμητική τάση  $\tau_{\max}$ , εμφανίζεται στο μέσον της πλευράς  $h$ , και είναι:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha \cdot b \cdot h^3}.$$

Η αντίστοιχη  $\tau_\mu$  της πλευράς  $b$ , είναι:  $\tau_\mu = n \cdot \tau_{\max}$ , και η ανηγμένη γωνία στροφής  $\theta_1$  σε ακτίνια,

$$\theta_1 = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_t}{G \cdot \beta \cdot b \cdot h^3}$$

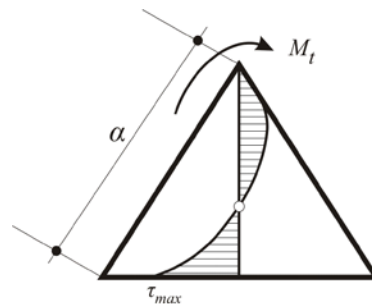
Οι συντελεστές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $n$  εξαρτώνται από το λόγο  $h/b$  των πλευρών του ορθογωνίου και δίνονται από τον πίνακα που ακολουθεί:

$h/b$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$n$	1	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

## β) Τριγωνική διατομή

Στην περίπτωση της τριγωνικής διατομής η κατανομή των τάσεων παρουσιάζει μια ομοιότητα αντιστοιχίας με εκείνη της ορθογωνικής διατομής, εμφανίζοντας τις μέγιστες διατμητικές τάσεις στα κοντινότερα προς το κεντροειδές σημεία της περιμέτρου.

Συγκεκριμένα οι τάσεις εμφανίζονται μέγιστες στα μέσα των πλευρών (όπως στις πλευρές του ορθογωνίου), και, μηδενιζόμενες στο κεντροειδές, παίρνουν αντίθετες τιμές αυξανόμενες αρχικά και στη συνέχεια ελαττούμενες μέχρι μηδενισμού των στις απέναντι κορυφές (όπως στις διαγώνιες του ορθογωνίου). Κατά το  $1/3$  δηλαδή της διαμέσου η κατανομή των τάσεων μοιάζει με εκείνη προς τα μέσα των πλευρών του ορθογωνίου, ενώ κατά τα  $2/3$  με την αντίστοιχη των διαγώνιων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχ. 5.5.2

Στην περίπτωση ράβδου με διατομή ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς  $\alpha$ , οι μέγιστες τάσεις στρέψης  $\tau_{\max}$  στα μέσα των πλευρών, δίνονται από τη σχέση:

$$\tau_{\max} = \frac{20M_t}{\alpha^3},$$

ενώ η ανηγμένη γωνία στροφής  $\theta_1$ , είναι:

$$\theta_1 = \frac{80M_t}{\alpha^4 G \sqrt{3}}.$$

Γενικά για ράβδους μη κυκλικής διατομής, είναι:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \quad \text{και} \quad \theta_1 = \frac{M_t}{G \cdot J_p}.$$

Το μέγεθος  $W_p$ , που ονομάζεται πολική ροπή αντίστασης της διατομής, είναι

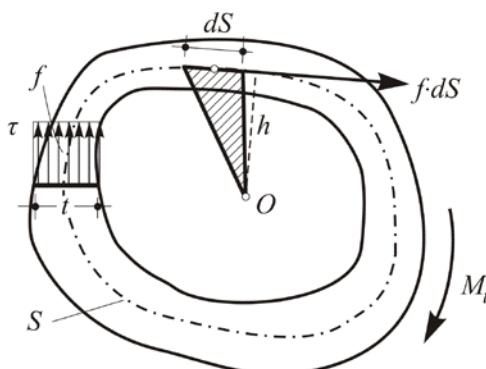
$$W = \frac{J_p}{e},$$

όπου  $e$  η απόσταση του πιο μακρινού σημείου της περιμέτρου (όχι κορυφή).



## 6 – Κλειστή διατομή λεπτού πάχους. Διατμητική ροή

Χαρακτηριστικό των ράβδων με τέτοιες διατομές είναι ότι έχουν τη δυνατότητα να παραλαμβάνουν μεγάλες στρεπτικές ροπές.



Σχ. 5.6.1

Θεωρούμε μια στρεπτικά καταπονούμενη ράβδο με τη διατομή του σχήματος. Η διατομή αυτή, σταθερή σε όλο το μήκος της ράβδου, χαρακτηρίζεται από λεπτό μεταβαλλόμενο πάχος  $t$ , και μια ενδιάμεση γραμμή  $s$ . Κατά μήκος της  $s$  η διατμητική τάση  $\tau$  δεν είναι σταθερή. Όμως το διάνυσμά της  $\tau$  εφάπτεται σε όλα τα σημεία της  $s$ .

Λόγω του μικρού πάχους της διατομής, δεχόμαστε ότι η διατμητική τάση παραμένει σταθερή κατά την έννοια του πάχους. Αν λοιπόν  $\tau$  είναι η διατμητική τάση και  $t$  το αντίστοιχο πάχος της διατομής σε τυχόν σημείο της  $s$ , τότε το γινόμενο

$$f = \tau \cdot t \quad (\alpha)$$

ονομάζεται **διατμητική ροή** και εκφράζεται σε  $\text{kp/cm}$ , όπως δηλαδή και το συνεχές φορτίο δοκού.

Ο Γερμανός μηχανικός R. Bredt απέδειξε το 1896 ότι η διατμητική ροή  $f$  είναι **σταθερή** για όλα τα σημεία της γραμμής  $s$  και ότι παρουσιάζει απόλυτη αναλογία προς τη ροή υγρού σε ανοικτό αγωγό, που έχει σχήμα όμοιο με τη διατομή της ράβδου.

Στο μέγεθος  $f$  αντιστοιχεί η παροχή  $Q$  για το υγρό του αγωγού, στη διατμητική τάση  $\tau$  η ταχύτητα  $u$  του υγρού και στο  $t$  το εμβαδόν της διατομής  $F$  του ανοικτού αγωγού ( $Q = u \cdot F$ ).

### α) Υπολογισμός των διατμητικών τάσεων

Επανερχόμενοι στο προηγούμενο σχήμα, παίρνουμε πάνω στη γραμμή  $s$  ένα στοιχειώδες τμήμα της, μήκους  $dS$ . Στην αντίστοιχη επιφάνεια  $t \cdot dS$  ενεργεί η στοιχειώδης διατμητική δύναμη

$$\tau \cdot t \cdot dS = f \cdot dS$$

Η ροπή της δύναμης αυτής ως προς ένα σημείο  $O$  στο εσωτερικό της διατομής, είναι:

$$dM_t = h \cdot f \cdot dS \quad (\beta)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (β) σε όλο το μήκος της  $s$ , θα πάρουμε προφανώς τη στρεπτική ροπή της διατομής. Έτσι,

$$M_t = \int_s h f dS = f \int_s h dS \quad (\gamma)$$

Όμως στη σχέση (γ), το γινόμενο  $h \cdot dS$  παριστάνει το διπλάσιο εμβαδόν του διαγραμμισμένου τριγώνου. Άρα το ολοκλήρωμά του θα εκφράζει το διπλάσιο εμβαδόν που περικλείεται από τη γραμμή  $s$ . Δηλαδή

$$\int_s h \cdot dS = 2F_m.$$

Έτσι η σχέση (γ) γίνεται:

$$M_t = f \cdot 2F_m = 2\tau \cdot t \cdot F_m \quad (\delta)$$

Η σχέση (δ) επιτρέπει τον υπολογισμό της διατμητικής τάσης σε κάθε θέση της γραμμής  $s$ .

Η μέγιστη τάση  $\tau_{\max}$ , όπως φαίνεται από τη σχέση (α), εμφανίζεται σε διατομή που έχει το μικρότερο πάχος,  $t_{\min}$ , και είναι:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2t_{\min} F_m}. \quad (\epsilon)$$

## β) Έκφραση της γωνίας στροφής

Η ανηγμένη γωνία στροφής  $\theta_1$  θα προσδιοριστεί από τον φερόμενο ως **δεύτερο τύπο του Bredt** (ο πρώτος είναι η σχέση ε).

$$\theta_1 = \frac{M_t}{4GF_m^2} \int_s \frac{dS}{t}. \quad (\zeta)$$

Η απόδειξη αυτού του τύπου παραλείπεται επειδή ξεφεύγει από τα όρια του γνωστικού μας επιπέδου.

### Παράδειγμα

Σε χαλύβδινη δοκό μήκους  $l = 1,5 \text{ m}$  και διατομής όπως στο σχήμα, ενεργεί στρεπτική ροπή  $M_t = 1,2 \text{ tm}$ . Να ευρεθεί η μέγιστη διατμητική τάση και η γωνία στροφής των ακραίων διατομών της. Δίνεται  $G = 825.000 \text{ kp/cm}^2$ .

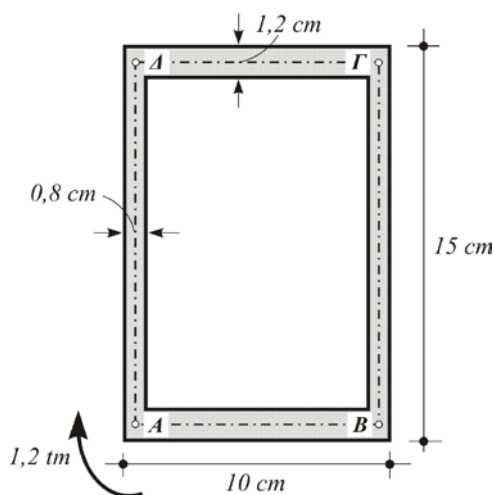
### Λύση

Σύμφωνα με τον πρώτο τύπο του Bredt, οι μέγιστες διατμητικές τάσεις θα εμφανιστούν στις θέσεις της διατομής με το μικρότερο πάχος. Άρα θα είναι:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2t_{\min} F_m} = \frac{120.000}{2 \cdot 0,8 \cdot (9,2 \cdot 13,8)} = 591 \text{ kp/cm}^2.$$

Από το δεύτερο τύπο του Bredt (σχέση ζ), υπολογίζουμε πρώτα το  $\int_s \frac{dS}{t}$ .

$$\int_s \frac{dS}{t} = 2 \int_{AB} \frac{dS}{1,2} + 2 \int_{B\Gamma} \frac{dS}{0,8} = \frac{2}{1,2} [S]_{AB} + \frac{2}{0,8} [S]_{B\Gamma} = \frac{2}{1,2} 9,2 + \frac{2}{0,8} 13,8 = 49,83$$



Σχ. 5.6.2

Επομένως:

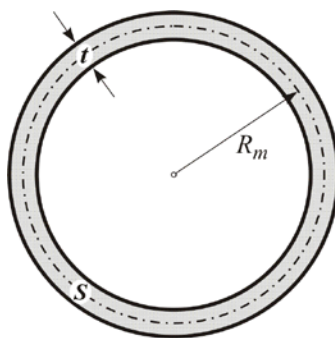
$$\theta_1 = \frac{M_t}{4G \cdot F_m^2} \cdot 49,83 = \frac{120.000 \cdot 49,83}{4 \cdot 825.000 \cdot (9,2 \cdot 13,8)^2} = 1,124 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm.}$$

Άρα:  $\varphi = \theta_1 \cdot l = 1,124 \cdot 10^{-4} \cdot 150 = 0,017 \text{ rad}$

ή  $\varphi^\circ = \frac{180}{\pi} \varphi = 0,97^\circ$ .

## 7 – Στρέψη ράβδων με λεπτή σωληνωτή διατομή

Η στρεπτική καταπόνηση των ράβδων αυτού του είδους, οι οποίες συμβαίνει να εμφανίζονται συχνότερα στην πράξη, αποτελεί ειδική περίπτωση εκείνης που εξετάσαμε ήδη στην προηγούμενη παράγραφο.



Σχ. 5.7

Εδώ οι διατμητικές τάσεις έχουν σταθερή τιμή, αφού το πάχος  $t$  είναι πολύ μικρό και εφάπτονται της γραμμής  $s$ , δηλαδή της διατομής.

Ο προσδιορισμός τους, που είναι ανάλογος με τον προηγούμενο, οδηγεί στη σχέση:

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi \cdot R_m^2 \cdot t}$$

Επίσης, η ανηγμένη γωνία στροφής είναι:

$$\theta_1 = \frac{M_t}{2\pi \cdot G \cdot R_m^3 \cdot t}$$

Επισημαίνεται ότι η περίπτωση αυτή διαφέρει από εκείνη των ράβδων δακτυλιοειδούς διατομής (ακτίνων  $R, r$ ) όπου:

$$J_p = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

$$W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{2J_p}{D} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

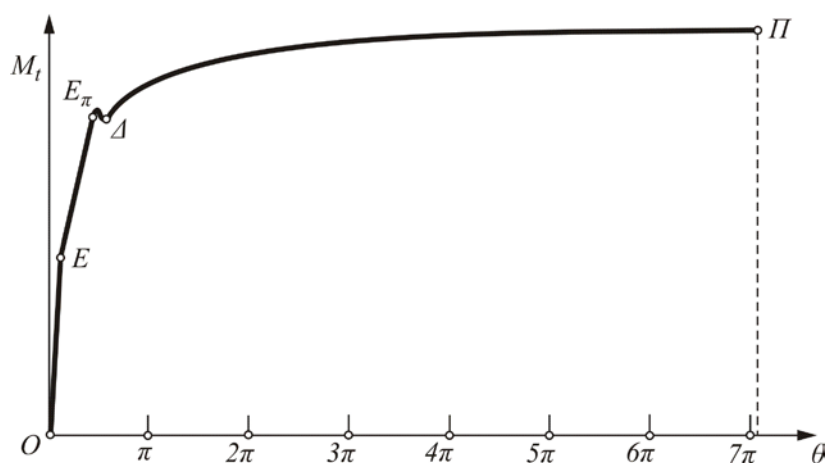
και συνεπώς:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \quad \text{και} \quad \theta_1 = \frac{M_t}{G J_p}.$$

## 8 – Το πείραμα της στρέψης

Στο πείραμα του εφελκυσμού, οι μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η επιμήκυνση του δοκιμίου και η εφελκυστική του δύναμη. Με σκέψεις αντίστοιχες και για το πείραμα της στρέψης, τα μεγέθη που θα χρησιμοποιηθούν είναι η γωνία στροφής των ακραίων διατομών και η ροπή στρέψης.

Αν λοιπόν σε μια μηχανή στρέψης καταπονήσουμε ένα κυλινδρικό δοκίμιο σε καθαρή στρέψη, παρατηρούμε στην αρχή ότι η αύξηση της στρεπτικής ροπής, που είναι ανάλογη προς τη γωνία στροφής, παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, ακόμα και με πολύ μικρές τιμές της παραμόρφωσης στρέψης. Αν στην περιοχή αυτή μετά από κάποια φόρτιση αποφορτίσουμε το δοκίμιο, παρατηρούμε ότι αυτό επανέρχεται στην αρχική του θέση και συνεπώς συμπεριφέρεται σαν ελατήριο.



Σχ. 5.8.1

Διάγραμμα στρέψης όγκιμου υλικού (χάλυβα St 37 I)

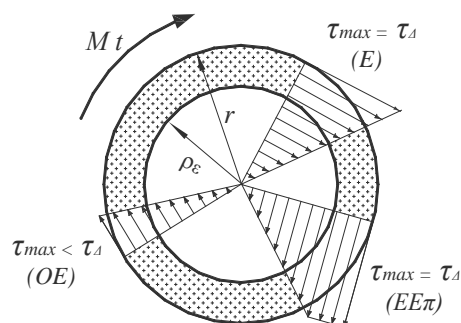
Η περιοχή αυτή, (OE), ονομάζεται **περιοχή ελαστικότητας** του υλικού και αντιστοιχεί στην περιοχή αναλογίας του πειράματος εφελκυσμού.

Αν λάβουμε υπόψη ότι η κατανομή των τάσεων στη διατομή της ράβδου δεν είναι ομοιόμορφη όπως στη δοκιμή εφελκυσμού, οι παραμορφώσεις που δημιουργούνται από τη στρέψη είναι ασήμαντες στην περιοχή αυτή και το διάγραμμα έχει τη μορφή μετακίνησης του καταγραφικού δείκτη σχεδόν κατά τον άξονα των τεταγμένων.

Η κατανομή των διατμητικών τάσεων κατά μήκος μιας ακτίνας στην περιοχή αυτή έχει τριγωνική μορφή, όπου η μέγιστη διατμητική τάση, που εμφανίζεται στην περιφέρεια,  $\tau_{max}$ , έχει τιμή **μικρότερη** της διατμητικής τάσης διαρροής  $\tau_{\Delta}$  του υλικού (περίπτωση ΟΕ του σχ. 5.8.2).

Καθώς αυξάνεται η γωνία στρέψης, συνεπώς και η  $M_t$ , αυξάνεται και η μέγιστη διατμητική τάση που εμφανίζεται στην περιφέρεια, μέχρι να **φτάσει** την τιμή της τάσης διαρροής  $\tau_{\Delta}$  του υλικού (σημείο Ε του σχ. 5.8.1 και περίπτωση Ε του σχ. 5.8.2), οπότε η κατανομή των διατμητικών τάσεων κατά μήκος μιας ακτίνας εξακολουθεί να είναι γραμμική.

Όμως μετά το σημείο Ε και εφ' όσον η γωνία στρέψης συνεχίζει να αυξάνεται, μικρή στρώση από τη διατομή, απ' έξω προς τα μέσα, αρχίζει να μπαίνει στην πλαστική περιοχή, με αποτέλεσμα, η μέγιστη διατμητική τάση,  $\tau_{max}$ , να διατηρεί σταθερή τιμή, ίση με  $\tau_{\Delta}$ , **μόνο στο πάχος της στρώσης**, μεταβαλλόμενη γραμμικά μέχρι μηδενισμού της για όλα τα εσωτερικότερα σημεία ως το κέντρο. Κατά το στάδιο αυτό η κατανομή των διατμητικών τάσεων κατά μήκος μιας ακτίνας γίνεται τραπεζοειδής, με την  $\tau_{max} = \tau_{\Delta}$ , να φτάνει μέχρι την εσωτερική περιφέρεια του δακτυλίου (περίπτωση ΕΕπ).



Σχ. 5.8.2

Με την αύξηση του φορτίου, ολοένα και παχύτερες στρώσεις της διατομής μπαίνουν στην πλαστική περιοχή, αναγκάζοντας τα σημεία τους να φορτίζονται με τη διατμητική τάση διαρροής.

Η νέα αυτή κατάσταση συνεχίζεται προοδευτικά μέχρις ότου ολόκληρη η διατομή περάσει στην πλαστική περιοχή (περιοχή ΕΕπ του σχ. 5.8.1), οπότε η κατανομή των διατμητικών τάσεων γίνεται πλέον ορθογωνική.

Κατά το στάδιο αυτό, η αύξηση της γωνιακής παραμόρφωσης προκαλεί ανάλογη αύξηση στο πλαστικό τμήμα της διατομής, το οποίο με τη σειρά του αυξάνει ανάλογα την εξωτερική ροπή στρέψης. Έτσι εξηγείται η ευθύγραμμη μορφή του τμήματος ΕΕπ του σχ. 5.8.1 που αντιστοιχεί στη νέα αυτή περιοχή, η οποία ονομάζεται **ελαστοπλαστική**, επειδή η διατομή του δοκιμίου αποτελεί ένα μίγμα ελαστικού και πλαστικού τμήματος.

Όμως η ευθεία ΕΕπ του σχ. 5.8.1, έχει διαφορετική κλίση απ' την ευθεία ΟΕ, με την οποία σχηματίζει στο Ε μικρή γωνία, που ονομάζεται **γόνυ**.

Με την ολοκλήρωση της πλαστικοποίησης της διατομής φθάνουμε στο χαρακτηριστικό σημείο του διαγράμματος Επ, το οποίο αντιστοιχεί στο **όριο διαρροής** του υλικού, και στην περίπτωση των μαλακών χαλύβων παρουσιάζεται πολύ καθαρό.

Όπως στο πείραμα του εφελκυσμού, έτσι και εδώ, το στρεπτικό φορτίο πέφτει από το ανώτερο όριο διαρροής, σχηματίζοντας κοιλότητα στην καμπύλη, που αντιστοιχεί στο κατώτερο όριο διαρροής Δ.

Συνεχίζοντας το πείραμα παρατηρούμε ότι εμφανίζονται μεγάλες γωνιακές παραμορφώσεις του υλικού με μικρή αύξηση της ροπής στρέψης, και τελικά, ύστερα από μερικές περιστροφές, το όγκιμο δοκίμιο σπάζει.

Ενώ στο διάγραμμα εφελκυσμού πριν από τη θραύση εμφανιζόταν η στένωση και συνεπώς η πτώση εφελκυστικού φορτίου σαν προειδοποίηση, εδώ δεν παρατηρείται καμιά προειδοποίηση πριν από τη θραύση.

Συσχετίζοντας τα διαγράμματα εφελκυσμού (Ε) και στρέψης (Σ), θα μπορούσαμε ν' αντιστοιχίσουμε την περιοχή αναλογίας του (Ε) με την περιοχή ελαστικότητας του (Σ), και την περιοχή ελαστικότητας του (Ε) με την ελαστοπλαστική περιοχή του (Σ).

## 9 – Ανελαστική δράση

Σε μια στρεπτικά καταπονούμενη ράβδο κυκλικής διατομής, η **ανελαστική δράση** ταυτίζεται με την εμφάνιση της ελαστοπλαστικής περιοχής στο πείραμα στρέψης.

Πραγματικά, μετά την παρουσία του γόνατος, το υλικό του δοκιμίου συμπεριφέρεται, μέχρι την ακτίνα  $\rho_E$  της διατομής (Σχ. 5.9), σαν ελαστικό, ακολουθώντας το νόμο του Hooke. Όμως αμέσως μετά, παραμορφώνεται χωρίς αύξηση της τάσης του, συμπεριφερόμενο σαν πλαστικό.

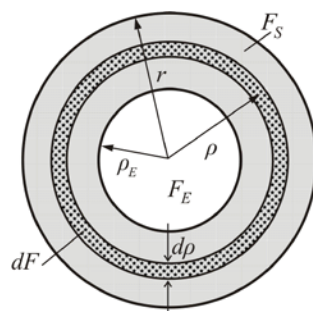
Και στην περίπτωση της ανελαστικής δράσης δεχόμαστε ότι ισχύουν οι παραδοχές 1 και 2 της ενότητας 2 αυτού του κεφαλαίου, που αφορούν την επιπεδότητα των διατομών και τη στροφή τους σαν σύνολο.

Ο υπολογισμός της στρεπτικής ροπής  $M_t$  θα γίνει χωριστά για το τμήμα  $F_E$  της διατομής με ακτίνα  $\rho_E$ , όπου ισχύει ο νόμος του Hooke και αντιστοιχεί ροπή  $M_E$  και χωριστά για τον υπόλοιπο δακτύλιο  $F_S$  της διατομής, όπου η τάση διατηρεί σταθερή τιμή  $\tau_{\max}$  και αντιστοιχεί ροπή  $M_S$ . Δηλαδή θα είναι:

$$M_t = M_E + M_S, \quad (\eta)$$

$$\text{όπου: } M_E = \frac{J_p \cdot \tau_{\max}}{\rho_E} = \frac{\pi \cdot \rho_E^3}{2} \cdot \tau_{\max} \cdot (\theta)$$

Η ροπή  $M_S$  υπολογίζεται αν λάβουμε υπόψη ότι σε στοιχειώδη επιφάνεια  $dF$  του δακτυλίου ενεργεί δύναμη  $\tau_{\max} \cdot dF$ , της οποίας η ροπή ως προς το κέντρο της διατομής είναι  $\rho \cdot \tau_{\max} \cdot dF$ .



Σχ. 5.9

Το άθροισμα των ροπών όλων των στοιχειωδών αυτών δυνάμεων θα είναι ίσο με την  $M_s$ . Δηλαδή θα είναι:

$$M_s = \int_{F_s} \rho \cdot \tau_{\max} \cdot dF = \tau_{\max} \cdot \int_{F_s} \rho \cdot dF \quad (\iota)$$

Αλλά  $dF = 2\pi\rho d\rho$ . Άρα

$$\int_{F_s} \rho \cdot dF = \int_{\rho_\epsilon}^r 2\pi\rho^2 d\rho = 2\pi \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho_\epsilon}^r = \frac{2\pi}{3} (r^3 - \rho_\epsilon^3)$$

και συνεπώς:

$$M_s = \frac{2\pi}{3} (r^3 - \rho_\epsilon^3) \tau_{\max} \quad (\kappa)$$

οπότε η σχέση (η) γίνεται τελικά:

$$M_t = \frac{\pi\rho_\epsilon^3}{2} \tau_{\max} + \frac{2\pi}{3} (r^3 - \rho_\epsilon^3) \tau_{\max} = \frac{\pi}{6} (4r^3 - \rho_\epsilon^3) \tau_{\max} \quad (\lambda)$$

Από την τελευταία σχέση εύκολα υπολογίζεται η  $\rho_\epsilon$  όταν δίνεται η  $M_t$ , ή η  $M_t$ , όταν δίνεται η  $\rho_\epsilon$ .

Αν όλα τα σημεία της διατομής εισέλθουν στην πλαστική περιοχή, οπότε η κατανομή των τάσεων κατά μήκος μιας ακτίνας γίνεται ορθογωνική με  $\tau_{\max} = \tau_s$  και  $\rho_\epsilon = 0$ , τότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$M_t = \frac{2}{3} \pi r^3 \tau_{\max}, \quad (\mu)$$

και εκφράζει τη ροπή που αντιστοιχεί σε εντελώς πλαστικοποιημένη διατομή, καλούμενη **ροπή διαρροής**.

Η στρεπτική ροπή  $M_{tE}$  που αντιστοιχεί στο τελευταίο σημείο της περιοχής ελαστικότητας E (γόνου του διαγράμματος), προκύπτει από τη σχέση (θ), όπου  $\rho_\epsilon = r$ , και είναι:

$$M_{tE} = \frac{1}{2} \pi r^3 \tau_{\max} \quad (\nu)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (μ) και (ν) διαπιστώνουμε ότι η αύξηση της στρεπτικής ροπής που εμφανίζεται σε όλο το στάδιο της πλαστικοποίησης της διατομής, είναι 33,33%.

Η ανηγμένη γωνία στροφής  $\theta_1$  δεν επηρεάζεται από το πλαστικοποιημένο τμήμα  $F_s$  της διατομής, αλλά καθορίζεται μόνο από το τμήμα  $F_e$ , και είναι:

$$\theta_1 = \frac{M_t}{GJ_p} = \frac{M_\varepsilon}{GJ_{p\varepsilon}} = \frac{2M_\varepsilon}{\pi\rho_\varepsilon^4 G}, \quad (\xi)$$

ή, λαμβάνοντας υπόψη τη ( $\theta$ ), 
$$\theta_1 = \frac{\tau_{\max}}{\rho_\varepsilon G}. \quad (\omicron)$$

### Παράδειγμα

Χαλύβδινη ράβδος μήκους 3 m και διαμέτρου 10 cm καταπονείται με στρεπτική ροπή  $M_t = 3 \text{ tm}$ . Αν η τάση διαρροής σε στρέψη είναι  $\tau_s = 1260 \text{ kp/cm}^2$ , να υπολογιστούν η  $\tau_{\max}$  και η  $\phi_{\text{ολ}}$ . Δίνεται  $G = 800.000 \text{ kp/cm}^2$ .

### Λύση

Αρχικά ελέγχουμε την κατάσταση της διατομής. Αν δηλαδή τμήμα της είναι πλαστικοποιημένο ή όχι. Η σχέση (14) της ενότητας 2<sup>α</sup>, σελ. 107, δίνει:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi r^3} = \frac{2 \cdot 300.000}{\pi \cdot 5^3} = 1.530 \text{ kp/cm}^2$$

Άρα ένα τμήμα της διατομής είναι πλαστικοποιημένο, καθώς η μέγιστη διατμητική τάση που θα εμφανιζόταν κανονικά είναι μεγαλύτερη από την τάση διαρροής ( $1.530 > 1.260$ ).

Η σχέση ( $\lambda$ ) γράφεται:

$$300.000 = \frac{\pi}{6} (4 \cdot 5^3 - \rho_\varepsilon^3) \cdot 1.260$$

από την οποία προκύπτει: 
$$\rho_\varepsilon^3 = 4 \cdot 5^3 - \frac{300.000 \cdot 6}{\pi \cdot 1.260},$$

ή τελικά 
$$\rho_\varepsilon = 3,6 \text{ cm}.$$

Η ανηγμένη γωνία στροφής υπολογίζεται από τη σχέση ( $\omicron$ ):

$$\theta_1 = \frac{1.260}{3,6 \cdot 800.000} = 0,00044 \text{ rad/cm}$$

και επομένως η γωνία στροφής  $\phi_{\text{ολ}}$  των ακραίων διατομών θα είναι:

$$\phi_{\text{ολ}} = \theta_1 \cdot l = 0,00044 \cdot 300 = 0,132 \text{ rad}$$

ή 
$$\phi_{\text{ολ}} = 7^\circ 33' 47''.$$

## 10 – Στατικά αόριστα προβλήματα

Ότι αναφέρθηκε στην ενότητα 9 του τρίτου κεφαλαίου για τα στατικά αόριστα προβλήματα του εφελκυσμού, ισχύει ανάλογα και στην περίπτωση της στρέψης.

Για τη λύση δηλαδή των προβλημάτων αυτών, χρειάζονται, πέρα από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας της στατικής, πρόσθετες συνθήκες **συμβιβαστού των παραμορφώσεων**, που προκαλούνται από τη στρεπτική καταπόνηση.



## Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup>

### Κάμψη

#### 1 – Γενικά

Στην ενότητα 3δ του πρώτου κεφαλαίου πήραμε μια γενική εικόνα της κάμψης, σαν καταπόνηση. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε ειδικότερα με τις τάσεις που αναπτύσσονται σε μια καμπτόμενη δοκό και τον υπολογισμό τους, έτσι ώστε να μπορούμε σε κάθε περίπτωση να ελέγχουμε την αντοχή και παραμόρφωση της δοκού κάτω από συγκεκριμένη φόρτιση, τη φορτοϊκανότητά της ή τη διαστασιολόγηση της διατομής της.

Πριν όμως ασχοληθούμε με οτιδήποτε για τις τάσεις, θα αναφερθούμε με κάθε σαφήνεια και συντομία σε ορισμένες βασικές έννοιες της Στατικής, οι οποίες, αν και γνωστές, θεωρούνται απαραίτητες για τη στήριξη των γνώσεων που απαιτούνται στο πρόβλημα της κάμψης.

## 2 – Η δοκός σαν φορέας

Η έννοια του φορέα, σαν κατασκευή που φέρει εξωτερικά φορτία και τα μεταφέρει με ασφάλεια στις στηρίξεις του, είναι γενική και αναφέρεται σε όλα τα στερεά σώματα που ισορροπούν κάτω από την επίδραση φορτίων. Οι φορείς, ανάλογα με τη μορφή τους, μπορεί να είναι:

**A. Επίπεδοι**, που είναι σώματα σταθερού ή μεταβλητού, πάντως μικρού πάχους και απλώνονται σε επίπεδη επιφάνεια. Ανάλογα με τη διεύ-θυνση των φορτίων που δρουν εξωτερικά, οι επίπεδοι φορείς διακρίνονται:

1. Στους **δίσκους** όπου τα εξωτερικά φορτία **κείνται** στο επίπεδο του φορέα και
2. Στις **πλάκες** όπου τα εξωτερικά φορτία είναι **κάθετα** στο επίπεδο του φορέα.

**B. Γραμμικοί**, που είναι σώματα σταθερής ή μεταβλητής διατομής, της οποίας το κεντροειδές γράφει οποιαδήποτε **επίπεδη** γραμμή που ονομάζεται **άξονας**. Οι γραμμικοί φορείς, ανάλογα με τη μορφή που έχει ο άξονάς τους διακρίνονται:

1. Στους **ευθύγραμμους**, όταν ο άξονας είναι ευθεία γραμμή
2. Στους **τοξωτούς**, όταν ο άξονας είναι κυκλικό, παραβολικό ή γενικά καμπύλο **τόξο**,
3. Στους **πλαισιωτούς**, όταν ο άξονας είναι **τεθλασμένη** ευθεία και
4. Στους **σύνθετους** όταν ο άξονας έχει σύνθετη μορφή, με περισσότερες της μιας από τις παραπάνω περιπτώσεις.

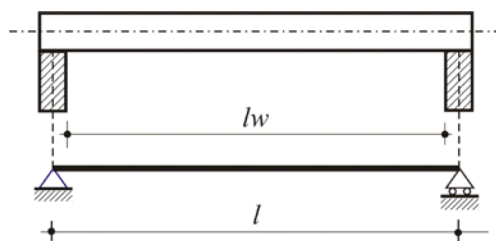
Η έννοια της **δοκού**, που θα μας απασχολήσει παρακάτω, ταυτίζεται με τους ευθύγραμμους γραμμικούς φορείς (περίπτ. Β1) και είναι κατασκευαστικό στοιχείο που μπορεί να φέρει εξωτερικά φορτία οποιασδήποτε μορφής.

Η απλούστερη δοκός αποτελείται από μια πρισματική ράβδο, που στηρίζεται στα άκρα της ελεύθερα πάνω σε δύο στηρίγματα.

Στην πραγματικότητα η δοκός δεν μπορεί να νοηθεί χωρίς πάχος, αλλά ούτε και τα στηρίγματα χωρίς έκταση. Στη θεωρία όμως, μας είναι αρκετό να θεωρούμε

τη δοκό μεν σαν ευθύγραμμο τμήμα που ταυτίζεται με τον άξονά της, ενώ τα στηρίγματά της σαν γεωμετρικά σημεία.

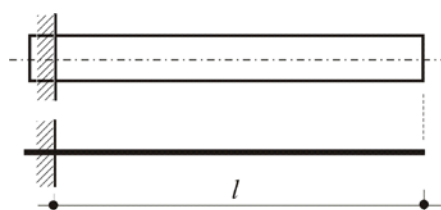
Έτσι φθάνουμε στην εξιδανικευμένη μορφή της **απλής αμφιέριστης δοκού**. Ακόμα υποθέτουμε ότι το ένα στηρίγμα της δοκού είναι αμετάθετο, ενώ το άλλο μπορεί να μετακινηθεί στην επιφάνεια στήριξης χωρίς τριβές.



Σχ. 6.2.1

Η απόσταση ανάμεσα στα δύο στηρίγματα της δοκού ονομάζεται **θεωρητικό άνοιγμα** και συμβολίζεται με  $l$  για να διακρίνεται από το **ελεύθερο** άνοιγμα  $l_w$  που παριστάνει την εσωτερική απόσταση ανάμεσα από τους τοίχους στήριξης.

Ένα άλλο είδος δοκού είναι ο **πρόβολος**. Αποτελείται από μια ράβδο της οποίας το ένα άκρο είναι καλά εντοιχισμένο, ενώ το άλλο της άκρο είναι ελεύθερο. Το μήκος που προεξέχει είναι το μήκος  $l$  του προβόλου.



Σχ. 6.2.2

Η απλή αμφιέριστη δοκός μπορεί να φέρει πρόβολο προς τα αριστερά ή δεξιά οπότε λέγεται **(μονο)προέχουσα**.

Επίσης μπορεί να φέρει πρόβολο και από τα δύο μέρη, οπότε λέγεται **αμφιπροέχουσα**.

Αν η δοκός εκτείνεται χωρίς διακοπή πάνω από πολλά στηρίγματα, τότε λέγεται **συνεχής**.

Μερικές φορές η συνέχεια διακόπτεται με αρθρώσεις σε κατάλληλες θέσεις και αριθμό, οπότε η δοκός ονομάζεται **αρθρωτή** ή **δοκός Gerber**.

Τέλος το σώμα των δοκών, άλλοτε είναι **συμπαγές**, όπως π.χ. το σώμα μιας δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα, άλλοτε είναι **δικτυωτό**, δηλαδή αποτελείται από πολλές ράβδους στο ίδιο επίπεδο που συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους. Γι' αυτό οι πρώτες ονομάζονται **ολόσωμοι** δοκοί ενώ οι δεύτερες **δικτυωτές**.

Σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις δοκών ή φορέων, ο προσδιορισμός των τάσεων που είναι αποτέλεσμα εσωτερικών δυνάμεων, είναι αντικείμενο μελέτης της Αντοχής των Υλικών και μπορεί να γίνει μόνο αν ληφθούν υπόψη και οι παραμορφώσεις του σώματος.

Αντίθετα ο προσδιορισμός της **συνισταμένης** των τάσεων, που γίνεται πριν από τον υπολογισμό των τάσεων, αποτελεί πρόβλημα της Δομικής Στατικής και γίνεται με τη βοήθεια των στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας σε αποτεμνόμενο τμήμα του σώματος. Στις περιπτώσεις αυτές ο φορέας ονομάζεται **εσωτερικά στατικά ορισμένος**.

Όταν όμως οι τρεις γνωστές στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για τον προσδιορισμό των εξωτερικών αντιδράσεων, τότε ο φορέας ονομάζεται **εξωτερικά στατικά ορισμένος**.

Αν τώρα ένας φορέας είναι και εσωτερικά και εξωτερικά στατικά ορισμένος, τότε ονομάζεται απλά **στατικά ορισμένος** ή **ισοστατικός**.

Επειδή οι περισσότεροι φορείς είναι εσωτερικά στατικά ορισμένοι, θεωρούμε έναν φορέα σαν ισοστατικό όταν το πλήθος των αντιδράσεων του δεν ξεπερνά τον αριθμό 3 που είναι οι στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας.

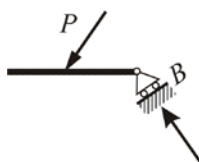
Στην αντίθετη περίπτωση, ο φορέας ονομάζεται **υπερστατικός** με **βαθμό στατικής αοριστίας** τον αριθμό  $\nu = \alpha - 3$  ( $\alpha$  = πλήθος αντιδράσεων).

### 3 – Οι στηρίξεις

Για τη στήριξη μιας δοκού είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω είδη στηρίξεων.

#### 1. Ελεύθερη έδραση ή κύλιση.

Το σημείο στήριξης είναι ελεύθερο να κινείται σε επίπεδη ή άλλη επιφάνεια χωρίς τριβές, επιτρέποντας την περιστροφή του φορέα στο επίπεδο φόρτισης.



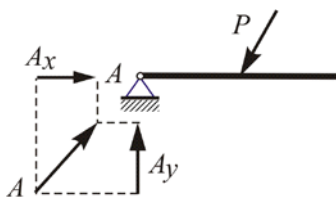
Σχ. 6.3.1

Η αντίδραση είναι δύναμη που περνάει από το σημείο στήριξης, κάθετα στην επιφάνεια κύλισης, επειδή κατά τη διεύθυνση αυτή **αποκλείεται** η μετακίνηση του σημείου στήριξης.

Οι μετατοπίσεις που γίνονται στο επίπεδο κύλισης είναι γενικά πολύ μικρές και οφείλονται στις αναπόφευκτες παραμορφώσεις της δοκού από φορτία ή θερμοκρασιακές μεταβολές.

#### 2. Άρθρωση

Εδώ το σημείο στήριξης συνδέεται μόνιμα με το έδαφος ή άλλο στερεό σύστημα, μέσω άρθρωσης που επιτρέπει μόνο την ελεύθερη στροφή της δοκού πάνω στο επίπεδο φόρτισης, αποκλείοντας κάθε μετατόπιση, είτε κατά την οριζόντια είτε κατά την κατακόρυφη έννοια.

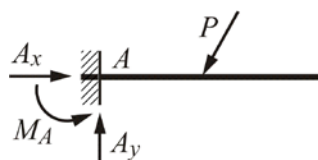


Σχ. 6.3.2

Και επειδή η άγνωστη κατά μέτρο αντίδραση  $A$ , που περνάει από την άρθρωση, μπορεί να έχει μια οποιαδήποτε διεύθυνση (δεύτερο άγνωστο στοιχείο), γι' αυτό και αναλύεται ουσιαστικά σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα  $A_x$  και  $A_y$ . Έτσι έχουμε πάλι δύο αγνώστους, με απλούστερη όμως μορφή.

### 3. Πάκτωση

Η στήριξη αυτού του είδους, δεν επιτρέπει καμιά στροφή ή μετακίνηση στο άκρο της δοκού.



Σχ. 6.3.3

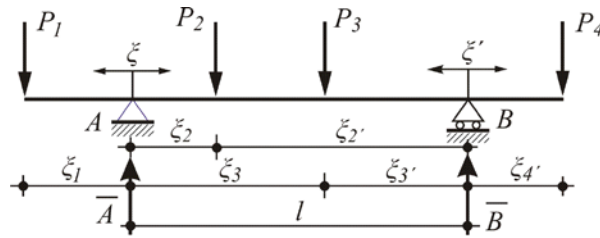
Έτσι, για τις αντιδράσεις, πέρα από την  $A_x$  και  $A_y$  που συναντήσαμε στην άρθρωση, εμφανίζεται εδώ και η αντίδραση ροπή  $M_A$ , που οφείλεται στον αποκλεισμό περιστροφής του φορέα γύρω από το  $A$ .

## 4 – Εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις

Όταν μια δοκός βρίσκεται κάτω από την ενέργεια διαφόρων φορτίων, τότε τα σημεία στήριξης μεταφέρουν στο έδαφος ορισμένες δυνάμεις. Αλλά τότε, σύμφωνα με την αρχή της αλληλεπίδρασης, και το έδαφος ασκεί στη δοκό δυνάμεις αντίθετες, που τις ονομάζουμε **αντιδράσεις**.

**1.** Θεωρούμε τη δοκό του επομένου σχήματος που φορτίζεται με φορτία  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4 \dots$ ) κάθετα στον άξονά της.

Οι αντιδράσεις  $\bar{A}$  και  $\bar{B}$ , που θα είναι επίσης κάθετες στον άξονα, προσδιορίζονται, όπως είναι γνωστό και από τη Στατική, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών προς τη στήριξη  $A$  ή  $B$ . Ορίζοντας συνεπώς ως θετικές τις ροπές εκείνες που προκύπτουν από δεξιόστροφη περιστροφή της δύναμης ως προς τη στήριξη και αρνητικές τις αντίθετες, αν  $\xi_i$  και  $\xi_i'$  είναι οι αποστάσεις της τυχαίας δύναμης  $P_i$  από τη στήριξη  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε θα είναι:



Σχ. 6.4.1

$$(\Sigma M)_A^{+\downarrow} = 0 \Rightarrow -P_1\xi_1 + P_2\xi_2 + P_3\xi_3 + P_4\xi_4 - B \cdot l = 0 \Rightarrow \Sigma P_i\xi_i = \bar{B} \cdot l$$

$$(\Sigma M)_B^{+\downarrow} = 0 \Rightarrow -P_1\xi'_1 - P_2\xi'_2 - P_3\xi'_3 + P_4\xi'_4 + A \cdot l = 0 \Rightarrow \Sigma P_i\xi'_i = -\bar{A} \cdot l.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι τιμές των αντιδράσεων,

$$\bar{A} = \frac{1}{l} \Sigma P_i\xi'_i, \quad \bar{B} = -\frac{1}{l} \Sigma P_i\xi_i \quad (1)$$

Η συνθήκη μηδενισμού των κατακόρυφων προβολών των δυνάμεων  $\Sigma y^{\uparrow+} = 0$ , θα δώσει τώρα τη σχέση

$$\bar{A} + \bar{B} = \Sigma P_i$$

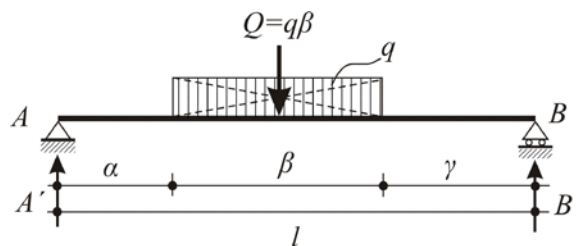
που χρησιμεύει μόνο για επαλήθευση.

**2.** Τα φορτία που θεωρήσαμε ως τώρα είναι συγκεντρωμένα, δηλαδή έχουν ένα ορισμένο σημείο εφαρμογής. Είναι όμως δυνατόν τα φορτία να μη συγκεντρώνουν τη δράση τους σε ένα μόνο σημείο αλλά να εκτείνονται συνεχώς σ' όλη τη δοκό ή ένα μόνο τμήμα της, κατακόρυφα.

Ένα τέτοιο φορτίο ορίζεται αν γνωρίζουμε την τιμή του  $q$  ανά μονάδα μήκους. Έτσι λέμε π.χ. ότι σε μια δοκό ενεργεί φορτίο συνεχές και ομοιόμορφο ή απλά ομοιόμορφο ίσο με  $2\text{N/m}$ , που σημαίνει ότι σε μήκος ενός μέτρου, συσσωρεύεται φορτίο  $2\text{N}$ , το οποίο θεωρείται ότι ενεργεί στο μέσον του μήκους του.

Γραφικά παριστάνεται με ένα ορθογώνιο του οποίου η βάση είναι το φορτιζόμενο μήκος, ενώ το ύψος του, με μια κλίμακα δυνάμεων, είναι η ανά μονάδα μήκους τιμή του φορτίου που ονομάζεται ένταση.

Θεωρούμε τη δοκό του σχήματος, όπου το ομοιόμορφο φορτίο, έντασης  $q$ , ενεργεί ασύμμετρα σε ένα τμήμα της δοκού.



Σχ. 6.4.2

Οι αντιδράσεις  $A'$  και  $B'$ , άνισες και κάθετες στον οριζόντιο άξονα της δοκού, θα προσδιοριστούν με το σκεπτικό της προηγούμενης παραγράφου, αφού

πρώτα μετατραπεί το συνεχές φορτίο σε συγκεντρωμένο, με ένταση  $Q = q\beta$  και φορέα κατακόρυφο που περνάει από το κεντροειδές της επιφάνειας φόρτισης. Έτσι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1), έχουμε:

$$(\Sigma M)_B^{\uparrow, \downarrow} = 0 \Rightarrow -Q\xi' + A'l = 0 \Rightarrow A' = Q\frac{\xi'}{l} = q\beta\frac{\gamma + \beta/2}{l},$$

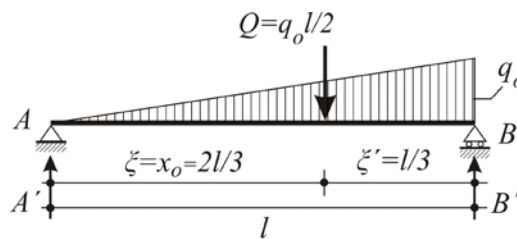
$$(\Sigma M)_A^{\uparrow, \downarrow} = 0 \Rightarrow Q\xi - B'l = 0 \Rightarrow B' = Q\frac{\xi}{l} = q\beta\frac{a + \beta/2}{l}.$$

**3.** Όταν το φορτίο είναι συνεχές αλλά όχι ομοιόμορφο, που σημαίνει ότι η ένταση του συνεχούς φορτίου δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού, τότε βρίσκουμε το εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης που εκφράζει τη συνισταμένη του συνεχούς φορτίου σε ένταση και στη συνέχεια προσδιορίζουμε το κεντροειδές της επιφάνειας φόρτισης, από όπου περνάει ο φορέας της συνισταμένης.

Έτσι, αν  $Q$  είναι η ένταση της συνισταμένης (εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης) και  $x_0$  η απόσταση του φορέα της (κεντροειδές) από το αριστερό στήριγμα  $A$ , τότε θα είναι:

$$A' = Q\frac{l-x_0}{l}, \quad B' = Q\frac{x_0}{l}$$

Έστω π.χ. η δοκός  $AB$  του παρακάτω σχήματος, η οποία φορτίζεται με συνεχές τριγωνικό φορτίο, το οποίο έχει ακραία τιμή στο στήριγμα  $B$ ,  $q_0$ .



Σχ. 6.4.3

Η συνισταμένη,  $Q$ , του φορτίου αυτού, η οποία προφανώς περνάει από το κεντροειδές της τριγωνικής επιφάνειας φόρτισης, θα έχει ένταση ίση προς εμβαδόν αυτής της επιφάνειας, δηλαδή:

$$Q = \frac{1}{2}q_0 l,$$

και θα απέχει από το  $A$  απόσταση που είναι ίση με τα  $2/3$  της βάσης του ορθογωνίου τριγώνου, δηλαδή  $2l/3$ .

Άρα οι αντιδράσεις θα είναι:

$$A' = \frac{Q\xi'}{l} = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{l}{3l} = \frac{q_0 l}{6} \text{ και}$$

$$B' = \frac{Q\xi}{l} = \frac{q_0 l}{3}.$$

**Σημείωση:** Αν στις παραπάνω περιπτώσεις εμφανιστούν σαν εξωτερικά φορτία και συγκεντρωμένες ροπές, τότε αυτές προστίθενται αλγεβρικά (ανάλογα με τη φορά τους) στις συνθήκες μηδενισμού των ροπών της παραγράφου 1, **χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η θέση εφαρμογής τους.**

## 5 – Τα φορτία διατομής

Η δοκός σαν κατασκευαστικό στοιχείο συναντάται πάρα πολύ συχνά στην πράξη. Μπορεί να πάρει δυνάμεις και κατά τη διεύθυνση του άξονά της και κάθετα σ' αυτόν. Μπορεί δηλαδή να ενταθεί όχι μόνο αξονικά, αλλά τμητικά, καμπτικά, ακόμα και στρεπτικά, δηλαδή σύνθετα.

Η παρουσία των εξωτερικών φορτίων, εφ' όσον αυτά βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που περιέχει και τον άξονα της δοκού, έχει σαν συνέπεια, την εμφάνιση σε τυχούσα διατομή της, τριών γενικά εντατικών μεγεθών, τα οποία ονομάζονται **φορτία διατομής**. Τα φορτία διατομής, τα οποία συμβολίζονται αντίστοιχα με τα γράμματα **N, Q, M**, είναι:

1. Η αξονική ή ορθή δύναμη (N)
2. Η τέμνουσα δύναμη (Q) και
3. Η ροπή κάμψης ή καμπτική ροπή (M)

Αν υπολογίσουμε τα N, Q, M σε κάθε διατομή του φορέα, και, με κάποια κλίμακα, σχεδιάσουμε τις τεταγμένες των τιμών τους κατά μήκος του φορέα, θα πάρουμε τότε τα αντίστοιχα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών (N), (Q), (M).

Αν ο φορέας είναι στο χώρο, τότε εκτός από την καμπτική ροπή σε τυχούσα διατομή, εμφανίζεται και ροπή στρέψης  $M_t$ .

Για να γνωρίσουμε τα φορτία διατομής θεωρούμε την αμφιέριστη δοκό του σχήματος που φορτίζεται στο μέσον της με φορτίο  $P\sqrt{2}$  υπό γωνία  $45^\circ$ .

Αν αναλύσουμε την  $P\sqrt{2}$  σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα, κάθε μία ίση με P, μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τις αντιδράσεις, χρησιμοποιώντας τις τρεις γνωστές στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας.

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow} = 0 \Rightarrow P \cdot 2a - B \cdot 4a = 0 \Rightarrow B = \frac{P}{2},$$

$$\Sigma y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow A_y - P + \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{P}{2},$$

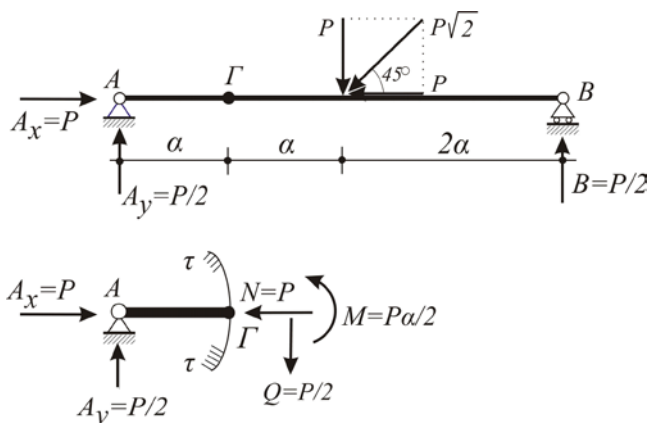
$$\Sigma x^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow A_x - P = 0 \Rightarrow A_x = P.$$

Τις παραπάνω τιμές των αντιδράσεων επαληθεύουμε με τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών, ως προς μια άλλη διατομή, π.χ. τη Γ. Απομονώνοντας τώρα το τμήμα ΑΓ με την τομή ττ, ας εξετάσουμε την **ισορροπία** του.

Για να εξασφαλίσουμε το αμετακίνητο του τμήματος ΑΓ κατά την οριζόντια έννοια, έτσι ώστε να ισχύει γι' αυτό η συνθήκη  $\Sigma x^{\rightarrow} = 0$ , θα πρέπει στο κεντροειδές της διατομής Γ και κάθετα προς αυτή, να ασκηθεί μια δύναμη,  $N = P$ , ίση και αντίθετη της  $A_x = P$ .



Η δύναμη αυτή  $N$ , που ενεργεί στη διατομή παράλληλα προς τον άξονα του φορέα, δηλαδή αξονικά, είναι η **αξονική** ή **ορθή δύναμη**  $N$ .



Σχ. 6.5

Όμοια, για να εξασφαλίσουμε το αμετακίνητο του τμήματος ΑΓ κατά την κατακόρυφη έννοια ώστε να ισχύει γι' αυτό η συνθήκη  $\Sigma y^{\uparrow+} = 0$ , θα πρέπει, **πάντα στο κεντροειδές της διατομής Γ**, να τοποθετηθεί μια δύναμη  $Q = P/2$ , ίση και αντίθετη της  $A_y = P/2$ .

Η δύναμη αυτή  $Q$ , που ενεργεί κάθετα στον άξονα του φορέα δίνοντας την εντύπωση ότι τον τέμνει, είναι η **τέμνουσα δύναμη** ( $Q$ ).

Τέλος για να εξασφαλίσουμε το άστρεπτο του τμήματος ΑΓ, ώστε να ισχύει γι' αυτό η συνθήκη  $(\Sigma M)_G^{\downarrow+} = 0$ , θα πρέπει, στο κεντροειδές της διατομής Γ, να τοποθετηθεί ροπή  $M = P\alpha/2$ , ίση και αντίθετη με εκείνη, την οποία δημιουργεί στη διατομή (Γ) η αντίδραση  $A_y$ , που είναι  $M' = A_y \cdot \alpha = P \cdot \alpha/2$ .

Η ροπή αυτή  $M'$ , είναι η **ροπή κάμψης** ή **καμπτική ροπή** ( $M$ ).

## 6 – Σήμανση και υπολογισμός των $N$ , $Q$ , $M$ .

Για τον προσδιορισμό ενός εντατικού μεγέθους  $N$  ή  $Q$  ή  $M$  μιας διατομής υπολογίζεται **το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων** (εξωτερικών φορτίων και αντιδράσεων) που βρίσκονται **αριστερά** ή **δεξιά** της διατομής και επηρεάζουν το συγκεκριμένο μέγεθος.

Το κριτήριο για την από αριστερά ή δεξιά επιλογή, είναι ο μικρότερος αριθμός δυνάμεων ή ροπών αντίστοιχα που συμμετέχουν στον υπολογισμό.

Όταν σε μια **διατομή** του φορέα ασκείται σαν εξωτερικό φορτίο:

- συγκεντρωμένη **αξονική** δύναμη
- συγκεντρωμένη **τέμνουσα** δύναμη ή
- συγκεντρωμένη **ροπή**,

τότε **στη** διατομή αυτή, είναι **αδύνατος** αντίστοιχα ο υπολογισμός, της:

- αξονικής δύναμης  **$N$**
- τέμνουσας δύναμης  **$Q$**  και
- καμπτικής ροπής  **$M$** .

Στην περίπτωση αυτή ο προσδιορισμός του υπόψη εντατικού μεγέθους γίνεται για την **αριστερή** ή **δεξιά παρειά** (πλευρά) της διατομής, οπότε, μεταξύ των τιμών των δύο παρειών, παρουσιάζεται μία **διαφορά**, η οποία ισούται με την τιμή του **συγκεντρωμένου** φορτίου στη διατομή.

Το φαινόμενο αυτό, για το αντίστοιχο διάγραμμα (N), (Q) ή (M) είναι γνωστό σαν **άλμα**.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι για τον προσδιορισμό ενός εντατικού μεγέθους σε μια διατομή, θα πρέπει να καθοριστεί με σαφήνεια το πότε ένα εξωτερικό φορτίο (δύναμη ή συγκεντρωμένη ροπή), δίνει θετική ή αρνητική **τιμή** στο προσδιοριζόμενο εντατικό μέγεθος.

**Ανεξάρτητα** λοιπόν του αν η οποιαδήποτε δύναμη ή ροπή που **προκαλεί** ένα εντατικό μέγεθος βρίσκεται **αριστερά** ή **δεξιά** της διατομής ή παρειάς της:



Σχ. 6.6.1

1. Η αξονική δύναμη N που προκύπτει σε μια διατομή είναι **θετική** όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να **εφελκύσει** τη διατομή. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να τη θλίψει.



Σχ. 6.6.2

2. Η τέμνουσα δύναμη Q που προκύπτει σε μια διατομή είναι **θετική** όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να περιστραφεί **δεξιόστροφα** ως προς τη διατομή. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να περιστραφεί αριστερόστροφα.



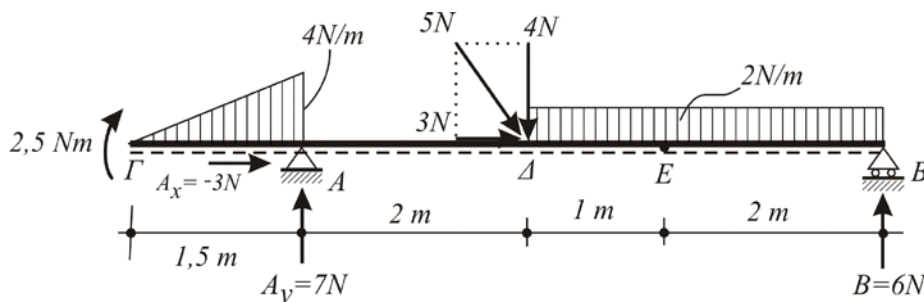
Σχ. 6.6.3

3. Η καμπτική ροπή M που προκύπτει σε μια διατομή είναι **θετική** όταν η δύναμη ή η συγκεντρωμένη ροπή που την προκαλεί τείνει να **εφελκύσει την κάτω ίνα** του φορέα στη θέση της διατομής. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να την θλίψει.

Η κάτω ίνα του φορέα είναι γνωστή και σαν **θετικό όριο** και συμβολίζεται με διακεκομμένη γραμμή. Στην περίπτωση κατακόρυφου τμήματος του φορέα, η επιλογή του θετικού ορίου (προς τα αριστερά ή δεξιά) είναι αυθαίρετη.

## Παράδειγμα

Στη μονοπροέχουσα δοκό του σχήματος, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις A και B, καθώς και οι τιμές των N, Q, M στις διατομές Γ, Δ και Ε.



Σχ. 6.6.4

### Λύση

Οι αντιδράσεις θα προκύψουν από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας:

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 2,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3,5 - B \cdot 5 = 0 \Rightarrow B = 6 \text{ N}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 4 - 2 \cdot 3 + 6 = 0 \Rightarrow A_y = 7 \text{ N}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow A_x + 3 = 0 \Rightarrow A_x = -3 \text{ N}$$

Το αρνητικό πρόσημο της  $A_x$  δηλώνει ότι η **σωστή** φορά της  $A_x$  είναι **αντίθετη** από εκείνη που διαλέξαμε.

Προαιρετικά, μπορούμε να επαληθεύσουμε τις αντιδράσεις  $A_y$  και  $B$ , ή μόνον την  $A_y$ , παίρνοντας τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς τυχόν σημείο του άξονα του φορέα, ή τη στήριξη B αντίστοιχα.

$$(\Sigma M)_B^{\uparrow+} = 2,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 5,5 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0!$$

Διατομή Γ (δυνάμεις από αριστερά)

Λόγω της **συγκεντρωμένης ροπής** στη διατομή, θα διακρίνουμε διαφορετικές τιμές στις παρειές της μόνο για την **καμπτική ροπή**, οπότε θα έχουμε:

$$N = 0$$

$$Q = 0$$

$$M^{\text{αρ}} = 0$$

$$M^{\delta\epsilon\epsilon} = + 2,5 \text{ Nm}$$

Διατομή Δ (δυνάμεις από δεξιά)

Λόγω **συγκεντρωμένης οριζόντιας και κατακόρυφης** δύναμης στη διατομή, θα διακρίνουμε διαφορετικές τιμές στις παρειές της μόνο για την **αξονική** και την **τέμνουσα** δύναμη, οπότε θα έχουμε:

$$N^{\text{αρ}} = + 3 \text{ N}$$

$$N^{\delta\epsilon\epsilon} = 0$$

$$Q^{\text{αρ}} = 4 + 2 \cdot 3 - 6 = + 4 \text{ N}$$

$$Q^{\delta\epsilon\xi} = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$M = -2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 6 \cdot 3 = +9 \text{ Nm}$$

Διατομή E (δυνάμεις από δεξιά)

Εδώ δεν γίνεται διάκριση τιμών στις παρειές της διατομής για κανένα εντατικό μέγεθος, επειδή δεν εμφανίζεται ούτε συγκεντρωμένη ροπή, ούτε οριζόντια ή κατακόρυφη δύναμη.

Το συνεχές φορτίο στη διατομή δεν είναι συγκεντρωμένη δύναμη, διότι το εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης που αντιστοιχεί στη διατομή θεωρείται μηδενικό. Άρα θα έχουμε:

$$N = 0$$

$$Q = 2 \cdot 2 - 6 = -2 \text{ N}$$

$$M = -2 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 8 \text{ Nm.}$$

## 7 – Βασικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών $q$ , $Q$ και $M$

Θεωρούμε ένα τμήμα μιας δοκού που φορτίζεται με συνεχή φόρτιση μεταβλητής έντασης  $q = q(x)$ .

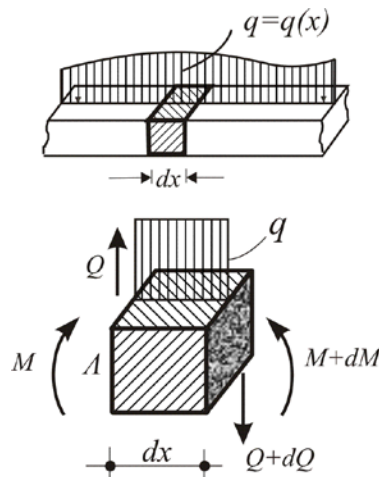
Αν αποκόψουμε από τη δοκό ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους  $dx$ , με δυο τομές κάθετες στον άξονά της, σε αποστάσεις  $x$  και  $x+dx$ , παρατηρούμε ότι στο τμήμα  $dx$  η ένταση της συνεχούς φόρτισης είναι σταθερή, έστω  $q$ .

Επίσης, αν  $Q$  και  $M$  είναι η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή στην αριστερή διατομή του τμήματος, τότε, στη δεξιά διατομή του, λόγω του ομοιόμορφου φορτίου που μεσολαβεί, τα αντίστοιχα μεγέθη θα εμφανιστούν με αντίθετες φορές, και τιμές, απειροελάχιστα διαφορετικές, έστω  $(Q + dQ)$  και  $(M + dM)$ .

Τώρα, στο στοιχειώδες τμήμα  $dx$  που ισορροπεί, η χρησιμοποίηση της συνθήκης μηδενισμού των κατακόρυφων δυνάμεων, δίνει:

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow Q - q \cdot dx - Q - dQ = 0$$

$$\text{ή} \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad (\text{i})$$



Σχ. 6.7

Επίσης, η συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς την αριστερή διατομή,  $\Lambda$ , του τμήματος, δίνει:

$$(\Sigma M)_{\Lambda}^{\downarrow+} = 0 \Rightarrow M + q \cdot dx \frac{dx}{2} + (Q + dQ)dx - M - dM = 0,$$

από την οποία, παραλείποντας τους όρους  $\frac{q \cdot dx^2}{2}$  και  $dQ \cdot dx$  σαν απειροστά ανώτερης τάξης, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (\text{ii})$$

Οι σχέσεις (i) και (ii) συνδυαζόμενες μεταξύ τους, δηλώνουν ότι:

**1.** Σε αφόρτιστη περιοχή της δοκού, όπου  $q = 0$ , η τέμνουσα δύναμη  $Q$ , σαν ολοκλήρωμα της  $q$ , έχει σταθερή τιμή, ενώ η καμπτική ροπή  $M$ , σαν ολοκλήρωμα της  $Q$ , μεταβάλλεται γραμμικά.

**2.** Σε περιοχή ή τμήμα της δοκού το οποίο φορτίζεται ομοιόμορφα, όπου  $q = \alpha = \text{σταθ.}$ , η  $Q$  μεταβάλλεται γραμμικά σε συνάρτηση του  $x$ , ενώ η  $M$  μεταβάλλεται παραβολικά.

**3.** Σε περιοχή της δοκού η οποία φορτίζεται γραμμικά (τριγωνική ή τραπεζοειδής φόρτιση), όπου  $q = \alpha x + \beta$ , η  $Q$  μεταβάλλεται παραβολικά σε συνάρτηση του  $x$ , ενώ η  $M$  μεταβάλλεται κατά καμπύλη 3ου βαθμού κ.ο.κ.

**Γενικά, αν η εξωτερική φόρτιση σε τμήμα της δοκού είναι συνάρτηση βαθμού  $n$ , τότε η τέμνουσα δύναμη που αντιστοιχεί στο ίδιο τμήμα είναι βαθμού  $n+1$ , ενώ η καμπτική ροπή  $n+2$ .**

**4.** Η καμπτική ροπή  $M$  παίρνει ακρότατη τιμή - και μάλιστα **μέγιστη** - όπου **μηδενίζεται** η τέμνουσα δύναμη  $Q$ .

**5.** Η  $M$  σε κάποια διατομή μπορεί να υπολογιστεί, αν στην τιμή της καμπτικής ροπής άλλης διατομής προσθέσουμε αλγεβρικά το εμβαδόν του διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων που μεσολαβεί ανάμεσα στις δυο διατομές. Πραγματικά, αν  $M_0$  είναι η καμπτική ροπή στη θέση  $x_0$  και  $M$  η αντίστοιχη στη θέση  $x$ , τότε η σχέση (ii), που γράφεται:

$$dM = Q \cdot dx,$$

μετά από ολοκλήρωση μεταξύ των τιμών  $x_0$  και  $x$ , δίνει:

$$\int_{M_0}^M dM = \int_{x_0}^x Q \cdot dx \quad \text{ή} \quad M - M_0 = \int_{x_0}^x Q \cdot dx,$$

$$\text{ή τελικά} \quad M = M_0 + \int_{x_0}^x Q \cdot dx$$

**6.** Η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης του διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων, ισούται με την τιμή της εξωτερικής φόρτισης  $q$  που βρίσκεται στην αντίστοιχη προς το σημείο διατομή του φορέα.

Εντελώς ανάλογα, η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης του διαγράμματος καμπτικών ροπών ( $M$ ), ισούται με την τιμή της τέμνουσας δύναμης  $Q$  που αντιστοιχεί στην ίδια με το σημείο διατομή του φορέα.

## 8 – Κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M

Η έννοια του διαγράμματος ενός εντατικού μεγέθους ταυτίζεται με τη γραφική παράσταση των τιμών που λαμβάνει το υπόψη εντατικό μέγεθος σε κάθε διατομή του φορέα.

Η γραφική αυτή παράσταση γίνεται σε ανάλογο προς τη μορφή του φορέα σύστημα αξόνων, με άξονα των τετμημένων ίσο και παράλληλο με τον άξονα του φορέα, ορίζοντας έτσι τις θέσεις των διατομών, ενώ οι τεταγμένες δίνουν τις αντίστοιχες τιμές του εντατικού μεγέθους.

Παραλείποντας το διάγραμμα (N) λόγω της ευκολίας που παρουσιάζει αλλά και της περιορισμένης χρησιμότητάς του, θ' αναφερθούμε στην κατασκευή των διαγραμμάτων (Q) και (M), η οποία μπορεί να γίνει:

- α) γραφικά με τη βοήθεια του σχοινοπολυγώνου και
- β) αναλυτικά με τη βοήθεια εξισώσεων.

Η πρώτη μέθοδος συναντιέται συνήθως μόνο στις περιπτώσεις όπου τα φορτία της δοκού είναι συγκεντρωμένα, χωρίς να εμφανίζεται συγκεντρωμένη ροπή. Αν υπάρχει συνεχές φορτίο, τότε αυτό χωρίζεται σε πολλά μικρότερα τμήματα, τα οποία θα αντικατασταθούν από συγκεντρωμένες δυνάμεις, των οποίων ο αριθμός είναι ανάλογος με την ακρίβεια που επιδιώκουμε.

Η δεύτερη μέθοδος, η οποία θα μας απασχολήσει κυρίως παρακάτω, καλύπτει κάθε μορφή ισοστατικής δοκού με οποιαδήποτε φόρτιση.

Τα βήματα που ακολουθούμε για την **κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M** με τη μέθοδο αυτή, είναι:

1. Χωρίζουμε τη δοκό σε τμήματα, με κριτήρια, την εμφάνιση
  - συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης (για το διάγραμμα Q), ή συγκεντρωμένης ροπής (για το διάγραμμα M),
  - αρχής ή τέλους ή άλματος στη συνεχή φόρτιση

Μ' άλλα λόγια, ο νόμος που εκφράζει τη μεταβολή της εξωτερικής φόρτισης, να είναι ο ίδιος σε όλο το τμήμα.

2. Ξεκινώντας από το πρώτο τμήμα, αποφασίζουμε για το **από πού** θα πάρουμε τις δυνάμεις (αριστερά ή δεξιά της τυχαίας διατομής) που επηρεάζουν το εντατικό μέγεθος Q ή M που μας ενδιαφέρει, διαλέγοντας για διευκόλυνση, το από εκεί όπου υπάρχει **μικρότερος** αριθμός δυνάμεων.

3. Για κάθε τμήμα που εξετάζουμε, ορίζουμε σε παρένθεση τα όρια α και δ (μέσα στα οποία μπορεί να βρίσκεται η τυχαία διατομή του), σαν αποστάσεις των άκρων του από το αριστερό ή δεξιό τέρμα της δοκού, αντίστοιχα προς το από πού πήραμε τις δυνάμεις (στο βήμα 2).

Στα όρια, το σύμβολο της **ισότητας** ισχύει μόνον όταν **δεν υπάρχει συγκεντρωμένο φορτίο** αντίστοιχο με το διάγραμμα που κατασκευάζουμε. Έτσι, αν π.χ. σε ένα όριο του τμήματος ευρίσκεται μια δύναμη ή αντίδραση, τότε εμφανίζεται σ' αυτό η **ανισότητα** για το διάγραμμα **Q**, ενώ για το διάγραμμα **M** εμφανίζεται η **ανισοϊσότητα**. Όταν τα όρια του τμήματος εξαρτώνται από το δεξιό

άκρο της δοκού, συνήθως αναγράφουμε μετά την ένδειξη 'από δεξ.', ενώ για το αριστερό άκρο δεν σημειώνουμε τίποτα.

4. Σχηματίζουμε τώρα, συναρτήσει του  $x$ , την εξίσωση που εκφράζει τη μεταβολή του εντατικού μεγέθους, παίρνοντας, **απ' τη διατομή και πέρα** μέχρι το αριστερό ή δεξιό **τέρμα** της δοκού, **όλες** τις:

- κατακόρυφες δυνάμεις και αντιδράσεις (για το διάγραμμα  $Q$ )
- συγκεντρωμένες ροπές και ροπές των δυνάμεων και αντιδράσεων **ως προς την τυχαία διατομή** (για το διάγραμμα  $M$ ).

5. Ελέγχουμε το βαθμό της εξίσωσης που προέκυψε για το εξεταζόμενο εντατικό μέγεθος, λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή της εξωτερικής φόρτισης στο τμήμα και τη σχέση (i) για  $Q$  ή (ii) για  $M$  της ενότητας 7).

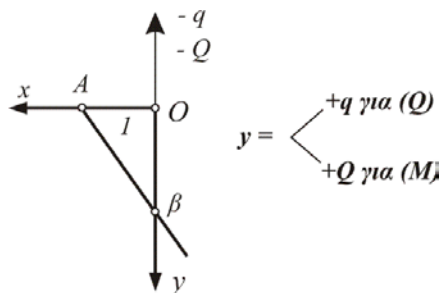
6. Θέτοντας ήδη στην εξίσωση, όπου  $x$ , τα όρια  $\alpha$  και  $\delta$ , προσδιορίζουμε τις τιμές του μεγέθους στα άκρα του τμήματος. Τις τιμές αυτές τοποθετούμε με κατάλληλη κλίμακα στις αντίστοιχες θέσεις του άξονα των τετμημένων, που σχεδιάσαμε ήδη, για την κατασκευή του διαγράμματος.

Αν η γραμμή που εκφράζει τη μεταβολή του μεγέθους είναι ευθεία, ενώνουμε τις τεταγμένες των άκρων της.

Αν όμως είναι καμπύλη, τότε συνεχίζουμε,

7. Κατασκευάζοντας τις εφαπτόμενες της καμπύλης (σκεπτικό 6 της ενότητας 7) στα χαρακτηριστικά σημεία, των οποίων προσδιορίσαμε ήδη τις τεταγμένες τους, σύμφωνα με τους παρακάτω τρόπους:

**α)** Σχεδιάζουμε το σύστημα αξόνων του σχήματος, που είναι το γνωστό μας Καρτεσιανό, αλλά με αντίθετες τις φορές των αξόνων.



Σχ. 6.8.1

Στον άξονα  $Ox$  παίρνουμε τμήμα  $OA$  ίσο με τη **μονάδα μήκους** του άξονα τετμημένων του διαγράμματος (που είναι σαν τον άξονα της δοκού). Στον άξονα  $Oy$ , θέτουμε, με την **κλίμακα τιμών του διαγράμματος που κατασκευάζουμε**, το μέγεθος π.χ.  $\beta$ :

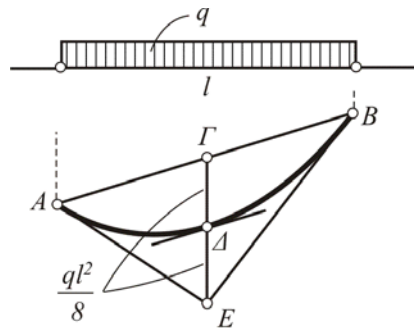
- της εξωτερικής φόρτισης  $q$  που αντιστοιχεί στην ίδια τετμημένη του χαρακτηριστικού σημείου (για διάγραμμα  $Q$ )
- της τέμνουσας δύναμης  $Q$  που αντιστοιχεί στην ίδια τετμημένη του χαρακτηριστικού σημείου (για διάγραμμα  $M$ )

Η  $A\beta$  εκφράζει τότε την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο χαρακτηριστικό σημείο του διαγράμματος.

Είναι ευκολονόητο, ότι στις διατομές όπου η  $q$  ή η  $Q$  είναι  $0$ , η εφαπτομένη του διαγράμματος ( $Q$ ) ή ( $M$ ) αντίστοιχα, είναι **οριζόντια**.

**β)** Για την κατασκευή του παραβολικού τμήματος που περνάει από δύο σημεία  $A, B$  του διαγράμματος ( $M$ ), όταν είναι γνωστό ότι το τμήμα  $l$  του φορέα που είναι ανάμεσα στα σημεία αυτά φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο  $q$  (όπως φαίνεται στο σχήμα 6.8.2), αν από το μέσο  $\Gamma$  της  $AB$  φέρουμε κατακόρυφα τμήματα

$$\Gamma\Delta = \Delta E = \frac{ql^2}{8},$$

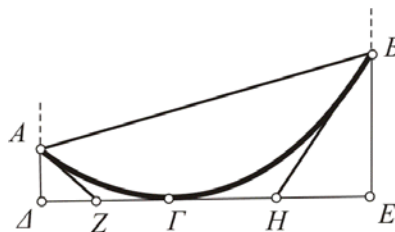


Σχ. 6.8.2

τότε η παραβολή περνάει από το σημείο  $\Delta$  και εφάπτεται των ευθειών:

- $AE$  στο  $A$ ,
- $BE$  στο  $B$  και
- της ευθείας που είναι παράλληλη προς την  $AB$  και περνάει από το  $\Delta$ .

**γ)** Αν είναι γνωστό ότι η παραπάνω παραβολή περνάει από τα σημεία  $A$  και  $B$  και ότι το  $\Gamma$  είναι ακρότατο της παραβολής, τότε η κατασκευή των εφαπτομένων στα  $A$  και  $B$  ακολουθεί τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα 6.8.3:



Σχ. 6.8.3

Από το  $\Gamma$  που είναι ακρότατο, φέρουμε οριζόντια ευθεία, η οποία τέμνεται από τις κατακόρυφες που περνούν από τα  $A$  και  $B$ , στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Αν  $Z$  και  $H$  είναι τα μέσα των οριζοντίων τμημάτων  $\Delta\Gamma$  και  $\Gamma E$ , τότε οι ευθείες  $AZ$  και  $BH$  είναι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.

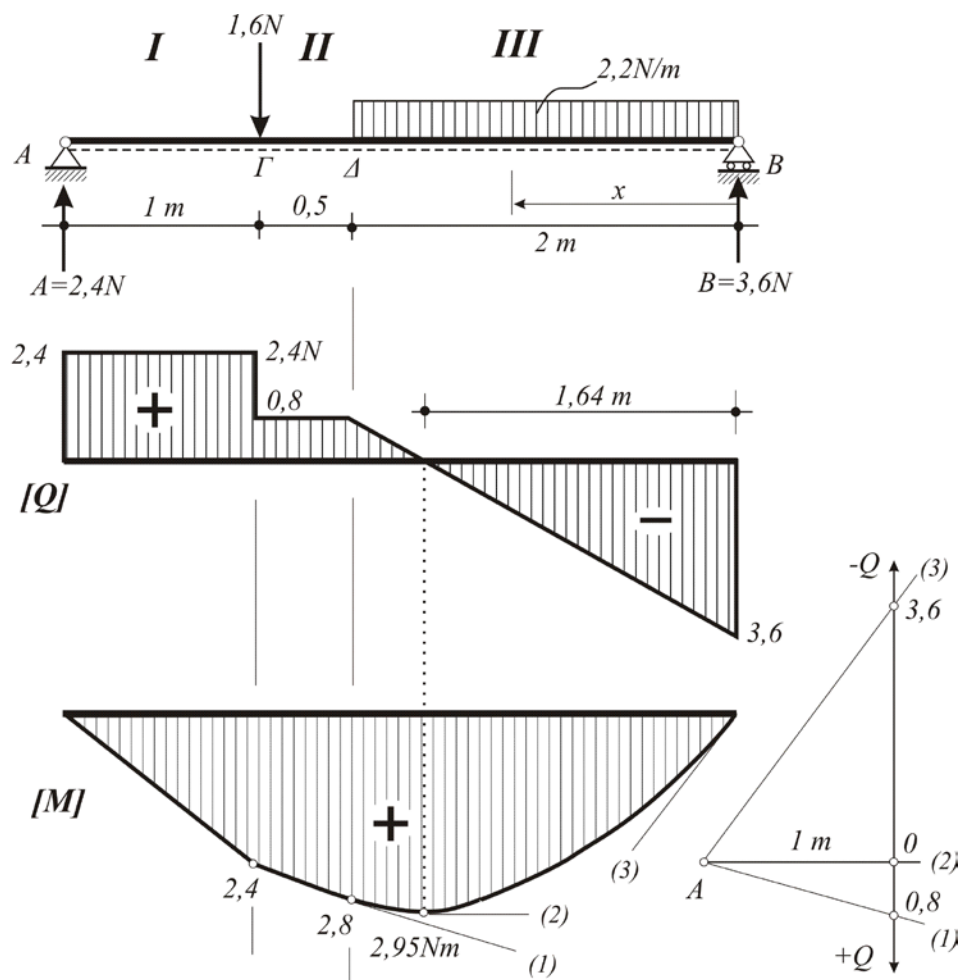
**Σημείωση:** Στα παραδείγματα κατασκευής των διαγραμμάτων  $Q$  και  $M$  που ακολουθούν γίνεται αυστηρή τήρηση των παραπάνω βημάτων. Έτσι θα αποφεύγονται επαναλαμβανόμενες επεξηγήσεις ή διευκρινήσεις στις επί μέρους εξισώσεις ή κατασκευές. Διευκρινήσεις θα δίνονται μόνον όταν, λόγω ιδιομορφίας κρίνεται απαραίτητο, έτσι ώστε να βοηθήσουν αποτελεσματικά στην κατανόηση των διαγραμμάτων από τους φοιτητές.



## 9 – Παραδείγματα

1

Της **αμφιέρειστης** δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M), με όλες τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.



Σχ. 6.9.1

### Λύση

#### Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 1,6 \cdot 1 + 2,2 \cdot 2 \cdot 2,5 - 3,5 \cdot B = 0 \Rightarrow \mathbf{B = 3,6 \text{ N.}}$$

$$\Sigma Y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 1,6 - 2,2 \cdot 2 + 3,6 = 0 \Rightarrow \mathbf{A = 2,4 \text{ N.}}$$

Επαλήθευση αντιδράσεων

$$(\Sigma M)_\Delta^{\uparrow+} = 2,4 \cdot 1,5 - 1,6 \cdot 0,5 + 2,2 \cdot 2 \cdot 1 - 3,6 \cdot 2 = 0!$$

#### Διάγραμμα Q

Τμήμα I ( $0 < x < 1$ )

$$Q_1 = 2,4 \text{ N}$$

Τμήμα II ( $1 < x \leq 1,5$ )

$$Q_{II} = 2,4 - 1,6 = 0,8 \text{ N σταθ.}$$

Τμήμα III ( $0 < x \leq 2$ ) από δεξ.

$$Q_{III} = 2,2x - 3,6$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{\text{αρ}} = -3,6 \text{ N,}$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_{\Delta} = 0,8 \text{ N.}$$

Μετά την παρατήρηση ότι η τέμνουσα δύναμη  $Q$  στο τμήμα III **αλλάζει πρόσημο**, βρίσκουμε τη θέση μηδενισμού της, επειδή αυτή θα μας χρειαστεί για τον προσδιορισμό της μέγιστης καμπτικής ροπής,  $M_{\max}$ , στο τμήμα αυτό, που είναι βασικής σημασίας. Είναι λοιπόν:

$$Q_{III} = 0, \text{ για } 2,2x - 3,6 = 0 \Rightarrow x = 1,64 \text{ m.}$$

Διάγραμμα MΤμήμα I ( $0 \leq x \leq 1$ )

$$M_I = 2,4x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A = 0,$$

$$x = 1 \Rightarrow M_{\Gamma} = 2,4 \text{ Nm.}$$

Τμήμα II ( $1 \leq x \leq 1,5$ )

$$M_{II} = 2,4x - 1,6(x - 1).$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow M_{\Gamma} = 2,4 \text{ Nm,}$$

$$x = 1,5 \Rightarrow M_{\Delta} = 2,8 \text{ Nm.}$$

Τμήμα III ( $0 \leq x \leq 2$ ) από δεξ.

$$M_{III} = 3,6x - 2,2 \cdot x \cdot x / 2 = 3,6x - 1,1x^2$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_B = 0,$$

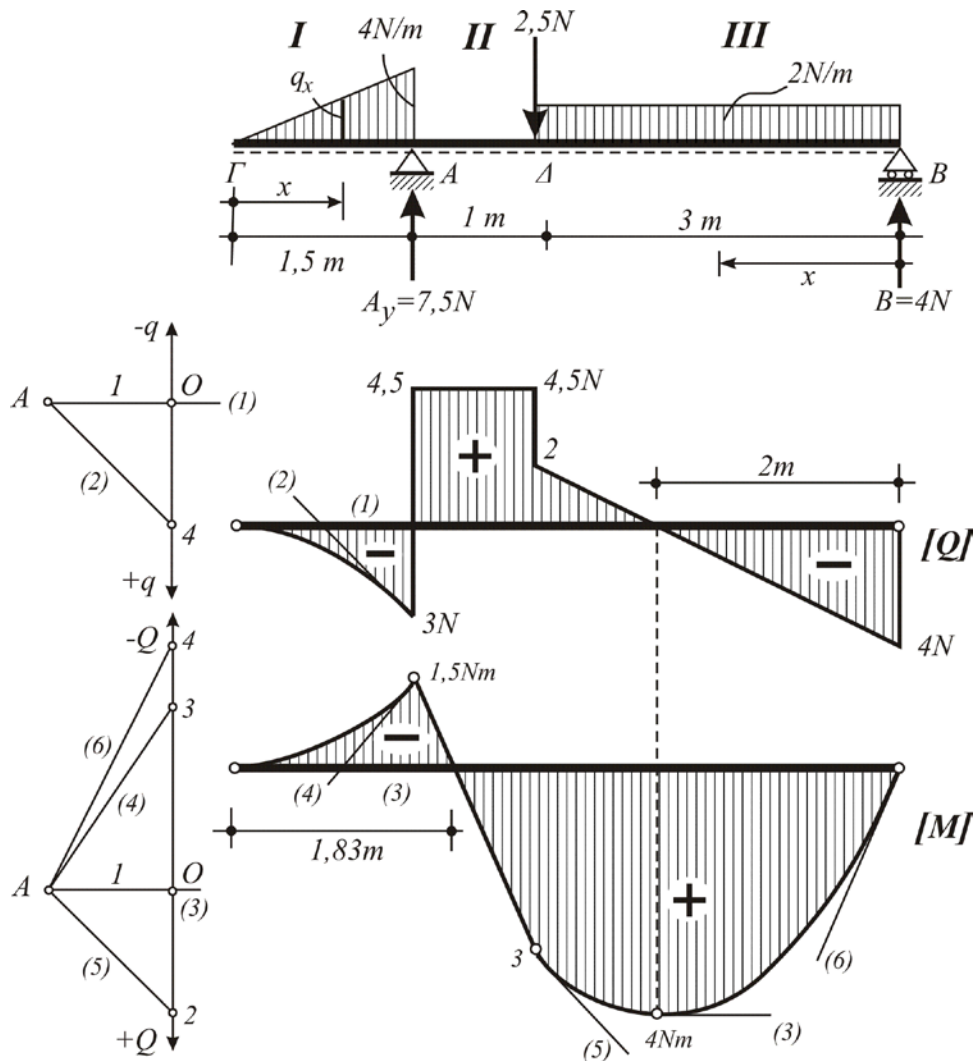
$$x = 2 \Rightarrow M_{\Delta} = 2,8 \text{ Nm,}$$

$$x = 1,64 \text{ m} \Rightarrow M_{III \max} = 2,95 \text{ Nm}$$

Παρατήρηση

Στο διάγραμμα ( $M$ ), η ευθεία της περιοχής II είναι ταυτόχρονα και εφαπτομένη (1) στην αρχή του παραβολικού τμήματος της περιοχής III, επειδή δεν εμφανίζεται συγκεντρωμένη δύναμη στο  $\Delta$ .

**2** Της **μονοπροέχουσας** δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M) με τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.



Σχ. 6.9.2

### Λύση

#### Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -\frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2,5 - B \cdot 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{B = 4 \text{ N.}}$$

$$\Sigma Y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 2,5 - 2 \cdot 3 + 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{A = 7,5 \text{ N.}}$$

$$\text{Επαλήθευση: } (\Sigma M)_\Delta^{\uparrow+} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 1,5 + 7,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4 \cdot 3 = 0!$$

#### Διάγραμμα Q

Τμήμα I ( $0 \leq x < 1,5$ )

Αν  $q_x$  είναι η ένταση της τριγωνικής φόρτισης σε τυχούσα διατομή του τμήματος I που απέχει απόσταση  $x$  από το αριστερό άκρο της δοκού, τότε, από τα όμοια τρίγωνα της εξωτερικής φόρτισης προκύπτει:

$$\frac{q_x}{4} = \frac{x}{1,5} \Rightarrow q_x = \frac{4}{1,5}x. \text{ Συνεπώς η τέμνουσα στο τμήμα I είναι:}$$

$$Q_I = -\frac{q_x \cdot x}{2} = -\frac{4}{1,5} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{2}{1,5}x^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 0 &\Rightarrow Q_I = 0, \\ x = 1,5 &\Rightarrow Q_A^{\text{op}} = -3 \text{ N.} \end{aligned}$$

**Τμήμα II** ( $1,5 < x < 2,5$ )

$$Q_{II} = -4 \cdot 1,5/2 + 7,5 = 4,5 \text{ N σταθ.}$$

**Τμήμα III** ( $0 < x < 3$ ) από δεξ.

$$Q_{III} = 2x - 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 0 &\Rightarrow Q_B^{\text{op}} = -4 \text{ N,} \\ x = 3 &\Rightarrow Q_D^{\text{δεξ}} = +2 \text{ N.} \end{aligned}$$

Είναι  $Q_{III} = 0$ , όταν  $2x - 4 = 0$ , ή  $x = 2 \text{ m}$ .

**Παρατήρηση:**

Η τιμή της συγκεντρωμένης δύναμης 2,5 N, αν και δεν ελήφθη υπόψη, εμφανίστηκε στο διάγραμμα σαν άλμα, λόγω ισχύος της  $\Sigma \gamma^{\uparrow+} = 0$ .

**Διάγραμμα M****Τμήμα I** ( $0 \leq x \leq 1,5$ )

$$M_I = -\frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{4}{1,5}x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{2}{4,5}x^3$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 0 &\Rightarrow M_I = 0, \\ x = 1,5 &\Rightarrow M_A = -1,5 \text{ Nm.} \end{aligned}$$

**Τμήμα II** ( $1,5 \leq x \leq 2,5$ )

$$M_{II} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2}(x-1) + 7,5(x-1,5)$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 1,5 &\Rightarrow M_A = -1,5 \text{ Nm, ήδη γνωστό από το τμήμα I,} \\ x = 2,5 &\Rightarrow M_D = +3 \text{ Nm.} \end{aligned}$$

Λόγω αλλαγής του προσήμου της ροπής στα όρια του τμήματος, υπολογίζουμε τη θέση μηδενισμού της.

$$\text{Είναι } M_{II} = 0, \text{ όταν } -3x + 3 + 7,5x - 11,25 = 0, \text{ ή } x = 1,83 \text{ m.}$$

**Σημείωση:**

Ειδικά εδώ, λόγω γραμμικότητας της μεταβολής της M, το σημείο μηδενισμού μπορεί να βρεθεί και από τα όμοια τρίγωνα του διαγράμματος M στο τμήμα II.

**Τμήμα III** ( $0 \leq x \leq 3$ ) από δεξ.

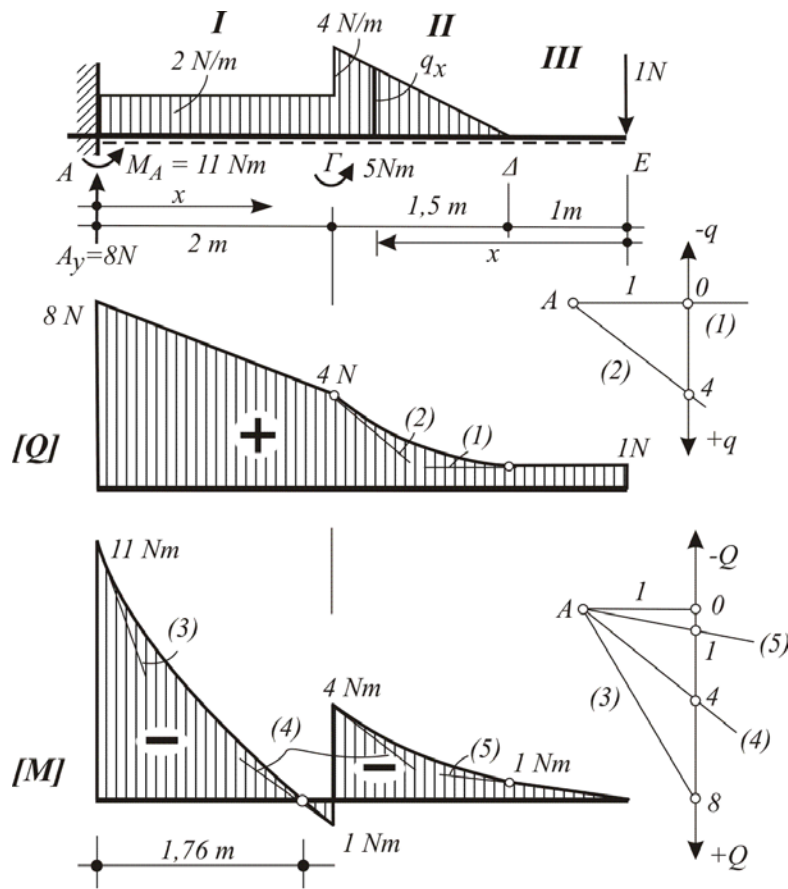
$$M_{III} = 4x - 2x \frac{x}{2} = 4x - x^2$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 0 &\Rightarrow M_B = 0, \\ x = 3 &\Rightarrow M_D = +3 \text{ Nm.} \end{aligned}$$

$$\text{για } x = 2 \text{ m (όπου } Q_{III} = 0), \text{ είναι } M_{III \text{ max}} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4 \text{ Nm.}$$

**3**

Του **προβόλου** που εικονίζεται στο σχήμα, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών με όλες τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.



Σχ. 6.9.3

**Λύση**

**Αντιδράσεις**

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -M_A + 2 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 2,5 + 1 \cdot 4,5 - 5 = 0 \Rightarrow \underline{M_A = 11 \text{ Nm.}}$$

$$\Sigma \gamma^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 2 \cdot 2 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 1 \Rightarrow \underline{A = 8 \text{ N.}}$$

Επαλήθευση:  $(\Sigma M)_E^{\uparrow+} = -11 + 8 \cdot 4,5 - 2 \cdot 2 \cdot 3,5 - 5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 2 = 0 !$

**Διάγραμμα Q**

**Τμήμα I** ( $0 < x \leq 2$ )

$$Q_I = 8 - 2x$$

Για  $x = 0 \Rightarrow Q_A^{\delta\epsilon\zeta} = 8 \text{ N,}$

$x = 2 \Rightarrow Q_I = 4 \text{ N.}$

**Τμήμα II** ( $1 \leq x \leq 2,5$ ) από δεξ.

Είναι:  $\frac{q_x}{4} = \frac{x-1}{1,5} \Rightarrow q_x = \frac{4}{1,5}(x-1)$ . Άρα:

$$Q_{II} = 1 + q_x \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{4}{1,5}(x-1) \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{2}{1,5}(x-1)^2.$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow Q_{\Delta} = 1 \text{ N},$$

$$x = 2,5 \Rightarrow Q_{\Gamma} = 4 \text{ N (επαλήθευση της } Q_{\Gamma} \text{ από το Τμήμα I).}$$

Τμήμα III ( $0 < x \leq 1$ ) από δεξ.

$$Q_{III} = 1 \text{ N σταθ.}$$

### Διάγραμμα M

Τμήμα I ( $0 < x < 2$ )

$$M_I = -11 + 8x - x^2$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A^{\delta\epsilon\chi} = -11 \text{ Nm},$$

$$x = 2 \Rightarrow M_{\Gamma}^{\alpha\phi} = +1 \text{ Nm.}$$

Είναι:  $M_I = 0$ , όταν  $x^2 - 8x + 11 = 0$ . Από τις δύο ρίζες της εξίσωσης,

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 11 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4,47}{2} \begin{cases} 6,24 \\ 1,76 \end{cases}$$

η  $x_1 = 6,24 \text{ m}$  **απορρίπτεται**, διότι είναι έξω από τα όρια του  $x$  στο τμήμα I.

Τμήμα II ( $1 \leq x < 2,5$ ) από δεξ.

$$M_{II} = -1 \cdot x - q_x \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-1}{3} = -x - \frac{4}{1,5}(x-1) \cdot \frac{(x-1)^2}{6} = -x - \frac{2}{4,5}(x-1)^3$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow M_{\Delta} = -1 \text{ Nm},$$

$$x = 2,5 \Rightarrow M_{\Gamma}^{\delta\epsilon\chi} = -4 \text{ Nm.}$$

### **Παρατήρηση:**

Αντίστοιχα προς την παρατήρηση του παραδείγματος 2, η τιμή της συγκεντρωμένης ροπής στο  $\Gamma$ ,  $M = 5 \text{ Nm}$ , αν και δεν ελήφθη υπόψη, εμφανίστηκε στο διάγραμμα σαν άλμα, λόγω ισχύος της  $(\Sigma M)^{\pm} = 0$ .

Φυσικά, τόσο στην προηγούμενη παρατήρηση όσο και εδώ, είναι προφανές ότι η διαφορά τιμών του εντατικού μεγέθους που προέκυψαν για τη δεξιά και την αριστερή παρειά του άλματος είναι ίση με την τιμή του συγκεντρωμένου μεγέθους.

Τμήμα III ( $0 \leq x \leq 1$ ) από δεξ.

$$M_{III} = -1 \cdot x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_E = 0,$$

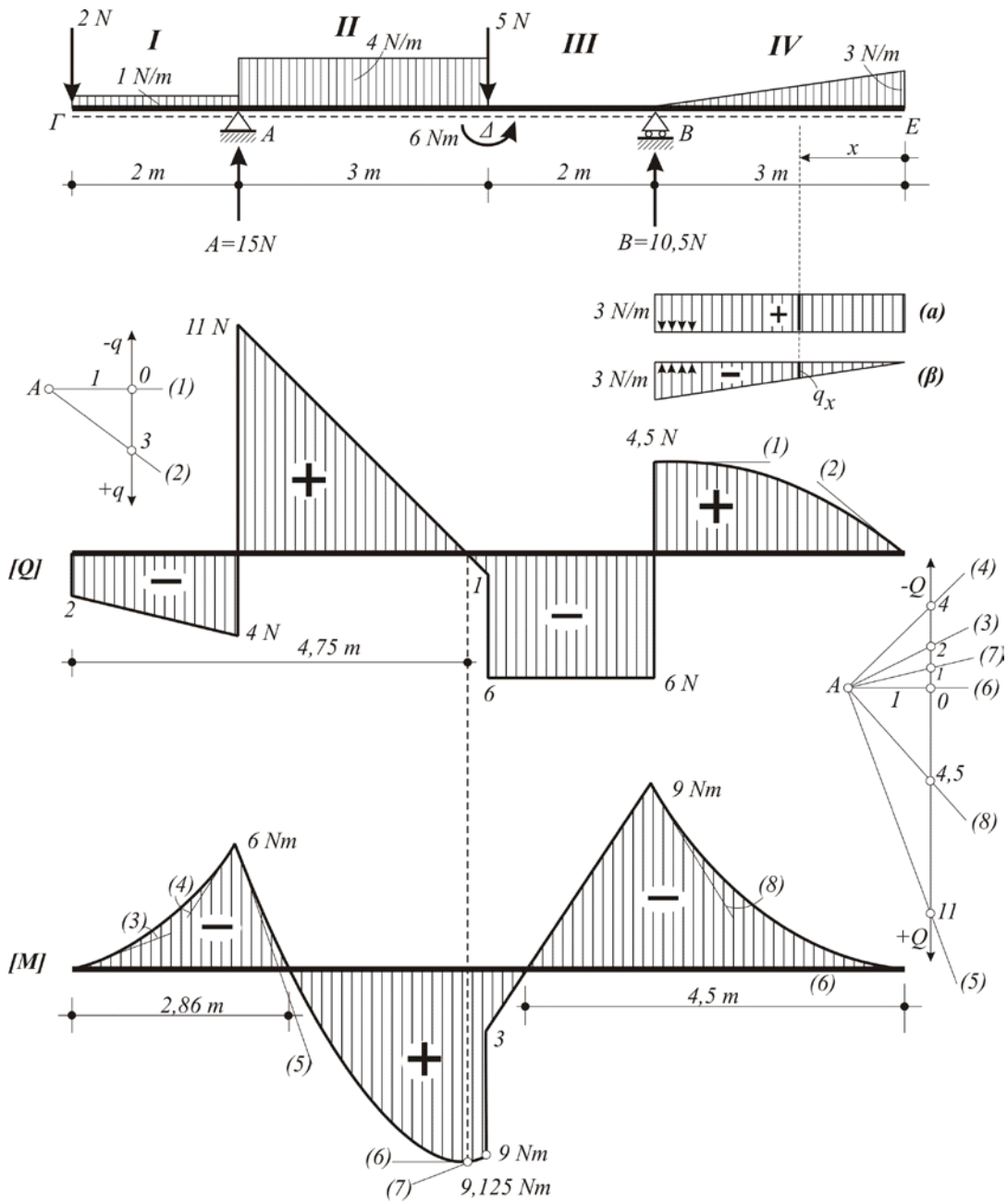
$$x = 1 \Rightarrow M_{\Delta} = -1 \text{ Nm.}$$

### **Σημείωση:**

Η ευθεία του τμήματος III είναι και εφαπτομένη (5) στην αρχή του καμπύλου τμήματος της περιοχής II (αντίστοιχη παρατήρηση του παραδείγματος 1).

**4**

Της **αμφιπροέχουσας** δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.



Σχ. 6.9.4

**Λύση**

**Αντιδράσεις**

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 5 \cdot 3 - 6 - B \cdot 5 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 7 = 0 \Rightarrow \mathbf{B = 10,5N.}$$

$$\Sigma Y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 2 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 5 + 10,5 - \frac{3 \cdot 3}{2} = 0 \Rightarrow \mathbf{A = 15N.}$$

$$\text{Επαλήθευση: } (\Sigma M)_\Delta^{\uparrow+} = -2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 + 15 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 - 10,5 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 0!$$

**Διάγραμμα Q****Τμήμα I** ( $0 < x < 2$ )

$$Q_I = -2 - 1 \cdot x$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\zeta} = -2 \text{ N,}$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_{\Delta}^{\alpha\phi} = -4 \text{ N.}$$

**Τμήμα II** ( $2 < x < 5$ )

$$Q_{II} = -2 - 1 \cdot 2 + 15 - 4(x - 2) = 11 - 4(x - 2).$$

$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow Q_{\Delta}^{\delta\epsilon\zeta} = 11 \text{ N,}$$

$$x = 5 \Rightarrow Q_{\Delta}^{\alpha\phi} = -1 \text{ N.}$$

Είναι  $Q_{II} = 0$ , για  $11 - 4x + 8 = 0$ , ή  $x = 4,75 \text{ m}$ .**Τμήμα III** ( $3 < x < 5$ ) από δεξ.

$$Q_{III} = \frac{3 \cdot 3}{2} - 10,5 = -6 \text{ N σταθ.}$$

**Τμήμα IV** ( $0 < x < 3$ ) από δεξ.

Επειδή προτίθεται να λάβω τις δυνάμεις δεξιά της διατομής, όπου η φόρτιση είναι τραπεζοειδής, θεωρώ ότι η δοθείσα τριγωνική φόρτιση είναι συνισταμένη δύο φορτίσεων. Μιας ομοιόμορφης, έντασης  $3 \text{ N/m}$  **με φορά προς τα κάτω** και μιας τριγωνικής – μέγιστης έντασης στο **αριστερό** άκρο  $3 \text{ N/m}$  – **με φορά προς τα πάνω** (σχήματα α, β). Αν τώρα  $q_x$  είναι η ένταση της τριγωνικής συνιστώσας (σχήμα β) στην τυχαία διατομή που απέχει  $x$  από το Ε, τότε:

$$\frac{q_x}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow q_x = x. \text{ Άρα: } Q_{IV} = 3x - \frac{q_x \cdot x}{2} = 3x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_E = 0,$$

$$x = 3 \Rightarrow Q_B^{\delta\epsilon\zeta} = 4,5 \text{ N.}$$

**Διάγραμμα M****Τμήμα I** ( $0 \leq x \leq 2$ )

$$M_I = -2x - 1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -2x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_{\Gamma} = 0,$$

$$x = 2 \Rightarrow M_A = -6 \text{ Nm.}$$

**Τμήμα II** ( $2 \leq x < 5$ )

$$M_{II} = -2x - 1 \cdot 2(x - 1) + 15(x - 2) - \frac{4(x - 2)^2}{2}$$

$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow M_A = -6 \text{ Nm, γνωστή ήδη από το τμήμα I,}$$

$$x = 5 \Rightarrow M_{\Delta}^{\alpha\phi} = 9 \text{ Nm.}$$

$$\text{για } x = 4,75 \text{ m, είναι } M_{II \max} = 9,125 \text{ Nm.}$$

$$\text{Είναι: } M_{II} = 0, \text{ όταν } -2x - 2x + 2 + 15x - 30 - 2x^2 + 8x - 8 = 0.$$

$$\text{ή } x^2 - 9,5x + 19 = 0.$$

Από τις δύο ρίζες της εξίσωσης,



$$x_{1,2} = \frac{9,5 \pm \sqrt{90,25 - 4 \cdot 1 \cdot 19}}{2 \cdot 1} = \frac{9,5 \pm 3,77}{2} \begin{cases} 6,64 \\ 2,86 \end{cases}$$

η  $x_1 = 6,64$  m **απορρίπτεται**, επειδή είναι έξω από τα όρια του  $x$ , τα οποία ορίζονται στο τμήμα II.

**Τμήμα III** ( $3 \leq x < 5$ ) από δεξ.

$$M_{III} = -\frac{3 \cdot 3}{2}(x-1) + 10,5(x-3).$$

$$\text{Για } x = 3 \Rightarrow M_B = -9 \text{ Nm.}$$

Για  $x = 5 \Rightarrow M_{\Delta}^{\delta\epsilon\xi} = 3 \text{ Nm}$ , αναμενόμενη, για να επαληθευτεί το άλμα των 6 Nm με τη  $M_{\Delta}^{op} = 9 \text{ Nm}$  του Τμήματος II.

Είναι:  $M_{III} = 0$ , όταν  $-4,5x + 4,5 + 10,5x - 31,5 = 0$  ή  $x = 4,5$  m.

**Τμήμα IV** ( $0 \leq x \leq 3$ ) από δεξ.

$$M_{IV} = -3 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + q_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x = 3 \Rightarrow M_B = -9 \text{ Nm, ήδη γνωστή από το Τμήμα III.}$$

**5** Του **πλαισιωτού** φορέα που εικονίζεται στο σχήμα 6.9.5, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις του στις στηρίξεις A και B και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q), καμπτικών ροπών (M) και αξονικών δυνάμεων (N) με όλες τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.

### Λύση

#### Αντιδράσεις

Αν  $B_x$  και  $B_y$  είναι αντίστοιχα η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της B, θα είναι

$$\frac{B_x}{B_y} = \varepsilon\varphi 30^\circ \Rightarrow B_x = 0,58B_y$$

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow \frac{4,5 \cdot 3}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - B_y \cdot 4 - 0,58B_y \cdot 3 = 0 \Rightarrow \underline{B_y = 5,14 \text{ N}}$$

Άρα:  $\underline{B_x = 2,98 \text{ N}}$  και συνεπώς  $\underline{B = 5,94 \text{ N}}$ .

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - 2 \cdot 4 + 5,14 = 0 \Rightarrow \underline{A_y = 2,86 \text{ N}}$$

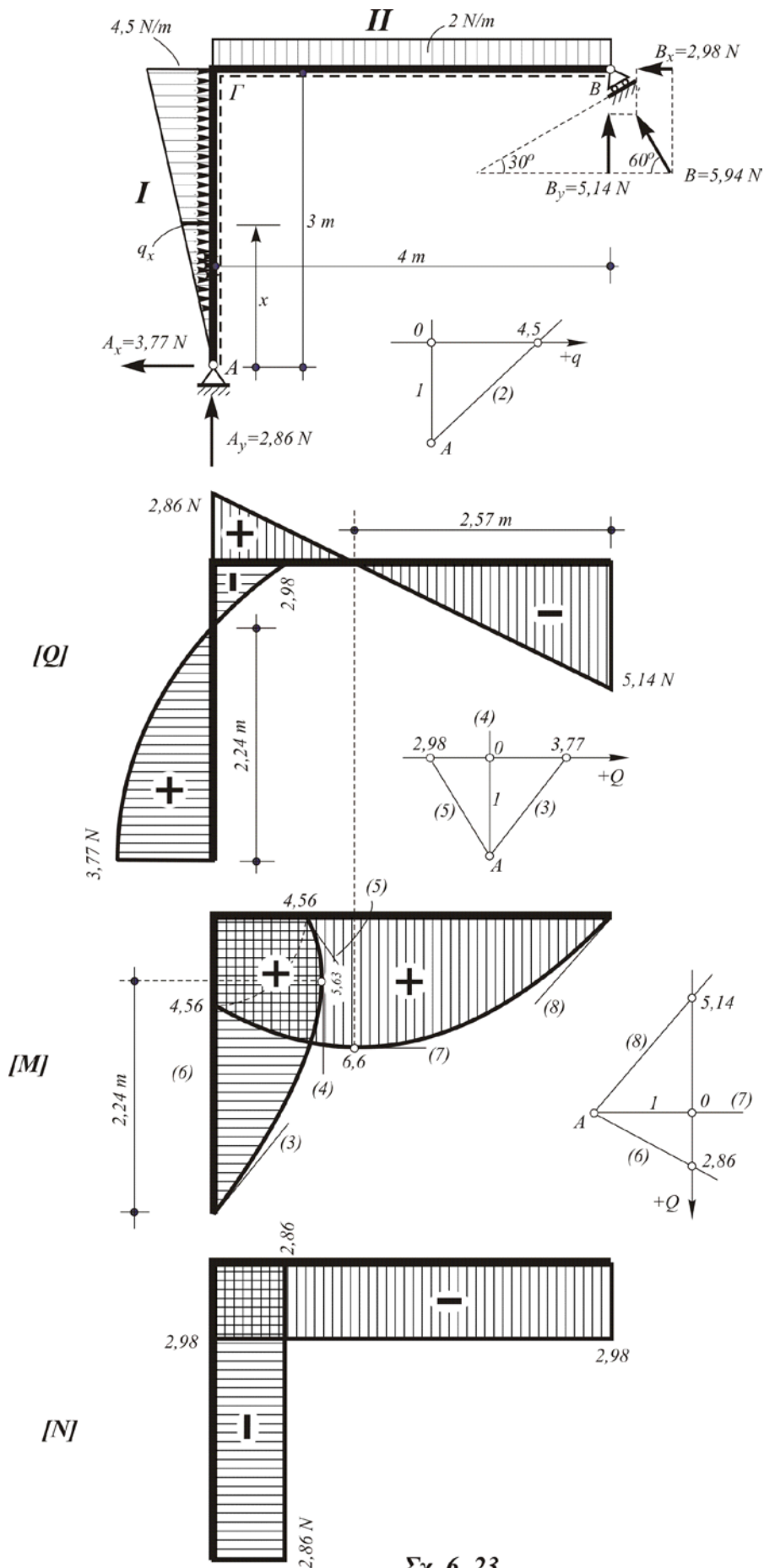
$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -A_x + \frac{4,5 \cdot 3}{2} - 2,98 = 0 \Rightarrow \underline{A_x = 3,77 \text{ N}}$$

$$\text{Επαλήθευση: } (\Sigma M)_F^{\uparrow+} = 3,77 \cdot 3 - \frac{4,5 \cdot 3}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 5,14 \cdot 4 = 0!$$

#### Διάγραμμα Q

Τμήμα I ( $0 < x < 3$ )

Αν  $q_x$  είναι η ένταση της τριγωνικής φόρτισης σε διατομή που απέχει απόσταση  $x$  από το A, τότε θα είναι:



Σχ. 6\_23

$$\frac{q_x}{4,5} = \frac{x}{3} \Rightarrow q_x = 1,5x.$$

$$\text{Άρα: } Q_I = 3,77 - \frac{q_x \cdot x}{2} = 3,77 - \frac{1,5x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_A^{\delta\epsilon\epsilon} = 3,77 \text{ N,}$$

$$x = 3 \Rightarrow Q_r^{\alpha\pi} = -2,98 \text{ N.}$$

$$\text{Είναι } Q_I = 0 \text{ για } x^2 = 3,77 \cdot 2 / 1,5 \text{ ή } x = \pm 2,24 \text{ m.}$$

Η αρνητική ρίζα **απορρίπτεται** επειδή είναι έξω από τα όρια του τμήματος.

Τμήμα II ( $0 < x < 4$ ) από δεξ.

$$Q_{II} = -5,14 + 2x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{\alpha\pi} = -5,14 \text{ N,}$$

$$x = 4 \Rightarrow Q_r^{\delta\epsilon\epsilon} = 2,86 \text{ N.}$$

$$\text{Είναι } Q_{II} = 0 \text{ όταν } 2x = 5,14 \text{ ή } x = 2,57 \text{ m.}$$

### Διάγραμμα M

Επιλέγω ως θετικό όριο (ίνα) του φορέα την εσωτερική πλευρά του πλαισίου, ώστε η ροπή στο Γ, που προκύπτει είτε από το οριζόντιο είτε από το κατακόρυφο σκέλος, να έχει, εκτός από την ίδια τιμή και το ίδιο πρόσημο. Έτσι διατηρείται ομοιομορφία και στη σήμανση των διαγραμμάτων (Q) και (N).

Τμήμα I ( $0 \leq x \leq 3$ )

$$M_I = 3,77x - \frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 3,77x - \frac{x^3}{4}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A = 0,$$

$$x = 3 \Rightarrow M_r = 4,56 \text{ Nm.}$$

$$\text{για } x = 2,24 \text{ m, είναι } M_{I \max} = 5,63 \text{ Nm.}$$

Τμήμα II ( $0 \leq x \leq 4$ ) από δεξ.

$$M_{II} = 5,14x - 2x \cdot \frac{x}{2} = 5,14x - x^2.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_B = 0,$$

$$x = 4 \Rightarrow M_r = 4,56 \text{ Nm.}$$

$$\text{για } x = 2,57 \text{ m, είναι } M_{II \max} = 6,6 \text{ Nm.}$$

### Διάγραμμα N

Εδώ ο χωρισμός του φορέα σε τμήματα, γίνεται σχεδόν αποκλειστικά με μοναδικό κριτήριο την ύπαρξη συγκεντρωμένων δυνάμεων που δρουν αξονικά στο φορέα, δηλαδή δυνάμεων που είναι παράλληλες στον άξονά του.

Σπανιότατα είναι δυνατόν να εμφανιστεί συνεχές φορτίο που να δρα κατά την έννοια του άξονα του φορέα, οπότε η περίπτωση του αντιμετωπίζεται όπως ακριβώς και στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.

Με το παραπάνω σκεπτικό, ο χωρισμός του φορέα στα τμήματα I και II που έγινε για τα διαγράμματα (Q) και (M), ισχύει και για το διάγραμμα (N).

**Τμήμα I** ( $0 < x < 3$ )

$N_I = -A_y = -2,86 \text{ N}$  σταθ.

**Τμήμα II** ( $0 < x < 4$ ) από δεξ.

$N_{II} = -B_x = -2,98 \text{ N}$  σταθ.

## 10 – Γενικές παρατηρήσεις

1. Στο διάγραμμα (M), όταν από **αφόρτιστη** περιοχή μεταβαίνουμε σε **συνεχώς** φορτισμένη χωρίς να παρεμβάλλεται συγκεντρωμένο φορτίο, τότε η ευθεία του διαγράμματος που αντιστοιχεί στην αφόρτιστη περιοχή, είναι μαζί και εφαπτομένη του καμπύλου τμήματος που αντιστοιχεί στο φορτισμένο τμήμα του φορέα (δείτε τα διαγράμματα  $M_{II-III}$  των παραδειγμάτων 1 και 3)

2. Η ύπαρξη συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης σε ακραία ή ενδιάμεση θέση συνεχούς φορτίου, αν και δεν δημιουργεί άλμα στην τιμή της καμπτικής ροπής στη θέση της δύναμης, προκαλεί στο ίδιο διάγραμμα γωνία, συνήθως αμβλεία, που οφείλεται στις δύο διαφορετικές τέμνουσες και συνεπώς εφαπτόμενες, εκατέρωθεν της διατομής όπου δρα η δύναμη.

3. Στο διάγραμμα (Q), όταν από τριγωνική φόρτιση μεταβαίνουμε σε αφόρτιστο τμήμα του φορέα που συνορεύει με την κορυφή του τριγωνικού φορτίου **χωρίς** τη μεσολάβηση κατακόρυφης δύναμης, τότε η οριζόντια ευθεία του διαγράμματος που αντιστοιχεί στο αφόρτιστο τμήμα είναι μαζί και εφαπτομένη του παραβολικού τμήματος της φορτισμένης περιοχής (δείτε το διάγραμμα  $Q_{II-III}$  του παραδείγματος 3).

4. Όταν στο όριο μεταξύ δύο τμημάτων δεν εμφανίζεται κάποια συγκεντρωμένη κατακόρυφη δύναμη ή ροπή, τότε η τιμή της Q ή M αντίστοιχα που προκύπτει από τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων στα γειτονικά τμήματα είναι πάντα η ίδια (επαλήθευση).

## 11 – Δυσμενείς φορτίσεις

Σαν κατασκευαστικό στοιχείο, ο φορέας πρέπει να μελετηθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μπορεί να αναλάβει τα προβλεπόμενα φορτία σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τους, ειδικά εκείνους που προκαλούν δυσμενέστερες καταπονήσεις.

Τα φορτία που κατά πάγια τακτική αναλαμβάνει ένας φορέας είναι:

1. Το δικό του (ίδιο) βάρος που θεωρείται μόνιμο φορτίο (g)
2. Το ωφέλιμο ή κινητό φορτίο (p) και
3. Το φορτίο χιονιού (s).

Η σύγχρονη δράση των παραπάνω φορτίων που ονομάζονται **κύρια**, συνιστούν τη λεγόμενη φόρτιση (**H**) του φορέα.

Πέρα όμως από τα κύρια φορτία, ένας φορέας μπορεί να αναλαμβάνει και **πρόσθετα φορτία**, δηλαδή φορτία που προέρχονται από:

1. Ανεμοπίεση ( $w$ )
2. Μεταβολή της θερμοκρασίας και
3. Δυνάμεις πεδήσεως (φρένων).

Η σύγχρονη δράση των κύριων και πρόσθετων φορτίων, συνιστούν την ονομαζόμενη φόρτιση ( $H$ ). Τα κτιριακά έργα επιβαρύνονται συνήθως με φόρτιση  $H$ , ενώ οι γέφυρες με  $HZ$ .

Στη μελέτη ενός φορέα, τα φορτία που συνδυάζονται μεταξύ τους για να δώσουν τις δυσμενέστερες καταπονήσεις, είναι:

α) Τα μόνιμα φορτία ( $g$ ), που δεν μεταβάλλονται και συνεπώς προκαλούν φόρτιση του φορέα σε όλο το μήκος του και

β) Τα κινητά ή ωφέλιμα φορτία ( $p$ ), που μπορούν να κινούνται κατά μήκος του φορέα και συνεπώς να τον επιβαρύνουν διαφορετικά, ανάλογα με τη θέση που έχουν την κάθε φορά.

Όταν ο φορέας φορτίζεται σε **όλο** του το μήκος, με φορτίο  $q = g + p$ , θα λέμε ότι υφίσταται **καθολική φόρτιση**. Όταν όμως ένα τμήμα του φορτίζεται με  $q$  ενώ το υπόλοιπο με  $g$ , η φόρτιση ονομάζεται **μερική**, και μπορεί να αποτελέσει μια περίπτωση δυσμενούς φορτίσεως.

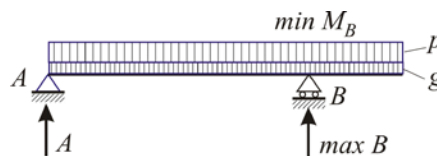
Παρατίθενται παρακάτω διάφορες περιπτώσεις τέτοιων **δυσμενών φορτίσεων**, με αντίστοιχες μέγιστες ή ελάχιστες τιμές εντατικών μεγεθών, οι οποίες, ανάλογα με το είδος του φορέα, ομαδοποιούνται ως εξής:

**A.** Στην **αμφιέριστη** δοκό οι μέγιστες αντιδράσεις στήριξης και οι μέγιστες καμπτικές ροπές προκύπτουν για καθολική φόρτιση  $q$ .

**B.** Στη **μονοπροέχουσα** δοκό, επειδή η φόρτιση του προβόλου μειώνει την αντίδραση στην ακραία στήριξη αλλά και την καμπτική ροπή στο άνοιγμα, οι μέγιστες τιμές τους υπολογίζονται για μερική φόρτιση στον πρόβολο.

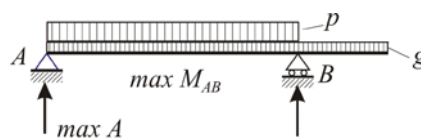
Ανάλογα με τη θέση που έχει το ομοιόμορφο κινητό φορτίο πάνω στη μονοπροέχουσα δοκό, προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις φορτίσεων:

1) **Καθολική φόρτιση:** Προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της εσωτερικής στήριξης ( $\max B$ ) και την ελάχιστη (απόλυτα μέγιστη) αρνητική ροπή στη στήριξη του προβόλου ( $\min M_B$ ).



Σχ. 6.11.1

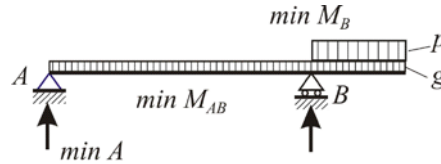
2) **Κινητό φορτίο μόνο στο άνοιγμα:** Προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της ακραίας στήριξης ( $\max A$ ) και τη μέγιστη ροπή ανοίγματος ( $\max M_{AB}$ ).



Σχ. 6.11.2

3) Κινητό φορτίο μόνο στον πρόβολο: Προκαλεί την ελάχιστη ροπή στο άνοιγμα ( $\min M_{AB}$ ) και την ελάχιστη αντίδραση της ακραίας στήριξης ( $\min A$ ).

Αν η αντίδραση προκύψει αρνητική, τότε πρέπει η δοκός να **αγκυρώνεται** στη στήριξη.



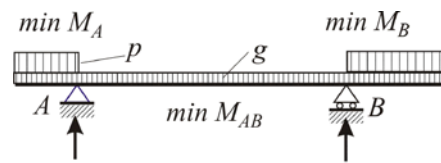
Σχ. 6.11.3

Γ. Στην **αμφιπροέχουσα** δοκό, οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές των αντιδράσεων και ροπών δεν προκύπτουν για καθολική φόρτιση όπως στην αμφιέριστη, αλλά για μερική φόρτιση της δοκού από τα κινητά φορτία.

Όμως επειδή εδώ υπάρχουν δύο πρόβολοι, οι δυνατές περιπτώσεις φόρτισης είναι **έξι**, ενώ στη μονοπροέχουσα ήταν μόνο **τρεις**.

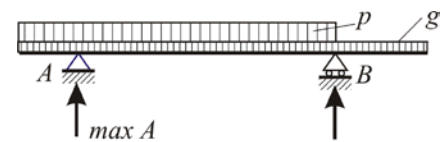
Αυτές είναι:

1) Φόρτιση δύο προβόλων: Προκύπτει:  $\min M_A$ ,  $\min M_B$ ,  $\min M_{AB}$ .



Σχ. 6.11.4

2) Φόρτιση ανοίγματος και αριστερού προβόλου: Προκύπτει η  $\max A$ .



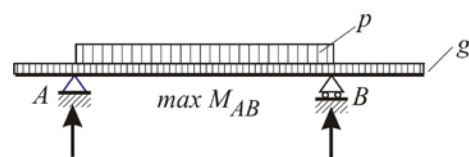
Σχ. 6.11.5

3) Φόρτιση ανοίγματος και δεξιού προβόλου: Προκύπτει η  $\max B$ .



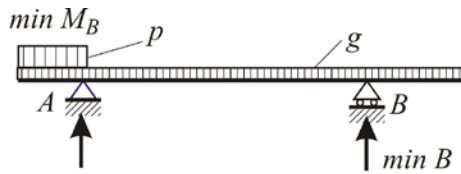
Σχ. 6.11.6

4) Φόρτιση μόνο ανοίγματος: Προκύπτει η  $\max M_{AB}$ .



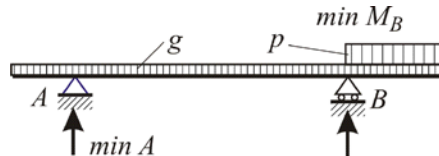
Σχ. 6.11.7

5) Φόρτιση μόνο αριστερού προβόλου: Προκύπτει  $\min M_A$  και  $\min B$ .



Σχ. 6.11.8

6) Φόρτιση μόνο δεξιού προβόλου: Προκύπτει  $\min M_B$  και  $\min A$ .



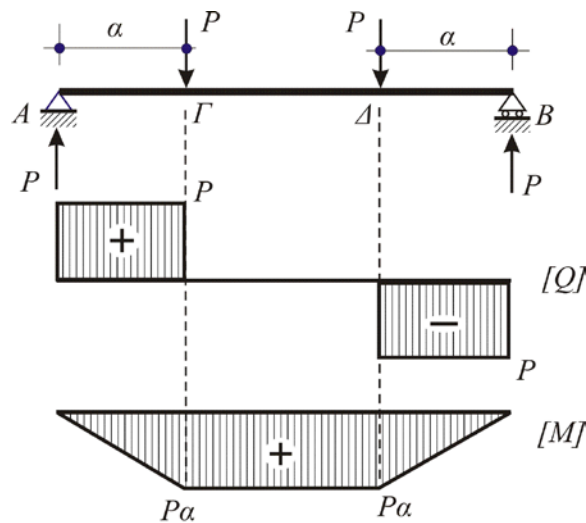
Σχ. 6.11.9

## 12 – Η κάμψη και οι εσωτερικές δυνάμεις

Μετά την εμπειρία που αποκτήθηκε ήδη από τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών μιας δοκού, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την κάμψη, σαν την απλή καταπόνηση μιας ράβδου, όπου τα φορτία ή οι ροπές που δρουν, βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, που περιλαμβάνει και τον άξονά της. Επομένως οι εσωτερικές δυνάμεις που μπορεί να εμφανιστούν σε τυχούσα διατομή, θα είναι γενικά τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές.

Αν σε διατομή ή τμήμα της δοκού εμφανίζεται μόνο καμπτική ροπή, τότε η κάμψη ονομάζεται καθαρή. Αν όμως πλην της καμπτικής ροπής εμφανίζεται και τέμνουσα δύναμη, τότε η κάμψη ονομάζεται γενική.

Στην αμφιέρειστη π.χ. δοκό του σχήματος 6.12.1, όπου δύο ίσα φορτία ενεργούν σε ίσες αποστάσεις από τις στηρίξεις, για το μεταξύ των φορτίων τμήμα ΓΔ της δοκού όπου δεν εμφανίζεται τέμνουσα δύναμη ( $Q = 0$ ), αλλά μόνο καμπτική ροπή σταθερής τιμής, έχουμε καθαρή κάμψη.

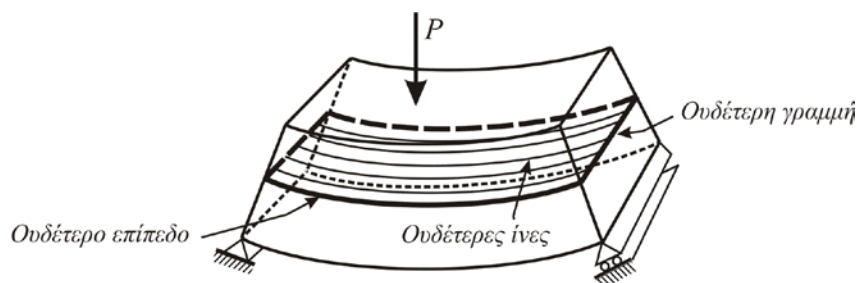


Σχ. 6.12.1

Για τα τμήματα όμως ΑΓ και ΔΒ, όπου, πλην της ροπής, εμφανίζεται και τέμνουσα, έχουμε γενική κάμψη.

Ο άξονας της ράβδου που καταπονείται σε κάμψη, θεωρείται αρχικά ευθύγραμμος. Όμως μετά την επιβολή των φορτίων, η ράβδος παθαίνει παραμορφώσεις, οι οποίοι έχουν σαν αποτέλεσμα την καμπύλωση του άξονα.

Η καμπύλωση αυτή, για τη ράβδο π.χ. του σχήματος 6.12.2, σημαίνει **επιβράχυνση των ανωτέρων ινών, με ταυτόχρονη επιμήκυνση των κατωτέρων**, που είναι αποτέλεσμα θλίψης και εφελκυσμού αντίστοιχα, στις ίνες της ράβδου.



Σχ. 6.12.2

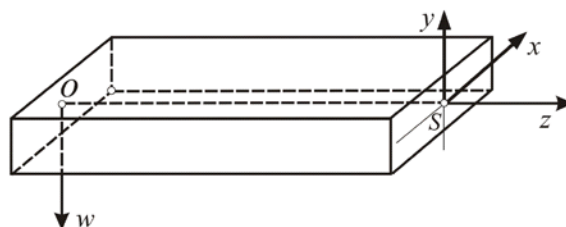
Και επειδή η παραμόρφωση της ράβδου είναι συνεχής χωρίς το υλικό της να παρουσιάζει κενά, έπεται ότι η μετάβαση αυτή από τη θλίψη στον εφελκυσμό δε γίνεται απότομα αλλά βαθμιαία. Επομένως σε ενδιάμεσες θέσεις της διατομής θα υπάρχουν ίνες οι οποίες δεν έπαθαν καμία μεταβολή στο αρχικό τους μήκος και συνεπώς δεν εμφανίζεται σ' αυτές ούτε θλίψη ούτε εφελκυσμός.

Οι ίνες αυτές ονομάζονται **ουδέτερες** και συνιστούν ένα επίπεδο που ονομάζεται ουδέτερο επίπεδο. Η ύπαρξη του ουδέτερου επιπέδου είναι μεγάλης σημασίας, επειδή δίνει μια πρώτη σταθερή βάση για την αναλυτική μελέτη του φαινομένου της κάμψης.

Η τομή του ουδέτερου επιπέδου με τη διατομή της ράβδου είναι ευθεία, που ονομάζεται **ουδέτερη γραμμή**.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι τάσεις που εμφανίζονται στην καμπτική καταπόνηση, είναι γενικά **ορθές** (θλιπτικές – εφελκυστικές) και **διατμητικές**.

Για τον προσδιορισμό των μεταβολών που προκύπτουν στις τάσεις και παραμορφώσεις ενός καμπτόμενου φορέα, θα χρησιμοποιούνται τα συστήματα συντεταγμένων που εικονίζονται στο σχήμα 6.12.3.



Σχ. 6.12.3

1) Το σύστημα  $Ozw$ , στο οποίο θα αναφέρουμε τις κατακόρυφες μετακινήσεις  $w$  των διατομών της ράβδου μετά την παραμόρφωση, σε σχέση με την τετμημένη τους  $z$  (απόσταση από την αρχή  $O$  στον άξονα  $z$  – που είναι η τομή του ουδέτερου επιπέδου με το επίπεδο φόρτισης), και

2) Το σύστημα  $Sxy$  στο οποίο θα αναφέρεται η θέση οποιουδήποτε σημείου της διατομής. Το σύστημα κείται στη διατομή, το κεντροειδές της οποίας ταυτίζεται



με την αρχή του συστήματος  $S$ , ενώ ο άξονας  $Sx$  συμπίπτει με την ουδέτερη γραμμή.

Βασικές **προϋποθέσεις** για τη μελέτη του θέματος της κάμψης είναι:

**1.** Όλα τα φορτία, δυνάμεις ή ροπές που προκαλούν την κάμψη κείνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει τον αρχικά ευθύγραμμο άξονα της δοκού και λέγεται επίπεδο φόρτισης ή κάμψης (αν η κάμψη του άξονα γίνεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο).

**2.** Η αρχή του Bernoulli, η οποία εμφανίστηκε οριστικά στη θεωρία της κάμψης με τις εργασίες του Navier (1820), και ορίζει ότι: «Διατομές επίπεδες και κάθετες στον άξονα της δοκού πριν από την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον άξονα και μετά από αυτήν».

**3.** Οι παραμορφώσεις που εμφανίζονται είναι μικρές, δηλαδή ισχύει ο νόμος του Hooke.

**4.** Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού  $E$  είναι το ίδιο σε εφελκυσμό και θλίψη, και

**5.** Το επίπεδο της κάμψης που αναφέρθηκε παραπάνω, περιέχει έναν από τους κύριους άξονες αδράνειας της διατομής του, που είναι άξονες κάθετοι μεταξύ τους, ως προς τους οποίους η ροπή αδράνειας της διατομής είναι μέγιστη για τον ένα και ελάχιστη για τον άλλο.

## 13 – Οι τάσεις

Στην ενότητα αυτή θα αναζητήσουμε τους νόμους μεταβολής των τάσεων που εμφανίζονται γενικά στην καμπτική καταπόνηση.

Έτσι θα προσδιορίσουμε πρώτα τις **ορθές** τάσεις που εμφανίζονται στην **καθαρή** κάμψη και στη συνέχεια τις **διατμητικές** τάσεις που εμφανίζονται επί πλέον στη **γενική** κάμψη.

### α – Οι ορθές τάσεις

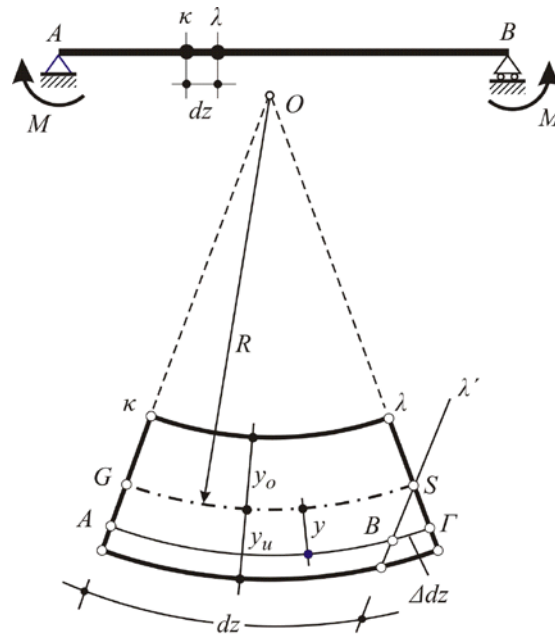
Θεωρούμε τη δοκό του επομένου σχήματος, στα άκρα της οποίας ενεργούν δυο ίσες και αντίθετες ροπές,  $M$ .

Είναι προφανές ότι η δοκός καταπονείται σε καθαρή κάμψη, επειδή σε κάθε διατομή της εμφανίζεται η σταθερή ροπή  $M$ , η οποία έχει σαν αποτέλεσμα την κυκλική παραμόρφωση της δοκού.

Αποκόπτουμε από τη δοκό ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους  $dz$  το οποίο περιλαμβάνεται μεταξύ των διατομών  $\kappa$  και  $\lambda$ .

Το τμήμα αυτό, μετά την παραμόρφωση παίρνει τη μορφή του εικονιζόμενου κυκλικού τόξου, όπου οι διατομές  $\kappa$  και  $\lambda$ , παραμένοντας επίπεδες λόγω της αρχής Bernoulli, τέμνονται σε ευθεία, με ίχνος πάνω στη σελίδα το  $O$ , ορίζοντας έτσι την ακτίνα καμπυλότητας  $R$ .

Από το σημείο S της ουδέτερης ίνας GS φέρνουμε επίπεδο λ' παράλληλο του κ. Είναι φανερό ότι μία ίνα με αρχικό μήκος AB = dz, που απέχει απόσταση γ από την ουδέτερη γραμμή, επιμηκύνεται κατά Δdz = BΓ.



Σχ. 6.13.1

Από τα όμοια τρίγωνα OGS και SBΓ, προκύπτει:

$$\frac{B\Gamma}{GS} = \frac{y}{R} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y}{R} \quad (i)$$

Αλλά ισχύοντας του νόμου του Hooke, είναι:

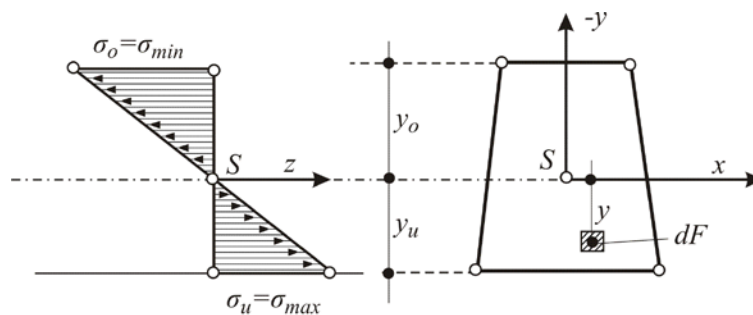
$$\frac{\Delta dz}{dz} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (ii)$$

Ο συνδυασμός των δυο παραπάνω σχέσεων, δίνει:

$$\sigma = \frac{E}{R} \cdot y \quad (\alpha)$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει τη γραμμικότητα μεταβολής των ορθών τάσεων σ, σε σχέση με την απόστασή τους γ από την ουδέτερη γραμμή.

Παρατηρούμε ότι οι ορθές τάσεις σ θα δίνουν σε όλη τη διατομή μηδενική συνισταμένη, επειδή αρχικά υποθέσαμε ότι η δοκός καταπονείται σε καθαρή κάμψη (N = 0, Q = 0).



Σχ. 6.13.2

Σε στοιχειώδη επιφάνεια  $dF$  της διατομής που απέχει απόσταση  $y$  από την ουδέτερη γραμμή, ενεργεί η στοιχειώδης ορθή δύναμη:

$$dN = \sigma \cdot dF = \frac{E}{R} y \cdot dF$$

Η ολοκλήρωση της τελευταίας σχέσης στην επιφάνεια  $F$ , δίνει:

$$N = \int_F dN = \int_F \frac{E}{R} y \cdot dF = \frac{E}{R} \int_F y \cdot dF = 0 .$$

Η τελευταία όμως σχέση ορίζει ότι η στατική ροπή της διατομής  $F$  ως προς την ουδέτερη γραμμή είναι μηδέν.

Αυτό σημαίνει ότι η ουδέτερη γραμμή περνάει από το κεντροειδές της διατομής, το οποίο είναι σταθερό και προσδιορισμένο σημείο.

Παρατηρούμε επίσης ότι το άθροισμα των ροπών όλων των στοιχειωδών δυνάμεων  $dN$  που αναφέρονται στην προηγούμενη σχέση ως προς την ουδέτερη γραμμή, πρέπει να ισούται προς την καμπτική ροπή  $M$ , η οποία ενεργεί στη διατομή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η  $M$  είναι η καμπτική ροπή που γνωρίσαμε ήδη στην ενότητα 5 (σελ. 135) που αφορά τα φορτία διατομής. Ώστε λοιπόν, είναι:

$$M = \int_F y \cdot dN = \int_F y \cdot \frac{E}{R} y \cdot dF = \frac{E}{R} \int_F y^2 dF .$$

Στην παραπάνω σχέση, ο παράγοντας  $\int_F y^2 dF$  εκφράζει τη ροπή αδράνειας  $J_x$  της διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή. Άρα:

$$M = \frac{E}{R} \cdot J_x .$$

Απαλείφοντας τον παράγοντα  $E/R$  μεταξύ της τελευταίας σχέσης και της (α), προκύπτει ο νόμος μεταβολής των ορθών τάσεων καθ' ύψος της διατομής,

$$\sigma = \frac{M}{J_x} \cdot y ,$$

όπου το  $y$  είναι θετικό κάτω από την ουδέτερη γραμμή και αρνητικό πάνω από αυτή. Η σχέση αυτή επιτρέπει τον προσδιορισμό της ορθής τάσης  $\sigma$  σε **οποιοδήποτε** σημείο της διατομής.

Όμως, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ακρότατες τιμές της  $\sigma$ , που αντιστοιχούν στις ίνες που απέχουν τη μεγαλύτερη απόσταση ( $-y_o, y_u$ ) από την ουδέτερη γραμμή:

$$\sigma_u = \sigma_{\max} = + \frac{M}{J_x} \cdot y_u = + \frac{M}{J_x / y_u} = + \frac{M}{W_{xu}}$$

$$\sigma_o = \sigma_{\min} = - \frac{M}{J_x} \cdot y_o = - \frac{M}{J_x / y_o} = - \frac{M}{W_{xo}} .$$

Στις δυο τελευταίες σχέσεις, τα μεγέθη:

$$W_{xu} = \frac{J_x}{y_u} \quad \text{και} \quad W_{xo} = \frac{J_x}{y_o}$$

ονομάζονται **ροπές αντιστάσεως** της διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή για την κατώτατη και ανώτατη ίνα της αντίστοιχα.

Όταν **και** ο άξονας  $x$  είναι επίσης άξονας συμμετρίας της διατομής (ορθογωνική, κυκλική κλπ), οπότε  $y_u = y_o$ , τότε θα είναι και:  $W_{xu} = W_{xo} = W_x$ , οπότε οι σχέσεις που εκφράζουν τις ακρότατες τιμές των ορθών τάσεων, γίνονται:

$$\sigma_{ακρότατη} = \pm \frac{M}{W_x} .$$

Ας δούμε τώρα τι σημαίνουν οι προϋποθέσεις 1 και 5 που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, ότι δηλαδή η καμπτική ροπή πρέπει να βρίσκεται στο επίπεδο φόρτισης  $wOz$  ή  $ySz$ .

Λόγω της προϋπόθεσης αυτής, οι στοιχειώδεις δυνάμεις  $dN$  που προέρχονται από τις ορθές τάσεις  $\sigma$ , θα πρέπει να έχουν αλγεβρικό άθροισμα ροπών ως προς τον άξονα  $y$  ίσο με μηδέν, που συμβαίνει μόνο για το είδος αυτό της κάμψης που εξετάζουμε, και ονομάζεται γι' αυτό **ορθή ή σύμμετρη** κάμψη. Τότε, θα είναι:

$$\int_F x \cdot dN = 0, \quad \text{ή}$$

$$\int_F x \cdot \sigma \cdot dF = \int_F x \frac{M}{J_x} y \cdot dF = \frac{M}{J_x} \int_F xy \cdot dF = \frac{M}{J_x} \cdot J_{xy} = 0,$$

και συνεπώς, επειδή  $M/J_x \neq 0$ , θα πρέπει να είναι  $J_{xy} = 0$ . Για να είναι όμως η φυγόκεντρη ροπή ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $Sxy$  ίση με μηδέν, πρέπει οι κύριοι άξονες αδράνειας της διατομής να συμπίπτουν με τους άξονες συντεταγμένων  $x$  και  $y$ , ή, πράγμα που είναι το ίδιο, ένας από τους κύριους άξονες αδράνειας της διατομής να κείται στο επίπεδο κάμψης, που συμπίπτει με το επίπεδο  $zy$ .

## β – Οι διατμητικές τάσεις

Για τον προσδιορισμό του νόμου μεταβολής των διατμητικών τάσεων, θεωρούμε τώρα τμήμα της δοκού που καταπονείται σε γενική κάμψη, στοιχειώδους μήκους  $dz$ .

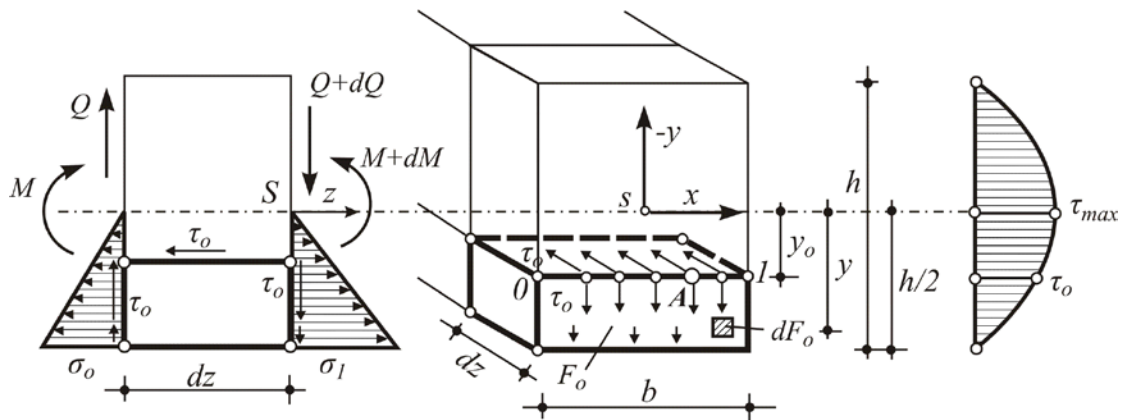
Για λόγους απλότητας η διατομή της δοκού λαμβάνεται ορθογωνική, ενώ το στοιχειώδες τμήμα θεωρείται ότι είναι ελεύθερο εξωτερικών φορτίων (αφόρτιστο).

Επειδή στη γενική κάμψη πέρα από την καμπτική ροπή, της οποίας η τιμή στο στοιχειώδες τμήμα είναι μεταβαλλόμενη, εμφανίζεται και τέμνουσα δύναμη, έπεται ότι εκτός από τις ορθές τάσεις  $\sigma$ , για τις οποίες ισχύουν οι τύποι που ήδη αναπτύξαμε, εμφανίζονται και διατμητικές τάσεις  $\tau$ , οι οποίες κύρια θα μας απασχολήσουν παρακάτω.

Έστω  $Q$  και  $M$  τα φορτία διατομής της αριστερής παρειάς του στοιχειώδους τμήματος, ενώ  $Q + dQ$  και  $M + dM$  τα αντίστοιχα της δεξιάς του πλευράς.

Από τις συνθήκες ισορροπίας του στοιχειώδους τμήματος, προκύπτει:

$$\Sigma \hat{y}^+ = 0 \Rightarrow Q - Q - dQ = 0 \Rightarrow dQ = 0$$



Σχ. 6.13.3

$$(\Sigma M)_S^+ = 0 \Rightarrow M + Qdz - M - dM = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dz} = Q \quad (\beta)$$

Έστω  $\tau_0$  η διατμητική τάση που αναπτύσσεται σε τυχόν σημείο A της διατομής, που απέχει απόσταση  $y_0$  από την ουδέτερη γραμμή.

Από το A φέρνουμε την ευθεία 0-1, παράλληλη προς την ουδέτερη γραμμή. Θα υπολογίσουμε τη διατμητική τάση στο σημείο A, υποθέτοντας ότι αυτή είναι παράλληλη προς τον άξονα  $y$  και σταθερή σε όλο το μήκος της ευθείας 0-1.

Για το σκοπό αυτό πραγματοποιούμε επίπεδη τομή που να περιέχει την ευθεία 0-1 και να είναι παράλληλη στο ουδέτερο επίπεδο. Έτσι αποκόπτουμε το πρίσμα που φαίνεται έντονα στο σχήμα με διαστάσεις  $dz$ ,  $b$  και  $h/2 - y_0$ .

Μετά την απομόνωση του πρίσματος, παρατηρούμε ότι οι τάσεις που ενεργούν σ' αυτό, είναι:

- 1) Στη δεξιά έδρα, οι μεταβαλλόμενες ορθές τάσεις  $\sigma_1$  και οι επίσης μεταβαλλόμενες διατμητικές τάσεις  $\tau$ , με τιμή  $\tau_0$  στα σημεία που βρίσκονται κατά μήκος της ακμής 0-1, όπως υποθέσαμε αρχικά.
- 2) Στην πάνω έδρα, η σταθερή διατμητική τάση  $\tau_0$ , σύμφωνα με την πρόταση του Cauchy.
- 3) Στην αριστερή έδρα, οι μεταβαλλόμενες ορθές τάσεις  $\sigma_0$  και οι επίσης μεταβαλλόμενες διατμητικές τάσεις  $\tau$ , με τιμή  $\tau_0$  στην απέναντι οπίσθια ακμή της 0-1.

Στις υπόλοιπες τρεις έδρες του πρίσματος προφανώς δεν ενεργούν τάσεις, επειδή αποτελούν την παράπλευρη επιφάνεια της δοκού.

Για παραστατικότερη εικόνα, το επάνω «Π» των εσωτερικών εδρών του πρίσματος είναι φορτισμένο με τάσεις, ενώ το κάτω και κάθετα προς αυτό «U» των εξωτερικών του εδρών είναι αφόρτιστο.

Εξετάζοντας τώρα την ισορροπία του πρίσματος κατά την έννοια του άξονα της δοκού  $z$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_z^{+\rightarrow} &= 0 \Rightarrow -\int_{F_o} \sigma_o dF_o - \tau_o b \cdot dz + \int_{F_o} \sigma_1 dF_o = 0 \\ -\int_{F_o} \frac{M}{J_x} \cdot y \cdot dF_o - \tau_o b \cdot dz + \int_{F_o} \frac{M + dM}{J_x} y \cdot dF_o &= 0 \\ -\tau_o b \cdot dz + \int_{F_o} \frac{dM}{J_x} y \cdot dF_o &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } \tau_o b \cdot dz = \frac{dM}{J_x} \int_{F_o} y \cdot dF_o = \frac{dM}{J_x} \cdot S_{ox}$$

όπου το  $\int_{F_o} y dF_o$  εκφράζει, όπως είναι γνωστό, τη στατική ροπή  $S_{ox}$  της επιφάνειας  $F_o$  ως προς την ουδέτερη γραμμή.

Λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς  $\tau_o$  και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (β), προκύπτει:

$$\tau_o = \frac{Q \cdot S_{ox}}{b \cdot J_x}.$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει την τιμή της διατμητικής τάσης σε τυχόν σημείο της **ευθείας 0-1**, που απέχει απόσταση  $y_o$  από την ουδέτερη γραμμή.

Για τυχόν σημείο της διατομής, που απέχει απόσταση  $y$  από την ουδέτερη γραμμή, η διατμητική τάση προφανώς θα είναι:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x}{b \cdot J_x},$$

σχέση, που διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1856, από το Ρώσο μηχανικό γεφυρών και σιδηροδρόμων D. J. Jourawski (1821 – 1891).

Στην παραπάνω εξίσωση, τα μεγέθη  $Q$ ,  $J_x$  και  $b$  είναι σταθερά, ενώ το  $S_x$  μεταβάλλεται συναρτήσει του  $y$  και παριστάνει, όπως ήδη αναφέρθηκε, τη στατική ροπή του τμήματος της διατομής που βρίσκεται **κάτω από την εκάστοτε ευθεία 0-1** που περιλαμβάνει το τυχόν σημείο, ως προς την ουδέτερη γραμμή.

Για την ορθογωνική διατομή του προηγούμενου σχήματος, είναι  $J_x = \frac{bh^3}{12}$ .

Επίσης, για τυχόν σημείο που απέχει απόσταση  $y$  από την ουδέτερη γραμμή, η στατική ροπή του τμήματος της διατομής που βρίσκεται κάτω από το σημείο, ως προς την ουδέτερη γραμμή, είναι

$$S_x = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

$$\text{Άρα: } \tau = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Από την τελευταία σχέση, που είναι παραβολή, προκύπτει ότι:

1) Στα ακρότατα σημεία της διατομής (πάνω και κάτω), όπου

$$y = \pm \frac{h}{2}, \quad \text{θα είναι} \quad \tau = 0.$$

2) Στην ουδέτερη γραμμή, όπου  $y = 0$ , θα είναι:

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} = 1,5 \frac{Q}{F}.$$

## 14 – Έλεγχος αντοχής

Ο στατικός έλεγχος και η εκλογή της διατομής σε μια γενικά καμπτόμενη δοκό είναι ουσιαστικής σημασίας και πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή.

Επειδή σε όλες σχεδόν τις διατομές μιας τέτοιας δοκού υπάρχουν ορθές και διατμητικές τάσεις μαζί, δημιουργώντας έτσι επίπεδη εντατική κατάσταση, σε κάθε σημείο της διατομής της, θα έπρεπε κανονικά να προσδιοριστούν οι κύριες τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  καθώς και η μέγιστη διατμητική τάση  $\tau_{\max}$  για όλα τα σημεία της διατομής και να συγκριθούν στη συνέχεια με τις επιτρεπόμενες τάσεις του υλικού σε εφελκυσμό, θλίψη και διάτμηση αντίστοιχα.

Όμως η παραπάνω εργασία, πέρα από το ότι είναι επίπονη, δεν έχει νόημα για διατομές ορθογωνικές, κυκλικές κλπ, όπου η διατμητική τάση μεταβάλλεται κατά τρόπο συνεχή σε όλο το μήκος της διατομής.

Κι αυτό γιατί από τις κύριες τάσεις των διαφόρων σημείων της διατομής, η μέγιστη των  $\sigma_1$  ταυτίζεται με την  $\sigma_u = \sigma_{\max}$ , η ελάχιστη των  $\sigma_2$  με την  $\sigma_o = \sigma_{\min}$  και η μέγιστη από τις  $\tau_{\max}$  με τη μέγιστη διατμητική τάση που αναπτύσσεται στην ουδέτερη γραμμή.

Έτσι η εργασία που γίνεται τελικά για τον έλεγχο μιας καμπτόμενης δοκού, περιλαμβάνει τα παρακάτω στάδια:

**1) Τον έλεγχο σε κάμψη και**

**2) Τον έλεγχο σε διάτμηση**

Ο έλεγχος σε κάμψη είναι πρωταρχικής σημασίας και παίζει τον **καθοριστικό** ρόλο στην εκλογή της διατομής ενός φορέα. Κι αυτό επειδή οι πλείστες από τις κατασκευές που εμφανίζονται σήμερα (δηλαδή σχεδόν όλες), παρουσιάζουν γενική καμπτική καταπόνηση, με αποτέλεσμα τα όρια αντοχής στο υλικό τους, να εξαντλούνται από την υπέρβαση των οριακών τιμών **πρώτα στις ορθές** και μετά στις διατμητικές τάσεις.

Ο έλεγχος σε διάτμηση παίζει γενικά δευτερεύοντα ρόλο στον καθορισμό της διατομής ενός καμπτόμενου φορέα.

Σε ελάχιστες μόνο εξαιρέσεις, π.χ. όταν ένα μεγάλο συγκεντρωμένο φορτίο ασκείται σε μικρή απόσταση από τη στήριξη του φορέα, είναι δυνατόν ο διατμητικός έλεγχος να οδηγήσει τελικά στη διαστασιολόγηση της διατομής.

Τόσο ο καμπτικός όσο και ο διατμητικός έλεγχος είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν είτε για τον έλεγχο των τάσεων, είτε για διαστασιολόγηση της διατομής, είτε για φορτοϊκανότητα της δοκού.

Πάντως, σε κάθε περίπτωση γενικής καταπόνησης, θα πρέπει να ικανοποιούνται συγχρόνως **και οι δύο** έλεγχοι.

## 15 – Έλεγχος σε κάμψη

Από τις σχέσεις:  $\sigma_{\max} = \pm \frac{M}{W}$  και  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}$ ,

το πρόβλημα της κάμψης αντιμετωπίζεται στην πράξη με τους συνδυασμούς που προκύπτουν από τη λύση της ανισοϊσότητας:

$$\sigma_{\text{υ}\pi_{\max}} = \frac{M}{W} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}, \text{ δηλαδή:}$$

### 1. Σαν έλεγχος ασφάλειας φορτισμένης δοκού (έλεγχος τάσεων)

Υπολογίζεται η καμπτική ροπή  $M_{\max}$  της δοκού και η ροπή αντίστασης  $W_{\text{υ}\pi}$  στη διατομή της  $M_{\max}$ .

Τότε, για να υπάρχει ασφάλεια, θα πρέπει να είναι:

$$\sigma_{\text{υ}\pi_{\max}} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{υ}\pi}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}.$$

Αν η διατομή είναι μεταβλητή, τότε προσδιορίζονται εκλεκτικά σε ορισμένες διατομές οι τιμές  $M$  και  $W$ , και το ζεύγος εκείνο που δίνει το μεγαλύτερο λόγο, συγκρίνεται με τη  $\sigma_{\varepsilon\pi}$ . ( $M/W \leq \sigma_{\varepsilon\pi}$ ).

### 2. Σαν εκλογή της διατομής που είναι απαραίτητη, ώστε η δοκός να φέρει τα φορτία που επιβάλλονται.

Υπολογίζεται η  $M_{\max}$ . Με δεδομένη την επιτρεπόμενη τάση  $\sigma_{\varepsilon\pi}$  που αντιστοιχεί στο υλικό της δοκού, υπολογίζεται η **απαιτούμενη** ροπή αντίστασης  $W_{\text{α}\pi}$  στη διατομή της  $M_{\max}$ , από τη σχέση:

$$W_{\text{α}\pi} \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{\varepsilon\pi}}.$$

Από την απαιτούμενη ροπή αντίστασης  $W_{\text{α}\pi}$  εκλέγεται η κατάλληλη διατομή, ακολουθώντας την παρακάτω μεθοδολογία.

**α)** Όταν πρόκειται για χαλύβδινα ελάσματα (με πρότυπη διατομή κατά DIN I, U, L κλπ), η ροπή αντίστασης των διαφόρων διατομών βρίσκεται σε πίνακες – μαζί με άλλα στοιχεία – και έτσι η εκλογή της διατομής είναι άμεση.

**β)** Όταν πρόκειται για διατομές ορθογωνικών, τριγωνικών, κυκλικών ή άλλων γεωμετρικών σχημάτων, οι ροπές αντίστασης εκφράζονται με τύπους που περιέχουν τις κύριες διαστάσεις των διατομών. Έτσι:

1. Για **ορθογώνιο** με διαστάσεις  $b \times h$ , θα είναι:

$$W = \frac{J}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

2. Για **ισοσκελές τρίγωνο** με διαστάσεις  $b \times h$ , θα είναι:

$$W_o = \frac{bh^3/36}{2h/3} = \frac{bh^2}{24} \text{ και } W_u = \frac{bh^3/36}{h/3} = \frac{bh^2}{12}$$



3. Για **κύκλο** με ακτίνα  $r$ ,

$$W = \frac{\pi r^4 / 4}{r} = \frac{\pi r^3}{4}$$

4. Για **κυκλικό δακτύλιο** με διαμέτρους  $D$  και  $d$ ,

$$W = \frac{\pi \cdot D^4 - d^4}{32 \cdot D} \cong \frac{D^4 - d^4}{10D}$$

Αν ο κυκλικός δακτύλιος έχει πολύ λεπτό πάχος  $t$  συγκριτικά με την εξωτερική του διάμετρο και  $r_\mu$  είναι η μέση ακτίνα του, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ικανοποιητική προσέγγιση ο τύπος:

$$W = \pi r_\mu^2 t$$

### 3. Σαν φορτοϊκανότητα της δοκού

Με τον όρο αυτό νοείται εδώ η **μέγιστη ροπή**  $M_{\max}$  που μπορεί να παραλάβει η δοκός με τη δοσμένη διατομή ή γεωμετρία.

Για να μπορεί όμως η  $M_{\max}$  να εκφρασθεί ως προς την άγνωστη τιμή της εξωτερικής φόρτισης, θα πρέπει η φόρτιση να είναι τέτοια που να επιτρέπει την εμφάνιση της  $M_{\max}$  σε γνωστή ή εύκολα προσδιορίσιμη διατομή της δοκού (π.χ. ομοιόμορφη φόρτιση σε όλο το μήκος αμφιερείστου, συγκεντρωμένο φορτίο, κλπ).

Τότε, υπολογίζεται η  $W_{\text{υπ}}$  που αντιστοιχεί στη διατομή της  $M_{\max}$ , ενώ από τη σχέση:

$$M_{\max} \leq W_{\text{υπ}} \cdot \sigma_{\text{επ}}$$

προσδιορίζεται η τιμή της  $M_{\max}$ , η οποία, σαν συνάρτηση του **άγνωστου** εξωτερικού φορτίου, οδηγεί τελικά στον υπολογισμό του.

## 16 – Έλεγχος σε διάτμηση

Ανάλογα προς την κάμψη αντιμετωπίζεται και το πρόβλημα της διάτμησης. Όμως η εφαρμογή της εδώ θα περιοριστεί σε δοκούς οι οποίες έχουν τη μορφή χαλύβδινων ελασμάτων, ή είναι ορθογωνικής διατομής.

Από τις σχέσεις:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{b \cdot J_x},$$

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_{\max}}{F} \quad \text{και} \quad \tau_{\max} \leq \tau_{\text{επ}},$$

προκύπτουν οι παρακάτω συνδυασμοί ανισοϊσοτήτων:

- για **χαλύβδινα** ελάσματα:  $\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{b \cdot J_x} \leq \tau_{\text{επ}}$  (i)

- για δοκούς **ορθογωνικής** διατομής:  $\tau_{\text{υπ}, \max} = 1,5 \frac{Q_{\max}}{F} \leq \tau_{\text{επ}}$ . (ii)

### 1. Έλεγχος τάσεων

Υπολογίζεται η μέγιστη τέμνουσα δύναμη  $Q_{\max}$  της δοκού και το εμβαδόν  $F$  στη διατομή της  $Q_{\max}$ . Για να υπάρχει ασφάλεια θα πρέπει κατά περίπτωση να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση (i) ή η (ii).

Σημειώνεται ότι για χαλύβδινα ελάσματα, τα μεγέθη  $S_x$ ,  $J_x$  και  $b$  (πάχος κορμού), λαμβάνονται από πίνακες.

Σε μεταβαλλόμενη ορθογωνική διατομή, προσδιορίζονται εκλεκτικά ζεύγη τιμών  $Q$  και  $F$ . Ο μεγαλύτερος λόγος  $Q/F$  συγκρίνεται τότε με την  $2\tau_{\text{επ}}/3$ .

### 2. Εκλογή διατομής

Υπολογίζεται η  $Q_{\max}$ . Με δεδομένη την επιτρεπόμενη διατμητική τάση,  $\tau_{\text{επ}}$  του υλικού της δοκού εκλέγεται η απαιτούμενη διατομή  $F_{\text{απ}}$  από τη σχέση:

$$F_{\text{απ}} \geq 1,5 \frac{Q_{\max}}{\tau_{\text{επ}}} \quad \text{για ορθογωνική διατομή, ή}$$

$$\frac{b \cdot J_x}{S_x} \geq \frac{Q_{\max}}{\tau_{\text{επ}}} \quad \text{για χαλύβδινα ελάσματα (δοκιμαστικά)}$$

Βέβαια και οι δύο περιπτώσεις **σπανιότατα** οδηγούν στην εκλογή της διατομής, επειδή για την εκλογή, τον πρώτο λόγο έχει η κάμψη.

### 3. Φορτοϊκανότητα

Με δεδομένη την επιτρεπόμενη διατμητική τάση,  $\tau_{\text{επ}}$ , και τη γεωμετρία της διατομής, οδηγούμαστε στον καθορισμό της  $Q_{\max}$  χρησιμοποιώντας μία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$Q_{\max} \leq \frac{2}{3} F \cdot \tau_{\text{επ}} \quad \text{για ορθογωνική διατομή, ή}$$

$$Q_{\max} \leq \frac{J_x \cdot b \cdot \tau_{\text{επ}}}{S_x} \quad \text{για χαλύβδινα ελάσματα}$$

Όπως στην εκλογή της διατομής, έτσι και εδώ, **σπανιότατα** οδηγούμαστε στον καθορισμό της  $Q_{\max}$  από τη σχέση της φορτοϊκανότητας.

## 17 – Παρατηρήσεις

Από όσα μέχρι στιγμής αναφέρθηκαν για την κάμψη, προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι τάσεις θλίψης και εφελκυσμού που αναπτύσσονται και παίζουν πρωτεύοντα ρόλο, είναι ανάλογες των αποστάσεων τους από την ουδέτερη γραμμή, με μέγιστες τιμές στις ακρότατες ίνες.

Αν επομένως το υλικό έχει την ίδια αντοχή σε θλίψη και εφελκυσμό, είναι λογικό οι διατομές να εκλέγονται έτσι, ώστε το κεντροειδές τους να βρίσκεται στο μέσον του ύψους των.

Τον όρο αυτό πληρούν π.χ. οι διατομές **I**, **J**, **Z** των χαλύβδινων ελασμάτων, που έχουν το μεγαλύτερο μέρος του υλικού τους συγκεντρωμένο στα πέλαμα, ώστε

να έχουν μεγαλύτερη ροπή αδράνειας  $J_x$ , δηλαδή μικρότερες τιμές στις ακρότατες τάσεις και τελικά οικονομικότερη και καλύτερη εκμετάλλευση του υλικού.

Αν η διατομή δεν είναι συμμετρική ως προς την ουδέτερη γραμμή, όπως συμβαίνει π.χ. στις σιδηροδρομικές σιδηροτροχιές, τότε το υλικό τους ανάμεσα στην κεφαλή και τη βάση κατανέμεται έτσι ώστε το κεντροειδές της διατομής να βρίσκεται στο μέσον του ύψους της.

Για υλικά που έχουν μικρή αντοχή σε εφελκυσμό και μεγάλη σε θλίψη, όπως π.χ. συμβαίνει με το χυτοσίδηρο ή το σκυρόδεμα, η διατομή των δοκών τους είναι λογικό να είναι ασύμμετρη ως προς την ουδέτερη γραμμή, με αποστάσεις μάλιστα των ακρότατων ινών πάνω και κάτω ανάλογες προς τις επιτρεπόμενες τάσεις του υλικού σε εφελκυσμό και θλίψη αντίστοιχα, και έτσι η αντοχή της δοκού γίνεται η ίδια στις ακρότατες ίνες.

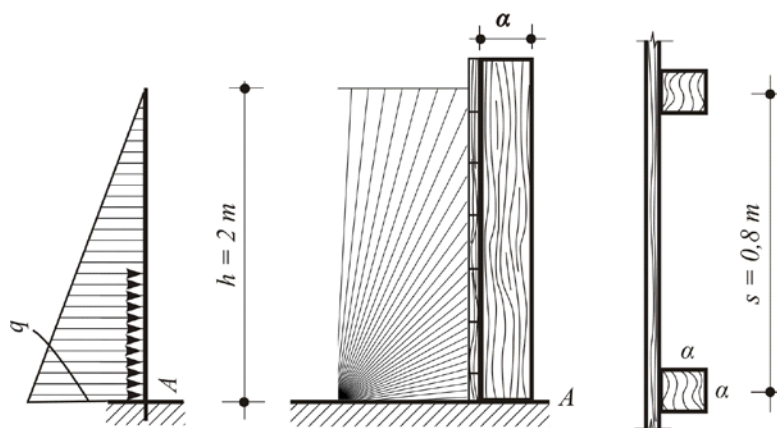
Σε μια διατομή σχήματος T π.χ., με κατάλληλη διαστασιολόγηση στο πέλμα και τον κορμό, το κεντροειδές της μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε θέση του άξονα συμμετρίας της.

## 18 – Παραδείγματα

1

Πρόχειρο φράγμα είναι κατασκευασμένο από οριζόντιες σανίδες που στηρίζονται σε κατακόρυφους ξύλινους στύλους πακτωμένους στο έδαφος. Οι στύλοι είναι τετραγωνικής διατομής και κατανέμονται σε ίσες αποστάσεις των 80 cm, ενώ η μέγιστη στάθμη του νερού είναι 2 m.

Αν  $\sigma_{\varepsilon\pi} = 80 \text{ kp/cm}^2$  και  $\tau_{\varepsilon\pi} = 10 \text{ kp/cm}^2$ , να καθοριστεί η ελάχιστη απαιτούμενη διάσταση  $a$  της διατομής του στύλου.



Σχ. 6.18.1

### Λύση

Αν το ειδικό βάρος του νερού είναι  $\gamma = 1 \text{ t/m}^3$ , από τα δεδομένα του προβλήματος και τη διαστασιολόγηση του σχήματος, προκύπτει ότι κάθε στύλος φορτίζεται με τριγωνικό φορτίο έντασης:

$$q = \gamma \cdot h \cdot s = 1 \cdot 2 \cdot 0,8 = 1,6 \text{ t/m} .$$

Επομένως η μέγιστη καμπτική ροπή  $M_{\max}$  του στύλου, θα εμφανιστεί στο σημείο A της πάκτωσης και θα είναι:

$$M_{\max} = \frac{q \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{1,6 \cdot 2^2}{6} = 1,067 \text{ tm}.$$

Για τη δοσμένη διατομή, η απαιτούμενη ροπή αντίστασης,  $W_{\alpha\pi}$ , είναι

$$W_{\alpha\pi} = \frac{bh^2}{6} = \frac{\alpha^3}{6}.$$

Για τον **έλεγχο σε κάμψη**, θα πρέπει:

$$\sigma_{\text{υπ},\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\alpha\pi}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \text{ή} \quad \frac{1,06667 \cdot 10^5 \cdot 6}{\alpha^3} \leq 80,$$

$$\text{οπότε} \quad a \geq \sqrt[3]{\frac{106.667 \cdot 6}{80}} = 19,99 \text{ cm}.$$

Εξ' άλλου, η μέγιστη τέμνουσα δύναμη  $Q_{\max}$  που εμφανίζεται στην πάκτωση, είναι:

$$Q_{\max} = \frac{1}{2} q \cdot h = \frac{1,6 \cdot 2}{2} = 1,6 \text{ t}.$$

Συνεπώς για τον έλεγχο σε διάτμηση θα πρέπει να είναι:

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_{\max}}{F_{\alpha\pi}} \leq \tau_{\varepsilon\pi}, \quad \text{ή} \quad F_{\alpha\pi} \geq \frac{1,5 Q_{\max}}{\tau_{\varepsilon\pi}}.$$

$$\text{Άρα:} \quad a^2 \geq \frac{1,5 \cdot 1600}{10} = 240 \quad \text{και} \quad a \geq 15,5 \text{ cm}.$$

Από τις τιμές του  $a$  που προέκυψαν από τους δύο ελέγχους, εκλέγεται η **μεγαλύτερη  $a = 20 \text{ cm}$** , που εξασφαλίζει για τις ορθές και διατμητικές τάσεις, τιμές μικρότερες από τις επιτρεπόμενες.

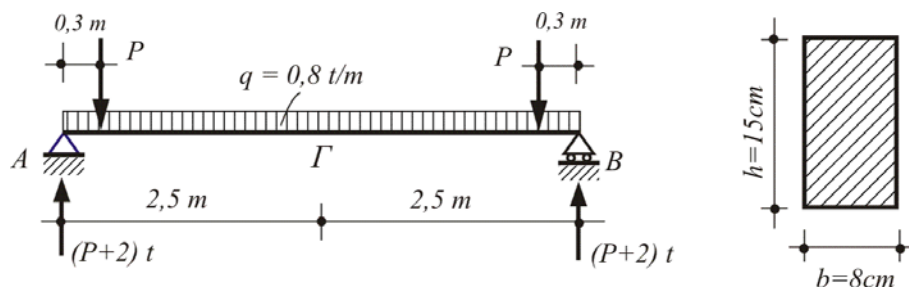
**2**

Η αμφιέριστη δοκός του σχήματος είναι από χάλυβα ορθογωνικής διατομής και φέρει ομοιόμορφο φορτίο, το οποίο, μαζί με το ίδιο βάρος της είναι  $q = 0,8 \text{ t/m}$ .

Αν  $\sigma_{\varepsilon\pi} = 1400 \text{ kp/cm}^2$  και  $\tau_{\varepsilon\pi} = 800 \text{ kp/cm}^2$ , να προσδιοριστούν:

1) Η μέγιστη τιμή των ίσων φορτίων  $P$  που πρέπει να τοποθετηθούν στις ίσες αποστάσεις  $\alpha = 30 \text{ cm}$  από τις στηρίξεις, και

2) Η μέγιστη απόσταση  $\alpha$ , ώστε ο προσδιορισμός της  $P_{\max}$  να γίνεται αποκλειστικά από τον έλεγχο σε διάτμηση.



Σχ. 6.18.2

**Λύση**

1. Ο καθορισμός της  $P_{\max}$  θα προκύψει από τον έλεγχο σε κάμψη και διάτμηση.

Οι αντιδράσεις της δοκού, λόγω συμμετρίας, είναι:

$$A = B = P + \frac{q \cdot l}{2} = P + \frac{0,8 \cdot 5}{2} = (P + 2)t$$

$$\text{ή} \quad A = B = (P + 2) \cdot 1000 \text{ kp} .$$

Η κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M περιττεύει εδώ, επειδή οι μέγιστες τιμές της τέμνουσας δύναμης  $Q_{\max}$  και της καμπτικής ροπής  $M_{\max}$ , εμφανίζονται στις προφανείς διατομές της στήριξης και του μέσου Γ της δοκού αντίστοιχα, και είναι:

$$Q_{\max} = Q_A^{\delta\epsilon\xi} = A = (P + 2) \cdot 1000 \text{ kp, ανεξάρτητη του } \alpha = 0,3 \text{ m,}$$

$$M_{\max} = M_{\Gamma} = (P + 2)2,5 - P \cdot 2,2 - 0,8 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = (0,3P + 2,5) \text{ tm,}$$

$$\begin{aligned} \text{ή πιο απλά: } M_{\max} &= P \cdot a + \frac{q \cdot l^2}{8} = P \cdot 0,3 + \frac{0,8 \cdot 5^2}{8} = (0,3P + 2,5) \text{ tm} \\ &= (0,3P + 2,5) \cdot 10^5 \text{ kp} \cdot \text{cm} . \end{aligned}$$

Η ροπή αντίστασης και το εμβαδόν της διατομής είναι αντίστοιχα:

$$W_{\upsilon\pi} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{8 \cdot 15^2}{6} = 300 \text{ cm}^3 ,$$

$$F_{\upsilon\pi} = b \cdot h = 8 \cdot 15 = 120 \text{ cm}^2 .$$

**Έλεγχος σε κάμψη**

$$\text{Είναι: } \sigma_{\upsilon\pi, \max} = \frac{M_{\max}}{W_{\upsilon\pi}} \leq \sigma_{\epsilon\pi} \Rightarrow M_{\max} \leq W_{\upsilon\pi} \cdot \sigma_{\epsilon\pi} .$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } (0,3P + 2,5) \cdot 10^5 &\leq 300 \cdot 1400 \Rightarrow 0,3P + 2,5 \leq 4,2 \\ &\Rightarrow 0,3P \leq 1,7 \text{ και } \mathbf{P \leq 5,667 \text{ t.}} \end{aligned}$$

**Έλεγχος σε διάτμηση**

$$\text{Είναι: } \tau_{\upsilon\pi, \max} = 1,5 \frac{Q_{\max}}{F_{\upsilon\pi}} \leq \tau_{\epsilon\pi} \Rightarrow Q_{\max} \leq \frac{F_{\upsilon\pi} \cdot \tau_{\epsilon\pi}}{1,5} .$$

$$\text{Άρα: } (P + 2) \cdot 1000 \leq \frac{120 \cdot 800}{1,5} \Rightarrow P + 2 \leq 64 \text{ και } \mathbf{P \leq 62 \text{ t.}}$$

Συνεπώς εκλέγεται:  $P_{\max} = 5.667 \text{ kp}$ , επειδή ικανοποιεί και τους δύο ελέγχους.

2. Είναι προφανές ότι η  $Q_{\max}$  είναι ανεξάρτητη από την τιμή του  $\alpha$ . Για να προκύψει ο προσδιορισμός της  $P_{\max}$  αποκλειστικά από το διατμητικό έλεγχο, θα πρέπει το  $\alpha$  να είναι τέτοιο, ώστε **η κάμψη να παραλαμβάνει όλο το φορτίο που προκύπτει από το διατμητικό έλεγχο**, και συνεπώς ο καμπτικός έλεγχος θα πρέπει να ισχύει για  $P = 62 \text{ t}$ . Άρα:

$$(\alpha \cdot 62 + 2,5) \cdot 10^5 \leq 300 \cdot 1400 \Rightarrow 62\alpha + 2,5 \leq 4,2$$

$$62\alpha \leq 1,7 \text{ και } \alpha \leq 0,0274 \text{ m ή } \alpha \leq 2,74 \text{ cm.}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει αρκετά εύγλωτα το πόσο κοντά στη στήριξη πρέπει να είναι ένα τόσο μεγάλο συγκεντρωμένο φορτίο, ώστε ο έλεγχος σε διάτμηση να παίζει τον αποφασιστικό ρόλο στην εκλογή του φορτίου ή της διατομής.

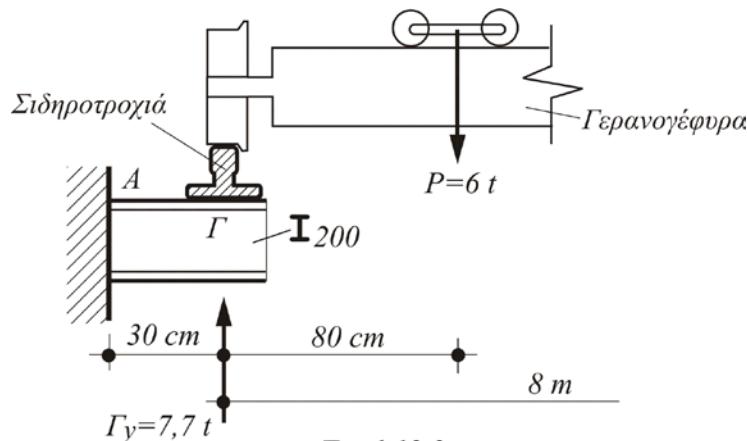
3

Γερανογέφυρα μήκους 8 m κινείται πάνω σε σιδηροτροχιά, η οποία στηρίζεται σε πρόβολο μικρού μήκους από υψίκορμη δοκό I<sub>200</sub>. Το ίδιο βάρος της γερανογέφυρας είναι 3 t, ενώ το ωφέλιμο φορτίο της, που είναι P = 6 t, βρίσκεται στη (δυσμενή) θέση που φαίνεται στο σχήμα 6.18.3. Το ίδιο βάρος της σιδηροτροχιάς επιβαρύνει τον πρόβολο με φορτίο 800 kp.

Αν  $\sigma_{\text{επ}} = 1400 \text{ kp/cm}^2$  και  $\tau_{\text{επ}} = 800 \text{ kp/cm}^2$ , ζητείται να γίνει ο στατικός έλεγχος αντοχής του προβόλου (έλεγχος των τάσεων), και σε περίπτωση μη επάρκειας της διατομής, να προταθεί νέα.

### Λύση

Η συνολική δύναμη  $\Gamma_y$  που ενεργεί στο σημείο Γ, όπου η σιδηροτροχιά στηρίζεται στον πρόβολο, είναι το άθροισμα των παρακάτω επί μέρους δυνάμεων:



α) Του ίδιου βάρους της σιδηροτροχιάς:  $\Sigma = 800 \text{ kp}$ .

β) Του ίδιου βάρους της γερανογέφυρας:  $\Gamma = 3.000/2 = 1.500 \text{ kp}$ , και

γ) Του μέρους του ωφέλιμου φορτίου που προκύπτει από τη δοσμένη

$$\text{δυσμενή θέση: } \Phi = 6.000 \frac{8 - 0,80}{8} = 5.400 \text{ kp} .$$

$$\text{Άρα: } \Gamma_y = \Sigma + \Gamma + \Phi = 800 + 1.500 + 5.400 = 7.700 \text{ kp} .$$

Η μέγιστη καμπτική ροπή, που εμφανίζεται στη διατομή A (στήριξη του προβόλου), είναι:

$$M_{\text{max}} = 7.700 \cdot 30 = 231.000 \text{ kp} \cdot \text{cm} .$$

Εξ' άλλου, αμελώντας το ίδιο βάρος του προβόλου, προκύπτει ότι η μέγιστη τέμνουσα, που εμφανίζεται στη στήριξη A, ισούται προς  $\Gamma_y$ , δηλαδή:

$$Q_{\max} = 7.700 \text{ kp} .$$

Από τους πίνακες χαλύβδινων ελασμάτων (δείτε το παράρτημα), για υψίκορμο  $I_{200}$ , είναι:

$$\text{Ροπή αδράνειας: } J_x = 2.140 \text{ cm}^4$$

$$\text{Ροπή αντίστασης: } W_x = 214 \text{ cm}^3$$

$$\text{Στατική ροπή: } S_x = 125 \text{ cm}^3$$

$$\text{Πάχος κορμού: } b = 7,5 \text{ mm} = 0,75 \text{ cm} .$$

Επομένως είναι:

$$\sigma_{\text{υπ},\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{231.000}{214} = 1.079,44 \text{ kp/cm}^2 < \sigma_{\text{επ}} = 1.400 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau_{\text{υπ},\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{b \cdot J_x} = \frac{7.700 \cdot 125}{0,75 \cdot 2.140} = 599,69 \text{ kp/cm}^2 < \tau_{\text{επ}} = 800 \text{ kp/cm}^2 .$$

## 19 – Οι παραμορφώσεις

Όταν σχεδιάζουμε μια δοκό με σκοπό την κατασκευή της, δεν αρκεί μόνο να ξέρουμε ότι οι τιμές των τάσεων που θα αναπτυχθούν στο υλικό της είναι μικρότερες ή ίσες προς τις επιτρεπόμενες.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι ανάγκη να ξέρουμε καλά και το μέγεθος των αναπόφευκτων ελαστικών **παραμορφώσεων** που θα προκληθούν από τα εξωτερικά φορτία, δεδομένου ότι, για αισθητικούς, λειτουργικούς ή πρακτικούς λόγους, επιβάλλεται, οι παραμορφώσεις να μην ξεπερνούν ορισμένα όρια.

Έτσι προέκυψε η ανάγκη να μελετηθούν οι νόμοι παραμόρφωσης μιας δοκού και ειδικότερα να προσδιοριστεί ακριβώς το σχήμα της **ελαστικής γραμμής**, δηλαδή του καμπύλου άξονα της δοκού μετά την κάμψη.

Για τον υπολογισμό των καμπτικών παραμορφώσεων, προϋποτίθεται ότι η ράβδος έχει:

- α) αρχικά ευθύγραμμο άξονα
- β) διατομή με σταθερή - τουλάχιστον κατά τμήματα - ροπή αδράνειας
- γ) σταθερό μέτρο ελαστικότητας  $E$  και γενικά ισχύουν οι βασικές προϋποθέσεις της κάμψης που αναφέρθηκαν στην ενότητα 12 (σελ. 161,162).

Ο άξονας της δοκού μετά την καμπτική παραμόρφωση, λόγω της επιμήκυνσης των κάτω ινών με ταυτόχρονη επιβράχυνση των πάνω, καμπλώνεται, στρέφοντας τα κοίλα προς τα πάνω.

Στοιχειώδες τμήμα της δοκού μήκους  $dz$ , που αρχικά ήταν πρίσμα ορθογωνικό, παρουσιάζεται μετά την παραμόρφωση, όπως φαίνεται στο σχήμα, με τις ακραίες του διατομές επίπεδες, λόγω της αρχής Bernoulli, αλλά και συγκλίνουσες, σχηματίζοντας μεταξύ τους σχετική γωνία  $d\phi$ , με ίχνος πάνω στη σελίδα το  $O$ , που είναι το κέντρο καμπυλότητας. Αντίστοιχο σχήμα γνωρίσαμε ήδη στην ενότητα 13α (σελ. 162) που αφορούσε τις ορθές τάσεις.

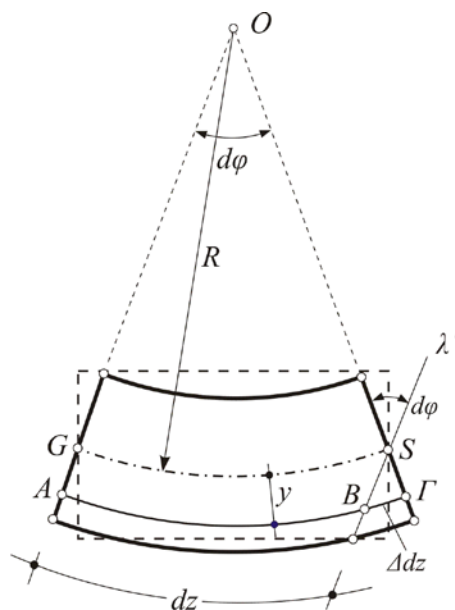
Με σχέσεις λοιπόν ανάλογες μ' εκείνες που κάναμε για τις ορθές τάσεις, αν από το κεντροειδές της δεξιάς διατομής φέρουμε επίπεδο παράλληλο προς την αριστερή, παρατηρούμε ότι η τυχαία ίνα ABΓ, σε απόσταση  $y$  από την ουδέτερη γραμμή, επιμηκύνεται κατά  $\Delta dz$ . Με τους συμβολισμούς του σχήματος, είναι:

$$dz = R \cdot d\phi \quad \text{και} \quad \Delta dz = y \cdot d\phi \quad (\alpha)$$

$$\text{Άρα:} \quad \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y \cdot d\phi}{R \cdot d\phi} = \frac{y}{R}.$$

Ισχύοντος όμως του νόμου του Hooke, είναι:

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\frac{M}{J} y}{E} = \frac{M \cdot y}{E \cdot J}, \quad \text{και συνεπώς}$$



Σχ. 6.19.1

$$\frac{y}{R} = \frac{M \cdot y}{E \cdot J} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{EJ} \quad (\beta)$$

Στην περίπτωση της καθαρής κάμψης, όπου η ροπή  $M$  είναι σταθερή, η τελευταία σχέση δείχνει φανερά ότι η ελαστική γραμμή είναι **κυκλικό τόξο** με σταθερή ακτίνα

$$R = \frac{EJ}{M}.$$

Από την πρώτη των σχέσεων (α), σε συνδυασμό με την τελευταία (β), προκύπτει:

$$d\phi = \frac{1}{R} dz = \frac{M}{EJ} dz.$$

Η ολοκλήρωση της τελευταίας σχέσης σε όλο το μήκος  $l$  της δοκού, δίνει τη σχετική γωνία στροφής των ακραίων διατομών:



$$\varphi = \int_0^l \frac{M}{EJ} dz = \frac{M}{EJ} \int_0^l dz = \frac{M}{EJ} l \quad (\text{rad})$$

Η ποσότητα  $EJ/l$ , σε αντιστοιχία προς την ποσότητα  $GJ_p/l$ , που γνωρίσαμε ήδη στη στρέψη, ονομάζεται δυσκαμψία (ή ακαμψία) της ράβδου και παριστάνει την καμπτική ροπή που χρειάζεται η ράβδος για να στραφούν οι ακραίες διατομές της κατά μοναδιαία γωνία στροφής.

**Στην περίπτωση της γενικής κάμψης**, όπου με τη μεταβαλλόμενη καμπτική ροπή  $M$  εμφανίζεται και τέμνουσα δύναμη  $Q$ , η σχέση (β) εξακολουθεί να ισχύει, επειδή η επίδραση της  $Q$  στην παραμόρφωση της δοκού είναι αμελητέα.

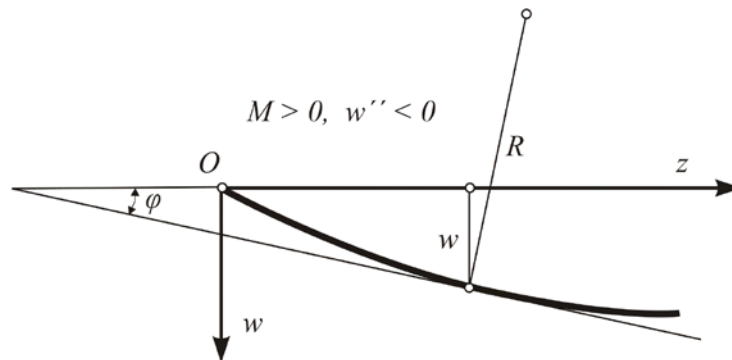
Όμως η καμπυλότητα  $1/R$  αλλάζει με τη μεταβολή της  $M$ , με αποτέλεσμα η ελαστική γραμμή να **μην** είναι πλέον κύκλος αλλά **καμπύλη**.

Για τον καθορισμό της εξίσωσης της ελαστικής γραμμής,  $w = f(z)$ , χρησιμοποιούμε γνωστό τύπο της διαφορικής γεωμετρίας, που εκφράζει την καμπυλότητα  $1/R$  τυχόντος σημείου της καμπύλης, συναρτήσει της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης και αποδεικνύεται στην ενότητα 5 του Παραρτήματος (σελ. 243).

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{w''}{\sqrt{(1 + w'^2)^3}}$$

Στην παραπάνω σχέση,  $w$  είναι η κατακόρυφη μετατόπιση (θετική προς τα κάτω) σημείου του άξονα της ράβδου, την οποία θα ονομάζουμε στο εξής βέλος κάμψης του σημείου.

$$\text{Ο όρος: } w^2 = \varepsilon \phi^2 \approx \phi^2,$$



Σχ. 6.19.2

λόγω των πολύ μικρών τιμών της γωνίας  $\phi$  αμελείται σε σχέση με τη μονάδα στην υπόρριζη ποσότητα, οπότε τελικά μένει:

$$\frac{1}{R} = \pm w'' \quad (\gamma)$$

Απαλείφοντας το  $1/R$  μεταξύ των σχέσεων (β) και (γ), προκύπτει:

$$w'' = \pm \frac{M}{EJ} \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 w}{dz^2} = \pm \frac{M}{EJ}$$

Η τελευταία σχέση είναι η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής της δοκού. Από τα δύο πρόσημα που εμφανίζονται στη σχέση αυτή, εκλέγεται το αρνητικό (-), επειδή το σύστημα των συντεταγμένων  $zOw$  έχει εκλεγεί έτσι, ώστε οι προς τα κάτω υποχωρήσεις της δοκού να λαμβάνονται θετικές. Αν λοιπόν η καμπύλη του άξονα στρέφει τα κοίλα προς τα **πάνω**, τότε:

α) η καμπτική ροπή  $M$  είναι προφανώς θετική (+), αφού έχουμε εφελκυσμό της κάτω ίνας, ενώ

β) η  $w''$  είναι αρνητική (-), επειδή η ελαστική γραμμή στρέφει τα κοίλα στην αντίθετη κατεύθυνση από τα θετικά  $w$ .

Έτσι λοιπόν **τα μεγέθη  $M$  και  $w''$  είναι πάντα ετερόσημα**, και επομένως η τελευταία σχέση γράφεται τελικά:

$$EJw'' = -M. \quad (\delta)$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι στα διαγράμματα των καμπτικών ροπών, οι θετικές ροπές λαμβάνονται προς τα κάτω για να συμφωνούν στη μορφή οι καμπύλες του διαγράμματος των ροπών, με εκείνες της ελαστικής γραμμής.

Για να βρούμε τώρα την εξίσωση της ελαστικής γραμμής  $w = f(z)$ , πρέπει, αφού πρώτα εκφράσουμε χωριστά στο κάθε τμήμα της δοκού τη ροπή  $M$  συναρτήσει της απόστασης  $z$  από το άκρο της, να ολοκληρώσουμε τη διαφορική εξίσωση (δ) **δύο φορές**. Έτσι παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$EJw' = -\int Mdz + C_1, \quad (\epsilon) \quad \text{και}$$

$$EJw = \int \left( -\int Mdz + C_1 \right) dz + C_2. \quad (\zeta)$$

Οι σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  προσδιορίζονται από τις λεγόμενες **οριακές συνθήκες**, οι οποίες ποικίλουν ανάλογα με τον τρόπο στήριξης και φόρτισης του φορέα.

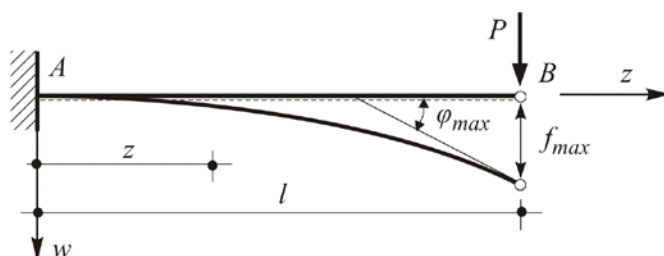
Η εξίσωση (ζ) είναι η ζητούμενη εξίσωση της ελαστικής γραμμής και παριστάνει τις μεταβολές των βελών κάμψης  $f$  κατά μήκος της δοκού.

Η εξίσωση (ε), που ονομάζεται και εξίσωση των κλίσεων, εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της ελαστικής γραμμής σε κάθε σημείο της, δηλαδή μ' άλλα λόγια τη στροφή που έπαθε κάθε διατομή στη διάρκεια της κάμψης.

## Παραδείγματα

1

Στον πρόβολο του σχήματος, που φέρει στο ελεύθερο άκρο του φορτίο  $P$ , ζητείται η εξίσωση της ελαστικής γραμμής (Ε.Γ.), η μέγιστη κλίση της και το μέγιστο βέλος κάμψης.



Σχ. 6.20.1

**Λύση**

Η καμπτική ροπή σε διατομή που απέχει απόσταση  $z$  από την πάκτωση, είναι:

$$M = -P(l-z)$$

Άρα η εξίσωση ( $\delta$ ) γράφεται:

$$EJw'' = P(l-z)$$

Η πρώτη ολοκλήρωση αυτής, δίνει:

$$EJw' = \int P(l-z) dz + C_1 = Plz - P\frac{z^2}{2} + C_1. \quad (\alpha_1)$$

Η δεύτερη ολοκλήρωση, δίνει:

$$EJw = Pl\frac{z^2}{2} - P\frac{z^3}{6} + C_1z + C_2 \quad (\beta_1)$$

Οι σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  θα προσδιοριστούν από τις οριακές συνθήκες, ως εξής:

1) Για  $z=0$  θα είναι  $w=0$ , επειδή στην πάκτωση είναι αδύνατο να υπάρχει κατακόρυφη μετακίνηση του άξονα της δοκού.

Συνεπώς η σχέση ( $\beta_1$ ) θα δώσει:

$$0 = 0 - 0 + 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

2) Για  $z=0$  θα είναι  $w'=0$ , επειδή στην πάκτωση είναι αδύνατο να υπάρξει στροφή του άξονα της δοκού και η εφαπτομένη παραμένει οριζόντια.

Άρα η ( $\alpha_1$ ) θα γίνει:

$$0 = 0 - 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0,$$

και συνεπώς οι σχέσεις ( $\alpha_1$ ) και ( $\beta_1$ ) γράφονται αντίστοιχα:

$$EJw' = Plz - P\frac{z^2}{2} \quad (\gamma_1) \quad \text{και}$$

$$EJw = Pl\frac{z^2}{2} - P\frac{z^3}{6} \quad (\delta_1)$$

Η εξίσωση  $\delta_1$  είναι η ζητούμενη εξίσωση της ελαστικής γραμμής.

Η μέγιστη κλίση της προκύπτει από τη ( $\gamma_1$ ) για  $z=l$ .

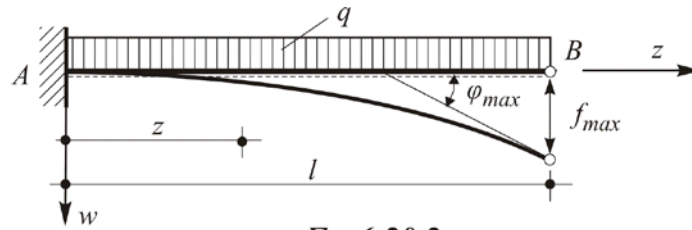
$$EJw' = Pl^2 - \frac{Pl^2}{2} = \frac{Pl^2}{2} \Rightarrow w' = \varepsilon\varphi \approx \varphi \approx \varphi_{\max} = \frac{Pl^2}{2EJ}$$

Το μέγιστο βέλος κάμψης προκύπτει από τη ( $\delta_1$ ), για  $z=l$ .

$$EJw = \frac{Pl^3}{2} - \frac{Pl^3}{6} = \frac{Pl^3}{3} \Rightarrow w = f = f_{\max} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

2

Στον πρόβολο του σχήματος που φορτίζεται με ομοιόμορφη φόρτιση  $q$ , ζητούνται η εξίσωση της ελαστικής γραμμής, η  $\varphi_{\max}$  και το  $f_{\max}$ .



Σχ. 6.20.2

### Λύση

Με σκέψεις ανάλογες εκείνων του προηγούμενου παραδείγματος, προκύπτει διαδοχικά:

$$M = -q \frac{(l-z)^2}{2}. \text{ Άρα:}$$

$$EJw'' = q \frac{(l-z)^2}{2} = \frac{q}{2}(l^2 - 2lz + z^2), \text{ και}$$

$$EJw' = \int \frac{q}{2}(l^2 - 2lz + z^2) dz + C_1 = \frac{ql^2}{2}z - ql \frac{z^2}{2} + q \frac{z^3}{6} + C_1$$

$$EJw = ql^2 \frac{z^2}{4} - ql \frac{z^3}{6} + q \frac{z^4}{24} + C_1 z + C_2$$

Οριακές συνθήκες:

1) Για  $z = 0 \Rightarrow w = 0$ , άρα  $C_2 = 0$ ,

2) Για  $z = 0 \Rightarrow w' = 0$ , άρα  $C_1 = 0$ , οπότε:

$$EJw' = \frac{ql^2}{2}z - \frac{ql}{2}z^2 + \frac{q}{6}z^3 \quad (\alpha_2) \text{ και}$$

$$EJw = \frac{ql^2}{4}z^2 - \frac{ql}{6}z^3 + \frac{q}{24}z^4 \quad (\beta_2)$$

Χαρακτηριστικό είναι ότι οι εξισώσεις  $(\alpha_2)$  και  $(\beta_2)$  – όπως και οι αντίστοιχες του προηγούμενου παραδείγματος – είναι **ομογενείς**. Δηλαδή κάθε όρος της εξίσωσης κλίσεων εκφράζει δύναμη x μήκος<sup>2</sup>, ενώ κάθε όρος της εξίσωσης της ελαστικής γραμμής εκφράζει δύναμη x μήκος<sup>3</sup>.

Από τις εξισώσεις  $(\alpha_2)$  και  $(\beta_2)$ , για  $z = l$ , προκύπτει αντίστοιχα:

$$w'_{\max} = \varphi_{\max} = \frac{ql^3}{6EJ} \quad \text{και}$$

$$w = f_{\max} = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

## 21 – Οι παραμορφώσεις με τη μέθοδο της επιφανειακής ροπής

Για τον καθορισμό της ελαστικής γραμμής με τον τρόπο που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, είναι δυνατόν, σε ορισμένες - όχι λίγες - περιπτώσεις, να οδηγηθούμε σε κουραστικούς και δύσκολους μαθηματικούς υπολογισμούς. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορούμε να προσφύγουμε στη μέθοδο που θα περιγράψουμε παρακάτω, γνωστή και σαν **μέθοδο της επιφανειακής ροπής**, που παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από το Γάλλο De Saint Venan και αργότερα αναπτύχθηκε από το Γερμανό Otto Mohr και τον Αμερικανό Charles Greene, το 1873.

Το γενικότερο σκεπτικό στο οποίο στηρίζεται η μέθοδος αυτή, είναι ότι αν δοθεί μία δοκός, είναι δυνατό να εκλεγεί κατάλληλα μια **ιδεατή δοκός** ίσου μήκους που θα φορτίζεται με «**κατάλληλα**» φορτία. Τότε τα διαγράμματα *τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών* της ιδεατής δοκού εκφράζουν αντίστοιχα τις κλίσεις και υποχωρήσεις της πραγματικής δοκού που δόθηκε αρχικά.

Ο όρος 'ιδεατή' χρησιμοποιείται εδώ για να εκφράσει και μία ιδιομορφία στον **τρόπο στήριξης** της νέας δοκού, η οποία κατά τα άλλα παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες με την πραγματική.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια ιδεατή δοκό  $i$ , η οποία, κατά μήκος του άξονά της,  $z$ , φορτίζεται με ιδεατό φορτίο  $q_i$ .

Τότε στις διατομές της θα εμφανιστούν τέμνουσες δυνάμεις  $Q_i$  και καμπτικές ροπές  $M_i$  που θα ικανοποιούν τις γνωστές βασικές σχέσεις (ii) και (i) της ενότητας 7 του κεφαλαίου 6 (σελ. 139)

$$\frac{dM_i}{dz} = Q_i \quad (\alpha) \quad \text{και}$$

$$\frac{dQ_i}{dz} = -q_i \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 M_i}{dz^2} = -q_i. \quad (\beta)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε μια πραγματική δοκό η οποία φορτίζεται με φορτίο  $q$ , θα εμφανιστούν πάλι τα μεγέθη  $Q$  και  $M$ , που θα συνοδεύονται με υποχωρήσεις,  $w$ , τέτοιες, ώστε να είναι

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{M}{EJ}. \quad (\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι, αν για την ιδεατή δοκό επιλέξουμε σαν «κατάλληλο» φορτίο το

$$q_i = \frac{M}{EJ},$$

που είναι ουσιαστικά το **διάγραμμα M** της πραγματικής δοκού, του οποίου οι τεταγμένες έχουν διαιρεθεί **δια** του σταθερού **μέτρου δυσκαμψίας EJ**, η σχέση (β) θα δώσει

$$\frac{d^2 M_i}{dz^2} = -q_i = -\frac{M}{EJ},$$

ή λόγω της ( $\gamma$ ), θα είναι

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{M}{EJ} = \frac{d^2 M_i}{dz^2}$$

Άρα:  $w = M_i$  και συνεπώς  $\frac{dw}{dz} = w' = Q_i$ .

Εφ' όσον λοιπόν η ιδεατή δοκός φορτιστεί με φορτίο  $q_i = M/EJ$ , οι δύο τελευταίες σχέσεις δικαιολογούν απόλυτα το γενικό σκεπτικό της μεθόδου που αναφέρθηκε αρχικά, ότι δηλαδή στις **υποχωρήσεις  $w$  της πραγματικής δοκού** αντιστοιχούν οι **καμπτικές ροπές  $M_i$  της ιδεατής** και στις **κλίσεις  $w'$  της ελαστικής γραμμής της πραγματικής δοκού** οι **τέμνουσες δυνάμεις  $Q_i$  της ιδεατής**.

Όμως η ιδεατή δοκός θα πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να πληρούνται επί πλέον και οι **οριακές συνθήκες**, που ισχύουν για τις υποχωρήσεις και τις κλίσεις της πραγματικής δοκού. Και εδώ είναι που η ιδεατή δοκός εμφανίζει την ιδιομορφία της, στον τρόπο στήριξης.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω:

**1.** Σε σημείο **πάκτωσης της πραγματικής δοκού**, όπου είναι  $w = 0$  και  $w' = 0$ , θα πρέπει η ιδεατή δοκός να έχει **ελεύθερο** άκρο, επειδή μόνον τότε θα είναι  $M_i = 0$  και  $Q_i = 0$ .

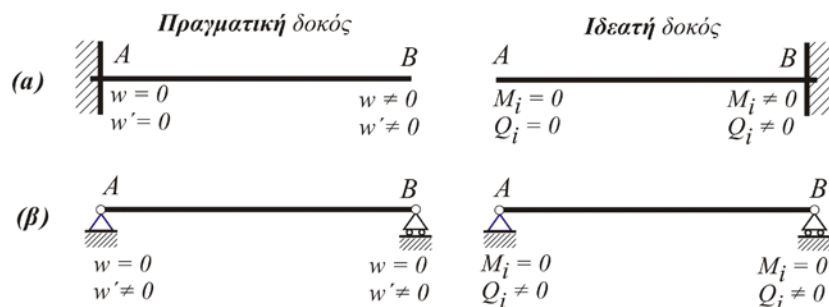
**2.** Σε **ελεύθερο άκρο της πραγματικής δοκού**, όπου είναι  $w \neq 0$  και  $w' \neq 0$ , θα πρέπει η ιδεατή δοκός να έχει **πάκτωση**, επειδή μόνον τότε θα είναι  $M_i \neq 0$  και  $Q_i \neq 0$ .

**3.** Σε σημείο **απλής στήριξης** της πραγματικής δοκού με άρθρωση ή κύλιση, όπου είναι  $w = 0$  και  $w' \neq 0$ , θα πρέπει η ιδεατή δοκός να έχει **πάλι απλή στήριξη**, επειδή μόνον τότε θα είναι  $M_i = 0$  και  $Q_i \neq 0$ .

Όστε λοιπόν, αν η **πραγματική** δοκός είναι:

α) Πρόβολος AB με πάκτωση στο A, τότε και η ιδεατή δοκός θα είναι πρόβολος αλλά με πάκτωση στο B (Σχ. 6.21.1 α).

#### ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ



Σχ. 6.21.1

β) Αμφιέριστη, τότε η ιδεατή δοκός θα είναι **πάλι αμφιέριστη** (περ β)

Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται η ιδεατή δοκός σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση πραγματικής δοκού.

Σε ότι αφορά τον προσδιορισμό των παραμορφώσεων (κλίσεων και υποχωρήσεων) της πραγματικής δοκού, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Κατασκευάζουμε κατά τα γνωστά το διάγραμμα καμπτικών ροπών της πραγματικής δοκού με τη δοθείσα φόρτιση.

2. Στην περίπτωση που η δοκός έχει μεταβαλλόμενη κατά τμήματα ροπή αδράνειας, με τιμές, έστω  $J_0, J_1, J_2, \dots$ , ανάγουμε τις τιμές του διαγράμματος ροπών σε άλλες, που αντιστοιχούν σε φορέα **ενιαίας** ροπής αδράνειας, έστω  $J_0$ . Η αναγωγή γίνεται πολλαπλασιάζοντας την τιμή της  $M$  που αντιστοιχεί σε διατομή ροπής αδράνειας π.χ.  $J_2$ , επί  $J_0/J_2$ . Είναι αυτονόητο ότι η ανηγμένη τιμή της  $M$  που αντιστοιχεί σε διατομή ροπής αδράνειας  $J_0$ , θα είναι  $M' = M \cdot J_0/J_2 = M$ .

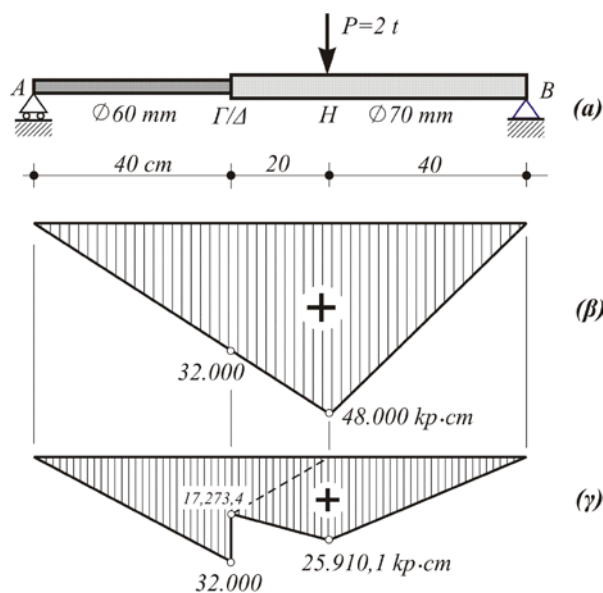
3. Θεωρώντας κατά περίπτωση το ανηγμένο ή κανονικό διάγραμμα καμπτικών ροπών της πραγματικής δοκού σαν συνεχές φορτίο της ιδεατής, κατασκευάζουμε το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών της ιδεατής δοκού, οπότε παίρνουμε αντίστοιχα τις κλίσεις και υποχωρήσεις, δηλαδή τις παραμορφώσεις της πραγματικής δοκού πολλαπλασιασμένες επί  $EJ_0$ .

Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν ζητείται η κλίση ή το βέλος κάμψης σε οποιαδήποτε **μοναδική** διατομή της δοκού, επειδή τότε ο υπολογισμός των μεγεθών αυτών είναι δυνατός χωρίς την εξεύρεση των αντιστοίχων εξισώσεων για όλο το μήκος της δοκού.

### Παράδειγμα

Η δοκός του σχήματος αποτελείται από δύο κυλινδρικές ράβδους που συνδέονται κεντρικά μεταξύ τους. Με την εικονιζόμενη διαστασιολόγηση και φόρτιση, αν  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ , να υπολογιστούν:

- Οι μεταβολές των γωνιών στις στηρίξεις A και B και
- το βέλος κάμψης στη διατομή H όπου ενεργεί το φορτίο P.



Σχ. 6.21.2

**Λύση**

Η αντίδραση Α και οι καμπτικές ροπές στις διατομές Γ/Δ και Η, είναι αντίστοιχα:

$$A = \frac{2.000 \cdot 40}{100} = 800 \text{ kp}$$

$$M_{\Gamma/\Delta} = 800 \cdot 40 = 32.000 \text{ kp} \cdot \text{cm}$$

$$M_H = 800 \cdot 60 = 48.000 \text{ kp} \cdot \text{cm}$$

Έτσι προκύπτει το διάγραμμα Μ της δοκού (σχ. β).

Για την αναγωγή του διαγράμματος υπολογίζουμε τις ροπές αδράνειας των διατομών της. Είναι:

$$J_{A\Gamma} = J_o = \frac{\pi \cdot 6^4}{64} = 63,62 \text{ cm}^4 \quad \text{και}$$

$$J_{\Delta B} = J_1 = \frac{\pi \cdot 7^4}{64} = 117,86 \text{ cm}^4.$$

Τώρα μπορεί να προκύψει το ανηγμένο διάγραμμα του σχήματος γ, από τις τιμές των ροπών στις χαρακτηριστικές διατομές, που είναι:

$$M_{\Gamma} = 32.000 \cdot \frac{J_o}{J_o} = 32.000 \text{ kp} \cdot \text{cm}$$

$$M_{\Delta} = 32.000 \cdot \frac{J_o}{J_1} = 32.000 \frac{63,62}{117,86} = 17.273,4 \text{ kp} \cdot \text{cm}$$

$$M_H = 48.000 \cdot \frac{J_o}{J_1} = 48.000 \frac{63,62}{117,86} = 25.910,1 \text{ kp} \cdot \text{cm}.$$

**α)** Οι μεταβολές των γωνιών στις στηρίξεις θα είναι τώρα οι αντιδράσεις αμφιέριστης ιδεατής δοκού, η οποία φορτίζεται με το ανηγμένο διάγραμμα των ροπών του σχήματος γ, διαιρεμένες όμως δια  $EJ_o$ .

Για τον υπολογισμό της αντίδρασης  $A_i$  χρησιμοποιούμε τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς τη στήριξη Β. Είναι:

$$\begin{aligned} (\Sigma M_i)_B^{\uparrow\uparrow} &= 0 \quad \Rightarrow \\ A_i \cdot 100 - \frac{1}{2} 32.000 \cdot 40 \left( 60 + \frac{1}{3} 40 \right) - \frac{1}{2} 17.273,4 \cdot 20 \left( 40 + \frac{2}{3} 20 \right) - \\ - \frac{1}{2} 25.910,1 \cdot 20 \left( 40 + \frac{1}{3} 20 \right) - \frac{1}{2} 25.910,1 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} 40 &= 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$100 \cdot A_i = 82.055.795 \text{ kp} \cdot \text{cm}^3 \quad \text{και} \quad \underline{\underline{A_i = 820.557,95 \text{ kp} \cdot \text{cm}^2.}}$$

Διαιρώντας τώρα την  $A_i$  δια της ποσότητας

$$EJ_o = 2 \cdot 10^6 \cdot 63,62 = 127,24 \cdot 10^6 \text{ kp} \cdot \text{cm}^2,$$

βρίσκουμε τη γωνία της δοκού στη στήριξη Α

$$\omega_A = 0,00645 \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \underline{\underline{\omega_A = 0,37^\circ}}$$



Για τον υπολογισμό της αντίδρασης  $B_i$ , υπολογίζουμε πρώτα το εμβαδόν  $F_i$  του διαγράμματος του σχήματος  $\gamma$ . Είναι:

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{2} 32.000 \cdot 40 + \frac{1}{2} (17.273,4 + 25.910,1) \cdot 20 + \frac{1}{2} 25.910,1 \cdot 40 \\ &= 1.590.037 \text{ kp} \cdot \text{cm}^2, \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$B_i = F_i - A_i = (1.590.037 - 820.557,95) \text{ kp} \cdot \text{cm}^2,$$

$$\text{ή } \quad \underline{B_i = 769.479,05 \text{ kp} \cdot \text{cm}^2}.$$

Άρα η γωνία της δοκού στη στήριξη B, θα είναι:

$$\omega_B = \frac{B_i}{EJ_o} = \frac{769.479,05}{127,24 \cdot 10^6},$$

$$\text{ή } \quad \omega_B = 0,00605 \text{ rad} \quad \text{και } \underline{\omega_B = 0,35^\circ}$$

**β)** Το βέλος κάμψης στη διατομή H θα είναι η καμπτική ροπή της ιδεατής δοκού που φορτίζεται με το διάγραμμα του σχήματος  $\gamma$ , διαιρεμένης όμως διά  $EJ_o$ .

Παίρνοντας για ευκολία τα φορτία δεξιά της διατομής H, έχουμε

$$\begin{aligned} M_{iH} &= 769.479,05 \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot 25.910,1 \cdot 40 \cdot \frac{1}{3} \cdot 40 \\ &= 23.869.802 \text{ kp} \cdot \text{cm}^3, \end{aligned}$$

και διαιρώντας δια του  $EJ_o = 127,24 \cdot 10^6 \text{ kp} \cdot \text{cm}^2$ , βρίσκουμε το ζητούμενο βέλος κάμψης

$$y_H = \frac{M_{iH}}{EJ_o} = \frac{23.869.802}{127,24 \cdot 10^6}$$

$$\text{ή } \quad y_H = 0,187 \text{ cm} \quad \text{και } \underline{y_H = 1,87 \text{ mm}}$$

## 22 – Στατικά αόριστα προβλήματα

Όπως περιγράψαμε ήδη στην ενότητα 8 του 3<sup>ου</sup> κεφαλαίου, ένας φορέας χαρακτηρίζεται στατικά αόριστος, όταν οι τρεις συνθήκες ισορροπίας που διαθέτουμε από τη Στατική:

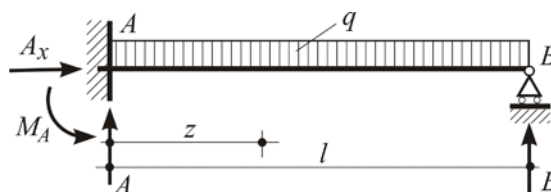
$$\sum x_i^{\rightarrow+} = 0, \quad \sum y_i^{\uparrow+} = 0 \quad \text{και}$$

$$(\sum M_i)^{\perp+} = 0$$

δεν επαρκούν για να προσδιορίσουν τις αντιδράσεις στήριξης και τις εσωτερικές του δυνάμεις.

Στην καμπτική καταπόνηση, το φαινόμενο της στατικής αοριστίας ενός φορέα είναι πολύ συνηθισμένο, και ο βαθμός της αοριστίας, που είναι η διαφορά των αγνώστων αντιδράσεων από τις διατιθέμενες εξισώσεις, ποικίλει σημαντικά.

Αν π.χ. δοθεί η μονόπακτη δοκός του παρακάτω σχήματος και ζητηθεί ο προσδιορισμός των τεσσάρων αντιδράσεων της,  $A_x$ ,  $A$ ,  $B$  και  $M_A$ , διαπιστώνουμε ότι οι παραπάνω στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας, που γράφονται:



Σχ. 6.22

$$A_x = 0, \quad A + B - q \cdot l = 0 \text{ και } -M_A - B \cdot l + \frac{q l^2}{2} = 0, \quad (i)$$

είναι κατά μία λιγότερες από τις αντιδράσεις.

Θα μπορούσαμε βέβαια να δώσουμε στη μια άγνωστη αντίδραση αυθαίρετη τιμή, οπότε θα προσδιορίζαμε τις τιμές των υπολοίπων.

Το πρόβλημα συνεπώς, μαθηματικά προκύπτει ότι έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή είναι αόριστο, και γι αυτό ο παραπάνω φορέας λέγεται **στατικά αόριστος**.

Στην πραγματικότητα οι αντιδράσεις αυτές παίρνουν συγκεκριμένες τιμές που καθορίζονται από το είδος στήριξης, τα φορτία, τη γεωμετρική μορφή του φορέα και τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού του.

Οι τιμές αυτές είναι τέτοιες, ώστε να **συμβιβάζονται μεταξύ τους οι παραμορφώσεις** που προκαλούνται από τη φόρτιση του φορέα.

Αν για την παραπάνω δοκό διαλέγαμε αυθαίρετα σαν τιμή της αντίδρασης π.χ. στο B την

$$B = \frac{q l}{2},$$

και, προσδιορίζοντας, όπως παρακάτω, την εξίσωση ελαστικής γραμμής, αναζητούσαμε την υποχώρηση της δοκού στη στήριξη B, θα βρίσκαμε:

$$w_B = -\frac{q l^4}{24 E J},$$

πράγμα που δεν είναι σωστό, αφού η στήριξη B είναι ακλόνητη, και συνεπώς:

$$w_B = 0, \quad (ii)$$

Άρα λοιπόν οι παραμορφώσεις δεν θα συμβιβάζονταν μεταξύ τους.

Για να συμβιβαστούν, θα πρέπει, στο σχηματισμό της ελαστικής γραμμής, να εισάγουμε τη B με **προσδιοριστέα** τιμή, οπότε η χρήση της τελευταίας σχέσης για μηδενική υποχώρηση θα μας οδηγήσει τελικά στον καθορισμό της πραγματικής της τιμής.

Για την υλοποίηση των παραπάνω, από τις εξισώσεις (i) παίρνουμε:

$$A_x = 0, \quad A = q \cdot l - B \quad \text{και} \quad M_A = \frac{q l^2}{2} - B \cdot l \quad (ia)$$

Σε διατομή που απέχει απόσταση  $z$  από τη στήριξη A, η καμπτική ροπή θα είναι:

$$M_z = A \cdot z - M_A - \frac{qz^2}{2}$$

Άρα η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής, είναι:

$$EJw'' = -A \cdot z + M_A + \frac{qz^2}{2}$$

Η πρώτη ολοκλήρωση δίνει:

$$EJw' = -A \frac{z^2}{2} + M_A z + \frac{qz^3}{6} + C_1$$

Για  $z = 0$  είναι  $w' = 0$ , άρα  $C_1 = 0$ .

Η δεύτερη ολοκλήρωση δίνει:

$$EJw = -A \frac{z^3}{6} + M_A \frac{z^2}{2} + \frac{qz^4}{24} + C_2,$$

και επειδή για  $z = 0$  είναι και  $w = 0$ , προκύπτει  $C_2 = 0$ .

Θέτοντας ήδη τις τιμές των  $A$  και  $M_A$  από τις σχέσεις (ia) στην τελευταία εξίσωση, της Ε.Γ., λαμβάνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} EJw &= -(ql - B) \frac{z^3}{6} + \left( \frac{ql^2}{2} - Bl \right) \frac{z^2}{2} + \frac{qz^4}{24} \\ &= -ql \frac{z^3}{6} + B \frac{z^3}{6} + \frac{ql^2 z^2}{4} - \frac{Blz^2}{2} + \frac{qz^4}{24} \\ &= \frac{qz^2}{24} (6l^2 - 4lz + z^2) - \frac{Bz^2}{6} (3l - z) \quad (\text{iii}) \end{aligned}$$

Επειδή όμως το στήριγμα  $B$  δεν υποχωρεί, θα πρέπει, για  $z = l$ , να ισχύει η σχέση (ii), δηλαδή η υποχώρηση να είναι μηδενική.

Αυτή είναι και η συνθήκη **συμβιβασμού των παραμορφώσεων**, που αναζητούσαμε σαν 4<sup>η</sup> εξίσωση. Θέτοντας λοιπόν στην (iii)  $z = l$  και  $w = 0$ , παίρνουμε διαδοχικά:

$$\frac{B}{6}(3l - l) = \frac{q}{24}(6l^2 - 4l^2 + l^2), \quad \text{ή} \quad B \cdot 2l = \frac{q}{4}3l^2,$$

$$\text{και τελικά} \quad B = \frac{3}{8}ql.$$

Αυτή είναι η πραγματική τιμή της  $B$ , η οποία μέσω των σχέσεων (ia) μας οδηγεί στον προσδιορισμό των υπολοίπων αντιδράσεων:

$$A = ql - \frac{3}{8}ql = \frac{5}{8}ql \quad \text{και}$$

$$M_A = \frac{ql^2}{2} - \frac{3}{8}ql^2 = \frac{ql^2}{8}.$$

## 23 – Η μέθοδος της επαλληλίας

Για να βρούμε πιο γρήγορα και μεθοδικά την πρόσθετη εξίσωση συμβιβασμού των παραμορφώσεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και εδώ την **αρχή της επαλληλίας**, η οποία, όπως είναι γνωστό, έχει γενικότερη ισχύ στα φυσικά φαινόμενα, σε συνδυασμό με την **αρχή της ανεξαρτησίας των αποτελεσμάτων**.

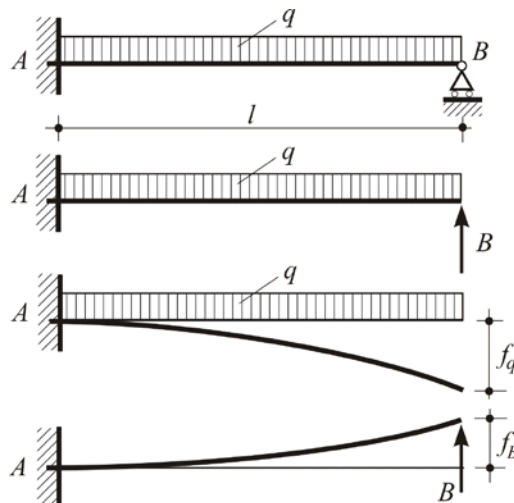
Οι δύο αυτές αρχές, που αποτελούν ουσιαστικά ένα συμπέρασμα λογικό, διατυπώνονται ως εξής:

1) Δυνάμεις που ενεργούν ταυτόχρονα σε έναν φορέα, προκαλούν τις ίδιες παραμορφώσεις που θα προκαλούσαν αν ενεργούσαν χωριστά και

2) Η ολική παραμόρφωση που προκαλείται σε έναν φορέα από τη σύγχρονη δράση δυνάμεων, ισούται με το άθροισμα των παραμορφώσεων που θα προκαλούσε η κάθε μια, αν ενεργούσε χωριστά.

Για την εφαρμογή των παραπάνω αρχών στη μονόπακτη δοκό που εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, σκεφτόμαστε ως εξής:

Αν στη θέση της στήριξης B τοποθετήσουμε την άγνωστη αντίδραση, έστω B, τότε στον πρόβολο AB που απομένει, θα ενεργούν ταυτόχρονα το συνεχές φορτίο q και η κατακόρυφη δύναμη B.



Σχ. 6.23

Οι δυνάμεις αυτές προκαλούν στο άκρο B του προβόλου κατακόρυφες μετατοπίσεις, οι οποίες, όπως υπολογίστηκαν στα παραδείγματα 1 και 2 της ενότητας 20, είναι αντίστοιχα:

$$f_B = \frac{-Bl^3}{3EJ} \quad \text{και} \quad f_q = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Επειδή όμως το στήριγμα B είναι ανυποχώρητο, η ολική μετατόπιση από τη σύγχρονη δράση των παραπάνω δυνάμεων είναι μηδενική. Άρα:

$$f_q + f_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{ql^4}{8EJ} - \frac{Bl^3}{3EJ} = 0 \quad \text{και} \quad B = \frac{3}{8}ql.$$

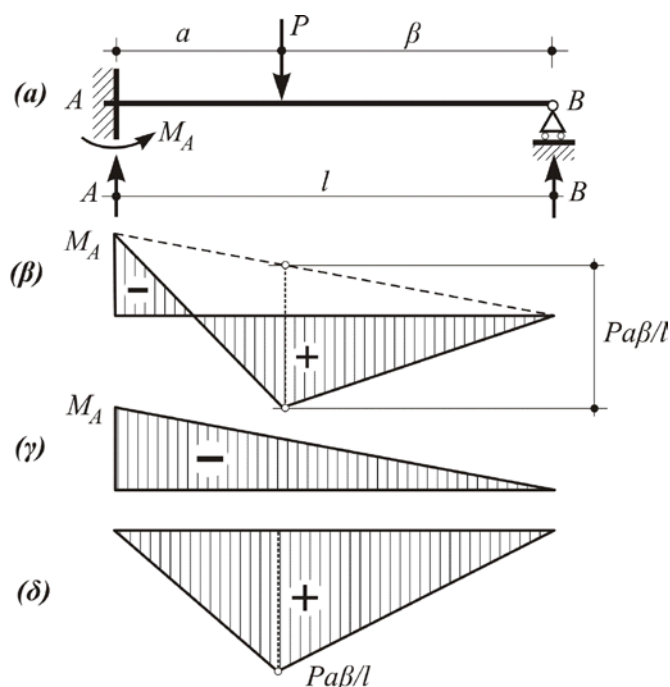
## 24 – Η μέθοδος της επιφανειακής ροπής

Τη μέθοδο αυτή, η οποία ουσιαστικά αποτελεί εφαρμογή των όσων αναφέρθηκαν στην ενότητα 21 για την ιδεατή δοκό, θα περιγράψουμε στα δύο παραδείγματα που ακολουθούν.

1

Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις της **μονόπακτης** δοκού του σχήματος που ακολουθεί.

### Λύση



Σχ. 6.24.1

Οι στερεοστατικές εξισώσεις των συνθηκών ισορροπίας της δοκού

$$(\Sigma M)_A^{\curvearrowright} = -M_A + P \cdot a - B \cdot l = 0 \quad \text{και}$$

$$\Sigma \gamma^{\uparrow} = A + B - P = 0$$

προφανώς δεν επαρκούν για να προσδιορίσουν τις τρεις (3) άγνωστες αντιδράσεις A, B και  $M_A$ .

Για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της ιδεατής δοκού, προφανώς θα χρειαστούμε το διάγραμμα Κ.Ρ. του πραγματικού φορέα, το οποίο έχει τη μορφή του σχ. β, με άγνωστη τη  $M_A$ . Το διάγραμμα αυτό αναλύεται:

α) Σ' ένα τριγωνικό (σχ. γ) αρνητικών τιμών, που οφείλεται στη  $M_A$  και

β) Σ' ένα άλλο τριγωνικό (σχ. δ) με θετικές τιμές που οφείλεται στο φορτίο P.

Η ιδεατή δοκός που θα φορτιστεί με τα διαγράμματα (γ) και (δ) των οποίων οι τεταγμένες διαιρούνται διά EJ, θα πρέπει να είναι **ελεύθερη** στο A και **απλά** στηριζόμενη στο B, επειδή η πραγματική δοκός έχει πάκτωση στο A και απλή στήριξη (κύλιση) στο B.

Εκφράζοντας την ισορροπία της με τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς το Β, έχουμε:

$$(\Sigma M_i)_B^{\downarrow+} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EJ} \left[ \left( \frac{1}{2} M_A \cdot l \right) \frac{2}{3} l - \frac{1}{2} \cdot \frac{P\alpha\beta}{l} \cdot a \left( \beta + \frac{\alpha}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{P\alpha\beta}{l} \cdot \beta \cdot \frac{2}{3} \beta \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{M_A \cdot l^2}{3} = \frac{P\alpha\beta}{2l} \left( a\beta + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{2\beta^2}{3} \right) = \frac{P\alpha\beta}{2l} \cdot \frac{1}{3} \left[ (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) + (\alpha\beta + \beta^2) \right] \Rightarrow$$

$$M_A l^2 = \frac{P\alpha\beta}{2l} \left[ (\alpha + \beta)^2 + \beta(\alpha + \beta) \right] = \frac{P\alpha\beta}{2l} \cdot l^2 \left( 1 + \frac{\beta}{l} \right) \Rightarrow$$

$$\text{Άρα } M_A = \frac{P\alpha\beta}{2l} \left( 1 + \frac{\beta}{l} \right).$$

Θέτοντας ήδη την τιμή της  $M_A$  στις αρχικές στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας, βρίσκουμε διαδοχικά τις αντιδράσεις Β και Α.

$$B = \frac{P\alpha}{l} - \frac{P\alpha\beta}{2l^2} \left( 1 + \frac{\beta}{l} \right) = \frac{P\alpha}{2l} \left[ 2 - \frac{\beta}{l} - \left( \frac{\beta}{l} \right)^2 \right].$$

Θέτοντας ήδη  $\beta/l = b$ , επειδή  $\alpha/l = 1 - b$ , θα είναι:

$$B = \frac{P}{2} (1-b) \left( 2 - b - b^2 \right) = \frac{P}{2} (2 - b - b^2 - 2b + b^2 + b^3) = \frac{P}{2} (2 - 3b + b^3)$$

$$\text{Επίσης, } A = P - B = \frac{P}{2} \left[ 2 - (2 - 3b + b^3) \right] = \frac{P}{2} (3b - b^3).$$

Αν το φορτίο P ενεργεί στο **μέσον** της δοκού, οπότε:

$$\alpha = \beta = \frac{l}{2} \quad \text{και} \quad b = \frac{1}{2}, \quad \text{θα είναι:}$$

$$M_A = \frac{Pl^2}{4 \cdot 2l} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{16} \cdot Pl,$$

$$A = \frac{P}{2} \left( 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{12-1}{8} = \frac{11}{16} P \quad \text{και}$$

$$B = \frac{P}{2} \left( 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{16-12+1}{8} = \frac{5}{16} P.$$

**2**

Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις της **αμφίπακτης** δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.

### Λύση

Εδώ οι εξισώσεις των συνθηκών ισορροπίας της δοκού

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = -M_A + M_B + P \cdot \alpha - B \cdot l = 0 \quad \text{και} \quad \Sigma \gamma^{\uparrow+} = A + B - P = 0$$

είναι κατά 2 λιγότερες των 4 αγνώστων αντιδράσεων Α, Β,  $M_A$  και  $M_B$ .

Με σκέψεις ανάλογες με εκείνες που κάναμε ήδη στο προηγούμενο παράδειγμα, σχεδιάζουμε το διάγραμμα Κ.Ρ. της δοκού (σχ. β) με άγνωστες τις ροπές στις δύο πακτώσεις,  $M_A$  και  $M_B$ .

Αυτό αναλύεται στα επί μέρους διαγράμματα γ, δ, και ε, που οφείλονται αντίστοιχα στη ροπή  $M_A$ , τη ροπή  $M_B$  και τη δύναμη  $P$ .

Η ιδεατή δοκός που αντιστοιχεί στην πραγματική αμφίπακτη, πρέπει να είναι **ελεύθερη** και στα δύο της άκρα, και να έχει ως φορτία τα διαγράμματα γ, δ και ε, των οποίων οι τεταγμένες έχουν διαιρεθεί δια  $EJ$ .

Εκφράζοντας λοιπόν την ισορροπία της, με τις συνθήκες μηδενισμού των ροπών ως προς τα σημεία Β και Α, έχουμε:

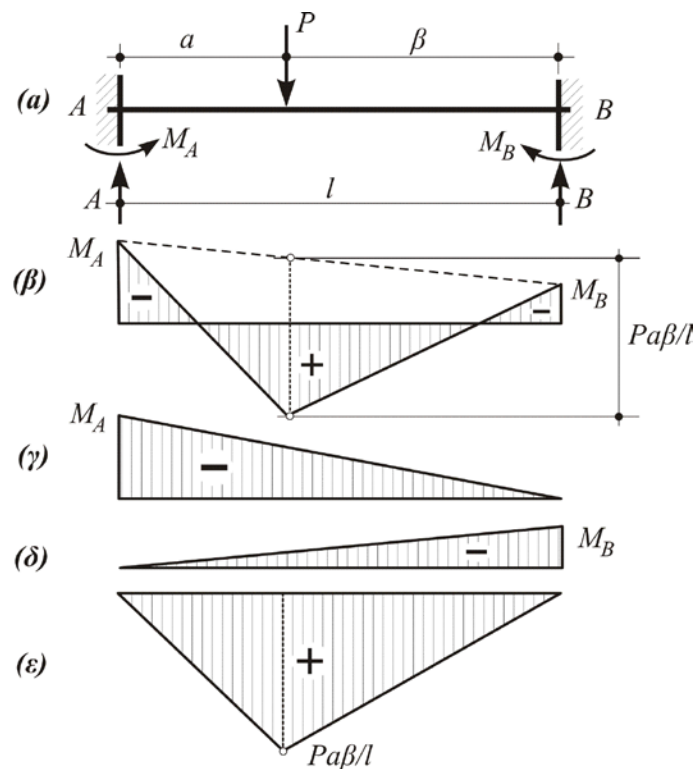
$$(\Sigma M_i)_B^{\downarrow+} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EJ} \left[ \left( \frac{1}{2} M_A l \right) \frac{2l}{3} + \left( \frac{1}{2} M_B l \right) \frac{l}{3} - \left( \frac{1}{2} \frac{Pa\beta}{l} a \right) \left( \beta + \frac{\alpha}{3} \right) - \left( \frac{1}{2} \frac{Pa\beta}{l} \beta \right) \frac{2\beta}{3} \right] = 0$$

$$(\Sigma M_i)_A^{\downarrow+} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EJ} \left[ - \left( \frac{1}{2} M_A l \right) \frac{l}{3} - \left( \frac{1}{2} M_B l \right) \frac{2l}{3} + \left( \frac{1}{2} \frac{Pa\beta}{l} a \right) \frac{2a}{3} + \left( \frac{1}{2} \frac{Pa\beta}{l} \beta \right) \left( \alpha + \frac{\beta}{3} \right) \right] = 0$$

οπότε προκύπτει αντίστοιχα:

$$\frac{M_A l^2}{3} + \frac{M_B l^2}{6} = \frac{Pa\beta}{2l} \left( \alpha\beta + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{2\beta^2}{3} \right) \Rightarrow 2M_A + M_B = \frac{Pa\beta}{l^3} (a^2 + 3a\beta + 2\beta^2) \quad (i)$$

$$\frac{M_A l^2}{6} + \frac{M_B l^2}{3} = \frac{Pa\beta}{2l} \left( \frac{2\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \frac{\beta^2}{3} \right) \Rightarrow M_A + 2M_B = \frac{Pa\beta}{l^3} (2a^2 + 3a\beta + \beta^2) \quad (ii)$$



Σχ. 6.24.2

Αν από το διπλάσιο της (i) αφαιρέσουμε τη (ii), παίρνουμε:

$$3M_A = \frac{Pa\beta}{I^3}(2a^2 + 6a\beta + 4\beta^2 - 2\alpha^2 - 3\alpha\beta - \beta^2) = \frac{3Pa\beta^2}{I^3}(a + \beta),$$

δηλαδή  $M_A = \frac{Pa\beta^2}{I^2}$ , και όμοια  $M_B = \frac{Pa^2\beta}{I^2}$ .

Οι αντιδράσεις B και A προσδιορίζονται τώρα διαδοχικά μέσω των αρχικών στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας. Είναι:

$$Bl = Pa + M_B - M_A = Pa + \frac{Pa^2\beta}{I^2} - \frac{Pa^2\beta}{I^2}. \text{ Άρα:}$$

$$Bl^3 = Pa(l^2 + a\beta - \beta^2) = Pa(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha\beta - \beta^2) = Pa^2(\alpha + 3\beta)$$

και συνεπώς  $B = \frac{Pa^2}{I^3}(1 + 2\beta) = P\kappa^2(1 + 2\lambda)$ , αν τεθεί όπου

$$\frac{a}{l} = \kappa \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{l} = \lambda.$$

Επίσης  $A = P - B = P[1 - (1 - \lambda)^2(1 + 2\lambda)]$  ή

$$A = P[1 - (1 - 2\lambda + \lambda^2)(1 + 2\lambda)] = P[1 - (1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2\lambda - 4\lambda^2 + 2\lambda^3)] \text{ ή}$$

$$A = P(1 - 1 + 3\lambda^2 - 2\lambda^3) = P\lambda^2(3 - 2\lambda) = P\lambda^2[2(1 - \lambda) + 1] \text{ και τελικά}$$

$$A = P\lambda^2(1 + 2\kappa),$$

σχέση εντελώς αντίστοιχη με εκείνη που προέκυψε για την αντίδραση B.

Αν το φορτίο P ενεργεί στο **μέσον** της δοκού, οπότε

$$\alpha = \beta = \frac{l}{2} \quad \text{και} \quad \kappa = \lambda = \frac{1}{2}, \quad \text{θα είναι:}$$

$$M_A = M_B = \frac{P \frac{l}{2} \cdot \frac{l^2}{4}}{I^2} = \frac{Pl}{8}, \quad \text{και}$$

$$A = B = P \frac{1}{4} \left(1 + 2 \frac{1}{2}\right) = \frac{P}{2}.$$

## 25 – Ανελαστική κάμψη (χωρίς ισχύ του νόμου Hooke)

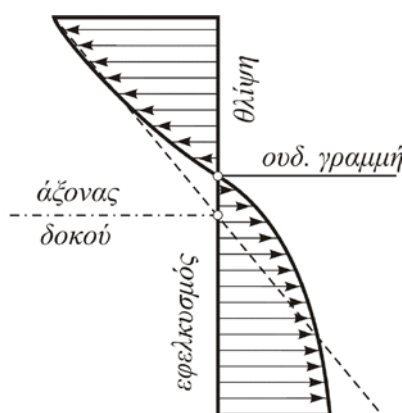
Κάθε είδους εξισώσεις και υπολογισμοί που αναφέρθηκαν ως τώρα για την κάμψη, είχαν σαν βασική προϋπόθεση την ισχύ του νόμου του Hooke, που σημαίνει ότι η μέγιστη ορθή τάση η οποία εμφανίζεται στο υλικό λόγω κάμψης, είναι το πολύ ίση με την ορθή τάση  $\sigma_A$ , που αντιστοιχεί στο όριο αναλογίας του υλικού.

Όμως είναι δυνατό να εμφανιστούν περιπτώσεις, όπου, λόγω κάποιας ιδιομορφίας του υλικού ή της καταπόνησης του φορέα, τα παραπάνω, έστω και μερικώς, δεν ισχύουν. Οι περιπτώσεις αυτές είναι:



1. Το υλικό δεν έχει σταθερό μέτρο ελαστικότητας.

Τέτοιο υλικό είναι ο χυτοσίδηρος, του οποίου το διάγραμμα φαίνεται στη σελίδα 33 (Κεφάλαιο 2, ενότητα 3, παράγραφος γ).



Σχ. 6.25.1

Οι τάσεις  $\sigma$  δεν είναι ανάλογες προς τις ανηγμένες επιμηκύνσεις και το μεταβαλλόμενο μέτρο ελαστικότητας είναι μεγαλύτερο στη θλίψη παρά στον εφελκυσμό, με τιμές μικρότερες σε μεγαλύτερες τάσεις.

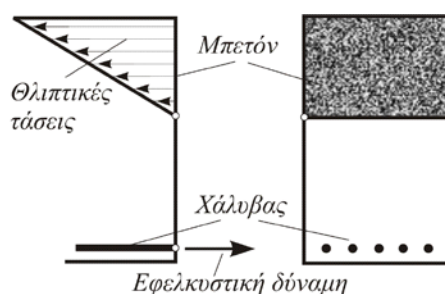
Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, η κατανομή των ορθών τάσεων στη διατομή να μην είναι γραμμική (διακεκομμένη ευθεία του σχήματος 6.25.1), αλλά καμπύλη, της οποίας η κλίσεις μικραίνουν στα άκρα της διατομής.

Οι θλιπτικές τάσεις είναι μεγαλύτερες από τις εφελκυστικές και η ουδέτερη γραμμή μετατοπίζεται στη θλιβόμενη περιοχή.

Ο προσδιορισμός της παραπάνω κατανομής των τάσεων και της θέσης της ουδέτερης γραμμής, πέρα από το ότι είναι δύσκολος, δεν έχει ξεχωριστό νόημα, επειδή ο χυτοσίδηρος π.χ. σαν υλικό **δεν χρησιμοποιείται ποτέ** σε καμπτόμενα στοιχεία.

2. Το υλικό έχει ελάχιστη αντοχή σε εφελκυσμό και μεγάλη σε θλίψη.

Τέτοιο υλικό είναι το σκυρόδεμα, το οποίο, σαν καμπτόμενο στοιχείο, δεν μπορεί να παραλάβει, ούτε καν τις ροπές που προκαλούνται από το δικό του βάρος.



Σχ. 6.25.2

Γι' αυτό χρησιμοποιείται πάντα σε **μικτές** κατασκευές με χάλυβα (σχ. 6.25.2), ο οποίος παραλαμβάνει τις εφελκυστικές τάσεις, αφήνοντας τις θλιπτικές για το σκυρόδεμα.

Όμως με τέτοιες κατασκευές δεν θα ασχοληθούμε εδώ, επειδή αυτές αποτελούν αντικείμενο ξεχωριστού κλάδου, του **οπλισμένου σκυροδέματος**.

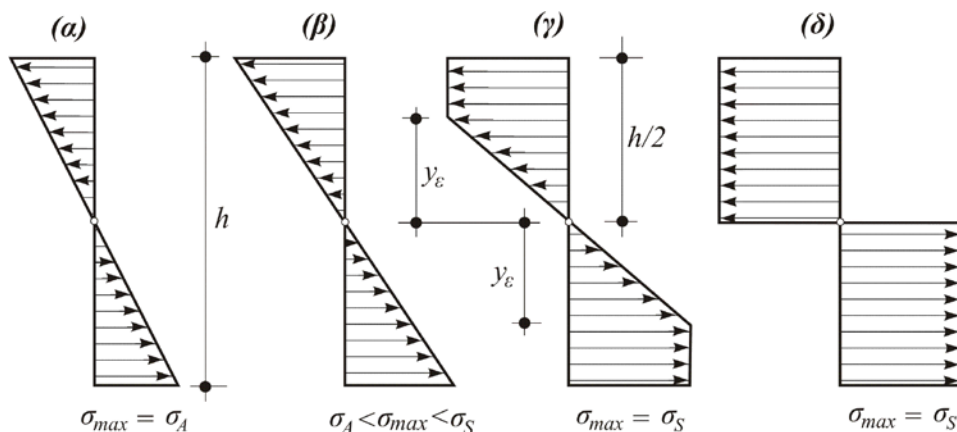
### 3. Η $\sigma_{\max}$ είναι μεγαλύτερη από το όριο αναλογίας.

Στην κατηγορία αυτή υπάγονται οι περισσότερες από τις περιπτώσεις ανελαστικής κάμψης με αντιπροσωπευτικό υλικό το χάλυβα.

Σαν φαινόμενο αντίστοιχο εκείνου που γνωρίσαμε στη στρέψη (σελ. 123 της ενότητας 9 του 5<sup>ου</sup> κεφαλαίου), η ανελαστική κάμψη παρουσιάζεται όταν η καμπτική ροπή ξεπεράσει μια συγκεκριμένη τιμή, που αντιστοιχεί στην εμφάνιση της  $\sigma_{\max} = \sigma_A$ , και ονομάζεται **οριακή ροπή ελαστικότητας** (σχήμα 6.25.3 α).

Με την αύξηση της καμπτικής ροπής, η  $\sigma_{\max}$  γίνεται μεγαλύτερη της  $\sigma_A$  στα άκρα της διατομής (σχ. β).

Αυτό γίνεται μέχρι να φτάσει η  $\sigma_{\max}$  την τιμή  $\sigma_S$  που αντιστοιχεί στο όριο διαρροής του υλικού. Διότι με την περαιτέρω αύξηση της καμπτικής ροπής, η  $\sigma_{\max}$  διατηρεί σταθερή τιμή, την  $\sigma_S$ , ενώ στην περιοχή της ουδέτερης γραμμής η μεταβολή των τάσεων εξακολουθεί να είναι γραμμική (σχ. γ).



Σχ. 6.25.3

Στην κατάσταση αυτή, που χαρακτηρίζεται **ελαστοπλαστική**, ο νόμος Hooke ισχύει μόνο για τις ίνες που βρίσκονται στην περιοχή της ουδέτερης γραμμής.

Η συνεχιζόμενη αύξηση των καμπτικών ροπών, έχει σαν αποτέλεσμα τη σταδιακή εξαφάνιση της γραμμικότητας στη μεταβολή των τάσεων, μέχρι την ορθογωνική κατανομή (σχ. δ).

Αν η διατομή είναι συμμετρική ως προς το κεντροειδές της, η ουδέτερη γραμμή διατηρεί τη θέση της σταθερή, ενώ αλλιώς μετακινείται.

Η καμπτική ροπή που μπορεί να παραλάβει μια **ορθογωνική** διατομή διαστάσεων  $b \times h$ , είναι:

α. Για την περίπτωση του σχ. α, όπου  $\sigma_{\max} = \sigma_A$ ,

$$M_A = 2b \left( \frac{1}{2} \sigma_A \frac{h}{2} \right) \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_A \frac{bh^2}{6}, \quad \text{ή πιο απλά}$$

$$M_A = \sigma_A \cdot W_{\text{στ}} = \sigma_A \frac{bh^2}{6}. \quad (1)$$

**β.** Για την ελαστοπλαστική δράση του σχ. γ, η οποία αποτελεί μια ενδιάμεση κατάσταση των περιπτώσεων των σχ. β και δ, θα είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}
 M_E &= 2b \left[ \frac{1}{2} \sigma_S y_\varepsilon \frac{2}{3} y_\varepsilon + \sigma_S \left( \frac{h}{2} - y_\varepsilon \right) \left( y_\varepsilon + \frac{h}{4} - \frac{y_\varepsilon}{2} \right) \right] = 2b\sigma_S \left[ \frac{y_\varepsilon^2}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y_\varepsilon \right) \left( \frac{h}{2} + y_\varepsilon \right) \right] \\
 &= 2b\sigma_S \left[ \frac{y_\varepsilon^2}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_\varepsilon^2 \right) \right] = 2b\sigma_S \left( \frac{y_\varepsilon^2}{3} + \frac{h^2}{8} - \frac{y_\varepsilon^2}{2} \right) = 2b\sigma_S \left( \frac{h^2}{8} - \frac{y_\varepsilon^2}{6} \right)
 \end{aligned}$$

και τελικά 
$$M_E = b\sigma_S \left( \frac{h^2}{4} - \frac{y_\varepsilon^2}{3} \right). \quad (2)$$

Η σχέση (2) επιτρέπει τον προσδιορισμό της  $y_\varepsilon$  όταν δίνεται η  $M_E$ , ή αντίστοιχα της  $M_E$  όταν δίνεται η  $y_\varepsilon$ . Από την ίδια σχέση, προκύπτει ότι:

1. Για  $y_\varepsilon = h/2$ , που είναι ουσιαστικά η περίπτωση του σχ. α αν δεχθούμε ως  $\sigma_{\max}$  όχι την  $\sigma_A$ , αλλά την  $\sigma_{A'} = \sigma_S$ , είναι:

$$M_{A'} \approx b \cdot \sigma_S \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{12} \right) = \sigma_S \frac{bh^2}{6} \quad (3)$$

2. Για  $y_\varepsilon = 0$ , που είναι η περίπτωση του σχ. δ, και αντιστοιχεί στην πλαστικοποίηση ολόκληρης της διατομής, προκύπτει η ροπή:

$$M_S = b \cdot \sigma_S \frac{h^2}{4} = \sigma_S \frac{bh^2}{4}, \quad (4)$$

που ονομάζεται καμπτική ροπή **διαρροής**.

Από τις σχέσεις (1) και (4) προκύπτει ότι:

$$\frac{M_S}{M_A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_A}. \quad (5)$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι για ρευστοπαγή χάλυβα είναι περίπου:

$\sigma_A = 1.950 \text{ kp/cm}^2$  και  $\sigma_S = 2.400 \text{ kp/cm}^2$ , τότε η (5) δίνει:

$$\frac{M_S}{M_A} \approx 1,85. \quad (6)$$

Αντίστοιχα, από τις σχέσεις (3) και (4), προκύπτει:

$$\frac{M_S}{M_{A'}} \approx 1,50. \quad (7)$$

Όστε λοιπόν από τις σχέσεις (6) και (7) διαπιστώνουμε ότι:

Η αύξηση της καμπτικής ροπής που εμφανίζεται σε όλο το στάδιο της πλαστικοποίησης της διατομής, είναι περίπου:

α) **50%** της ροπής  $M_{A'}$  που παραλαμβάνει η διατομή όταν  $\sigma_{\max} = \sigma_S$  και

β) **85%** της ροπής  $M_A$  που παραλαμβάνει η διατομή όταν  $\sigma_{\max} = \sigma_A$ .

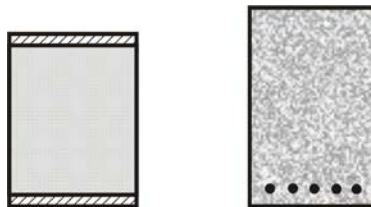
Όμως μια τέτοια φόρτιση όχι μόνον ελαττώνει το συντελεστή ασφάλειας της κατασκευής, αλλά, πράγμα που είναι σοβαρότερο, προκαλεί **παραμένουσες** παραμορφώσεις.

Έτσι μια τέτοια εκμετάλλευση του υλικού σήμερα, είναι σχεδόν άχρηστη. Μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπου το ίδιο βάρος της κατασκευής παίζει σπουδαίο ρόλο για τον προορισμό της, π.χ. στην αεροναυπηγική, είναι δυνατό να καταπονηθεί το υλικό μέχρι το όριο διαρροής του.

## 26 – Σύνθετες δοκοί (δύο υλικών)

Μία δοκός ονομάζεται **σύνθετη** όταν αποτελείται από δύο ή περισσότερα υλικά, που είναι ενωμένα σε όλο το μήκος της, έτσι ώστε να αποτελούν μια ενιαία δοκό, χωρίς να ολισθαίνουν μεταξύ τους.

Η κατασκευή τέτοιων δοκών στην πράξη προκύπτει από την ανάγκη ενίσχυσης της αντοχής σε δοκούς, των οποίων το υλικό εμφανίζει μια συγκεκριμένη αδυναμία, π.χ. μικρή αντοχή σε εφελκυσμό.



Σχ. 6.26.1

Έτσι έχουμε τις ξύλινες δοκούς με μεταλλικές ενισχύσεις, δοκούς ή υποστυλώματα από οπλισμένο σκυρόδεμα κλπ. (σχ 6.26.1).

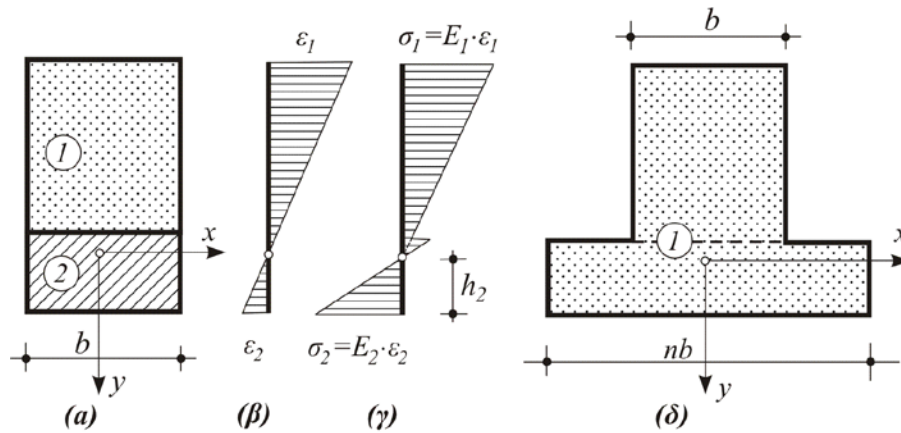
Η μελέτη μιας σύνθετης δοκού σε κάμψη γίνεται όπως και στην απλή, επειδή η υπόθεση Bernoulli, «ότι οι επίπεδες διατομές προ της κάμψης παραμένουν επίπεδες και μετά απ' αυτήν» (σελ. 162, σχ. 6.13.1), ισχύει στην κάμψη ανεξάρτητα από το υλικό της ράβδου.

Η υπόθεση αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι ανηγμένες επιμηκύνσεις στις ίνες της δοκού **μεταβάλλονται γραμμικά** καθ' ύψος της διατομής, όπως, άλλωστε, προκύπτει και από τις εξισώσεις (i) και (ii) της σελίδας 163, στην ενότητα 13<sup>α</sup> του 6<sup>ου</sup> κεφαλαίου, όπου, η ανηγμένη επιμήκυνση είναι:

$$\varepsilon = \frac{1}{R} y.$$

Στο σχ. 6.26.2 φαίνεται η κατανομή των ανηγμένων επιμηκύνσεων μιας σύνθετης δοκού που αποτελείται από τα υλικά 1 και 2 με  $E_2 > E_1$ .

Εδώ είναι φανερό ότι η θέση της ουδέτερης γραμμής - της οποίας ο προσδιορισμός θα αναπτυχθεί παρακάτω - δεν συμπίπτει με το κεντροειδές της διατομής.



Σχ. 6.26.2

Υποθέτοντας ότι ο νόμος του Hooke ισχύει και για τα δύο υλικά, η ορθή τάση που αναπτύσσεται σε τυχούσα ίνα απόστασης  $y$  από την ουδέτερη γραμμή, (σχ. 6.26.2 γ) είναι:

$$\text{Για το υλικό 1: } \sigma_1 = \varepsilon_1 \cdot E_1 = \frac{1}{R} E_1 y, \quad (\alpha)$$

$$\text{Για το υλικό 2: } \sigma_2 = \varepsilon_2 \cdot E_2 = \frac{1}{R} E_2 y. \quad (\beta)$$

Η θέση της ουδέτερης γραμμής θα προσδιοριστεί από τη συνθήκη ότι η συνισταμένη αξονική δύναμη της διατομής είναι μηδενική. Δηλαδή:

$$\int_1 \sigma_1 dF + \int_2 \sigma_2 dF = 0, \quad (\gamma)$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα εκτείνεται στην επιφάνεια του υλικού 1 και το δεύτερο στη 2. Αντικαθιστώντας τις τιμές των ορθών τάσεων από τις σχέσεις (α), (β) στη (γ) προκύπτει:

$$\frac{1}{R} \left[ E_1 \int_1 y dF + E_2 \int_2 y dF \right] = 0. \quad (\delta)$$

$$\text{Και επειδή: } \int_1 y dF = S_1 \text{ και } \int_2 y dF = S_2, \text{ όπου } S_1 \text{ και } S_2 \text{ οι}$$

στατικές ροπές των επιφανειών των δύο (ή περισσότερων) υλικών ως προς την ουδέτερη γραμμή, η εξίσωση (δ) γίνεται:

$$E_1 S_1 + E_2 S_2 = 0 \quad \text{ή} \quad S_1 + n \cdot S_2 = 0, \quad (\epsilon)$$

όπου  $n = E_2/E_1$ .

Όστε λοιπόν υποθέτοντας ότι η ουδέτερη γραμμή βρίσκεται π.χ. στο υλικό 2, απέχοντας απόσταση  $h_2$  από την κάτω ίνα της διατομής, η σχέση (δ) μας οδηγεί στον προσδιορισμό της  $h_2$ , δηλαδή στη θέση της ουδέτερης γραμμής.

Αν τα τμήματα των δύο υλικών είναι συμμετρικά ως προς το κεντροειδές της διατομής, τότε η ουδέτερη γραμμή βρίσκεται στο μέσον του ύψους της.

Με διαδικασία ανάλογη εκείνης που ακολουθήσαμε ήδη στην κάμψη, προσδιορίζουμε τις ορθές τάσεις που αναπτύσσονται στα δύο υλικά, εκφράζοντας την καμπτική ροπή  $M$  της διατομής, σαν άθροισμα των ροπών των στοιχειωδών

δυνάμεων – που προέρχονται από τις τάσεις των δύο υλικών – ως προς την ουδέτερη γραμμή. Έτσι έχουμε:

$$M = \int_1 \sigma_1 y dF + \int_2 \sigma_2 y dF = \frac{1}{R} E_1 \int_1 y^2 dF + \frac{1}{R} E_2 \int_2 y^2 dF \quad \text{ή}$$

$$M = \frac{1}{R} (E_1 J_1 + E_2 J_2), \quad (\zeta)$$

όπου  $J_1$  και  $J_2$  οι ροπές αδράνειας των επιφανειών 1 και 2 αντίστοιχα ως προς την ουδέτερη γραμμή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν  $J$  είναι η ροπή αδράνειας όλης της διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή, θα είναι:

$$J = J_1 + J_2.$$

Από τη σχέση (ζ) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E_1 J_1 + E_2 J_2} = \frac{\frac{M}{E_1}}{J_1 + n J_2},$$

οπότε οι σχέσεις (α) και (β) των ορθών τάσεων γίνονται τελικά:

$$\sigma_1 = \frac{M}{J_1 + n J_2} \cdot y \quad \text{και} \quad \sigma_2 = \frac{M \cdot n}{J_1 + n J_2} \cdot y.$$

Φυσικά, αν  $E_1 = E_2 = E$ , οπότε  $n = 1$ , οι δύο τελευταίες σχέσεις εκφυλίζονται στη:  $\sigma = \frac{M}{J} y$ , που γνωρίσαμε ήδη στην κάμψη.

Παρακάτω περιγράφεται η μέθοδος της **μετασχηματισμένης** διατομής που χρησιμοποιείται το ίδιο ικανοποιητικά για να αντιμετωπίσει το καμπτικό πρόβλημα της σύνθετης δοκού.

Στηρίζεται στο μετασχηματισμό της σύνθετης διατομής της δοκού σε άλλη **ισοδύναμη** που αποτελείται από **ένα** μόνο υλικό.

Με τον όρο **ισοδύναμη** εννοούμε εδώ ότι το ύψος, η θέση της ουδέτερης γραμμής και η ροπή αντίστασης της νέας **ισοδύναμης** διατομής παραμένουν αναλλοίωτα.

Ύστερα από αυτά, αναφερόμενοι στην εξίσωση (ε), παρατηρούμε ότι η ουδέτερη γραμμή της διατομής διατηρείται στην ίδια θέση, αν κάθε στοιχειώδης επιφάνεια  $dF$  του υλικού 2 πολλαπλασιασθεί με τον παράγοντα  $n$ , υπό την προϋπόθεση όμως ότι η απόσταση  $y$  κάθε τέτοιας επιφάνειας παραμένει ίδια.

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει, όπως φαίνεται στο σχ. 6.26.2 δ, μια **νέα** διατομή που έχει:

1. Την επιφάνεια του υλικού 1 όπως είναι, και
2. Την επιφάνεια του υλικού 2 με  $n$ -πλάσιο πλάτος.

Έτσι η νέα **ισοδύναμη** (μετασχηματισμένη) διατομή που δημιουργείται, αποτελείται από **ένα** μόνο υλικό, το 1.

Οι τάσεις  $\sigma_1$  που προκύπτουν για το υλικό 1, είναι οι ίδιες μ' αυτές που αντιστοιχούν στη νέα διατομή και υπολογίζονται κανονικά από τον τύπο της κάμψης για την απλή δοκό

$$\sigma = \frac{M}{J_t} y,$$

όπου  $J_t$  η ροπή αδράνειας της μετασχηματισμένης διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή, που είναι:

$$J_t = J_1 + nJ_2.$$

Όμως οι τάσεις  $\sigma_2$  που προκύπτουν για το υλικό 2, θα είναι  $n$ -πλάσιες από τις αντίστοιχες που προκύπτουν για την ισοδύναμη διατομή, επειδή η πραγματική επιφάνεια του υλικού 2 είναι  $n$  φορές μικρότερη της μετασχηματισμένης.

### Παράδειγμα

Η σύνθετη δοκός του σχήματος, η οποία αποτελείται από ξύλο (1) και χάλυβα (2), παραλαμβάνει καμπτική ροπή  $M = 1 \text{ tm}$ .

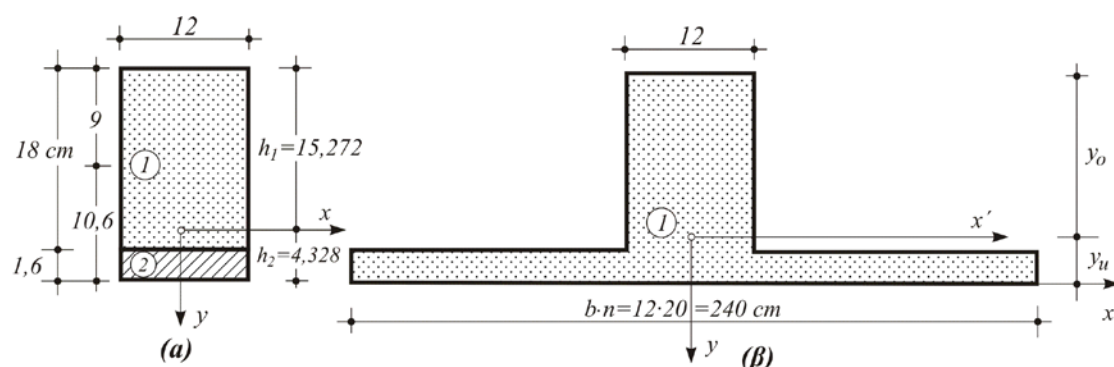
Αν  $E_1 = 100.000 \text{ kp/cm}^2$  και  $E_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ , να υπολογιστούν οι ακρότατες τιμές των τάσεων στα δύο υλικά.

### Λύση

Από τα δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει ότι ο λόγος των μέτρων ελαστικότητας στα δύο υλικά είναι:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2 \cdot 10^6}{10^5} = 20.$$

Υποθέτοντας ότι η ουδέτερη γραμμή βρίσκεται στο υλικό (1), θα προσδιορίσουμε πρώτα τη θέση της. Αν λοιπόν  $h_2$  είναι η απόστασή της από την κάτω ίνα της διατομής, τότε οι στατικές ρομές που αναφέρονται στη σχέση (ε), θα δώσουν:



Σχ. 6.26.3

$$S_1 = -(10,6 - h_2) \cdot 12 \cdot 18 = -216(10,6 - h_2)$$

$$S_2 = (h_2 - 0,8) \cdot 12 \cdot 1,6 = 19,2(h_2 - 0,8). \quad \text{Επομένως:}$$

$$-216(10,6 - h_2) + 20 \cdot 19,2(h_2 - 0,8) = 0, \quad \text{από όπου προκύπτει}$$

$$h_2 = 4,328 \text{ cm}, \quad \text{οπότε}$$

$$h_1 = 19,6 - h_2 = \mathbf{15,272 \text{ cm.}}$$

Οι ροπές αδράνειας  $J_1$  και  $J_2$  των επιφανειών (1) και (2) ως προς την ουδέτερη γραμμή είναι αντίστοιχα:

$$J_1 = \frac{12 \cdot 18^3}{12} + 12 \cdot 18(15,272 - 9)^2 = 14.329 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = \frac{12 \cdot 1,6^3}{12} + 12 \cdot 1,6(4,328 - 0,8)^2 = 243,07 \text{ cm}^4.$$

Επαλήθευση:  $J = \frac{12 \cdot 15,272^3}{3} + \frac{12 \cdot 4,328^3}{3} = 14.572,07 \text{ cm}^4 = J_1 + J_2 !$

Άρα η μέγιστη θλιπτική τάση που εμφανίζεται στο ξύλο, είναι:

$$\sigma_1 = -\frac{M}{J_1 + nJ_2} h_1 = -\frac{10^5 \cdot 15,272}{14.329 + 20 \cdot 243,07} = -79,6 \text{ kp/cm}^2,$$

ενώ η μέγιστη εφελκυστική τάση που εμφανίζεται στο χάλυβα, είναι:

$$\sigma_2 = \frac{M \cdot n}{J_1 + nJ_2} h_2 = \frac{10^5 \cdot 20}{19.190,4} \cdot 4,328 = 451,05 \text{ kp/cm}^2.$$

**Μετασηματίζοντας** τη σύνθετη διατομή του σχήματος (α) στην ενιαία, ξύλινη διατομή του σχήματος (β), θα έχουμε:

$$y_{\text{κεντροειδούς}} = \frac{240 \cdot 1,6 \cdot 0,8 + 12 \cdot 18 \cdot 10,6}{240 \cdot 1,6 + 12 \cdot 18} = 4,328 \text{ cm.} \quad \text{Άρα:}$$

$$y_u = 4,328 \text{ cm και } y_o = 15,272 \text{ cm.} \quad \text{Είναι:}$$

$$J_{x'} = \frac{12 \cdot 18^3}{12} + 12 \cdot 18(15,272 - 9)^2 + \frac{240 \cdot 1,6^3}{12} + 240 \cdot 1,6(4,328 - 0,8)^2 = 19.190,5 \text{ cm}^4$$

Άρα:  $\sigma_o = \sigma_{\min \text{ ξύλου}} = -\frac{10^5 \cdot 15,272}{19.190,5} = -79,6 \text{ kp/cm}^2$  και

$$\sigma_u = \sigma_{\max \text{ ξύλου}} = \frac{10^5 \cdot 4,328}{19.190,5} = 22,553 \text{ kp/cm}^2.$$

Συνεπώς η μέγιστη εφελκυστική τάση του χάλυβα θα είναι:

$$\sigma_{\max \text{ χάλυβα}} = 20 \cdot \sigma_u = 451,06 \text{ kp/cm}^2.$$

## 27 – Διατμητική παραμόρφωση

Στην ενότητα 19 αυτού του κεφαλαίου (σελ. 178) προσδιορίσαμε την ελαστική γραμμή μιας καμπτόμενης δοκού, λόγω της καμπτικής ροπής  $M$ , χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την επίδραση της τέμνουσας δύναμης  $Q$ , η οποία προκαλεί ανάλογες παραμορφώσεις που οφείλονται στην ολίσθηση των γειτονικών διατομών μεταξύ τους.



Οι παραμορφώσεις αυτές, όπως θα δούμε παρακάτω, ενώ είναι ασήμαντες για τις συνηθισμένες περιπτώσεις φορέων, γίνονται ιδιαίτερα σημαντικές όταν η δοκός έχει πολύ μικρό μήκος και μεγάλο ύψος διατομής, πράγμα που είναι σπάνιο στην πράξη.

Οι διατμητικές παραμορφώσεις σε μια γενικά καμπτόμενη δοκό δεν υπολογίζονται εύκολα. Όταν όμως, για λόγους ακριβείας υπολογιστούν, τότε προστίθενται σ' εκείνες που οφείλονται στην καμπτική ροπή, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας.

Επειδή η θεωρητική ανάπτυξη του θέματος ξεφεύγει από τα πλαίσια του βιβλίου αυτού, θα περιοριστούμε μόνο στις σχέσεις εκείνες που εκφράζουν τη **μέγιστη υποχώρηση  $f$**  ορισμένων μόνον χαλύβδινων δοκών **ορθογωνικής** διατομής ύψους  $h$  και μήκους  $l$ , με λόγο μέτρων

$$E/G = 2(\mu+1) = 2,6 ,$$

που προκύπτει από τη σύγχρονη δράση καμπτικών και διατμητικών παραμορφώσεων.

Στις εκφράσεις που ακολουθούν, ο πρώτος όρος της παρένθεσης αντιστοιχεί στην καμπτική παραμόρφωση ενώ ο δεύτερος στη διατμητική.

- Το  $\alpha$  είναι αριθμητικός συντελεστής που μετατρέπει τη μέση διατμητική τάση σε  $\tau_{\max}$  και έχει την τιμή  $\alpha = 1,5$  για ορθογωνική διατομή, και
- Το  $i$  είναι η ακτίνα αδράνειας της διατομής, που δίνεται από τη σχέση  $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ , και έχει την τιμή  $i^2 = \frac{h^2}{12}$  για ορθογωνική διατομή.

Οι αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις δοκών, είναι:

**1. Αμφιέριστη με καθολική ομοιόμορφη φόρτιση  $q$**

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EJ} \left( 1 + \frac{48}{5} \alpha \cdot \frac{i^2}{l^2} \cdot \frac{E}{G} \right) = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EJ} \left( 1 + 3,12 \frac{h^2}{l^2} \right)$$

**2. Αμφιέριστη με συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  στο μέσον**

$$f = \frac{P l^3}{48 E J} \left( 1 + 12 \alpha \cdot \frac{i^2}{l^2} \cdot \frac{E}{G} \right) = \frac{P l^3}{48 E J} \left( 1 + 3,9 \frac{h^2}{l^2} \right)$$

**3. Πρόβολος με συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  στο ελεύθερο άκρο**

$$f = \frac{P l^3}{3 E J} \left( 1 + 3 \alpha \cdot \frac{i^2}{l^2} \cdot \frac{E}{G} \right) = \frac{P l^3}{3 E J} \left( 1 + 0,98 \frac{h^2}{l^2} \right).$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι για  $h/l = 1/10$ , που είναι μια συνηθισμένη μορφή δοκού, η συμβολή της τέμνουσας δύναμης στη μέγιστη καμπτική υποχώρηση των παραπάνω δοκών, είναι αντίστοιχα, περίπου **3%**, **4%** και **1%**.

Η συμβολή αυτή γίνεται μεγαλύτερη εφόσον ο λόγος ο λόγος  $h/l$  αυξάνεται.

Γίνεται λοιπόν τώρα φανερός ο λόγος για τον οποίο η διατμητική παραμόρφωση στις συνηθισμένες περιπτώσεις δοκών δεν λαμβάνεται υπόψη.

# Λυγισμός

## 1 – Η έννοια του λυγισμού στα υποστυλώματα

Στην ενότητα 3ε του 1<sup>ου</sup> κεφαλαίου, γνωρίσαμε ήδη το λυγισμό σαν μια ειδική καταπόνηση κεντρικής θλίψης, όπου, η ελάχιστη διάσταση στην εγκάρσια διατομή του ευθύγραμμου φορέα (υποστυλώματος, ράβδου κλπ.) είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος του.

Θεωρούμε λοιπόν μια τέτοια περίπτωση, και εξετάζουμε την **ευστάθεια** της ράβδου, όταν η αξονική θλιπτική δύναμη  $P$  που επιβάλλεται αυξάνεται σταδιακά.

I. Στο αρχικό στάδιο της φόρτισης, όπου η  $P$  είναι μικρότερη μιας κρίσιμης τιμής  $P_k$  που θα υπολογίσουμε πιο κάτω, η ισορροπία της ράβδου είναι **ευσταθής**. Αυτό σημαίνει ότι αν η ράβδος καμπυλωθεί ελαφρά από κάποια εξωτερική αιτία, επανέρχεται αμέσως στην αρχική της ευθύγραμμη θέση, μόλις η αιτία εξαφανιστεί.

II. Άμα όμως η  $P$ , καθώς αυξάνει, λάβει την τιμή της  $P_k$ , τότε η ράβδος, μετά το εξωτερικό ερέθισμα, **δεν** επανέρχεται πια στην αρχική της θέση, αλλά παραμένει στην ίδια θέση της καμπύλωσης, όπου και ισορροπεί. Η ισορροπία της στο στάδιο αυτό χαρακτηρίζεται σαν **αδιάφορη**.

III. Μικρή αύξηση της  $P$ , πέρα από την τιμή της  $P_k$ , προκαλεί απότομα στη ράβδο ακόμα μεγαλύτερη καμπύλωση από εκείνη που προκάλεσε αρχικά η εξωτερική αιτία, με άμεσο επακόλουθο την καταστροφή της. Στο στάδιο αυτό η ισορροπία της ράβδου χαρακτηρίζεται σαν **ασταθής**.

Ύστερα από τα παραπάνω, θα ονομάζουμε **λυγισμό**, το φαινόμενο κατά το οποίο μια ευθύγραμμη λεπτή ράβδος, όταν υποβληθεί σε κεντρική θλίψη με αυξανόμενη ένταση, μεταβαίνει, από κάποια τιμή της δύναμης και μετά, σε μια κατάσταση ασταθούς ισορροπίας, με αποτέλεσμα να καμπυλώνει με την επίδραση της παραμικρής εξωτερικής αιτίας.

Η συγκεκριμένη τιμή της δύναμης, μετά από την οποία εμφανίζεται το φαινόμενο του λυγισμού ονομάζεται **κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_k$**  και αντιστοιχεί στη μεταξύ ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας μεταβατική κατάσταση του υλικού. Είναι φανερό ότι στο στάδιο I, η παραπάνω ράβδος υφίσταται **μόνο** θλιπτική καταπόνηση, με ορθές τάσεις που δίνονται από τη σχέση  $\sigma = P/F$ .

Στην ιδανική περίπτωση που η ράβδος είναι εντελώς ευθύγραμμη και το θλιπτικό φορτίο ασκείται αξονικά ακριβώς στο κεντροειδές της διατομής της, είναι δυνατόν να έχουμε ισορροπία της ράβδου ακόμα και όταν η  $P$  είναι μεγαλύτερη της  $P_k$ . Όμως η ισορροπία αυτή είναι τόσο ασταθής, που η παραμικρή εξωτερική ενόχληση, μπορεί να προκαλέσει ένα ελάχιστο βέλος κάμψης, που αυξάνεται απότομα και οδηγεί τη ράβδο στη θραύση της.

Σαν κατάσταση είναι ανάλογη με την ισορροπία ενός μολυβιού κατακόρυφα στη μύτη του, που είναι δυνατή μόνο θεωρητικά.

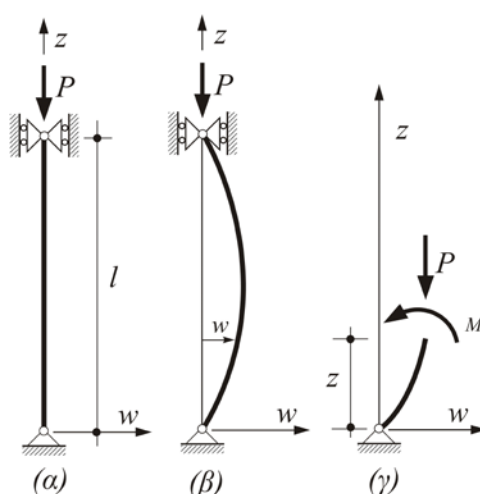
Πραγματικά, στην πράξη υπάρχουν πάντοτε αίτια που μπορούν να προκαλέσουν πλάγια παραμόρφωση της ράβδου, όπως π.χ. μικρή καμπυλότητα που μπορεί να γίνει στη ράβδο όταν κατασκευάζεται, έκκεντρη τοποθέτηση του φορτίου πάνω σ' αυτή, κλπ. Γι αυτό οι συντελεστές ασφάλειας έναντι λυγισμού είναι πάντα μεγαλύτεροι.

## 2 – Η θεωρία και ο τύπος του Euler

Ο φημισμένος Αυστριακός μαθηματικός Leonard Euler (1707 – 1783), που υπήρξε μαθητής του Bernoulli και θεωρείται ο μεγαλύτερος όλων των εποχών, ήταν ο πρώτος που διερεύνησε την περίπτωση λυγισμού μιας ράβδου και καθόρισε το κρίσιμο φορτίο της, το 1744. Η θεωρία του στηρίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

1. Η ράβδος είναι ιδανικά ευθύγραμμη.
2. Το φορτίο ενεργεί ακριβώς στον άξονά της
3. Το υλικό της ράβδου είναι ισότροπο, δηλαδή έχει ίδιες ιδιότητες σε εφελκυσμό και θλίψη και
4. Ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή η ορθή τάση που αναπτύσσεται είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας του υλικού.

Οι θεωρητικές αυτές παραδοχές, ιδιαίτερα οι 1 και 2, έγιναν για να μπορεί το πρόβλημα του λυγισμού να αντιμετωπιστεί με προσिता μαθηματικά μέσα.



Σχ. 7.2.1

Θεωρούμε λοιπόν την ευθύγραμμη ράβδο του σχήματος 7.2.1, μήκους  $l$ , η οποία στηρίζεται στο ένα της άκρο με άρθρωση, ενώ στο άλλο με αρθρωτή κύλιση, χωρίς τριβές.

Έστω  $P$  η τιμή του αξονικού φορτίου που προκαλεί το φαινόμενο λυγισμού στη ράβδο, η οποία, λόγω κάποιας εξωτερικής αιτίας, έχει πάρει την ελαφρά καμπύλη μορφή του σχήματος ( $\beta$ ) και βρίσκεται σε ισορροπία.

Η μορφή αυτή είναι εκείνη που εμφανίζεται σε μια καμπτόμενη ράβδο (ελαστική γραμμή), λόγω της καμπτικής ροπής  $M$ , που προκαλεί η δύναμη  $P$  σε τυχούσα διατομή που απέχει απόσταση  $z$  από τη στήριξη  $A$ .

Προφανώς είναι:

$$M = P \cdot w$$

Επομένως η εξίσωση της ελαστικής γραμμής της ράβδου θα είναι:

$$EJw'' = -M = -P \cdot w,$$

Δηλαδή  $EJw'' + P \cdot w = 0$ , ή

$$w'' + \frac{P}{EJ} w = 0. \quad (1)$$

$$\text{Θέτοντας ήδη} \quad \frac{P}{EJ} = u^2, \quad (\alpha)$$

η (1) γίνεται  $w'' + u^2 w = 0$ . (2)

Η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης θα προκύψει αν βρούμε δύο μερικές λύσεις που να την ικανοποιούν. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$w = \eta\mu(uz)$  είναι λύση της (2), επειδή είναι

$$w' = u \sigma\upsilon\nu(uz) \text{ και } w'' = -u^2 \eta\mu(uz).$$

Συνεπώς η (2) ικανοποιείται, αφού  $-u^2 \eta\mu uz + u^2 \eta\mu uz = 0!$

Αλλά και η συνάρτηση

$$w = \sigma\upsilon\nu(uz)$$

είναι λύση της (2), όπως πολύ εύκολα μπορούμε όμοια να διαπιστώσουμε.

Επομένως η γενική λύση της (2), θα είναι:

$$w = C_1 \cdot \eta\mu(uz) + C_2 \cdot \sigma\upsilon\nu(uz), \quad (3)$$

όπου  $C_1$  και  $C_2$  είναι σταθερές οι οποίες υπολογίζονται από τις λεγόμενες οριακές συνθήκες στήριξης της ράβδου, που εδώ εκφράζονται από το γεγονός ότι η πλάγια υποχώρηση της ράβδου στα άκρα της είναι μηδενική. Δηλαδή είναι:

Συνθήκη πρώτη: για  $z = 0$  είναι  $w = 0$

Συνθήκη δεύτερη: για  $z = l$  είναι  $w = 0$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη από αυτές στην (3), προκύπτει:

$$0 = C_1 \eta\mu 0^\circ + C_2 \sigma\upsilon\nu 0^\circ, \quad \text{ή} \quad 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = 0,$$

και επομένως η (3) γίνεται τώρα:

$$w = C_1 \cdot \eta\mu(zu). \quad (4)$$

Η δεύτερη συνθήκη, συνδυαζόμενη με την (4), δίνει:

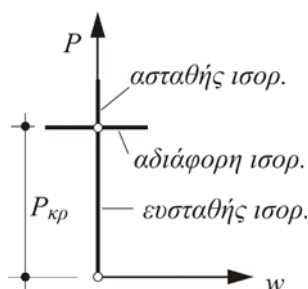
$$C_1 \cdot \eta\mu(u \cdot l) = 0. \quad (5)$$

Για να ισχύει η (5), θα πρέπει:

1. Είτε  $C_1 = 0$ , ή

2.  $C_1 \neq 0$  και  $\eta\mu(ul) = 0$ .

Από την **πρώτη** περίπτωση προκύπτει ότι η πλάγια μετατόπιση  $w$  είναι μηδενική για οποιαδήποτε τιμή του  $z$ , επομένως η ράβδος παραμένει ευθεία. Έτσι η (5) ικανοποιείται για οποιαδήποτε τιμή της ποσότητας  $u/l$  και επομένως για **οποιαδήποτε** τιμή του φορτίου  $P$ , λόγω της (α).



Σχ. 7.2.2

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης, που ονομάζεται **εκφυλισμένη**, και αντιστοιχεί σε ιδανική ράβδο που διατηρείται ευθύγραμμη σε ευσταθή ή ασταθή ισορροπία, παριστάνεται με τον κατακόρυφο άξονα του διαγράμματος,  $P - w$  του σχήματος 7.2.2. Όμως σαν λύση δεν μας ενδιαφέρει, επειδή αρχικά υποθέσαμε ότι η ράβδος έχει καμπυλωθεί.

Από τη **δεύτερη** περίπτωση προκύπτει ότι

$$\eta\mu(u/l) = 0, \quad (6)$$

που συμβαίνει μόνον όταν:

$$u \cdot l = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Επειδή για  $u/l = 0$  προκύπτει λόγω της (α) ότι  $P = 0$ , που δείχνει ότι η ράβδος παραμένει αφόρτιστη, ούτε η λύση αυτή μας ενδιαφέρει.

Θεωρούμε λοιπόν την περίπτωση:

$$u \cdot l = n \cdot \pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

από όπου προκύπτει:

$$u = n \frac{\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7)$$

και λόγω της (α),

$$\frac{P}{EJ} = u^2 = n^2 \frac{\pi^2}{l^2},$$

$$\text{προκύπτει τελικά: } P = n^2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (8)$$

Η σχέση (8) δίνει τις τιμές της  $P$  που προκύπτουν από τη σχέση (5) και επομένως εκφράζει τις λύσεις που ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (4) και είναι διαφορετικές της εκφυλισμένης.

Έτσι η εξίσωση της ελαστικής γραμμής της ράβδου, θα προκύψει τώρα από την (4), όπου όμως το  $u$  παίρνει τη συγκεκριμένη τιμή που δίνεται από τη σχέση (7), δηλαδή θα είναι:

$$w = C_1 \eta \mu n \frac{\pi}{l} z \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

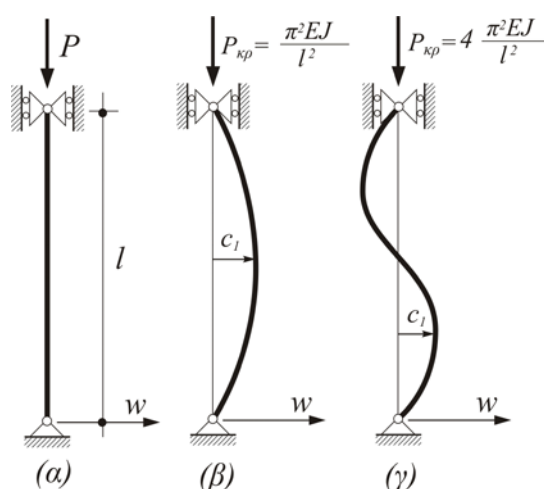
Θεωρητικά, η καμπύλωση της ράβδου είναι δυνατόν να γίνει μόνον όταν η  $P$  λαμβάνει τιμές που προκύπτουν από την (8) για ακέραια  $n$ . Για όλες τις άλλες (ενδιάμεσες) τιμές της  $P$ , η ράβδος ισορροπεί αν παραμείνει ευθεία.

Επομένως οι τιμές της  $P$  που δίνονται από τη σχέση (8), εκφράζουν ουσιαστικά τα **κρίσιμα φορτία** της ράβδου, το μικρότερο των οποίων, για  $n = 1$ , είναι

$$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (10)$$

και ονομάζεται **κρίσιμο φορτίο λυγισμού ή φορτίο του Euler**.

Η αντίστοιχη εξίσωση της ελαστικής γραμμής που προκύπτει τώρα από τη σχέση (9) και παριστάνει το λεγόμενο θεμελιώδη τύπο καμπύλης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, είναι:



Σχ. 7.2.3

$$w = C_1 \eta \mu \frac{\pi}{l} z. \quad (11)$$

Στην εξίσωση (11) η  $C_1$  έχει την έννοια της μέγιστης απόκλισης, που εμφανίζεται στο μέσον της ράβδου και είναι θετική ή αρνητική. Πραγματικά, για  $z = l/2$ , έχουμε:

$$w = C_1 = w_{\max}.$$

Επομένως στο σχήμα 7.2.2, το τμήμα του διαγράμματος  $P - w$  που αντιστοιχεί ακριβώς στην τιμή  $P_{κρ}$ , προκύπτει ότι είναι μια **οριζόντια ευθεία** εκατέρωθεν του κατακόρυφου άξονα.

Είναι φανερό, ότι η τιμή της  $C_1$ , μολονότι είναι απροσδιόριστη, πρέπει να παραμένει πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος της ράβδου, επειδή αυτό είναι κάτι που και αρχικά το υποθέσαμε, και επί πλέον για μεγαλύτερες τιμές της  $C_1$ , η ράβδος θα έσπαζε. Η απροσδιοριστία αυτή της  $C_1$ , δείχνει ακριβώς το **αδιάφορο** της ισορροπίας της ράβδου.

Η καμπύλη του λυγισμού που προκύπτει από τη σχέση (11) είναι ημιτονοειδής, με σημεία καμψής τα άκρα της ράβδου. Όμως από τις εξισώσεις (8)

και (9), δίνοντας μεγαλύτερες τιμές στο  $n$ , παίρνουμε μια απειρία τιμών για τα κρίσιμα φορτία, σε συσχετισμό με τους αντίστοιχους τύπους ελαστικής γραμμής.

Στο τμήμα (γ) του σχ. 7.2.3, δίνεται ο τύπος της ελαστικής γραμμής για  $n = 2$ , που έχει σαν αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο τετραπλάσιο του  $P_{κρ}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ενώ το  $P_{κρ}$  είναι ανάλογο του  $n^2$ , ο αριθμός των τμημάτων της καμπύλης «μεταξύ δύο σημείων καμπής» είναι ανάλογος του  $n$ . Τέτοιοι ανώτεροι τύποι λυγισμού ( $n > 1$ ) δεν παρουσιάζουν κανένα πρακτικό ενδιαφέρον, επειδή η ράβδος λυγίζει άμα η δύναμη  $P$  φτάσει την τιμή της  $P_{κρ}$ .

Ο μόνος τρόπος για να πάρουμε ανώτερους τύπους λυγισμού, είναι να εξασφαλίσουμε πλευρική στήριξη στα «σημεία καμπής».

## Συμπεράσματα

Από διάφορα πειράματα λυγισμού έχει φανεί ότι, όταν η θλιπτική δύναμη πλησιάζει την τιμή της  $P_{κρ}$ , αρχίζει να εκδηλώνεται πλευρική κάμψη, που αυξάνει τόσο γρήγορα, ώστε όταν το φορτίο γίνει ίσο με το κρίσιμο, να έχει ήδη επέλθει ολοκληρωτική καταστροφή του δοκιμίου.

Έτσι, σαν κριτήριο αντοχής των λεπτών θλιβομένων ράβδων θα πρέπει να λαμβάνεται πάντα το κρίσιμο φορτίο τους.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, το κρίσιμο αυτό φορτίο που προκύπτει από τη σχέση (10), δεν εξαρτάται καθόλου από την αντοχή του υλικού, αλλά από τις διαστάσεις (διατομή, μήκος) της ράβδου και από το μέτρο ελαστικότητάς της.

Αυτό σημαίνει ότι δυο λεπτές χαλύβδινες ράβδοι με ίσες διαστάσεις, που η μια είναι από χάλυβα υψηλής αντοχής ενώ η άλλη από κοινό χάλυβα, θα λυγίσουν κάτω από το ίδιο φορτίο, έστω και αν οι αντοχές των δύο υλικών διαφέρουν τόσο πολύ.

Η φορτοϊκανότητα μιας θλιβόμενης ράβδου μπορεί επίσης να αυξηθεί, αν η κατανομή του υλικού στη διατομή της γίνει έτσι, ώστε να προκύψει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.

Για να γίνει όμως αυτό χωρίς αύξηση του εμβαδού της διατομής της, θα πρέπει να επιδιώξουμε την απομάκρυνση του υλικού της διατομής από το κεντροειδές της.

Έτσι προκύπτει ότι, για θλιβόμενες ράβδους, οι διατομές σε σχήμα κυκλικού δακτυλίου, είναι πιο οικονομικές από άλλες με πλήρη διατομή ίσου εμβαδού. Επί πλέον έχουν το πλεονέκτημα να παρουσιάζουν ίση αντοχή σε λυγισμό προς κάθε διεύθυνση.

Είναι φανερό ότι σε ράβδο με τυχούσα διατομή, ο λυγισμός θα γίνει σε επίπεδο κάθετο προς τον άξονα της διατομής ως προς τον οποίο η ροπή αδράνειας είναι ελάχιστη.

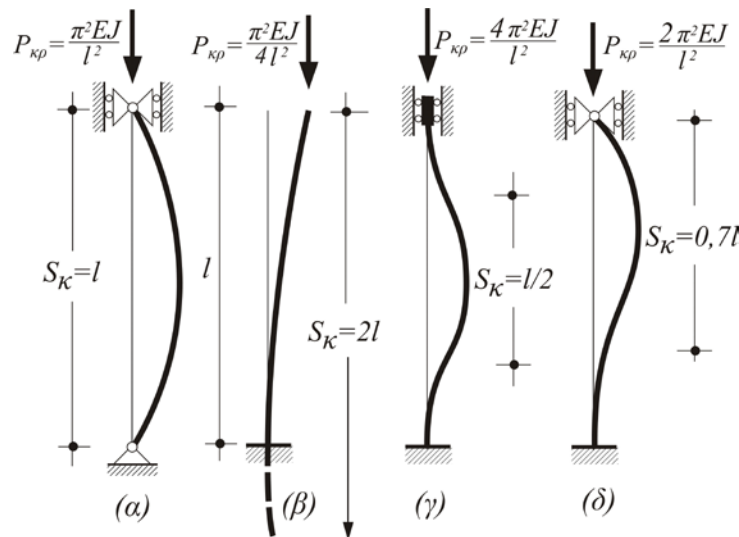
Η επίδραση που μπορεί να έχει το ίδιο βάρος της ράβδου στο κρίσιμο φορτίο της είναι σχεδόν πάντα αμελητέα, επειδή στις διάφορες εφαρμογές, το βάρος της ράβδου, είναι γενικά μικρό σε σχέση με το κρίσιμο φορτίο της.

### 3 – Επίδραση των συνθηκών στα άκρα του στύλου

Όταν η στήριξη της ράβδου που υπόκειται σε λυγισμό δεν είναι αμφιαρθρωτή όπως αυτή που ήδη εξετάσαμε, τότε η ελαστική της γραμμή είναι πάλι ημιτονοειδής. Όμως τα σημεία καμψής της (πραγματικά ή φανταστικά), δεν είναι στις στηρίξεις, αλλά σε διαφορετικές θέσεις, ώστε μεταξύ των διαδοχικών σημείων καμψής η ελαστική γραμμή να είναι η **ίδια** για κάθε περίπτωση στήριξης.

Γίνεται λοιπόν σαφές ότι εκείνο που χαρακτηρίζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού δεν είναι το μήκος της ράβδου αυτό καθ' εαυτό αλλά η **απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων καμψής** της ελαστικής γραμμής που ονομάζεται **μήκος λυγισμού** και συμβολίζεται με  $S_K$ .

Το μήκος λυγισμού διαφέρει σε κάθε ράβδο, ανάλογα με τον τρόπο στήριξής της. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται τέσσερις διαφορετικοί τρόποι στήριξης των άκρων μιας ράβδου πραγματικού μήκους  $l$ , με το αντίστοιχο, για κάθε περίπτωση, μήκος λυγισμού  $S_K$ . Συγκεκριμένα:



Σχ. 7.3

**α:** Δύο αρθρώσεις, εκ των οποίων η μία κυλιόμενη, περίπτωση που ήδη εξετάστηκε.

**β:** Μία πάκτωση, με το άλλο άκρο ελεύθερο

**γ:** Δύο πακτώσεις, εκ των οποίων η μία κυλιόμενη

**δ:** Μια πάκτωση και μια άρθρωση κυλιόμενη.

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του μήκους λυγισμού και το γεγονός ότι ο στύλος καμπυλώνεται σε επίπεδο κάθετο του άξονα της διατομής, ως προς τον οποίο, η ροπή αδράνειας είναι ελάχιστη ( $J_{\min}$ ), το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της σχέσης (10) εκφράζεται τώρα με τη γενική σχέση:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{S_K^2}, \quad (12)$$

που είναι ενιαία για κάθε περίπτωση στήριξης του στύλου.



Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι τιμές του μήκους λυγισμού, του κρίσιμου φορτίου και του λόγου του κρίσιμου φορτίου προς εκείνο της περίπτωσης (α), που αντιστοιχούν στους τρόπους στήριξης του σχήματος.

Περίπτωση	Τρόπος στήριξης	Μήκος λυγ $S_{\kappa}$	Κρίσιμο φορτίο $P_{\kappa}$	$P_{\kappa}: P_{\kappa}(\alpha)$
(α)	Άρθρωση – Κινητή άρθρωση	$l$	$\pi^2 EJ/l^2$	1:1
(β)	Πάκτωση – Ελεύθερο άκρο	$2 \cdot l$	$\pi^2 EJ/4l^2$	1:4
(γ)	Πάκτωση – Κινητό άκρο	$l/2$	$4\pi^2 EJ/l^2$	4:1
(δ)	Πάκτωση – Κινητή άρθρωση	$0.7 \cdot l$	$2\pi^2 EJ/l^2$	2:1

Για την ευνοϊκότερη αντιμετώπιση του λυγισμού στην πράξη, π.χ. παραλαβή μεγαλύτερου κρίσιμου φορτίου από συγκεκριμένη διατομή, φροντίζουμε να διαμορφώσουμε τις στηρίξεις των θλιβομένων ράβδων, έτσι ώστε, να λειτουργούν κατά το δυνατόν σαν πακτώσεις.

Όμως επειδή θεωρητικά οι πακτώσεις δεν είναι ποτέ τέλειες, στους υπολογισμούς δε λαμβάνεται υπόψη το πλεονέκτημα της πάκτωσης, αλλά θεωρείται ότι οι ράβδοι στηρίζονται αρθρωτά, και συνεπώς έχουν σαν κρίσιμο φορτίο, το:

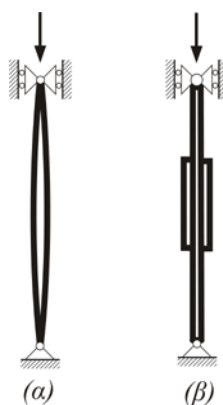
$$P_{\kappa\rho} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} \quad (S_{\kappa} = 1).$$

#### 4 – Βέλτιστοι τύποι υποστυλωμάτων

Όπως είναι γνωστό, τα περισσότερα υποστυλώματα σήμερα είναι πρισματικά, δηλαδή η διατομή τους είναι σταθερή σ' όλο το μήκος.

Όμως σ' ένα υποστυλώμα που αποτελείται από μια **συγκεκριμένη ποσότητα ύλης**, το κρίσιμο φορτίο είναι δυνατόν να αυξηθεί σημαντικά αν αυξήσουμε τη διατομή του στο κεντρικό τμήμα του μήκους του.

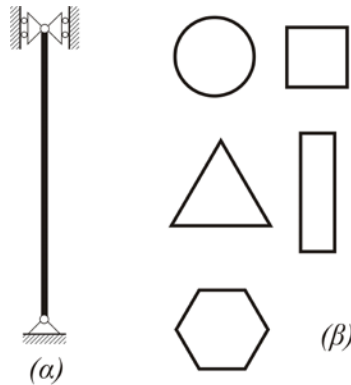
Η «ιχθυοειδής» π.χ. μορφή του υποστυλώματος του σχήματος μπορεί να παραλάβει πολύ μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο από εκείνο που θα παραλάμβανε πρισματικό υποστυλώμα ίσου μήκους με τον ίδιο όγκο. Φυσικά η κατασκευή ενός τέτοιου υποστυλώματος δεν είναι πρακτικά εύκολη.



Σχ. 7.4.1

Όμως τα πρισματικά υποστυλώματα είναι δυνατόν να 'οπλιστούν' με εξωτερικό μανδύα σε ένα κεντρικό τους τμήμα, δημιουργώντας έτσι ευνοϊκότερες συνθήκες για την αντιμετώπιση του λυγισμού.

Ας θεωρήσουμε τώρα την αμφιαρθρωτή ράβδο του σχήματος 7.4.2, η οποία μπορεί να λυγίσει προς οποιαδήποτε διεύθυνση. Η διατομή της ράβδου είναι δυνατό να έχει σχήμα κύκλου, τετραγώνου, ισοπλεύρου τριγώνου, ορθογωνίου ή εξαγώνου.



Σχ. 7.4.2

Αν οι παραπάνω διατομές είναι ισοδύναμες (έχουν το ίδιο εμβαδόν), ποια από όλες θα δώσει την **αποδοτικότερη** ράβδο;

Δηλαδή μ' άλλα λόγια το ερώτημα που τίθεται είναι, ποια διατομή μπορεί να παραλάβει το μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού που προκύπτει από τη σχέση  $P_{κρ} = \pi^2 E J_{\min} / l^2$ ;

Η διαίσθηση των περισσότερων ανθρώπων οδηγεί στην εκλογή της κυκλικής διατομής. Όμως εύκολα αποδεικνύεται ότι η ελάχιστη ροπή αδράνειας  $J_{\min}$  της διατομής του ισοπλεύρου τριγώνου είναι κατά 21% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της κυκλικής διατομής ενώ παραμένει μεγαλύτερη εκείνης των υπολοίπων σχημάτων.

Έτσι, την πιο αποδοτική ράβδο θα δώσει η τριγωνική διατομή, αφού στη σχέση που εκφράζει το κρίσιμο φορτίο, οι υπόλοιποι όροι είναι σταθεροί.

Πρακτικά τα υποστυλώματα αναγκάζονται να λυγίσουν σε ένα μόνο επίπεδο και επομένως το σχήμα της διατομής πρέπει να εκλέγεται έτσι, ώστε να δίνει μια μεγάλη ροπή αδράνειας στο επίπεδο αυτό.

Στις σιδηροκατασκευές οι διατομές των υποστυλωμάτων (διπλά ταυ κλπ.) είναι τέτοιες που να ικανοποιούν την απαίτηση αυτή.

Στις κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή ξύλο χρησιμοποιούνται συνήθως ορθογωνικές ή κυκλικές διατομές.

Για τις κατασκευές που χρησιμοποιούνται στην αεροναυπηγική ή στα αυτοκίνητα, τα σχήματα ποικίλουν, ανάλογα με την εκάστοτε απαίτηση. Γενικά όμως, όπως τονίστηκε πιο πριν, οι διατομές που έχουν εσωτερικά κενά είναι πιο αποδοτικές, επειδή παρουσιάζουν μεγαλύτερη ροπή αδράνειας για το ίδιο εμβαδόν διατομής.

## 5 – Ελαστικός και πλαστικός λυγισμός

Από το γενικό τύπο του Euler

$$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{S_{\kappa}^2}$$

που δίνει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, προσδιορίζεται η λεγόμενη **τάση λυγισμού**,  $\sigma_{\kappa}$ , που αναπτύσσεται στη διατομή της ράβδου κατά τη στιγμή που εμφανίζεται το φαινόμενο του λυγισμού, και φυσικά η ράβδος αναλαμβάνει το κρίσιμο φορτίο της.

Πραγματικά, αν F είναι το εμβαδόν της διατομής της ράβδου, θα είναι:

$$\sigma_{\kappa} = \frac{P_{κρ}}{F} = \frac{\pi^2 E}{S_{\kappa}^2} \cdot \frac{J_{\min}}{F} = \frac{\pi^2 E}{S_{\kappa}^2} \cdot i_{\min}^2 \quad (13)$$

όπου  $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}$  η ελάχιστη ακτίνα αδράνειας της διατομής.

Η σχέση (13) μπορεί ακόμα να γραφεί:

$$\sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{S_{\kappa}}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (14)$$

Ο λόγος  $\lambda = S_{\kappa}/i_{\min}$  ονομάζεται **λυγηρότητα** της ράβδου και είναι **καθαρός αριθμός**. Η λυγηρότητα δίνει ένα μέτρο λεπτότητας της ράβδου και επομένως εκφράζει το μέγεθος της **ευαισθησίας** της σε λυγισμό.

Η εξίσωση (14), που παριστάνει κυβική υπερβολή, αποτελεί την ανηγμένη μορφή του τύπου του Euler και εκφράζει τη μεταβολή της κρίσιμης τάσης λυγισμού σε σχέση με τη λυγηρότητα της ράβδου.

Αν λάβουμε υπόψη ότι το μέτρο ελαστικότητας E για τα διάφορα είδη του ελατού σιδήρου και χάλυβα είναι το ίδιο, συμπεραίνουμε ότι, σε τέτοιες κατασκευές η τάση λυγισμού δεν εξαρτάται από την ποιότητα αλλά μόνον από την λυγηρότητα λ της ράβδου.

Πειραματικά διαπιστώθηκε ότι ο τύπος του Euler δίνει εξαγόμενα σύμφωνα με τα δεδομένα του πειράματος, μόνον όταν η λυγηρότητα λ είναι μεγαλύτερη από κάποια συγκεκριμένη τιμή, που ποικίλει ανάλογα με το χρησιμοποιούμενο υλικό.

Επομένως για να εμφανιστεί λυγισμός, θα πρέπει το μήκος της ράβδου να είναι μεγαλύτερο από κάποιο πολλαπλάσιο της ακτίνας αδράνειας  $i_{\min}$ .

Εξ άλλου ο τύπος του Euler βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι το υλικό της ράβδου ακολουθεί το νόμο του Hooke. Αυτό σημαίνει ότι η κρίσιμη τάση λυγισμού  $\sigma_{\kappa}$  θα πρέπει πάντα να είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας του υλικού, δηλαδή:

$$\sigma_{\kappa} \leq \sigma_A \quad \text{ή} \quad \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_A \Rightarrow \lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_A}} \quad (15)$$

Η σχέση (15) δείχνει ότι για να ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή για να έχει εφαρμογή ο τύπος του Euler, θα πρέπει η λυγηρότητα της ράβδου να είναι μεγαλύτερη από την τιμή:

$$\lambda_A = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_A}}$$

που αντιστοιχεί στο όριο αναλογίας του υλικού και ονομάζεται **οριακή** λυγηρότητα.

Έτσι, αν η λυγηρότητα  $\lambda$  της ράβδου είναι μεγαλύτερη της  $\lambda_A$ , ο λυγισμός γίνεται με τάσεις που βρίσκονται στην **ελαστική** περιοχή των τάσεων, ενώ αν η  $\lambda$  είναι μικρότερη της  $\lambda_A$  ο λυγισμός θα γίνει με τάσεις μεγαλύτερες της  $\sigma_A$  που αντιστοιχούν στην **πλαστική** περιοχή του υλικού.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τον ελαστικό, ενώ στη δεύτερη τον πλαστικό λυγισμό.

Ενδεικτικά για χάλυβα St 37, με  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$  και  $\sigma_A \approx 2.050 \text{ kp/cm}^2$ , η οριακή λυγηρότητα είναι:

$$\lambda_A = \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^6}{2.050}} = 100 .$$

## 6 – Ο τύπος του Tetmayer

Στον πλαστικό λυγισμό, όπου είναι  $\lambda < \lambda_A$ , η τάση λυγισμού  $\sigma_k$  προφανώς είναι μεγαλύτερη της  $\sigma_A$  παίρνοντας, βάσει της σχέσης (14), τιμές μεγαλύτερες για μικρότερα  $\lambda$ .

Είναι όμως φανερό, ότι αν η  $\sigma_k$ , καθώς αυξάνεται, φτάσει την τιμή του ορίου διαρροής  $\sigma_s$  του υλικού, η ράβδος γίνεται πλέον άχρηστη σαν στοιχείο κατασκευής επειδή πρακτικά θεωρείται ότι εξάντλησε τη φορτική της ικανότητα και επομένως η αντιμετώπιση του λυγισμού στην κατάσταση αυτή δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον. Επομένως θα πρέπει να είναι:

$$\sigma_k \leq \sigma_s \quad (16)$$

Για τις τιμές της  $\sigma_k$  που κυμαίνονται ανάμεσα στο όριο αναλογίας και στο όριο διαρροής του υλικού, ο Tetmayer διετύπωσε, ύστερα από πειραματική έρευνα, μια νέα σχέση που εκφράζει τη  $\sigma_k$  σαν γραμμική συνάρτηση της λυγηρότητας  $\lambda$

$$\sigma_k = a - b \cdot \lambda , \quad (17)$$

όπου οι σταθερές  $a$  και  $b$  προσδιορίζονται πειραματικά και είναι διαφορετικές για κάθε υλικό.

Για χάλυβες π.χ. St 37, St 48 και St 52, η σχέση (17) παίρνει τη μορφή αντίστοιχα:

$$\sigma_k = 2891 - 8,175 \cdot \lambda \quad \text{για} \quad 60 \leq \lambda \leq 100$$

$$\sigma_k = 4691 - 21,75 \cdot \lambda \quad \text{για} \quad 60 \leq \lambda \leq 100$$

$$\sigma_k = 5891 - 38,175 \cdot \lambda \quad \text{για} \quad 60 \leq \lambda \leq 100$$

ενώ για διάφορα ξύλα (δρυς οξιά κλπ.) είναι:

$$\sigma_k = 375 - 2,75 \cdot \lambda \quad \text{για} \quad 1,8 \leq \lambda \leq 100$$

Η περιοχή όπου ισχύει ο τύπος του Tetmayer, δηλαδή η σχέση 17, θα προσδιοριστεί από τον περιορισμό της σχέσης (16), οπότε θα πρέπει:

$$\alpha - b \cdot \lambda \leq \sigma_s \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq \frac{\alpha - \sigma_s}{b}. \quad (18)$$

Η οριακή τιμή  $\lambda_s = \frac{\alpha - \sigma_s}{b}$  ονομάζεται **ελάχιστη** λυγηρότητα και είναι απαραίτητη για να λάβει χώρα ο πλαστικός λυγισμός.

## 7 – Διερεύνηση – έλεγχος αντοχής

Από όσα έχουν αναπτυχθεί προηγουμένως, προκύπτει ότι ο πλαστικός λυγισμός εμφανίζεται μόνον όταν η λυγηρότητα  $\lambda$ , είναι:

$$\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_A \quad (19)$$

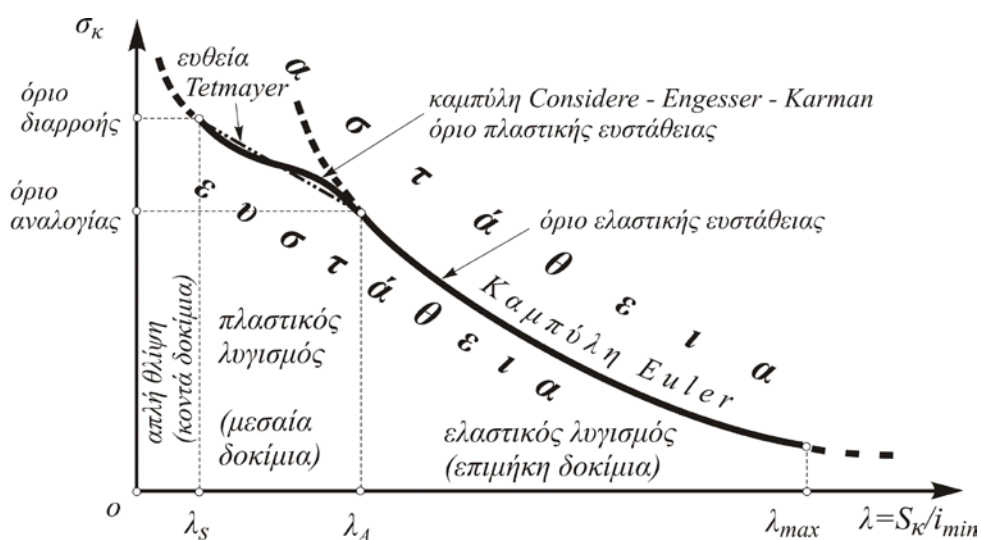
Για τιμές της λυγηρότητας μικρότερες της  $\lambda_s$  δεν υπάρχει καν φαινόμενο λυγισμού και η ράβδος υπολογίζεται απλά σε θλίψη.

Από την άλλη πλευρά όμως, όταν η λυγηρότητα, όντας μεγαλύτερη της  $\lambda_A$ , είναι πολύ μεγάλη, η κρίσιμη τάση λυγισμού που προκύπτει από τη σχέση (14) είναι πολύ μικρή και επομένως ο λυγισμός εμφανίζεται για πολύ μικρές τιμές του φορτίου. Έτσι η ράβδος είναι πάλι άχρηστη σαν κατασκευαστικό στοιχείο. Γι αυτό στην πράξη δε χρησιμοποιούνται γενικά ράβδοι με λυγηρότητα μεγαλύτερη της  $\lambda_{max} = 200 \div 250$ .

Από τη σχέση (14) προέκυψε για τον ελαστικό λυγισμό ότι:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Στο σύστημα συντεταγμένων  $\lambda - \sigma_k$  του σχήματος 7.7.1, η σχέση αυτή παριστάνεται από τη λεγόμενη κυβική υπερβολή του Euler.



Σχ. 7.7.1

Για τον πλαστικό όμως λυγισμό, οι ερευνητές Considere, Engesser, Karman κλπ. βρήκαν θεωρητικά και πρακτικά ότι ισχύει η σχέση:

$$\sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2} \quad (20)$$

η οποία είναι ανάλογη με τη σχέση (14) του Euler, όμως το T παριστάνει το λεγόμενο «εφαπτομενικό» ή «μειωμένο» μέτρο ελαστικότητας, μεταβλητό και δύσκολα προσδιοριζόμενο συναρτήσει του λ.

Η σχέση (20) παριστάνεται στο σχήμα με την ομώνυμη καμπύλη των παραπάνω ερευνητών. Όμως, επειδή η μορφή της δεν μπορεί να δοθεί με απλή εξίσωση, στην πράξη αντικαθίσταται με την ευθεία του Tetmayer (σχέση 17).

Ο υπολογισμός των θλιβομένων ράβδων σε λυγισμό, γίνεται τώρα με το σκεπτικό ότι η υπάρχουσα θλιπτική τάση που αναπτύσσεται στη ράβδο πρέπει να είναι μικρότερη του πηλίκου  $\sigma_{\kappa}/\nu$ , όπου  $\sigma_{\kappa}$  είναι η γνωστή τάση λυγισμού, που εδώ παίζει το βασικό ρόλο αστοχίας και  $\nu$  ο συντελεστής ασφάλειας σε λυγισμό. Δηλαδή:

$$\sigma_{\text{υπ}} \leq \frac{\sigma_{\kappa}}{\nu} .$$

Στην παραπάνω σχέση, αν αντικαταστήσουμε τη  $\sigma_{\text{υπ}}$  με το πηλίκο P/F (P το φορτίο και F η διατομή της ράβδου), ενώ την  $\sigma_{\kappa}$  με την τιμή που παίρνουμε είτε από τη σχέση (14) για τον ελαστικό λυγισμό είτε από μία των σχέσεων (17) για τον πλαστικό, θα βρούμε μια σχέση μεταξύ των P, F, λ, E και ν, από την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε την άγνωστη παράμετρο, που συνήθως είναι ή η P ή η λ. Τα προβλήματα αυτού του είδους ακολουθούν συνήθως κυκλικές λύσεις με δοκιμές.

## Παράδειγμα

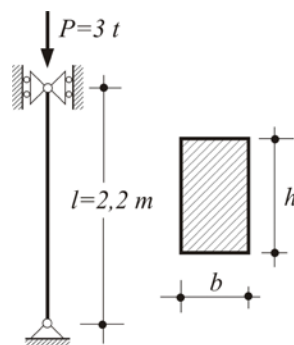
Η χαλύβδινη ράβδος του σχήματος έχει μήκος 2,2 m και φέρει αξονικό φορτίο P = 3 t. Να προσδιοριστούν οι απαραίτητες διαστάσεις της διατομής της, όταν αυτή είναι:

- α) ορθογωνική με λόγο πλευρών  $h/b = 2$ ,
- β) τετραγωνική με πλευρά b, και
- γ) ισοσκελές γωνιακό έλασμα L.

Δίνονται: Συντελεστής ασφάλειας σε λυγισμό  $\nu = 2,5$

Επιτρεπόμενη θλιπτική τάση  $\sigma_{\text{επ}} = 1.400 \text{ kp/cm}^2$

Μέτρο ελαστικότητας  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ .



Σχ. 7.7.2

**Λύση**

**α)** Η διατομή της ράβδου και η ελάχιστη ακτίνα αδράνειας της διατομής της είναι αντίστοιχα:

$$F = b \cdot h = b \cdot 2b = 2b^2 \quad (\alpha)$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{hb^3}{bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}. \quad (\beta)$$

Ξεκινώντας από τον υπολογισμό σε απλή θλίψη, θα πρέπει:

$$\sigma_{\nu\pi} = \frac{P}{F_{\alpha\pi}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \text{ή} \quad \frac{3.000}{2b^2} \leq 1.400 \Rightarrow b \geq 1,035 \text{ cm.}$$

Τότε, η διατομή που προκύπτει, έχει ελάχιστη ακτίνα αδράνειας

$$i_{\min} = \frac{1,035}{\sqrt{12}} = 0,3 \text{ cm}$$

και επομένως η αντίστοιχη λυγηρότητα της ράβδου είναι:

$$\lambda = \frac{220}{0,3} = 733 \gg 250, \quad (\gamma)$$

η οποία όμως, επειδή είναι πολύ μεγαλύτερη του 250, απορρίπτεται.

Ουσιαστικά επιθυμούμε εδώ να εντοπίσουμε τη μεγαλύτερη λυγηρότητα μεταξύ 100 και 250, για να εξασφαλίσουμε ελαστικό λυγισμό σε χρήσιμη και ασφαλή ράβδο. Άρα θα πρέπει:

$$\lambda \leq 250 \quad \text{ή} \quad \frac{220}{i_{\min}} \leq 250 \Rightarrow i_{\min} \geq 0,88 \text{ cm.}$$

Αυτή η ακτίνα αδράνειας, βάσει των (α) και (β), αντιστοιχεί σε διατομή με πλευρά και εμβαδόν:

$$b = 0,88 \cdot \sqrt{12} = 3,05 \text{ cm}$$

$$\text{και } F = 2 \cdot 3,05^2 = 18,6 \text{ cm}^2.$$

Για  $\lambda = 250$ , η τάση λυγισμού  $\sigma_{\kappa}$ , από τη σχέση 14, είναι:

$$\sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{250^2} = 332 \text{ kp/cm}^2$$

και επομένως η υπάρχουσα τάση στη ράβδο θα πρέπει να είναι μικρότερη της

$$\frac{\sigma_{\kappa}}{\nu} = \frac{332}{2,5} = 132,8 \text{ kp/cm}^2.$$

Η τάση όμως στη ράβδο είναι:

$$\sigma_{\nu\pi} = \frac{P}{F} = \frac{3.000}{18,6} = 161,3 \text{ kp/cm}^2 > 132,8,$$

άρα θα πρέπει να εκλέξουμε μεγαλύτερη διατομή.

Για  $b = 3,5 \text{ cm}$ , οι σχέσεις (α), (β) και (γ) δίνουν αντίστοιχα

$$F = 2 \cdot 3,5^2 = 24,5 \text{ cm}^2,$$

$$i_{\min} = \frac{3,5}{\sqrt{12}} = 1,01 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{220}{1,01} = 218 .$$

$$\text{Άρα: } \sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{218^2} = 436 \text{ kp/cm}^2$$

και συνεπώς θα πρέπει:

$$\sigma_{\nu\pi} = \frac{P}{F} = \frac{3.000}{24,5} = 122,4 \text{ kp/cm}^2 < \frac{\sigma_{\kappa}}{\nu} = \frac{436}{2,5} = 174,4 \text{ kp/cm}^2 ,$$

πράγμα που ισχύει. Αν επιδιώκουμε μεγαλύτερη οικονομία υλικού ή ακρίβεια διαστάσεων, μπορούμε να δοκιμάσουμε μια ενδιάμεση τιμή, π.χ.  $b = 3,3 \text{ cm}$ , οπότε προκύπτει αντίστοιχα:

$$F = 2 \cdot 3,3^2 = 21,78 \text{ cm}^2,$$

$$i_{\min} = \frac{3,3}{\sqrt{12}} = 0,95 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{220}{0,95} = 232 .$$

$$\text{Άρα: } \sigma_{\kappa} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{232^2} = 385 \text{ kp/cm}^2$$

και συνεπώς θα πρέπει:

$$\sigma_{\nu\pi} = \frac{3.000}{21,78} = 137,7 \text{ kp/cm}^2 < \frac{\sigma_{\kappa}}{\nu} = \frac{385}{2,5} = 154 \text{ kp/cm}^2 ,$$

πράγμα που ισχύει.

**β)** Αν η διατομή ήταν τετράγωνη, θα είχαμε:

$$F = b^2 \quad \text{και} \quad i_{\min} = b/\sqrt{12} .$$

Αρχικά λοιπόν, για τον υπολογισμό σε θλίψη, θα είχαμε:

$$\sigma_{\nu\pi} = \frac{P}{F_{\alpha\pi}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \text{ή} \quad \frac{3.000}{b^2} \leq 1.400 \quad \Rightarrow \quad b \geq 1,46 \text{ cm} .$$

Με  $b = 1,46 \text{ cm}$ , τα στοιχεία της διατομής δίνουν:

$$i_{\min} = \frac{1,46}{\sqrt{12}} = 0,42 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{220}{0,42} = \gg 250 ,$$

οπότε η τιμή  $b = 1,46 \text{ cm}$  απορρίπτεται.

$$\text{Για } \lambda = 250 \quad \text{ή} \quad \frac{220}{i_{\min}} = 250, \quad \text{δηλαδή} \quad i_{\min} = 0,88 \text{ cm},$$

προκύπτει διατομή με  $b = 3,05 \text{ cm}$  και  $F = 9,3 \text{ cm}^2$  αντίστοιχα, όπου είναι:

$$\sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{250^2} = 332 \text{ kp/cm}^2 .$$



Άρα θα πρέπει να είναι:

$$\sigma_{υπ} = \frac{P}{F} \leq \frac{\sigma_{κ}}{\nu} \quad \text{ή} \quad \frac{3.000}{9,3} \leq \frac{332}{2,5} \quad \text{δηλαδή} \quad 322 \leq 132,8,$$

το οποίο όμως δεν ισχύει, γι αυτό αυξάνουμε τη διατομή

Για  $b = 4 \text{ cm}$  προκύπτουν αντίστοιχα:

$$F = 16 \text{ cm}^2, \quad i_{\min} = 4/\sqrt{12} = 1,15 \text{ cm}, \quad \text{και} \quad \lambda = 220/1,15 = 191,$$

οπότε 
$$\sigma_{κ} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{191^2} = 568 \text{ kp/cm}^2.$$

Άρα πρέπει: 
$$\frac{3.000}{16} \leq \frac{568}{2,5} \quad \text{ή} \quad 187,5 \leq 227,2,$$

πράγμα που ισχύει. Για μεγαλύτερη όμως ακρίβεια, δοκιμάζουμε με λίγο μικρότερη διατομή, π.χ.  $b = 3,8 \text{ cm}$ , οπότε έχουμε αντίστοιχα:

$$F = 14,44 \text{ cm}^2, \quad i_{\min} = 1,1 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \lambda = 200, \quad \text{ενώ}$$

$$\sigma_{κ} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{200^2} = 518 \text{ kp/cm}^2.$$

Θα πρέπει λοιπόν: 
$$\frac{3.000}{14,44} \leq \frac{518}{2,5} \quad \text{ή} \quad 207,7 \leq 207,2$$

πράγμα που ισχύει οριακά. Εκλέγεται λοιπόν  $b = 3,8 \text{ cm}$ .

Γίνεται τώρα φανερή η οικονομία που προκύπτει στο υλικό της ράβδου που καταπονείται σε λυγισμό, όταν αποφεύγεται το επίμηκες σχήμα της διατομής της.

γ) Ο υπολογισμός σε θλίψη, δίνει: 
$$\sigma_{υπ} = \frac{P}{F_{απ}} \leq \sigma_{επ} \quad \text{ή}$$

$$F_{απ} \geq \frac{3.000}{1.400} = 2,14 \text{ cm}^2.$$

Από τους πίνακες των ισοσκελών γωνιακών ελασμάτων προκύπτει ότι η απαιτούμενη αυτή διατομή καλύπτεται από το L 25x5.

Περιορίζοντας λοιπόν το επίπεδο λυγισμού σε διεύθυνση παράλληλη του άξονα  $x - x$  της διατομής, το γωνιακό αυτό έχει  $i_{\min} = 0,72 \text{ cm}$ . (Αν ο λυγισμός ήταν ελεύθερος, θα θεωρούσαμε τη δυσμενέστερη διεύθυνσή του, που βρίσκεται στο κάθετο επίπεδο του άξονα  $n - n$ , οπότε θα είχαμε  $i_{\min} = i_n = 0,47 \text{ cm}$ ). Έτσι η λυγηρότητα της ράβδου είναι:

$$\lambda = \frac{220}{0,72} = 305 \gg 250, \quad \text{και γι αυτό απορρίπτεται.}$$

Για  $\lambda \leq 250$ , δηλαδή 
$$\frac{220}{i_{\min}} \leq 250, \quad \text{ή} \quad i_{\min} \geq 0,88 \text{ cm},$$

προκύπτει γωνιακό L 30x5, με  $F = 2,78 \text{ cm}^2$  και  $i_{\min} = 0,88 \text{ cm}$ . Για το γωνιακό αυτό, όπως και στην πρώτη περίπτωση του παραδείγματος, θα είναι:

$$\sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{250^2} = 332 \text{ kp/cm}^2,$$

και επομένως η υπάρχουσα τάση στη ράβδο θα πρέπει να είναι μικρότερη της

$$\frac{\sigma_{\kappa}}{\nu} = \frac{332}{2,5} = 132,8 \text{ kp/cm}^2.$$

Όμως, η υπάρχουσα τάση στη ράβδο είναι:

$$\sigma_{\nu\pi} = \frac{P}{F} = \frac{3.000}{2,78} = 1.079 \text{ kp/cm}^2 \gg 132,8,$$

άρα θα πρέπει να εκλέξουμε μεγαλύτερη διατομή.

Το L 50x5, με  $F = 4,80 \text{ cm}^2$  και  $i_{\min} = 1,51 \text{ cm}$ , δίνει:

$$\lambda = \frac{220}{1,51} = 146 \text{ και } \sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{146^2} = 972 \text{ kp/cm}^2.$$

Θα πρέπει λοιπόν τώρα να είναι:

$$\frac{P}{F} = \frac{3.000}{4,8} = 625 \text{ kp/cm}^2 \leq \frac{\sigma_{\kappa}}{\nu} = \frac{972}{2,5} = 389 \text{ kp/cm}^2,$$

που δεν ισχύει, γι αυτό αυξάνουμε κι άλλο τη διατομή.

Το γωνιακό L 60x5, με  $F = 5,82 \text{ cm}^2$  και  $i_{\min} = 1,82 \text{ cm}$ , δίνει:

$$\lambda = \frac{220}{1,82} = 121 \text{ και } \sigma_{\kappa} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{121^2} = 1.415 \text{ kp/cm}^2,$$

οπότε θα πρέπει:

$$\frac{P}{F} = \frac{3.000}{5,82} = 515,5 \text{ kp/cm}^2 \leq \frac{\sigma_{\kappa}}{\nu} = \frac{1.415}{2,5} = 566 \text{ kp/cm}^2,$$

που ισχύει. Η εκλογή νέας διατομής γίνεται όταν είναι δυνατόν να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά μεταξύ των τιμών  $P/F$  και  $\sigma_{\kappa}/\nu$ , ή όταν ειδικές συνθήκες το επιβάλλουν.

Στην περίπτωση του ελεύθερου λυγισμού, μετά τον υπολογισμό σε θλίψη, θα οδηγηθούμε προφανώς σε γωνιακό με  $i_{\min} = 0,88 \text{ cm}$ .

Το L 50x5, με  $F = 4,80 \text{ cm}^2$  και  $i_{n(\min)} = 0,98 \text{ cm}$ , δίνει:

$$\lambda = \frac{220}{0,98} = 224 \text{ και } \sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{224^2} = 413 \text{ kp/cm}^2.$$

Άρα θα πρέπει:

$$\frac{P}{F} = \frac{3.000}{4,8} = 625 \text{ kp/cm}^2 \leq \frac{\sigma_{\kappa}}{\nu} = \frac{413}{2,5} = 165 \text{ kp/cm}^2,$$

που δεν ισχύει, γι αυτό αυξάνουμε τη διατομή.

Το γωνιακό L 70x7, με  $F = 9,40 \text{ cm}^2$  και  $i_{n(\min)} = 1,37 \text{ cm}$ , δίνει:

$$\lambda = \frac{220}{1,37} = 161 \text{ και } \sigma_{\kappa} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{161^2} = 799 \text{ kp/cm}^2,$$

οπότε θα πρέπει:

$$\frac{3.000}{9,4} = 319 \text{ kp/cm}^2 \leq \frac{799}{2,5} = 319,6 \text{ kp/cm}^2, \text{ που ισχύει οριακά.}$$

Για συνοπτικότερη εικόνα, σε ότι αφορά την απαιτούμενη ποσότητα υλικού στην κάθε περίπτωση, είναι:

α) **ορθογωνική** διατομή με λόγο πλευρών  $h/b = 2$ ,  $F_o = 21,78 \text{ cm}^2$

β) **τετραγωνική** διατομή,  $F_{\tau} = 14,44 \text{ cm}^2$  και

γ) **ισοσκελές γωνιακό L**,  $F_L = 5,82 \text{ cm}^2$

**ισοσκελές γωνιακό  $\Lambda$** ,  $F_{\Lambda} = 9,4 \text{ cm}^2$ .

## 8 – Η μέθοδος $\omega$

Με τη μέθοδο υπολογισμού που περιγράφηκε παραπάνω, είναι δυνατό, για κάθε υλικό με οποιαδήποτε λυγηρότητα, να προσδιοριστεί η αριθμητική τιμή της κρίσιμης τάσης λυγισμού  $\sigma_{\kappa}$ , η οποία:

α) για την **ελαστική** περιοχή δίνεται από τον τύπο του Euler στην ανηγμένη του μορφή  $\sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ , ενώ

β) για την **πλαστική** περιοχή, από τη γραμμική σχέση του Tetmayer  $\sigma_{\kappa} = \alpha - \beta \lambda$ , με διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δύο περιοχών την οριακή λυγηρότητα

$$\lambda_{\alpha} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_A}}.$$

Ο συντελεστής ασφαλείας  $\nu$  προδιαγράφεται από τους κανονισμούς και έτσι για κάθε λυγηρότητα μπορεί να υπολογιστεί η **επιτρεπόμενη θλιπτική τάση σε**

**λυγισμό**  $\sigma_{\lambda, \varepsilon\pi} = \frac{\sigma_{\kappa}}{\nu}$ , οπότε ο έλεγχος των τάσεων περιορίζεται απλά στη

$$\text{διαπίστωση ότι } \sigma_{\nu\pi} = \frac{P}{F} \leq \sigma_{\lambda, \varepsilon\pi}. \quad (21)$$

Σημειώνεται ότι η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού  $\sigma_{\lambda, \varepsilon\pi}$  δεν είναι σταθερή και υπολογίζεται κάθε φορά σα συνάρτηση της λυγηρότητας  $\lambda$ .

Σήμερα η παραπάνω μέθοδος υπολογισμού δεν είναι σε μεγάλη χρήση. Αντί αυτής οι ράβδοι υπολογίζονται σε λυγισμό όπως και στη θλίψη, με τη διαφορά ότι η υπάρχουσα τάση  $P/F$  προσαυξάνεται, αφού πολλαπλασιαστεί επί έναν καθαρό αριθμό  $\omega$ , ο οποίος λαμβάνει υπόψη το φαινόμενο του λυγισμού.

Έτσι η διαστασιολόγηση των θλιβομένων ράβδων γίνεται τώρα από τη σχέση

$$\omega \frac{P}{F} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad (22),$$

όπου  $\sigma_{\varepsilon\pi}$  η επιτρεπόμενη θλιπτική τάση του υλικού χωρίς λυγισμό.

Οι τιμές των συντελεστών  $\omega$  εξαρτώνται από το υλικό της ράβδου και τη λυγηρότητα της. Δίνονται σε πίνακες χωριστά για κάθε υλικό και βέβαια είναι πάντα  $\omega \geq 1$ .

Ο συντελεστής  $\omega$  προέκυψε ως εξής:

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της ανισότητας (21) επί  $\sigma_{\varepsilon\pi}$ , έχουμε:

$$\frac{P}{F} \cdot \sigma_{\varepsilon\pi} \leq \sigma_{\lambda, \varepsilon\pi} \cdot \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \text{ή} \quad \frac{P}{F} \cdot \frac{\sigma_{\varepsilon\pi}}{\sigma_{\lambda, \varepsilon\pi}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} ,$$

που είναι ήδη η σχέση (22), αν τεθεί:

$$\frac{\sigma_{\varepsilon\pi}}{\sigma_{\lambda, \varepsilon\pi}} = \omega = \frac{V \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}}{\sigma_{\kappa}} . \quad (23)$$

Είναι επομένως ο συντελεστής  $\omega$  ο λόγος της κανονικής επιτρεπόμενης θλιπτικής τάσης του υλικού **χωρίς** λυγισμό, προς την επιτρεπόμενη θλιπτική τάση **με** λυγισμό.

Από τη σχέση (23) προκύπτει τώρα η μαθηματική έκφραση του  $\omega$ , που είναι:

α) Για την περιοχή του ελαστικού λυγισμού, όπου

$$\sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_{\varepsilon\lambda} = \frac{\sigma_{\varepsilon\pi} \cdot V \cdot \lambda^2}{\pi^2 \cdot E}$$

β) Για την περιοχή του πλαστικού λυγισμού, όπου

$$\sigma_{\kappa} = \alpha - b\lambda \quad \Rightarrow \quad \omega_{\pi\lambda} = \frac{\sigma_{\varepsilon\pi} \cdot V}{\alpha - b\lambda} .$$

Επομένως, για την επάρκεια π.χ. μιας δοσμένης διατομής, δεν χρειάζεται να αναζητηθεί αν θα εφαρμοστούν οι τύποι της ελαστικής ή πλαστικής περιοχής, επειδή αυτό έγινε όταν καταρτίστηκαν οι πίνακες με τις τιμές του  $\omega$ . Το μόνο που πρέπει να ελεγχθεί είναι αν ισχύει η σχέση (22).

Σημειώνεται ότι η σχέση (22) δεν προσδιορίζει την τάση που υπάρχει στη ράβδο, αλλά ελέγχει αν η ράβδος είναι ευσταθής. Γι αυτό κανονικά δεν πρέπει να μιλάμε για έλεγχο τάσεων, αλλά για έλεγχο ευστάθειας. Δεν μπορούμε επομένως να λύσουμε την (22) ως προς  $F$  για να καθορίσουμε τη διατομή, γιατί ο συντελεστής  $\omega$  είναι συνάρτηση της λυγηρότητας και συνεπώς της ροπής αδράνειας της διατομής που ζητάμε.

Η διαστασιολόγηση στην πράξη γίνεται ως εξής:

Δίνεται η θλιπτική δύναμη  $P$  και το μήκος της ράβδου.

Εκλέγεται αρχικά μια διατομή με εμβαδόν  $F$  και ελάχιστη ακτίνα αδράνειας  $i_{\min}$ , και καθορίζονται:

1. Το μήκος λυγισμού  $S_{\kappa}$  ανάλογα με τις συνθήκες στήριξης,

2. Η λυγηρότητα  $\lambda = \frac{S_{\kappa}}{i_{\min}}$ ,

3. Ο συντελεστής  $\omega$  σαν συνάρτηση του  $\lambda$  από πίνακα που αντιστοιχεί στο υλικό της ράβδου, και

4. Ο έλεγχος  $\omega \frac{P}{F} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}$ .

Αν η τελευταία σχέση δεν ισχύει, τότε εκλέγεται νέα, μεγαλύτερη διατομή και επαναλαμβάνεται ο υπολογισμός.

## Παράδειγμα

Το ίδιο ακριβώς με το προηγούμενο.

### Λύση

**α)** Ξεκινώντας τον υπολογισμό από τη διατομή που μας εξασφαλίζει τη χρησιμότητα της ράβδου με  $\lambda = 250$ , δηλαδή:

$$i_{\min} = \frac{S_{\kappa}}{\lambda} = \frac{220}{250} = 0,88 \text{ cm},$$

προκύπτει ότι η διατομή θα πρέπει να έχει τη μικρή της πλευρά

$$b = i_{\min} \sqrt{12} = 0,88 \sqrt{12} = 3,05 \text{ cm}$$

και εμβαδόν  $F = 2b^2 = 2 \cdot 3,05^2 = 18,6 \text{ cm}^2$ .

Από τον πίνακα συντελεστών λυγισμού για χάλυβες St 33 και St 37 (σελ. 230), προκύπτει ότι για  $\lambda = 250$  είναι  $\omega = 10,55$ . Άρα θα πρέπει:

$$\omega \frac{P}{F} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \text{ή} \quad 10,55 \frac{3.000}{18,6} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 1701 \leq 1400,$$

που δεν ισχύει, γι αυτό αυξάνουμε τη διατομή.

Για  $b = 3,5 \text{ cm}$ , με:

$$F = 2 \cdot 3,5^2 = 24,5 \text{ cm}^2, \quad i_{\min} = 3,5 / \sqrt{12} = 1,01 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{220}{1,01} = 218$$

προκύπτει από τους πίνακες ότι  $\omega = 8,03$ , οπότε πρέπει:

$$8,03 \frac{3.000}{24,5} \leq 1.400 \quad \text{ή} \quad 983 \leq 1.400, \quad \text{που ισχύει.}$$

Για ακόμη μεγαλύτερη οικονομία ή και ακρίβεια διαστάσεων, εκλέγουμε  $\underline{b = 3,3 \text{ cm}}$ , με:  $F = 21,78 \text{ cm}^2$ ,  $i_{\min} = 0,95 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 232$  και  $\omega = 9,09$ , οπότε θα πρέπει:

$$9,09 \frac{3.000}{21,78} \leq 1.400 \quad \text{ή} \quad 1252 \leq 1.400, \quad \text{που ισχύει.}$$

**β)** Στην τετραγωνική διατομή, αρχίζοντας πάλι με  $\lambda = 250$ , δηλαδή:

$$i_{\min} = 0,88 \text{ cm}, \quad b = 3,05 \text{ cm}, \quad F = 3,05^2 = 9,3 \text{ cm}^2 \quad \text{και} \quad \omega = 10,55,$$

θα οδηγηθούμε στη σχέση  $10,55 \frac{3.000}{9,3} \leq 1.400$  ή  $3.403 \leq 1.400$ ,

που δεν ισχύει, γι αυτό αυξάνουμε τη διατομή.

Για  $b = 4 \text{ cm}$ , με  $F = 16 \text{ cm}^2$ ,  $i_{\min} = 1,15 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 191$  και  $\omega = 6,16$ , θα πρέπει:  $6,16 \frac{3.000}{16} \leq 1.400$  ή  $1.155 \leq 1.400$ , που ισχύει.

Για μεγαλύτερη οικονομία υλικού εκλέγουμε  $b = 3,8 \text{ cm}$ , με:  
 $F = 14,44 \text{ cm}^2$ ,  $i_{\min} = 1,1 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 200$  οπότε, από τον πίνακα της σελ. 250, παίρνουμε  $\omega = 6,75$  και

$$6,75 \frac{3.000}{14,44} \leq 1.400 \quad \text{ή} \quad 1.402 \leq 1.400, \quad \text{που ισχύει οριακά.}$$

**γ)** Για διατομή ισοσκελούς γωνιακού που παρουσιάζει επίπεδο λυγισμού παράλληλο του άξονα  $x - x$  της διατομής του (δείτε το σχήμα του πίνακα ισοσκελών γωνιακών), μια αρχική λυγηρότητα  $\lambda = 250$ , με  $\omega = 10,55$  και  $i_{\min} = 220/250 = 0,88 \text{ cm}$ , οδηγεί (πίνακας σελ. 258), στην εκλογή του  $L 30 \times 5$  ( $F = 2,78 \text{ cm}^2$ ), οπότε θα πρέπει:

$$10,55 \frac{3.000}{2,78} \leq 1.400 \quad \text{ή} \quad 11.385 \leq 1.400,$$

το οποίο δεν ισχύει, γι αυτό αυξάνουμε τη διατομή.

Το  $L 50 \times 5$  με  $F = 4,8 \text{ cm}^2$ ,  $i_{\min} = 1,51 \text{ cm}$  και  $\lambda = 146$  οδηγεί από τον πίνακα (σελ. 250), στην τιμή του  $\omega = 3,60$ , οπότε πρέπει:

$$3,6 \frac{3.000}{4,8} \leq 1.400 \quad \text{ή} \quad 2.250 \leq 1.400,$$

το οποίο, επειδή δεν ισχύει, αυξάνουμε κι άλλο τη διατομή.

Το  $L 60 \times 5$ , με  $F = 5,82 \text{ cm}^2$ ,  $i_{\min} = 1,82 \text{ cm}$  και  $\lambda = 121$  οδηγεί από πίνακα στην τιμή του  $\omega = 2,47$ , οπότε πρέπει:

$$2,47 \frac{3.000}{5,82} \leq 1.400 \quad \text{ή} \quad 1.273,2 \leq 1.400,$$

το οποίο ισχύει.

Στην περίπτωση του ελεύθερου λυγισμού, το  $L 60 \times 6$  με  $F = 6,91 \text{ cm}^2$ ,  $i_{n(\min)} = 1,17 \text{ cm}$  και  $\lambda = 220/1,17 = 188$  οδηγεί σε  $\omega = 5,97$ , οπότε πρέπει:

$$5,97 \frac{3.000}{6,91} \leq 1.400 \quad \text{ή} \quad 2.592 \leq 1.400, \quad \text{το οποίο δεν ισχύει, γι αυτό}$$

αυξάνουμε τη διατομή.

Τελικά το  $L 70 \times 7$  με  $F = 9,40 \text{ cm}^2$ ,  $i_{n(\min)} = 1,37 \text{ cm}$  και  $\lambda = 161$ , οδηγεί σε  $\omega = 4,38$ , οπότε πρέπει:

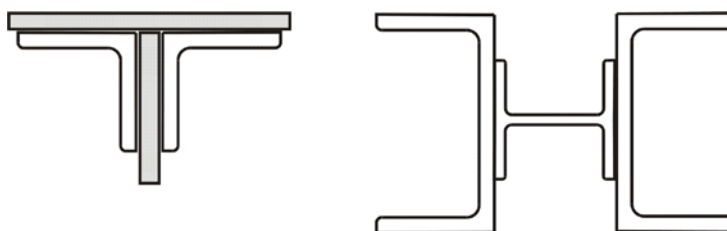
$$4,38 \frac{3.000}{9,4} \leq 1.400 \quad \text{ή} \quad 1.398 \leq 1.400,$$

το οποίο ισχύει οριακά.

## 9 – Ράβδοι σύνθετης και πολυμελούς διατομής

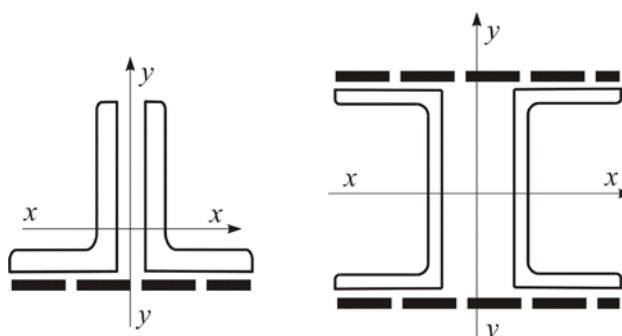
Τα μεγάλα θλιπτικά φορτία που καταπονούν αξονικά μια ράβδο, σε συνδυασμό με την αντοχή της σε λυγισμό, επιβάλλουν, πολλές φορές στην πράξη, τη διαμόρφωση της διατομής της ως **σύνθετης** ή ως **πολυμελούς**.

Οι ράβδοι **σύνθετης** διατομής αποτελούνται από διάφορα ελάσματα που ενώνονται μεταξύ τους **σε όλο το μήκος** με ήλωση ή συγκόλληση ώστε να αποτελούν ένα σώμα.



Σχ. 7.9.1

Αντίστοιχα, οι ράβδοι **πολυμελούς** διατομής αποτελούνται από δύο ή περισσότερα ελάσματα που συνδέονται μεταξύ τους **κατά διαστήματα** με συνδετικές λείπιδες ή με δικτύωση.



Σχ. 7.9.2

Ανάλογα με τον αριθμό των μελών της, η ράβδος ονομάζεται διμελής, τριμελής κλπ. Ο υπολογισμός των πολυμελών ράβδων γίνεται ως εξής:

### α) Υπολογισμός ως προς τον άξονα x-x

Είναι φανερό ότι ο λυγισμός γύρω από τον άξονα x-x, που ονομάζεται **άξονας υλικού** επειδή τέμνει το υλικό των ελασμάτων, δεν επηρεάζεται από την απόσταση των διατομών που συνθέτουν την πολυμελή ράβδο, επειδή κάθε μέλος εργάζεται ανεξάρτητα, οποιαδήποτε αν είναι η σύνδεση. Έτσι η ράβδος θεωρείται ότι είναι μονομελής, οπότε ο υπολογισμός της γίνεται κανονικά.

Δηλαδή αν  $S_{κx}$  είναι το μήκος λυγισμού της ράβδου ως προς τον άξονα x και  $i_x = \sqrt{J_{x,ολ}/F_{ολ}}$  η αντίστοιχη ακτίνα αδράνειας της **συνολικής** διατομής, τότε στη λυγηρότητα

$$\lambda_x = \frac{S_{κx}}{i_x} \quad (i)$$

αντιστοιχεί ο συντελεστής λυγισμού  $\omega_x$ , οπότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση (22) της ενότητας 8 (σελ. 228), δηλαδή

$$\omega_x \frac{P}{F_{ολ}} \leq \sigma_{επ}.$$

## β) Υπολογισμός ως προς τον άξονα γ-γ

Ο άξονας γ-γ που δεν τέμνει το υλικό των ελασμάτων, ονομάζεται **άξονας ελεύθερος υλικού**.

Ο λυγισμός γύρω από τον άξονα αυτό εξαρτάται βασικά από τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται τα μέλη της διατομής μεταξύ τους αλλά και την αποτελεσματικότητα της σύνδεσης, επειδή μέσω αυτής επιτυγχάνεται η καλή συνεργασία των μελών της διατομής. Και φυσικά μια καλή συνεργασία οδηγεί διαδοχικά σε μεγάλη ροπή αδράνειας  $J_y$ , μεγάλη ακτίνα αδράνειας  $i_y$  και επομένως **μικρή** λυγηρότητα κατά τη διεύθυνση αυτή.

Η πιο απλή σύνδεση που απαιτείται για τη συνεργασία των παραπάνω μελών, περιλαμβάνει ενώσεις σε τέσσερα τουλάχιστον σημεία, τα οποία **τριχοτομούν** τη ράβδο (δύο ακραία και δύο ενδιάμεσα).

Στις **χαλύβδινες** ράβδους η σύνδεση γίνεται με λεπίδες σε τέτοιες αποστάσεις ώστε η λυγηρότητα  $\lambda_1$  για **κάθε ένα** μέλος της ράβδου να μην υπερβαίνει την οριακή τιμή 50, δηλαδή πρέπει να είναι:

$$\lambda_1 = \frac{S_{κ1}}{i_{1(\min)}} \leq 50,$$

όπου  $S_{κ1}$  είναι το μήκος λυγισμού του **ενός** μέλους της ράβδου το οποίο περιλαμβάνεται μεταξύ των μέσων δύο διαδοχικών συνδέσεων και  $i_{1(\min)}$  είναι η αντίστοιχη ελάχιστη ακτίνα αδράνειας της διατομής του.

Αν  $\lambda_y$  είναι η λυγηρότητα **όλης** της ράβδου, με το συνολικό μήκος λυγισμού της  $S_{κy}$ , θα είναι:

$$\lambda_y = \frac{S_{κy}}{i_y}$$

όπου  $i_y = \sqrt{J_{yολ}/F_{ολ}}$  είναι η ακτίνα αδράνειας της **συνολικής** διατομής ως προς τον άξονα γ-γ.

Από τις λυγηρότητες  $\lambda_1$  και  $\lambda_y$  προκύπτει η καλούμενη **ιδεατή λυγηρότητα**

$$\lambda_{y1} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_y^2}, \quad (\text{ii})$$

στην οποία προφανώς αντιστοιχεί – μέσω πινάκων – ο συντελεστής λυγισμού  $\omega_{y1}$ .

Έτσι η συνθήκη λυγισμού που προκύπτει για τη ράβδο πολυμελούς διατομής από χάλυβα ως προς τον άξονα γ-γ, αντίστοιχη της σχέσης (22), διαμορφώνεται τελικά στην

$$\omega_{y1} \cdot \frac{P}{F} \leq \sigma_{επ}.$$

Ο έλεγχος αυτός κατά τη διεύθυνση γ είναι περιττός, όταν



$$\lambda_{yi} \leq \lambda_x,$$

ή λόγω της (ii) όταν

$$\lambda_1^2 + \lambda_y^2 \leq \lambda_x^2 \quad \text{και} \quad \lambda_1 \leq \sqrt{\lambda_x^2 - \lambda_y^2}.$$

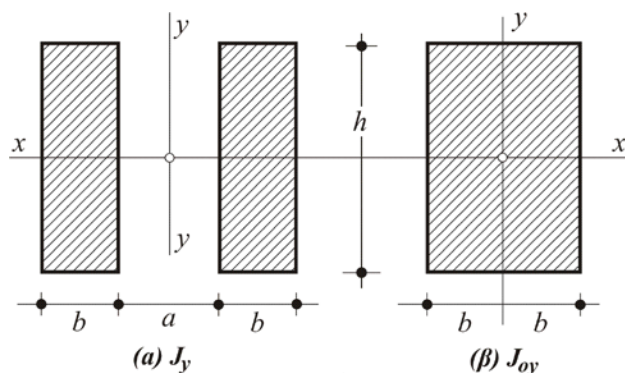
Η επί πλέον της  $\lambda_y$  ιδεατή λυγηρότητα  $\lambda_{yi}$  που προκύπτει από τη σχέση (ii) είναι απαραίτητη, επειδή στις περιπτώσεις των πολυμελών ράβδων **καμία** σύνδεση δεν εξασφαλίζει **πλήρη** συνεργασία μεταξύ των μελών της διατομής.

Στις ξύλινες **ράβδους** εισάγεται η λεγόμενη **ενεργός** ροπή αδράνειας,  $J_{wy}$  που υπολογίζεται από τον πειραματικό τύπο

$$J_{wy} = \frac{3}{4} J_{oy} + \frac{1}{4} J_y, \quad \text{όπου}$$

$J_{oy}$  η ροπή αδράνειας της διατομής που προκύπτει αν τα μέλη της διατομής έλθουν σ' επαφή χωρίς τη μεταξύ τους απόσταση (σχ. β) και

$J_y$  η ροπή αδράνειας της διμελούς (ή πολυμελούς) διατομής (σχ. α).



Σχ. 7.9.3

Σημειώνεται ότι η απόσταση  $\alpha$  μεταξύ των μελών της διατομής δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο του πλάτους κάθε μέλους της, δηλαδή πρέπει να είναι  $\alpha \leq 2b$ . Σε αντίθετη περίπτωση, για τον υπολογισμό της  $J_y$ , χρησιμοποιείται αντί του  $\alpha$ , το μέγεθος  $2b$ .

Στη συνέχεια υπολογίζεται κανονικά η ενεργός ακτίνα αδράνειας

$$i_{wy} = \sqrt{J_{wy}/F_{ολ}},$$

και εξ' αυτής η λυγηρότητα

$$\lambda_y = \frac{S_{ky}}{i_{wy}},$$

στην οποία αντιστοιχεί τώρα ο συντελεστής  $\omega_y$ , οπότε θα πρέπει

$$\omega_y \frac{P}{F} \leq \sigma_{επ}. \quad \text{(iii)}$$

Ο έλεγχος αυτός είναι επίσης περιττός όταν  $\lambda_y \leq \lambda_x$ .

Όσον αφορά στη σύνδεση των μελών της διατομής, οι κανονισμοί επιβάλλουν να γίνεται ή με παρεμβλήματα που τριχοτομούν την ξύλινη ράβδο όπως στην περίπτωση των χαλύβδινων, ή με δικτύωση των μελών σ' όλο το μήκος της ράβδου.

Στην περίπτωση αυτή ο έλεγχος του **ενός** μέλους της ράβδου γίνεται κατά Euler, με την προϋπόθεση ότι η υπάρχουσα θλιπτική δύναμη σ' αυτό δεν ξεπερνά την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Έτσι, αν  $S_{ky}$  είναι **όλο** το μήκος λυγισμού του **ενός** από τα  $n$  μέλη της διατομής, με ελάχιστη ροπή αδράνειας  $J_{1(\min)}$ , θα πρέπει να είναι:

$$\frac{P}{n} \leq \frac{\pi^2 EJ_{1(\min)}}{S_{ky}^2} \quad \text{ή}$$

$$J_{1(\min)} \geq \frac{P \cdot S_{ky}^2}{n\pi^2 E}$$

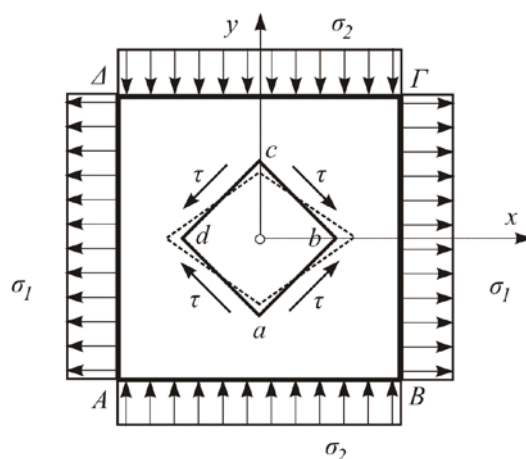
Η τελευταία σχέση πρέπει να ισχύει πέρα και ανεξάρτητα από τις σχέσεις (i) και (iii).

## Κεφάλαιο 8<sup>ο</sup>

### Παράρτημα

#### 1 – Η περίπτωση της καθαρής διάτμησης

Ας εξετάσουμε τώρα την ιδιαίτερη περίπτωση επίπεδης εντατικής κατάστασης, όπου, στο τετραγωνικό πρίσμα ABΓΔ του σχήματος, ασκείται, κατά τον άξονα x η εφελκυστική τάση  $\sigma_1$  και κατά τον άξονα y η θλιπτική τάση  $\sigma_2 = \sigma_1$ .



Σχ. 8.1.1

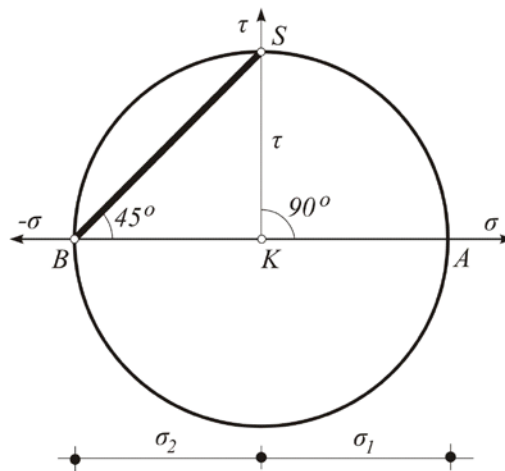
Τότε στις έδρες του επίσης τετραγωνικού πρίσματος abcd, που έχουν κλίση  $45^\circ$  προς τις αντίστοιχες του ABΓΔ, θα ενεργούν μόνο διατμητικές τάσεις  $\tau = \sigma_1$ , ενώ το πρίσμα abcd θα λέμε ότι βρίσκεται σε κατάσταση **καθαρής διάτμησης**.

Πραγματικά, σύμφωνα με τις σχέσεις (7'') και (8'') της ενότητας 9 του 1<sup>ου</sup> κεφαλαίου (σελ. 21), θα έχουμε για την ορθή και διατμητική τάση στις έδρες του abcd ( $2\phi = 90^\circ$ ),

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + (-\sigma_1)}{2} + \frac{\sigma_1 - (-\sigma_1)}{2} \sigma_{\nu} \nu 90 = 0 \quad \text{και}$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - (-\sigma_1)}{2} \eta_{\mu} 90 = \sigma_1 .$$

Ο αντίστοιχος κύκλος του Mohr εικονίζεται στο σχ. 8.1.2, όπου οι συντεταγμένες του σημείου S παριστάνουν τις τάσεις που δρουν στις έδρες bc και ad (δεξιόστροφες).



Σχ. 8.1.2

## 2 – Σχέση μεταξύ των μέτρων ελαστικότητας E και G

Έστω  $a'b'c'd'$  η τελική μορφή του παραμορφωθέντος τετραγωνικού πρίσματος  $abcd$  όπως εικονίζεται στο σχήμα.

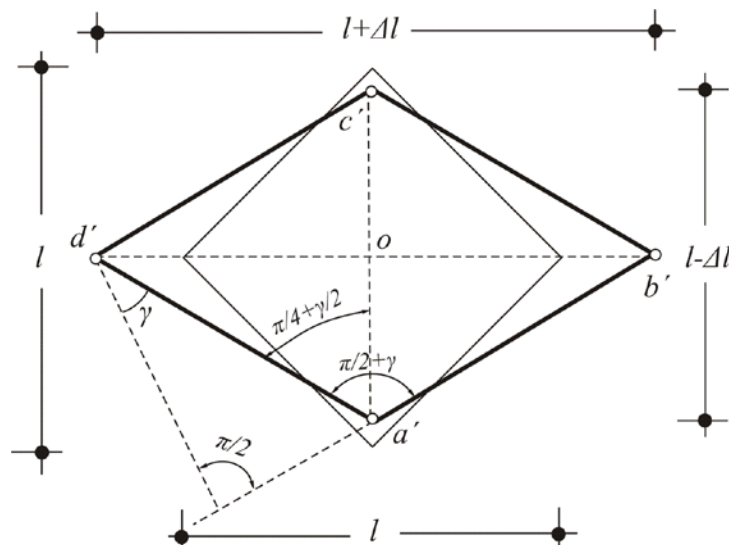
Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στη σελ. 38 της ενότητας 6 του 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου για τη γενίκευση του νόμου του Hooke, η ανηγμένη επιμήκυνση  $\varepsilon_1$  κατά τη διεύθυνση της  $\sigma_1$ , είναι:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) = \frac{1}{E}(\sigma_1 + \mu\sigma_1) = \frac{\sigma_1}{E}(1 + \mu) = \frac{\Delta l}{l}, \quad (1)$$

προς την οποία θα ισούται και η ανηγμένη επιβράχυνση που γίνεται κατά τη διεύθυνση της  $\sigma_2$ .

Οι έδρες  $ab$  και  $ad$ , που αρχικά ήσαν κάθετες μεταξύ τους, σχηματίζουν μετά την παραμόρφωση, όπως φαίνεται στο σχήμα, την αμβλεία γωνία  $\pi/2 + \gamma$ .

Η διαφορά των δύο γωνιών οφείλεται στη λόγω της διατμητικής τάσης μετατόπιση (ολίσθηση) των εδρών  $ab$  και  $ad$  κατά γωνία



Σχ. 8.2

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma_1}{G} \quad (2)$$

Η γωνία d'α'Ο, σαν μισό της αμβλείας αυτής γωνίας, θα είναι ίση με  $\pi/4 + \gamma/2$ . Επομένως:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{d'O}{a'O} = \frac{\frac{1}{2}(I + \Delta I)}{\frac{1}{2}(I - \Delta I)} = \frac{1 + \frac{\Delta I}{I}}{1 - \frac{\Delta I}{I}} \quad (3)$$

Αλλά από την τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}}{1 - \varphi\frac{\pi}{4} \cdot \varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}} \approx \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}, \quad (4)$$

επειδή η γωνία  $\gamma$  είναι πολύ μικρή, και επομένως  $\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$ .

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{1 + \frac{\Delta I}{I}}{1 - \frac{\Delta I}{I}} = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{\Delta I}{I} = \frac{\gamma}{2}. \quad (5)$$

Συνδυάζοντας την (5) με τις (1) και (2), έχουμε:

$$\frac{\sigma_1}{E}(1 + \mu) = \frac{\sigma_1}{2G}, \quad (6)$$

από την οποία βρίσκουμε τελικά τη ζητούμενη σχέση

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (7)$$

### 3 – Η ορθή τάση σε ειδικές θέσεις διατομών

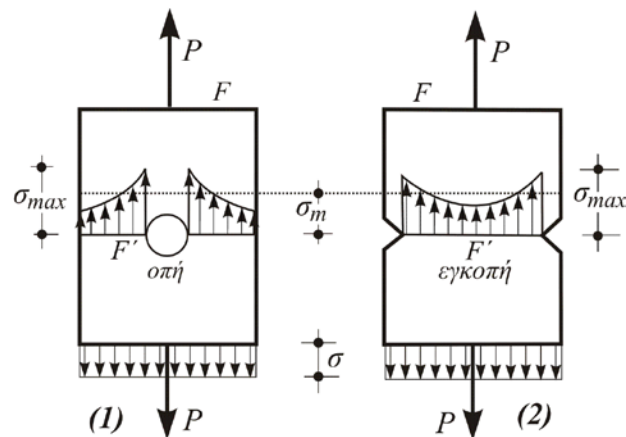
Η ομοιομορφία των στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούν τα μόρια στη διατομή μιας εφελκυσόμενης π.χ. ράβδου, εξασφαλίζει την ισχύ της σχέσης:

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad (i)$$

όπως ήδη γνωρίσαμε στην ενότητα 2 του κεφ. 3, σελ. 49. Εδώ θα εξετάσουμε ορισμένες ειδικές θέσεις, σε διατομές όπου η παραπάνω σχέση δεν ισχύει.

#### α) Διατομή με οπή ή εγκοπή

Στην περίπτωση αυτή, το εμβαδόν  $F'$  της διατομής στη θέση της οπής ή εγκοπής είναι μικρότερο του  $F$  με αποτέλεσμα η μέση ορθή τάση  $\sigma_m$  να είναι μεγαλύτερη από τη  $\sigma$  που δίνεται από τη σχέση (i). Πέρα όμως απ' αυτό, και τα μόρια που είναι γειτονικά προς την ανωμαλία (οπή ή εγκοπή), όπως φαίνεται στο σχήμα, εργάζονται περισσότερο από τα άλλα, με αποτέλεσμα η τάση να παίρνει μέγιστη τιμή δίπλα ακριβώς από τις ανωμαλίες και να ελαττώνεται όσο απομακρυνόμαστε απ' αυτές.



Σχ. 8.3.1

Σύμφωνα λοιπόν με το παραπάνω σχήμα, είναι:

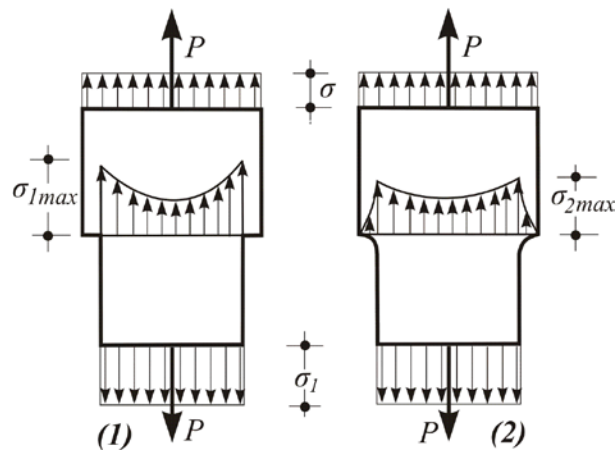
$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad \sigma_m = \frac{P}{F'} \quad (F' < F) \quad \text{και} \quad \sigma_{max} > \sigma_m$$

### β) Διατομή απότομης μεταβολής

Εδώ συμβαίνουν φαινόμενα ανάλογα μ' εκείνα της εγκοπής.

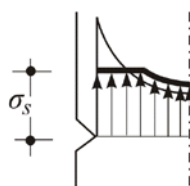
Πραγματικά, συγκρίνοντας το σχ. 8.3.2 (1) με το 8.3.1 (2), δια πιστώνουμε την αντιστοιχία μεταξύ  $\sigma_1$  και  $\sigma_m$ , καθώς και εκείνη μεταξύ  $\sigma_{1max}$  και  $\sigma_{max}$ .

Όμως, αν η μεταβολή της διατομής γίνει βαθμιαία με ένα τόξο συναρμογής, σχ. (2), η μέγιστη τάση στα άκρα γίνεται μικρότερη ( $\sigma_{2max} < \sigma_{1max}$ ), ενώ η κατανομή των τάσεων στη διατομή γίνεται ομαλότερη.



Σχ. 8.3.2

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι τέτοιες ανωμαλίες είναι αντιοικονομικές, επειδή δεν επιτρέπουν την εκμετάλλευση όλης της διατομής του υλικού. Κυρίως όμως είναι επικίνδυνες ιδιαίτερα για τα ψαθυρά υλικά, που δεν μπορούν να αμυνθούν στην υπερβολική αύξηση των τάσεων στη γειτονιά των ανωμαλιών.



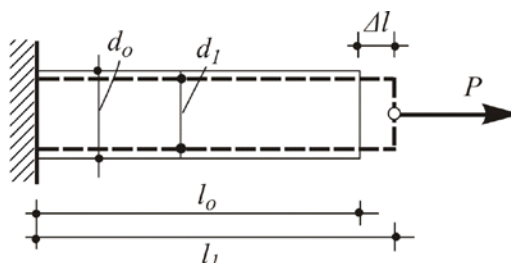
Σχ. 8.3.3

Αυτό βέβαια δεν συμβαίνει στα συνεκτικά υλικά, επειδή όταν η μέγιστη τάση στη γειτονιά της ανωμαλίας φθάσει την τάση διαρροής,  $\sigma_s$ , το υλικό παραμορφώνεται πλαστικά στην περιοχή αυτή και ανακουφίζεται, ενώ τα μόρια που βρίσκονται μακρύτερα εργάζονται περισσότερο από ότι θα εργάζονταν αν η τάση ξεπερνούσε την τιμή  $\sigma_s$  χωρίς το υλικό να παραμορφώνονταν πλαστικά (παχιά γραμμή του διαγράμματος).

Η λεπτή γραμμή του διαγράμματος, για να γίνει φανερή η διαφορά, δείχνει την εικόνα των τάσεων για ίδιας μορφής δοκίμιο αλλά από ψαθυρό υλικό (βλέπε και σχ. 8.3.1 (2)).

#### 4 – Η σταθερά του Poisson

Θεωρούμε την εφελκόμενη κυλινδρική ράβδο του σχήματος. Στην ενότητα 5 του 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου, σελ.26, γνωρίσαμε ήδη τη σταθερά του Poisson σαν μαθηματική έκφραση, σε σχέση με την ανηγμένη επιμήκυνση  $\varepsilon$  και την ανηγμένη εγκάρσια συστολή  $\varepsilon_q$  της ράβδου:



Σχ. 8.4.1

$$m = \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} \right| = \left| \frac{\frac{\Delta l}{l_0}}{\frac{\Delta d}{d_0}} \right| = \left| \frac{\frac{l_1 - l_0}{l_0}}{\frac{d_1 - d_0}{d_0}} \right| = \left| \frac{\frac{l_1}{l_0} - 1}{\frac{d_1}{d_0} - 1} \right|. \quad (1)$$

Η σχέση (1) προϋποθέτει ότι το υλικό της ράβδου είναι ομογενές και ισότροπο, δηλαδή έχει τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες σε κάθε σημείο του σώματος προς κάθε κατεύθυνση. Ο συντελεστής εγκάρσιας συστολής:

$$\mu = \frac{1}{m}$$

ονομάστηκε και **λόγος του Poisson**, από το φημισμένο Γάλλο μαθηματικό Siméon Denis Poisson (1781 – 1840) που προσπάθησε να τον υπολογίσει χρησιμοποιώντας τη μοριακή θεωρία των υλικών.

Για ισότροπα υλικά ο Poisson βρήκε ότι  $\mu = 0,25$ . Όμως πρόσφατοι υπολογισμοί, βασισμένοι σε πρότυπα ατομικής δομής, δίνουν  $\mu = 0,33$ . Και οι δύο αυτές τιμές είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές που μετρούνται σήμερα για το  $\mu$  σε διάφορα μέταλλα και υλικά και είναι μεταξύ 0,25 και 0,35.

Υλικά με πολύ μικρό  $\mu$  είναι το σκυρόδεμα ( $\mu = 0,1$  έως 0,2) και ο φελλός (πρακτικά  $\mu = 0$ ), ο οποίος, ως εκ τούτου, χρησιμοποιείται σαν πώμα.

Τη θεωρητικά μεγαλύτερη τιμή του  $\mu$ , που όπως θα δείξουμε παρακάτω είναι 0,5, πλησιάζει αρκετά το λάστιχο.

Για πρακτικούς λόγους η τιμή του  $\mu$  λαμβάνεται η ίδια στον εφελκυσμό και τη θλίψη.

Λόγω μεταβολής των διαστάσεων της ράβδου που υπόκειται σε εφελκυσμό ή θλίψη, έχουμε, με την επιβολή του φορτίου, αντίστοιχη μεταβολή στον όγκο της.

Η αλλαγή αυτή του όγκου  $\Delta V$  μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει των  $\varepsilon$  και  $\mu$ . Πραγματικά, αν  $V_o$  και  $V_1$  είναι ο αρχικός και τελικός όγκος της ράβδου που φαίνεται στο σχήμα 8.4.1, επειδή:

$$l_1 = l_o(1 + \varepsilon) \quad \text{και} \quad d_1 = d_o(1 - \varepsilon_q) = d_o(1 - \mu\varepsilon),$$

$$\text{θα είναι και} \quad V_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} l_1 = \frac{\pi d_o^2}{4} l_o (1 - \mu\varepsilon)^2 \cdot (1 + \varepsilon). \quad (2)$$

Μετά την ανάπτυξη της σχέσης (2), εμφανίζονται όροι που περιέχουν το τετράγωνο και τον κύβο του  $\varepsilon$ . Επειδή όμως το  $\varepsilon$  είναι πολύ μικρό σε σχέση με τη μονάδα (ελαστική περιοχή), οι όροι αυτοί δίνουν τελικά αμελητέες ποσότητες που παραλείπονται. Έτσι είναι:

$$V_1 = \frac{\pi d_o^2}{4} l_o (1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon),$$

οπότε η μεταβολή  $\Delta V$  του όγκου, είναι:

$$\Delta V = V_1 - V_o = \frac{\pi d_o^2}{4} l_o (\varepsilon - 2\mu\varepsilon) = V_o \varepsilon (1 - 2\mu). \quad (3)$$

Από την εξίσωση (3) προκύπτει ο λόγος:

$$e = \frac{\Delta V}{V_o} = \varepsilon(1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu) \quad (4)$$

που ονομάζεται, αντίστοιχα προς την ανηγμένη επιμήκυνση, ανηγμένος όγκος ή διασταλτότητα και είναι καθαρός αριθμός.

Η εξίσωση (4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της αύξησης του όγκου σε εφελκυσμένη ράβδο, όταν είναι γνωστά αφ ενός το  $\varepsilon$  ή  $\sigma$  και αφ' ετέρου το  $\mu$ .

Είναι προφανές ότι στη θλίψη τα  $\varepsilon$  ή  $\sigma$  είναι αρνητικά, οπότε προκύπτει αντίστοιχα μείωση του όγκου.

Από την εξίσωση (4) βλέπουμε ότι η μέγιστη δυνατή τιμή του  $\mu$  για κανονικά υλικά, προκύπτει για  $e = 0$ , οπότε  $\mu = 0,5$ , επειδή για κάθε μεγαλύτερη τιμή, σημαίνει ότι έχουμε μείωση του όγκου της ράβδου όταν εφελκύεται, πράγμα που είναι λογικά απίθανο.

Όπως τονίστηκε ήδη παραπάνω, για τα περισσότερα υλικά στην ελαστική περιοχή είναι περίπου  $\mu = 0,25$  έως 0,33, που σημαίνει ότι ο ανηγμένος όγκος  $e$  κυμαίνεται αντίστοιχα από  $0,5 \cdot \varepsilon$  έως  $0,3 \cdot \varepsilon$ .



Στην πλαστική όμως περιοχή, όπου δεν εμφανίζεται μεταβολή του όγκου επειδή το υλικό της ράβδου μεταβάλλεται **ισόογκα**,

είναι  $\Delta V = 0$ , οπότε:  $e = 0$  και  $\mu = 0,5$ .

### 5 – Υπολογισμός της καμπυλότητας $1/\rho$ σε τυχόν σημείο της καμπύλης

Στο σύστημα συντεταγμένων  $z, w$  του σχήματος, θεωρούμε δυο σημεία  $m_1$  και  $m_2$  της καμπύλης  $w = f(z)$  σε απειροστή απόσταση μεταξύ τους, στις θέσεις  $z$  και  $z + dz$  αντίστοιχα.

Αν  $O$  είναι το κέντρο καμπυλότητας των σημείων, με τη διαστασιολόγηση του σχήματος, θα έχουμε:

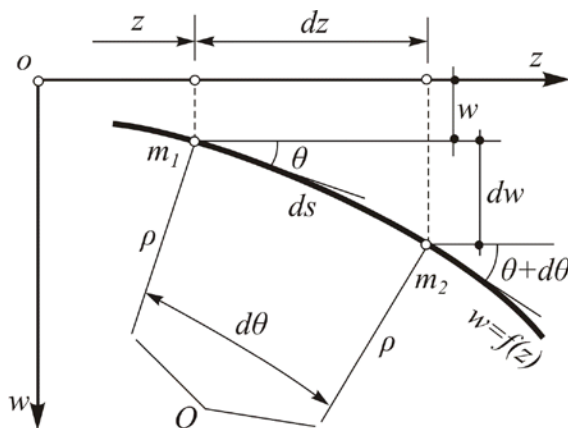
$$ds = \rho \cdot d\theta \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dz} \cdot \frac{dz}{ds} \quad (1)$$

Το τμήμα  $ds$  θεωρείται ευθύγραμμο, άρα είναι:

$$ds^2 = dz^2 + dw^2 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2. \quad (2)$$

Και επειδή  $\frac{dw}{dz} = w' = \varepsilon\phi\theta$ , (3)

η (2) γίνεται:  $\frac{ds}{dz} = \pm(1 + w'^2)^{1/2}$  (4)

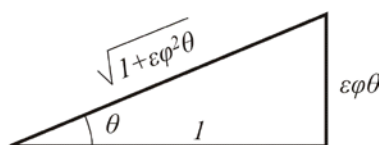


Σχ. 8.5.1

Από τη σχέση (3) εξ' άλλου, δια παραγωγίσεως προκύπτει:

$$\frac{dw'}{dz} = \frac{1}{\sigma\nu^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dz} \quad \text{ή} \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{dw'}{dz} \sigma\nu^2\theta \quad (5)$$

Όμως, από το σχήμα 8.5.2, προκύπτει ότι:



Σχ. 8.5.2

$$\sigma \nu^2 \theta = \frac{1}{1 + \varepsilon \phi^2 \theta},$$

οπότε η (5) σε συνδυασμό με την (3) γίνεται:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{dw'}{dz} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \phi^2 \theta} = \frac{w''}{1 + w'^2}. \quad (6)$$

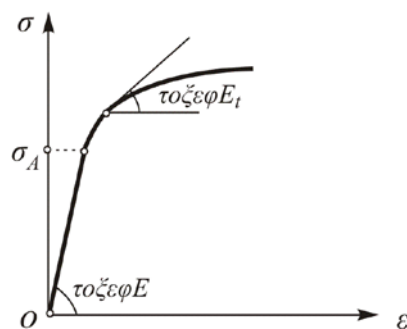
Έτσι η (1), λόγω των (4) και (6), παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{w''}{1 + w'^2} \cdot \frac{1}{(1 + w'^2)^{1/2}} = \pm \frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}}$$

## 6 – Σύντομη ιστορική αναδρομή του λυγισμού

Ο τύπος του Euler (1744) που αφορά όπως γνωρίσαμε στον ελαστικό λυγισμό, έδωσε αφορμή, εκατό χρόνια αργότερα, για ραγδαία εξέλιξη ερευνών και θεωριών που αναπτύχθηκαν, για τη μελέτη και συμπεριφορά των ράβδων στον **πλαστικό** λυγισμό.

Το 1845 ο A.H.E. Lamarle απέδειξε ότι ο τύπος του Euler θα έπρεπε να χρησιμοποιείται για λυγηρότητες πέρα από ένα συγκεκριμένο όριο. Τα πειραματικά δεδομένα ωστόσο θα έπρεπε να βασίζονται σε ακόμα μικρότερες λυγηρότητες.



Σχ. 8.6

Το 1889 ο γάλλος μηχανικός A. Considère αφού εκτέλεσε μια σειρά πειραμάτων από 32 δοκίμια παρατήρησε ότι ενώ οι τάσεις στην κυρτή πλευρά της ράβδου μίκραιναν ανάλογα με το μέτρο ελαστικότητας E, στην κοίλη πλευρά μεγάλωναν ανάλογα με κάποιο άλλο (εφαπτομενικό) μέτρο ελαστικότητας E<sub>t</sub>, που αντιστοιχεί στη μεταξύ του ορίου αναλογίας και ορίου διαρροής περιοχή του διαγράμματος εφελκυσμού όπως φαίνεται στο σχήμα 8.6.

Έτσι απέδειξε ότι ο τύπος του Euler δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην πλαστική περιοχή. Ταυτόχρονα όρισε ότι το 'δραστικό' μέτρο ελαστικότητας ήταν ανάμεσα στις τιμές E και E<sub>t</sub>.

Αν και δεν προσπάθησε να προσδιορίσει την τιμή αυτού του δραστικού μέτρου ελαστικότητας, θεωρείται σαν ο μοναδικός υπεύθυνος για την έναρξη της θεωρίας του 'μειωμένου' μέτρου ελαστικότητας, που θα αναφέρουμε παρακάτω.

Τον ίδιο χρόνο, εντελώς ξαφνικά, ο γερμανός μηχανικός F. Engesser εισήγαγε τη θεωρία του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας με το σύμβολο T = dσ/dε, και πρότεινε το T να αντικαταστήσει το E στον τύπο του Euler για το κρίσιμο φορτίο.

Το Μάρτιο του 1895, ο Engesser παρουσίασε ξανά τη θεωρία του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας, χωρίς να γνωρίζει την προηγούμενη εργασία του Considère.

Τρεις μήνες αργότερα ο πολωνός F. Jasinsky, μετέπειτα καθηγητής του St. Petersburg Αυστρίας, όπου είχε διατελέσει παλιότερα ο Euler, απέδειξε ότι η θεωρία του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας ήταν εσφαλμένη, και, αφού επέστησε την προσοχή στην εργασία του Considère, παρουσίασε τη θεωρία του ‘μειωμένου’ μέτρου ελαστικότητας  $E_r$ , το οποίο, για ορθογωνική διατομή είναι:

$$E_r = \frac{4E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}$$

Όρισε επίσης ότι το μειωμένο μέτρο ελαστικότητας δεν μπορούσε να υπολογιστεί θεωρητικά.

Σε απάντηση αυτών, ένα μήνα αργότερα, ο Engesser, αναγνωρίζοντας το λάθος στο εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας, πλησίασε αρκετά στον τρόπο υπολογισμού του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας για οποιαδήποτε διατομή.

Έτσι η θεωρία του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας ονομάζεται θεωρία του Engesser, ενώ η θεωρία του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας θεωρία των Considère – Engesser.

Η θεωρία του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας παρουσιάστηκε επίσης από το φημισμένο γερμανό επιστήμονα Theodore von Karman (1881 – 1963), το 1908 και 1910, προφανώς ανεξάρτητα από τις δυο προηγούμενες έρευνες.

Στην τελευταία του εργασία παρουσίασε τύπους για το μειωμένο μέτρο ελαστικότητας  $E_r$  στην ορθογωνική και ιδεατή διατομή διπλού ταυ (που είναι η διατομή χωρίς τον κορμό). Επέκτεινε τη θεωρία του για να συμπεριλάβει τα αποτελέσματα έκκεντρου λυγισμού και απέδειξε ότι το μέγιστο φορτίο ελαττώνεται ραγδαία με την αύξηση της εκκεντρότητας.

Ο άγγλος R.V. Southwell παρουσίασε επίσης τη θεωρία του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας σε μια εργασία του το 1912, όπου, αντί για μειωμένο μέτρο ελαστικότητας χρησιμοποίησε ένα ‘τροποποιημένο’ μήκος της ράβδου. Η εργασία του φαίνεται να είναι ανεξάρτητη των άλλων, αν και οι βασικές έννοιες είναι οι ίδιες.

Η θεωρία του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας ήταν αποδεκτή για τον πλαστικό λυγισμό μέχρι το 1946, όταν ο αμερικανός αεροναυπηγός – καθηγητής F.R. Shanley επεσήμανε τα λογικά παράδοξα που υπήρχαν στις παραπάνω θεωρίες του εφαπτομενικού και μειωμένου μέτρου ελαστικότητας.

Σε μια αξιοσημείωτη μονοσέλιδη εργασία του όχι μόνο εξήγησε το λάθος που υπήρχε στις μέχρι τότε θεωρίες, αλλά επί πλέον πρότεινε τη δική του θεωρία, που ταυτόχρονα έδινε απάντηση στα παράδοξα των προηγούμενων.

Πέντε μήνες αργότερα, σε μια δεύτερη εργασία του, έδωσε περισσότερες αναλυτικές σχέσεις για να υποστηρίξει την προηγούμενη θεωρία του που συνοδεύονταν από αποτελέσματα πειραμάτων σε υποστυλώματα.

Παρά το γεγονός ότι διάφοροι άλλοι ερευνητές επιβεβαίωσαν και γενίκευσαν τις έννοιες του Shanley, ακολούθησε ένα πλήθος από έρευνες και θεωρίες πάνω στον πλαστικό λυγισμό, που όμως, για λόγους οικονομίας χώρου, παραλείπονται.

## Πίνακες

Τιμές του μέτρου Ελαστικότητας **E**,  
του μέτρου Διάτμησης **G**  
και του Συντελεστή θερμικής διαστολής  $\alpha_t$   
διαφόρων υλικών

<b>Υλικό</b>	<b>E</b> (kp/cm <sup>2</sup> )	<b>G</b> (kp/cm <sup>2</sup> )	<b><math>\alpha_t</math></b> $\times 10^{-6}$ grad <sup>-1</sup>
Σίδηρος καθαρός	2.040.000	815.000	12
Χάλυβας	2.100.000	825.000	12
Χυτοσίδηρος (μαντέμι)	1.000.000	380.000	10
Ορείχαλκος	850.000	310.000	19
Χαλκός	1.250.000	490.000	16
Αλουμίνιο	725.000	275.000	22,5
Σκυρόδεμα (Beton)	140.000	-	12
Ξύλο – παράλληλα προς τις ίνες	100.000	5.000	9
Γρανίτης	130.000	-	8,7

**Συντελεστές λυγισμού  $\omega$  για δομική  
ξυλείας κατά DIN 1052, Φύλλο 1**

<b>λ</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>λ</b>
0	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	0
10	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	10
20	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	20
30	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,24	1,25	30
40	1,26	1,27	1,29	1,30	1,32	1,33	1,35	1,36	1,38	1,40	40
<b>50</b>	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	<b>50</b>
60	1,62	1,64	1,67	1,69	1,72	1,74	1,77	1,80	1,82	1,85	60
70	1,88	1,91	1,94	1,97	2,00	2,03	2,06	2,10	2,13	2,16	70
80	2,20	2,23	2,27	2,31	2,35	2,38	2,42	2,46	2,50	2,54	80
90	2,58	2,62	2,66	2,70	2,74	2,78	2,82	2,87	2,91	2,95	90
<b>100</b>	3,00	3,06	3,12	3,18	3,24	3,31	3,37	3,44	3,50	3,57	<b>100</b>
110	3,63	3,70	3,76	3,83	3,91	3,97	4,04	4,11	4,18	4,25	110
120	4,32	4,39	4,46	4,54	4,61	4,68	4,76	4,84	4,92	4,99	120
130	5,07	5,15	5,23	5,31	5,39	5,47	5,55	5,63	5,71	5,80	130
140	5,88	5,96	6,05	6,13	6,22	6,31	6,39	6,48	6,57	6,66	140
<b>150</b>	6,75	6,84	6,93	7,02	7,11	7,21	7,30	7,39	7,49	7,58	<b>150</b>
160	7,68	7,78	7,87	7,97	8,07	8,17	8,27	8,37	8,47	8,57	160
170	8,67	8,77	8,88	8,98	9,08	9,19	9,29	9,40	9,51	9,61	170
180	9,72	9,83	9,94	10,05	10,16	10,27	10,38	10,49	10,60	10,72	180
190	10,83	10,94	11,06	11,17	11,29	11,41	11,52	11,64	11,76	11,88	190
<b>200</b>	12,00	12,12	12,24	12,36	12,48	12,61	12,73	12,85	12,98	13,10	<b>200</b>
210	13,23	13,36	13,48	13,61	13,74	13,87	14,00	14,13	14,26	14,39	210
220	14,52	14,65	14,79	14,92	15,05	15,19	15,32	15,46	15,60	15,73	220
230	15,87	16,01	16,15	16,29	16,43	16,57	16,71	16,85	16,99	17,14	230
240	17,28	17,42	15,57	17,71	17,86	18,01	18,15	18,30	18,45	18,60	240
<b>250</b>	18,75										

**Συντελεστές λυγισμού  $\omega$  για χάλυβες  
St 52 κατά DIN 4114**

<b><math>\lambda</math></b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b><math>\lambda</math></b>
20	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	20
30	1,11	1,12	1,12	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,18	30
40	1,19	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	40
<b>50</b>	1,28	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40	<b>50</b>
60	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,49	1,51	1,53	1,54	1,56	60
70	1,58	1,60	1,62	1,64	1,66	1,68	1,70	1,72	1,74	1,77	70
80	1,79	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	1,93	1,95	1,98	2,01	80
90	2,05	2,10	2,14	2,19	2,24	2,29	2,33	2,38	2,43	2,48	90
<b>100</b>	2,53	2,58	2,64	2,69	2,74	2,79	2,85	2,90	2,95	3,01	<b>100</b>
110	3,06	3,12	3,18	3,23	3,29	2,35	3,41	3,47	3,53	3,59	110
120	3,65	3,71	3,77	3,83	3,89	3,96	4,02	4,09	4,15	4,22	120
130	4,28	4,41	4,41	4,48	4,55	4,62	4,69	4,75	4,82	4,89	130
140	4,96	5,11	5,11	5,18	5,25	5,33	5,40	5,47	5,55	5,62	140
<b>150</b>	5,70	5,85	5,85	5,93	6,01	6,09	6,16	6,24	6,32	6,40	<b>150</b>
160	6,48	6,57	6,65	6,73	6,81	6,90	6,98	7,06	7,15	7,23	160
170	7,32	7,41	7,49	7,58	7,67	7,76	7,85	7,94	8,03	8,12	170
180	8,21	8,30	8,39	8,48	8,58	8,67	8,76	8,86	8,95	9,05	180
190	9,14	9,24	9,34	9,44	9,53	9,63	9,73	9,83	9,93	10,03	190
<b>200</b>	10,13	10,23	10,34	10,44	10,54	10,65	10,75	10,85	10,96	11,06	<b>200</b>
210	11,17	11,28	11,38	11,49	11,60	11,71	11,82	11,93	12,04	12,15	210
220	12,26	12,37	12,48	12,60	12,71	12,82	12,94	13,05	13,17	13,28	220
230	13,40	13,52	13,63	13,75	13,87	13,99	14,11	14,23	14,35	14,47	230
240	14,59	14,71	14,83	14,96	15,08	15,20	15,33	15,45	15,58	15,71	240
<b>250</b>	15,83	Για ενδιάμεσες τιμές δε χρειάζεται παρεμβολή.									

**Συντελεστές λυγισμού  $\omega$  για χάλυβες  
St 33 και St 37 κατά DIN 4114**

<b>λ</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>λ</b>
20	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	20
30	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	30
40	1,14	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	1,18	1,19	1,19	1,20	40
<b>50</b>	1,21	1,22	1,23	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	<b>50</b>
60	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,25	1,36	1,37	1,39	1,40	60
70	1,41	1,42	1,44	1,45	1,46	1,48	1,49	1,50	1,52	1,53	70
80	1,55	1,56	1,58	1,59	1,61	1,62	1,64	1,66	1,68	1,69	80
90	1,71	1,73	1,74	1,76	1,78	1,80	1,82	1,84	1,86	1,88	90
<b>100</b>	1,90	1,92	1,94	1,96	1,98	2,00	2,02	2,05	2,07	2,09	<b>100</b>
110	2,11	2,14	2,16	2,18	2,21	2,23	2,27	2,31	2,35	2,39	110
120	2,43	2,47	2,51	2,55	2,60	2,64	2,68	2,72	2,77	2,81	120
130	2,85	2,90	2,94	2,99	3,03	3,08	3,12	3,17	3,22	3,26	130
140	3,31	3,36	3,41	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	3,75	140
<b>150</b>	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,06	4,11	4,16	4,22	4,27	<b>150</b>
160	4,32	4,38	4,43	4,49	4,54	4,60	4,65	4,71	4,77	4,82	160
170	4,88	4,94	5,00	5,05	5,11	5,17	5,23	5,29	5,35	5,41	170
180	5,47	5,53	5,59	5,66	5,72	5,78	5,84	5,91	5,97	6,03	180
190	6,10	6,16	6,23	6,29	6,36	6,42	6,49	6,55	6,62	6,69	190
<b>200</b>	6,75	6,82	6,89	6,96	7,03	7,10	7,17	7,24	7,31	7,38	<b>200</b>
210	7,45	7,52	7,59	7,66	7,73	7,81	7,88	7,95	8,03	8,10	210
220	8,17	8,25	8,32	8,40	8,47	8,55	8,63	8,70	8,78	8,86	220
230	8,93	9,01	9,09	9,17	9,25	9,33	9,41	9,49	9,57	9,65	230
240	9,73	9,81	9,89	9,97	10,05	10,14	10,22	10,30	10,39	10,47	240
<b>250</b>	10,55	Για ενδιάμεσες τιμές δεν χρειάζεται παρεμβολή.									



## Συντελεστές λυγισμού $\omega$ για σωληνωτές διατομές.

### α) Από χάλυβα St 33 και St 37

$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\lambda$
20	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	20
30	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	30
40	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	40
<b>50</b>	1,12	1,13	1,12	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,17	1,18	<b>50</b>
60	1,19	1,20	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	60
70	1,28	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	70
80	1,39	1,40	1,41	1,42	1,44	1,45	1,47	1,48	1,50	1,51	80
90	1,53	1,54	1,56	1,58	1,59	1,61	1,63	1,64	1,66	1,68	90
<b>100</b>	1,70	1,73	1,76	1,79	1,83	1,87	1,90	1,94	1,97	2,01	<b>100</b>
110	2,05	2,08	2,12	2,16	2,20	2,23	2,27	2,31	2,35	2,39	110
120	2,43	2,47	2,51	2,55	2,60	2,64	2,68	2,72	2,77	2,81	120

### β) Από χάλυβα St 52

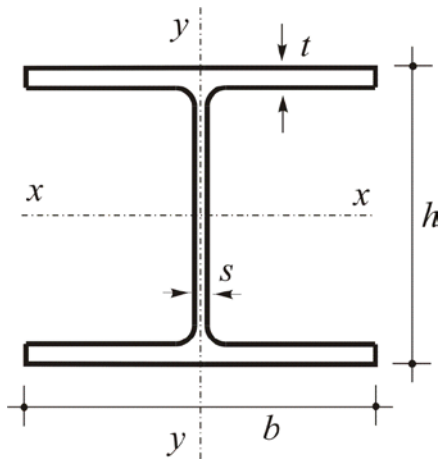
$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\lambda$
20	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	20
30	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	30
40	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	40
<b>50</b>	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,26	1,26	1,27	<b>50</b>
60	1,28	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,39	1,39	1,41	60
70	1,42	1,44	1,46	1,47	1,49	1,51	1,53	1,57	1,57	1,59	70
80	1,62	1,66	1,71	1,75	1,79	1,83	1,88	1,97	1,97	2,01	80
90	2,05	2,10	2,14	2,19	2,24	2,29	2,33	2,43	2,43	2,48	90

Για τιμές του  $\lambda$  κάτω από την παχιά γραμμή, θα πρέπει οι συντελεστές λυγισμού  $\omega$  να λαμβάνονται από τους προηγούμενους αντίστοιχους πίνακες του DIN 4114

Οι παραπάνω τιμές του  $\omega$ , που είναι μικρότερες των αντιστοιχών κατά DIN 4114, μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν:

1. Το πάχος του σωλήνα είναι μικρότερο του  $D/6$
2. Η ράβδος αποτελείται μόνον από ένα τμήμα, και
3. Δεν πρόκειται για ικρίωμα από χαλυβδοσωλήνες.



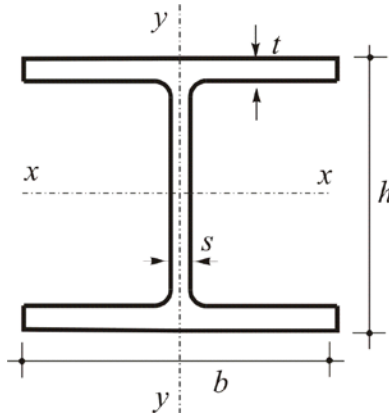


**Πλατύπελμες δοκοί I με ισοπαχή  
πέλματα ελαφράς κατασκευής,**

κατά DIN 1025, φύλλο 3, Οκτ. 1963

**F** Εμβαδόν διατομής **W** Ροπή αντίστασης  
**G** Βάρος **i** Ακτίνα αδράνειας  
**J** Ροπή αδράνειας **S<sub>x</sub>** Στατική ροπή μισής  
διατομής

Σύμβολο <b>I<sub>PB/I</sub></b>	Διαστάσεις (mm)				F cm <sup>2</sup>	G Kg/m	X-X			Y-Y			S <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>
	h	b	s	t			J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	
<b>100</b>	96	100	5	8	21,2	16,7	349	72,8	4,06	134	26,8	2,51	41,5
120	114	120	5	8	25,3	19,9	606	106	4,89	231	38,5	3,02	59,7
140	133	140	5,5	8,5	31,4	24,7	1030	156	5,73	389	55,6	3,52	86,7
160	152	160	6	9	38,8	30,4	1670	220	6,57	616	76,9	3,98	123
180	171	180	6	9,5	45,3	35,5	2510	294	7,45	925	103	4,52	162
<b>200</b>	190	200	6,5	10	53,8	42,3	3690	389	8,28	1340	134	4,98	215
220	210	220	7	11	64,3	50,5	5410	515	9,17	1950	178	5,51	284
240	230	240	7,5	12	76,8	60,3	7760	675	10,1	2770	231	6,00	372
260	250	260	7,5	12,5	86,8	68,2	10.450	836	11,0	3670	282	6,50	460
280	270	280	8	13	97,3	76,4	13.670	1010	11,9	4760	340	7,00	556
<b>300</b>	290	300	8,5	14	113	88,3	18.260	1260	12,7	6310	421	7,49	692
320	310	300	9	15,5	124	97,6	22.930	1480	13,6	6990	466	7,49	814
340	330	300	9,5	16,5	133	105	27.690	1680	14,4	7440	496	7,46	925
360	350	300	10	17,5	143	112	33.090	1890	15,2	7890	526	7,43	1040
<b>400</b>	390	300	11	19	159	125	45.070	2310	16,8	8560	571	7,34	1280
450	440	300	11,5	21	178	140	63.720	2900	28,9	9470	631	7,29	1610
<b>500</b>	490	300	12	23	198	155	86.970	3550	21,0	10.370	691	7,24	1970
550	540	300	12,5	24	212	166	111.900	4150	23,0	10.820	721	7,15	2310
<b>600</b>	590	300	13	25	226	178	141.200	4790	25,0	11.270	751	7,05	2680
650	640	300	13,5	26	242	190	175.200	5470	26,9	11.720	782	6,97	3070
<b>700</b>	690	300	14,5	27	260	204	215.300	6240	28,8	12.180	812	6,84	3520
<b>800</b>	790	300	15	28	286	224	303.400	7680	32,6	12.640	843	6,65	4350
<b>900</b>	890	300	16	30	321	252	422.100	9480	36,3	13.550	903	6,50	5410
<b>1000</b>	990	300	16,5	31	347	272	553.800	11.190	40,0	14.000	934	6,35	6410

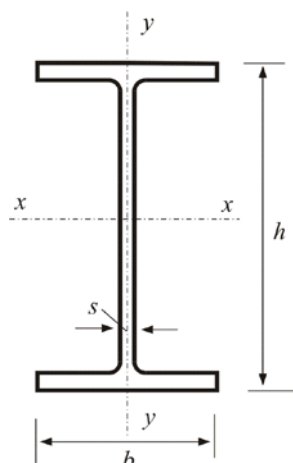


**Πλατύπελμες δοκοί I με ισοπαχή πέλματα ενισχυμένης κατασκευής,**

κατά DIN 1025, φύλλο 4, Οκτ. 1963

**F** Εμβαδόν διατομής **W** Ροπή αντίστασης  
**G** Βάρος **i** Ακτίνα αδράνειας  
**J** Ροπή αδράνειας **S<sub>x</sub>** Στατική ροπή μισής διατομής

Σύμβολο <b>I<sub>PBU</sub></b>	Διαστάσεις (mm)				F cm <sup>2</sup>	G Kg/m	X-X			Y-Y			S <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>
	h	b	s	t			J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	
<b>100</b>	120	106	12	20	53,2	41,8	1140	190	4,63	399	75,3	2,74	118
120	140	126	12,5	21	66,4	52,1	2020	288	5,51	703	112	3,25	175
140	160	146	13	22	80,6	63,2	3290	411	6,39	1140	157	3,77	247
160	180	166	14	23	97,1	76,2	5100	566	7,25	1760	212	4,26	337
180	200	186	14,5	24	113	88,9	7480	748	8,13	2580	277	4,77	442
<b>200</b>	220	206	15	25	131	103	10640	967	9,00	3650	354	5,27	568
220	240	226	15,5	26	149	117	14.600	1220	9,89	5010	444	5,79	710
240	270	248	18	32	200	157	24.290	1800	11,0	8150	657	6,30	1060
260	290	268	18	32	220	172	31.310	2160	11,9	10.450	780	6,90	1260
280	310	288	18,5	33	240	189	39.550	2550	12,8	13.160	914	7,40	1480
<b>300</b>	340	310	21	39	303	238	59.200	3480	14,0	19.400	1250	8,00	2040
320/305	320	305	16	29	225	177	40.950	2560	13,5	13.740	901	7,81	1460
320	359	309	21	40	312	245	68.130	3800	14,8	19.710	1280	7,95	2220
340	377	309	21	40	316	248	76.370	4050	15,6	19.710	1280	7,90	2360
360	395	308	21	40	319	250	84.870	4300	16,3	19.520	1270	7,83	2490
<b>400</b>	432	307	21	40	236	256	104.100	4820	17,9	19.340	1260	7,70	2790
450	478	307	21	40	335	263	131.500	5500	19,8	19.340	1260	7,59	3170
<b>500</b>	524	306	21	40	344	270	161.900	6180	21,7	19.150	1250	7,46	3550
550	572	306	21	40	354	278	198.000	6920	23,6	19.160	1250	7,35	3970
<b>600</b>	620	305	21	40	364	285	237.400	7660	25,6	18.970	1240	7,22	4390
650	668	305	21	40	374	293	281.700	8430	27,5	18.980	1240	7,13	4830
<b>700</b>	716	304	21	40	383	301	329.300	9200	29,3	18.800	1240	7,01	5270
<b>800</b>	814	303	21	40	404	317	442.600	10.870	33,1	18.630	1230	6,79	6240
<b>900</b>	910	302	21	40	424	333	570.400	12.540	36,7	18.450	1220	6,60	7220
<b>1000</b>	1008	302	21	40	444	349	722.300	14.330	40,3	18.460	1220	6,45	8280

Σειρά **IPE** (Ελαση εν θερμώ)

Δοκοί **I** μέσου πλάτους με ισοπαχή πέλματα

κατά DIN 1025, φύλλο 5.

Έκδοση Μαρτίου 1965

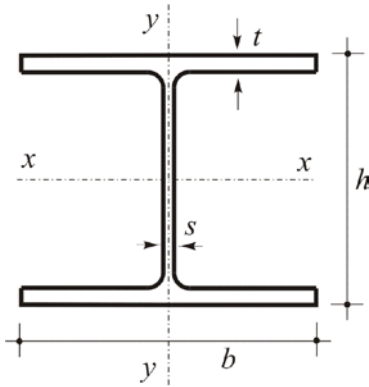
Μήκη γενικά 4 έως 15 m.

**F** Εμβαδόν διατομής **W** Ροπή αντίστασης

**G** Βάρος **i** Ακτίνα αδράνειας

**J** Ροπή αδράνειας **S<sub>x</sub>** Στατική ροπή μισής διατομής

Σύμβολο <b>IPE</b>	Διαστάσεις (mm)			F cm <sup>2</sup>	G Kg/m	X-X			Y-Y			S <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>
	h	b	s			J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	
80	80	46	3,8	7,04	6,00	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05	11,6
<b>100</b>	100	55	4,1	10,3	8,10	171	34,2	4,07	15,9	5,79	1,24	19,7
120	120	64	4,4	13,2	10,4	318	53,0	4,90	27,7	8,65	1,45	30,4
140	140	73	4,7	16,4	12,9	541	77,3	5,74	44,9	12,3	1,65	44,2
160	160	82	5,0	20,1	15,8	869	109	6,58	68,3	16,7	1,84	61,9
180	180	91	5,3	23,9	18,8	1.320	146	7,42	101	22,2	2,05	83,2
<b>200</b>	200	100	5,6	28,5	22,4	1.940	194	8,26	142	28,5	2,24	110
220	220	110	5,9	33,4	26,2	2.770	252	9,11	205	37,3	2,48	143
240	240	120	6,2	39,1	30,7	3.890	324	9,97	284	47,3	2,69	183
270	270	135	6,6	45,9	36,1	5.790	429	11,2	420	62,2	3,02	242
<b>300</b>	300	150	7,1	53,8	42,2	8.360	557	12,5	640	80,5	3,35	314
330	330	160	7,5	62,6	49,1	11.770	713	13,7	788	98,5	3,55	402
360	360	170	8,0	72,7	57,1	16.270	904	15,0	1.40	123	3,79	510
<b>400</b>	400	180	8,6	84,5	66,3	23.130	1160	16,5	1320	146	3,95	654
450	450	190	9,4	98,8	77,6	33.740	1500	18,5	1680	176	4,12	851
<b>500</b>	500	200	10,2	116	90,7	48.200	1930	20,4	2140	214	4,31	1100
550	550	210	11,1	134	106	67.120	2440	22,3	2670	254	4,45	1390
<b>600</b>	600	220	12,0	156	122	92.080	3070	24,3	3390	308	4,06	1760

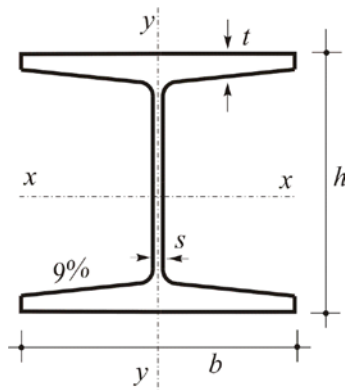


Σειρά **IPB**. Πλατύπελμες δοκοί **I** με  
ισοπαχή πέλματα

κατά DIN 1025, φύλλο 2, Οκτ. 1963

**F** Εμβαδόν διατομής **W** Ροπή αντίστασης  
**G** Βάρος **i** Ακτίνα αδράνειας  
**J** Ροπή αδράνειας **S<sub>x</sub>** Στατική ροπή μισής  
διατομής

Σύμ- βολο <b>IPB</b>	Διαστάσεις (mm)				<b>F</b> cm <sup>2</sup>	<b>G</b> Kg/m	<b>X-X</b>			<b>Y-Y</b>			<b>S<sub>x</sub></b> cm <sup>3</sup>
	<b>h</b>	<b>b</b>	<b>s</b>	<b>t</b>			<b>J<sub>x</sub></b> cm <sup>4</sup>	<b>W<sub>x</sub></b> cm <sup>3</sup>	<b>i<sub>x</sub></b> cm	<b>J<sub>y</sub></b> cm <sup>4</sup>	<b>W<sub>y</sub></b> cm <sup>3</sup>	<b>i<sub>y</sub></b> cm	
<b>100</b>	100	100	6	10	26,0	20,4	450	89,9	4,16	167	33,5	2,53	52,1
120	120	120	6,5	11	34,0	26,7	864	144	5,04	318	52,9	3,06	82,6
140	140	140	7	12	43,0	33,7	1510	216	5,93	550	78,5	3,58	123
160	160	160	8	13	54,3	42,6	2490	311	6,78	889	111	4,05	177
180	180	180	8,5	14	65,3	51,2	3830	426	7,66	1360	151	4,57	241
<b>200</b>	200	200	9	15	78,1	61,3	5700	570	8,54	2000	200	5,07	321
220	220	220	9,5	16	91,0	71,5	8090	736	9,43	2840	258	5,59	414
240	240	240	10	17	106	83,2	11.260	938	10,3	3920	327	6,08	527
260	260	260	10	17,5	118	93,0	14.920	1150	11,2	5130	395	6,58	641
280	280	280	10,5	18	131	103	19.270	1380	12,1	6590	471	7,09	767
<b>300</b>	300	300	11	19	149	117	25.170	1680	13,0	8560	571	7,58	934
320	320	300	11,5	20,5	161	127	30.820	1930	13,8	9.240	616	7,75	1.070
340	340	300	12	21,5	171	134	36.660	2160	14,6	9.690	646	7,53	1.200
360	360	300	12,5	22,5	181	142	43.190	2400	15,5	10.140	676	7,49	1.340
<b>400</b>	400	300	13,5	24	198	153	57.680	2880	17,1	10.820	721	7,40	1.620
450	450	300	14	26	218	171	79.890	3.550	19,1	11.720	781	7,33	1.990
<b>500</b>	500	300	14,5	28	239	187	107.200	4.290	21,2	12.620	842	7,27	2.410
550	550	300	15	29	254	199	136.700	4.970	23,2	13.080	872	7,17	2.800
<b>600</b>	600	300	15,5	30	270	212	171.000	5.700	25,2	13.530	902	7,08	3.210
650	650	300	16	31	286	225	210.600	6.480	27,1	13.980	932	6,99	3.660
<b>700</b>	700	300	17	32	306	241	256.900	7.340	29,0	14.440	963	6,87	4.160
<b>800</b>	800	300	17,5	33	334	262	359.100	8.980	32,8	14.900	994	6,68	5.110
<b>900</b>	900	300	18,5	35	371	291	494.100	10.980	36,5	15.820	1.050	6,53	6.290
<b>1000</b>	1000	300	19	36	400	314	644.700	12.890	40,1	16.280	1.090	6,38	7.430

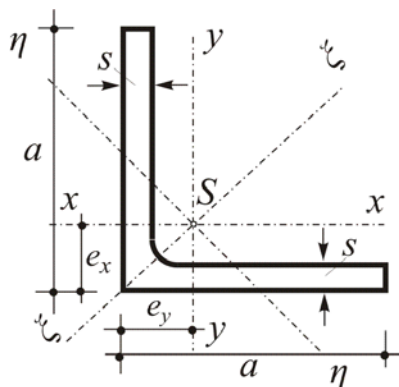


**Σειρά ΙΒ. Πλατύπελμες δοκοί Ι με κεκλιμένα εσωτερικά πέλματα**

κατά DIN 1025, φύλλο 2, Οκτ. 1963

**F** Εμβαδόν διατομής **W** Ροπή αντίστασης  
**G** Βάρος **i** Ακτίνα αδράνειας  
**J** Ροπή αδράνειας **S<sub>x</sub>** Στατική ροπή μισής διατομής

Σύμβολο <b>ΙΒ</b>	Διαστάσεις (mm)				F cm <sup>2</sup>	G kg/m	x - x			y - y			S <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>
	h	b	s	t			J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	
100	100	100	7,5	10,25	26,8	21,0	447	89,4	4,09	151	30,1	2,37	53
120	120	120	8	11	34,6	27,2	852	142	4,96	276	46,0	2,82	82
140	140	140	8	12	43,3	34,0	1490	213	5,86	475	67,8	3,31	122
160	160	160	9	14	57,4	45,0	2580	322	6,70	831	104	3,81	184
180	180	180	9	14	64,7	50,8	3750	417	7,62	1170	130	4,25	237



**Ισοσκελή γωνιακά ελάσματα L**

με στρογγυλεμένες ακμές,

κατά DIN 1028, Οκτ. 1963.

**F** Εμβαδόν διατομής **W** Ροπή αντίστασης  
**G** Βάρος **i** Ακτίνα αδράνειας  
**J** Ροπή αδράνειας  
 Ο άξονας ξ-ξ είναι διχοτόμος

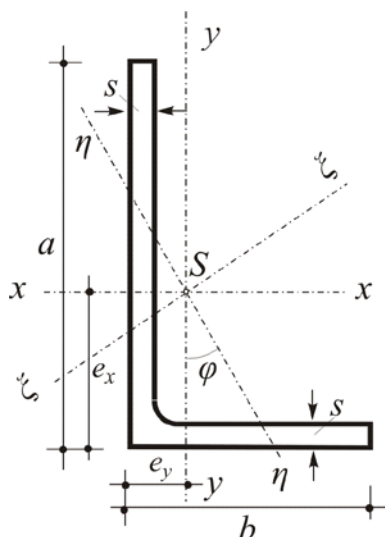
Συμβολισμός <b>L</b>	Διαστ. (mm)		F cm <sup>2</sup>	G kg/m	e <sub>x</sub> =e <sub>y</sub> cm	x - x = y - y			ξ - ξ		n - n		
	α	s				J <sub>x</sub> =J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> =W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> =i <sub>y</sub> cm	J <sub>ξ</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>ξ</sub> cm	J <sub>n</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>n</sub> cm <sup>3</sup>	I <sub>n(min)</sub> cm
3 20 x 4	20	3	1,12	0,88	0,60	0,39	0,28	0,59	0,62	0,74	0,15	0,18	0,37
		4	1,45	1,14	0,64	0,48	0,35	0,58	0,77	0,73	0,19	0,21	0,36
3 25 x 4	25	3	1,42	1,12	0,73	0,79	0,45	0,75	1,27	0,95	0,31	0,30	0,47
		4	1,85	1,45	0,76	1,01	0,58	0,74	1,61	0,93	0,40	0,37	0,47
		5	2,26	1,77	0,80	1,18	0,69	0,72	1,87	0,91	0,50	0,44	0,47

Συμβολισμός <b>L</b>	Διαστ. (mm)		F cm <sup>2</sup>	G Kg/m	ex =ey cm	x - x = y - y			ξ - ξ		n - n		
	α	s				J <sub>x</sub> =J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> =W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> =i <sub>y</sub> cm	J <sub>ξ</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>ξ</sub> cm	J <sub>n</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>n</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>n(min)</sub> cm
30 x 4	30	3	1,74	1,36	0,84	1,41	0,65	0,90	2,24	1,14	0,57	0,48	0,57
		4	2,27	1,78	0,89	1,81	0,86	0,89	2,85	1,12	0,76	0,61	0,58
		5	2,78	2,18	0,92	2,16	1,04	0,88	3,41	1,11	0,91	0,70	0,57
35x 5	35	3	2,04	1,60	0,96	2,29	0,90	1,06	3,63	1,34	0,95	0,70	0,68
		4	2,67	2,10	1,00	2,96	1,18	1,05	4,68	1,33	1,24	0,88	0,68
		5	3,28	2,57	1,04	3,56	1,45	1,04	5,63	1,31	1,49	1,10	0,67
		6	3,87	3,04	1,08	4,14	1,71	1,04	6,50	1,30	1,77	1,16	0,68
40 x5	40	3	2,35	1,84	1,07	3,45	1,18	1,21	5,45	1,52	1,44	0,95	0,78
		4	3,08	2,42	1,12	4,48	1,56	1,21	7,09	1,52	1,86	1,18	0,78
		5	3,79	2,97	1,16	5,43	1,91	1,20	8,64	1,51	2,22	1,35	0,77
		6	4,48	3,52	1,20	6,33	2,26	1,19	9,98	1,49	2,67	1,57	0,77
45 x6	45	4	3,49	2,74	1,23	6,43	1,97	1,36	10,2	1,71	2,68	1,53	0,88
		5	4,30	3,38	1,28	7,83	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87
		6	5,09	4,00	1,32	9,16	2,88	1,34	14,5	1,69	3,83	2,05	0,87
		7	5,86	4,60	1,36	10,4	3,31	1,33	16,4	1,67	4,39	2,29	0,87
50 x7	50	4	3,89	3,06	1,36	8,97	2,46	1,52	14,2	1,91	3,73	1,94	0,98
		5	4,80	3,77	1,40	11,0	3,05	1,51	17,4	1,90	4,59	2,32	0,98
		6	5,69	4,47	1,45	12,8	3,61	1,50	20,4	1,89	5,24	2,57	0,96
		7	6,56	5,15	1,49	14,6	4,15	1,49	23,1	1,88	6,02	2,85	0,96
		8	7,41	5,82	1,52	16,3	4,68	1,48	25,7	1,86	6,87	3,19	0,96
55 x8	55	9	8,24	6,47	1,56	17,9	5,20	1,47	28,1	1,85	7,67	3,47	0,97
		5	5,32	4,18	1,52	14,7	3,70	1,66	23,3	2,09	6,11	2,84	1,07
		6	6,31	4,95	1,56	17,3	4,40	1,66	27,4	2,08	7,24	3,28	1,07
		8	8,23	6,46	1,64	22,1	5,72	1,64	34,8	2,06	9,35	4,03	1,07
60 x8	60	10	10,1	7,90	1,72	26,3	6,97	1,62	41,4	2,02	11,3	4,65	1,06
		5	5,82	4,57	1,64	19,4	4,45	1,82	30,7	2,30	8,03	3,46	1,17
		6	6,91	5,42	1,69	22,8	5,29	1,82	36,1	2,29	9,43	3,95	1,17
		8	9,03	7,09	1,77	29,1	6,88	1,80	46,1	2,26	12,1	4,84	1,16
10	11,1	8,69	1,85	34,9	8,41	1,78	55,1	2,23	14,6	5,57	1,15		



Συμβολισμός <b>L</b>	Διαστ. (mm)		F cm <sup>2</sup>	G Kg/m	e <sub>x</sub> =e <sub>y</sub> cm	x - x = y - y			ξ - ξ		n - n		
	a	s				J <sub>x</sub> =J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> =W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> =i <sub>y</sub> cm	J <sub>ξ</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>ξ</sub> cm	J <sub>n</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>n</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>n(min)</sub> cm
6	65	6	7,53	5,91	1,80	29,2	6,21	1,97	46,3	2,48	12,1	4,74	1,27
7		7	8,70	6,83	1,85	33,4	7,18	1,96	53,0	2,47	13,8	5,27	1,26
65x 8		8	9,85	7,73	1,89	37,5	8,13	1,95	59,4	2,46	15,6	5,84	1,26
9		9	11,0	8,62	1,93	41,3	9,04	1,94	65,4	2,44	17,2	6,30	1,25
11		11	13,2	10,3	2,00	48,8	10,8	1,91	76,8	2,42	20,7	7,31	1,25
6	70	6	8,13	6,38	1,93	36,9	7,27	2,13	58,5	2,68	15,3	5,60	1,37
7		7	9,40	7,38	1,97	42,4	8,43	2,12	67,1	2,67	17,6	6,31	1,37
70x9		9	11,9	9,34	2,05	52,6	10,6	2,10	83,1	2,64	22,0	7,59	1,36
11		11	14,3	11,2	2,13	61,8	12,7	2,08	97,6	2,61	26,0	8,64	1,35
6	75	6	8,75	6,87	2,04	45,6	8,35	2,28	72,2	2,87	18,9	6,54	1,47
7		7	10,1	7,94	2,09	52,4	9,67	2,28	83,6	2,88	21,1	7,15	1,45
75x 8		8	11,5	9,03	2,13	58,9	11,0	2,26	93,3	2,85	24,4	8,11	1,46
10		10	14,1	11,1	2,21	71,4	13,5	2,25	113	2,83	29,8	9,55	1,45
12		12	16,7	13,1	2,29	82,4	15,8	2,22	130	2,79	34,7	10,7	1,44
7	80	7	10,8	8,49	2,21	64,2	11,1	2,44	102	3,07	26,5	8,48	1,57
8		8	12,3	9,66	2,26	72,3	12,6	2,42	115	3,06	29,6	9,25	1,55
80x10		10	15,1	11,9	2,34	87,5	15,5	2,41	139	3,03	35,9	10,9	1,54
12		12	17,9	14,1	2,41	102	18,2	2,39	161	3,00	43,0	12,6	1,53
14		14	20,6	16,1	2,48	115	20,8	2,36	181	2,96	48,6	13,9	1,54
8	85	8	13,9	10,9	2,50	104	16,1	2,74	165	3,45	43,5	12,3	1,77
9		9	15,5	12,2	2,54	116	18,0	2,74	184	3,45	47,8	13,3	1,76
90x11		11	18,7	14,7	2,62	138	21,6	2,72	218	3,41	57,1	15,4	1,75
13		13	21,8	17,1	2,70	158	25,1	2,69	250	3,39	65,9	17,3	1,74
16		16	26,4	20,7	2,81	186	30,1	2,66	294	3,34	79,1	19,9	1,73
8	90	8	15,5	12,2	2,74	145	19,9	3,06	230	3,85	59,9	15,5	1,96
10		10	19,2	15,1	2,82	177	24,7	3,04	280	3,82	73,3	18,4	1,95
12		12	22,7	17,8	2,90	207	29,2	3,02	328	3,80	86,2	21,0	1,95
100x1		14	26,2	20,6	2,98	235	33,5	3,00	372	3,77	98,3	23,4	1,94
4		16	29,6	23,2	3,06	262	37,7	2,97	413	3,74	111	25,6	1,93
16		20	36,2	28,4	3,20	311	45,7	2,93	487	3,67	135	29,8	1,93
20													

Συμβολισμός <b>L</b>	Διαστ. (mm)		F cm <sup>2</sup>	G kg/m	ex =ey cm	x - x = y - y			ξ - ξ		n - n		
	a	s				J <sub>x</sub> =J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> =W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> =i <sub>y</sub> cm	J <sub>ξ</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>ξ</sub> cm	J <sub>n</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>n</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>n(min)</sub> cm
10 110x12 14	110	10	21,2	16,6	3,07	239	30,1	3,36	379	4,23	98,6	22,7	2,16
		12	25,1	19,7	3,15	280	35,7	3,34	444	4,21	116	26,1	2,15
		14	29,0	22,8	3,21	319	41,0	3,32	505	4,18	133	29,3	2,14
11 12 120x13 15	120	11	25,4	19,9	3,36	341	39,5	3,66	541	4,62	140	29,5	2,35
		12	27,5	21,6	3,40	368	42,7	3,65	584	4,60	152	31,6	2,35
		13	29,7	23,3	3,44	394	46,0	3,64	625	4,59	162	33,3	2,34
		15	33,9	26,6	3,51	446	52,5	3,63	705	4,56	186	37,5	2,34
12 130x14 16	130	12	30,0	23,6	3,64	472	50,4	3,97	750	5,00	194	37,7	2,54
		14	34,7	27,2	3,72	540	58,2	3,94	857	4,97	223	42,4	2,53
		16	39,3	30,9	3,80	605	65,8	3,92	959	4,94	251	46,7	2,52
13 140x15	140	13	35,0	27,5	3,92	638	63,3	4,27	1010	5,38	262	47,3	2,74
		15	40,0	31,4	4,00	723	72,3	4,25	1150	5,36	298	52,7	2,73
12 14 15 150x16 18 20	150	12	34,8	27,3	4,12	737	67,7	4,60	1170	5,80	303	52,0	2,95
		14	40,3	31,6	4,21	845	78,2	4,58	1340	5,77	347	58,3	2,94
		15	43,0	33,8	4,25	898	83,5	4,57	1420	5,76	370	61,6	2,93
		16	45,7	35,9	4,29	949	88,7	4,56	1510	5,74	391	64,4	2,93
		18	51,0	40,1	4,36	1050	99,3	4,54	1670	5,70	438	71,0	2,93
		20	56,3	44,2	4,44	1150	109	4,51	1820	5,68	477	76,0	2,91
15 160x17 19	160	15	46,1	36,2	4,49	1100	95,6	4,88	1750	6,15	453	71,3	3,14
		17	51,8	40,7	4,57	1230	108	4,86	1950	6,13	506	78,3	3,13
		19	57,5	45,1	4,65	1350	118	4,84	2140	6,10	558	84,8	3,12
16 18 180x20 22	180	16	55,4	43,5	5,02	1680	130	5,51	2690	6,96	679	95,5	3,50
		18	61,9	48,6	5,10	1870	145	5,49	2970	6,93	757	105	3,49
		20	68,4	53,7	5,18	2040	160	5,47	3260	6,90	830	113	3,49
		22	74,7	58,6	5,26	2210	174	5,44	3510	6,86	918	123	3,50
16 18 200x20 24 28	200	16	61,8	48,5	5,52	2340	162	6,15	3740	7,78	943	121	3,91
		18	69,1	54,3	5,60	2600	181	6,13	4150	7,75	1050	133	3,90
		20	76,4	59,9	5,68	2850	199	6,11	4540	7,72	1160	144	3,89
		24	90,6	71,1	5,84	3330	235	6,06	5280	7,64	1380	167	3,90
		28	105	82,0	5,99	3780	270	6,02	5990	7,57	1580	186	3,89



**Ανισοσκελή γωνιακά ελάσματα L**  
 με στρογγυλεμένες ακμές,  
 κατά DIN 1029, έκδοση Ιούνιος 1967

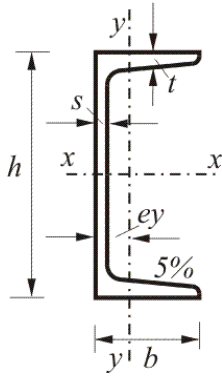
**F** Εμβαδόν διατομής    **W** Ροπή αντίστασης  
**G** Βάρος                    **i** Ακτίνα αδράνειας  
**J** Ροπή αδράνειας

Οι άξονες x-x, y-y είναι κ.β. // των πελμάτων  
 Οι άξονες ξ-ξ, η-η είναι κ.β. κύριοι άξονες αδράνειας.

Συμβολισμός <b>L</b>	Διαστ. (mm)			F cm <sup>2</sup>	G Kg/m	Θέσεις αξόνων			x-x			y-y			ξ-ξ		n-n	
	a	b	s			e <sub>x</sub> cm	e <sub>y</sub> cm	εφφ	J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	J <sub>ξ</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>ξ</sub> cm	J <sub>n</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>n</sub> cm
3 30.20.4	30	20	3	1,42	1,11	0,99	0,50	0,431	1,25	0,62	0,94	0,44	0,29	0,56	1,43	1,00	0,25	0,42
			4	1,85	1,45	1,03	0,54	0,432	1,59	0,81	0,93	0,55	0,38	0,55	1,81	0,99	0,33	0,42
3 40.20.4	40	20	3	1,72	1,35	1,43	0,44	0,259	2,79	1,08	1,27	0,47	0,30	0,52	2,96	1,31	0,30	0,42
			4	2,25	1,77	1,47	0,48	0,252	3,59	1,42	1,26	0,60	0,39	0,52	3,79	1,30	0,39	0,42
3 45.30.4 5	45	30	3	2,19	1,72	1,43	0,70	0,436	4,47	1,46	1,43	1,60	0,70	0,86	5,15	1,53	0,93	0,65
			4	2,87	2,25	1,48	0,74	0,430	5,78	1,91	1,42	2,05	0,91	0,85	6,65	1,52	1,18	0,64
			5	3,53	2,77	1,52	0,78	0,430	6,99	2,35	1,41	2,47	1,11	0,84	8,02	1,51	1,44	0,64
50.30.5	50	30	5	3,78	2,96	1,73	0,74	0,353	9,41	2,88	1,58	2,54	1,12	0,82	10,4	1,66	1,56	0,64
4 50.40.5	50	40	4	3,46	2,71	1,52	1,03	0,629	8,54	2,47	1,57	4,86	1,64	1,19	10,9	1,78	2,46	0,84
			5	4,27	3,35	1,56	1,07	0,625	10,4	3,02	1,56	5,89	2,01	1,18	13,3	1,76	3,02	0,84
5 60.30.7	60	30	5	4,29	3,37	2,15	0,68	0,256	15,6	4,04	1,90	2,60	1,12	0,78	16,5	1,96	1,69	0,63
			7	5,85	4,59	2,24	0,76	0,248	20,7	5,50	1,88	3,41	1,52	0,76	21,8	1,93	2,28	0,62
5 60.40.6 7	60	40	5	4,79	3,76	1,96	0,97	0,437	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,50	0,86
			6	5,68	4,46	2,00	1,01	0,433	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,12	0,85
			7	6,55	5,14	2,04	1,05	0,429	23,0	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	2,00	4,73	0,85
5 65.50.7 9	65	50	5	5,54	4,35	1,99	1,25	0,583	23,1	5,11	2,04	11,9	3,18	1,47	28,8	2,28	6,21	1,06
			7	7,60	5,97	2,07	1,33	0,574	31,0	6,99	2,02	15,8	4,31	1,44	38,4	2,25	8,37	1,05
			9	9,58	7,52	2,15	1,41	0,567	38,2	8,77	2,00	19,4	5,39	1,42	47,0	2,22	10,5	1,05

Συμβολισμός <b>L</b>	Διαστ. (mm)			F cm <sup>2</sup>	G kg/m	Θέσεις αξόνων			x-x			y-y			ξ-ξ		η-η	
	a	b	s			e <sub>x</sub> cm	e <sub>y</sub> cm	εφφ	J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	J <sub>ξ</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>ξ</sub> cm	J <sub>η</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>η</sub> cm
5 <b>75.50.7</b> 9	75	50	5 7 9	6,04 8,30 10,5	4,74 6,51 8,23	2,40 2,48 2,56	1,17 1,25 1,32	0,437 0,433 0,427	34,4 46,4 57,4	6,74 9,24 11,6	2,39 2,36 2,34	12,3 16,5 20,2	3,21 4,39 5,49	1,43 1,41 1,39	39,9 53,3 65,7	2,56 2,53 2,50	7,10 9,56 11,9	1,08 1,07 1,07
5 <b>75.55.7</b> 9	75	55	5 7 9	6,30 8,66 10,9	4,95 6,80 8,59	2,31 2,40 2,47	1,33 1,41 1,48	0,530 0,525 0,518	35,5 47,9 59,4	6,84 9,39 11,8	2,37 2,35 2,33	16,2 21,8 26,8	3,89 5,32 6,66	1,60 1,59 1,57	43,1 57,9 71,3	2,61 2,59 2,55	8,68 11,8 14,8	1,17 1,17 1,16
6 <b>80.40.8</b>	80	40	6 8	6,89 9,01	5,41 7,07	2,85 2,94	0,88 0,95	0,259 0,253	44,9 57,6	8,73 11,4	2,55 2,53	7,59 9,68	2,44 3,18	1,05 1,04	47,6 60,9	2,63 2,60	4,90 6,41	0,84 0,84
6 <b>80.65.8</b> 10	80	65	6 8 10	8,41 11,0 13,6	6,60 8,66 10,7	2,39 2,47 2,55	1,65 1,73 1,81	0,649 0,645 0,640	52,8 68,1 82,2	9,41 12,3 15,1	2,51 2,49 2,46	31,2 40,1 48,3	6,44 8,41 10,3	1,93 1,91 1,89	68,5 88,0 106	2,85 2,82 2,79	15,6 20,3 24,8	1,36 1,36 1,35
6 <b>90.60.8</b>	90	60	6 8	8,69 11,4	6,82 8,96	2,89 2,97	1,41 1,49	0,442 0,437	71,7 92,5	11,7 15,4	2,87 2,85	25,8 33,0	5,61 7,31	1,72 1,70	82,3 107	3,09 3,06	14,6 19,0	1,30 1,29
<b>90.75.7</b>	90	75	7	11,1	8,74	2,67	1,93	0,683	88,1	13,9	2,81	55,5	9,98	2,23	117	3,24	27,1	1,56
6 <b>100.50.8</b> 10	100	50	6 8 10	8,73 11,5 14,1	6,85 8,99 11,1	3,49 3,59 3,67	1,04 1,13 1,20	0,263 0,258 0,252	89,7 116 141	13,8 18,0 22,2	3,20 3,18 3,16	15,3 19,5 23,4	3,86 5,04 6,17	1,32 1,31 1,29	95,2 123 149	3,30 3,28 3,25	9,76 12,6 15,5	1,06 1,05 1,04
7 <b>100.65.9</b> 11	100	65	7 9 11	11,2 14,2 17,1	8,77 11,1 13,4	3,23 3,32 3,40	1,51 1,59 1,67	0,419 0,415 0,410	113 147 167	16,6 21,0 25,3	3,17 3,15 3,13	37,6 46,7 55,1	7,54 9,52 11,4	1,84 1,82 1,80	128 160 190	3,39 3,36 3,34	26,1 27,2 32,6	1,39 1,39 1,38
7 <b>100.75.9</b> 11	100	75	7 9 11	11,9 15,1 18,2	9,32 11,8 14,3	3,06 3,15 3,23	1,83 1,91 1,99	0,553 0,549 0,545	118 148 176	17,0 21,5 25,9	3,15 3,13 3,11	56,9 71,0 84,0	10,0 12,7 15,3	2,19 2,17 2,15	145 181 214	3,49 3,47 3,44	30,1 37,8 45,4	1,59 1,59 1,58
8 <b>120.80.10</b> 12 14	120	80	8 10 12 14	15,5 19,1 22,7 26,2	12,2 15,0 17,8 20,5	3,83 3,92 4,00 4,08	1,87 1,95 2,03 2,10	0,441 0,438 0,433 0,429	226 276 223 268	27,6 34,1 40,4 46,4	3,82 3,80 3,77 3,75	80,8 98,1 114 130	13,2 16,2 19,1 22,0	2,29 2,27 2,25 2,23	261 318 371 421	4,10 4,07 4,04 4,01	45,8 56,1 66,1 75,8	1,72 1,71 1,71 1,70

Συμβολισμός <b>L</b>	Διαστ. (mm)			F cm <sup>2</sup>	G Kg/m	Θέσεις αξόνων			x-x			y-y			ξ-ξ		n-n	
	a	b	s			e <sub>x</sub> cm	e <sub>y</sub> cm	εφφ	J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	J <sub>ξ</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>ξ</sub> cm	J <sub>n</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>n</sub> cm
8 130.65.10 12	130	65	8	15,1	11,9	4,56	1,37	0,263	263	31,1	4,17	44,8	8,72	1,72	280	4,31	28,6	1,38
10			18,6	14,6	4,65	1,45	0,259	321	38,4	4,15	54,2	10,7	1,71	340	4,27	35,0	1,37	
12			22,1	17,3	4,74	1,53	0,255	376	45,5	4,12	63,0	12,7	1,69	397	4,24	41,2	1,37	
8 130.75.10 12	130	75	8	15,9	12,5	4,36	1,65	0,339	276	31,9	4,17	68,3	11,7	2,08	303	4,37	41,3	1,61
10			19,6	15,4	4,45	1,73	0,336	337	39,4	4,14	82,9	14,4	2,06	369	4,34	50,6	1,61	
12			23,3	18,3	4,53	1,81	0,332	395	46,6	4,12	96,5	17,0	2,04	432	4,31	59,6	1,60	
10 130.90.12	130	90	10	21,2	16,6	4,15	2,18	0,472	358	40,5	4,11	141	20,6	2,58	420	4,46	78,5	1,93
12			25,1	19,7	4,24	2,26	0,468	420	48,0	4,09	165	24,4	2,56	492	4,43	92,6	1,92	
9 150.75.11	150	75	9	19,5	15,3	5,28	1,57	0,265	455	46,8	4,83	78,3	13,2	2,00	484	4,98	50,0	1,60
11			23,6	18,6	5,37	1,65	0,261	545	56,6	4,80	93,0	15,9	1,98	578	4,95	59,8	1,59	
10 150.90.12	150	90	10	23,2	18,2	4,99	2,03	0,360	532	53,1	4,79	145	20,9	2,51	5,89	5,05	88,0	1,95
12			27,5	21,6	5,08	2,11	0,358	626	63,1	4,77	170	24,7	2,49	6,39	5,02	103	1,94	
10 150.100.12 14	150	100	10	24,2	19,0	4,80	2,34	0,442	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	5,13	112	2,15
12			28,7	22,6	4,89	2,42	0,439	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	749	5,10	132	2,15	
14			33,2	26,1	4,97	2,50	0,435	744	74,1	4,73	264	35,2	2,82	856	5,07	152	2,14	
10 160.80.12 14	160	80	10	23,2	18,2	5,63	1,69	0,263	611	58,9	5,14	104	16,5	2,12	648	5,29	67,0	1,70
12			27,5	21,6	5,72	1,77	0,259	720	70,0	5,11	122	19,6	2,10	763	5,26	78,9	1,69	
14			31,8	25,0	5,81	1,85	0,256	823	80,7	5,09	139	22,5	2,09	871	5,23	90,5	1,69	
10 180.90.12 14	180	90	10	26,2	20,6	6,28	1,85	0,262	880	75,1	5,80	151	21,2	2,40	934	5,97	97,4	1,93
12			31,2	24,5	6,37	1,93	0,261	1040	89,3	5,77	177	25,1	2,38	1100	5,94	114	1,92	
14			36,1	28,3	6,46	2,01	0,259	1190	103	5,75	202	28,9	2,37	1260	5,92	131	1,91	
10 12 200.100.14 16	200	100	10	29,2	23,0	6,93	2,01	0,266	1220	93,2	6,46	210	26,3	2,68	1300	6,66	133	2,14
12			34,8	27,3	7,03	2,10	0,264	1440	111	6,43	247	31,3	2,67	1530	6,63	158	2,13	
14			40,3	31,6	7,12	2,18	0,262	1650	128	6,41	282	36,1	2,65	1760	6,60	181	2,12	
16			45,7	35,9	7,20	2,26	0,259	1860	145	6,38	316	40,8	2,63	1970	6,57	204	2,11	
10 12 250.90.14 16	250	90	10	33,2	26,1	9,45	1,56	0,154	2170	140	8,08	161	21,7	2,02	2220	8,17	112	1,84
12			39,6	31,1	9,55	1,65	0,153	2570	166	8,05	189	25,8	2,19	2630	8,14	132	1,83	
14			45,9	36,0	9,65	1,73	0,152	2960	192	8,03	216	29,7	2,17	3020	8,11	152	1,82	
16			52,1	40,9	9,74	1,81	0,150	3330	218	8,00	242	33,6	2,16	3400	8,08	171	1,81	

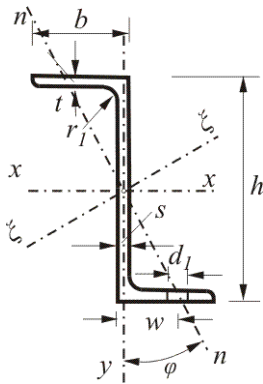


Δοκοί [ με στρογγυλεμένες ακμές  
κατά DIN 1026, Οκτώβριος 1963 (έλαση εν θερμώ)

**F** Εμβαδόν διατομής      **W** Ροπή αντίστασης  
**G** Βάρος                      **i** Ακτίνα αδράνειας  
**J** Ροπή αδράνειας

Κλίση: για  $h \leq 300$  : 8%  
για  $h > 300$  : 5%

Σύμβολο ο [	Διαστάσεις (mm)				F cm <sup>2</sup>	G Kg/m	x-x			y-y			e <sub>y</sub> cm
	h	b	s	t=r			J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	
30x15	30	15	4	4.5	2.21	1.74	2.53	1.69	1.07	0.38	0.39	0.42	0.52
30	30	33	5	7	5.44	4.27	6.39	4.26	1.08	5.33	2.68	0.99	1.31
40x20	40	20	5	5.5	3.66	2.87	7.58	3.79	1.44	1.14	0.86	0.56	0.67
40	40	35	5	7	6.21	4.87	14.1	7.05	1.50	6.68	3.08	1.04	1.33
50x25	50	25	5	6	4.92	3.86	16.8	6.73	1.85	2.49	1.48	0.71	0.81
50	50	38	5	7	7.12	5.59	26.4	10.6	1.92	9.12	3.75	1.13	1.37
60x30	60	30	6	6	6.46	5.07	31.6	10.5	2.21	4.51	2.16	0.84	0.91
65	65	42	5.5	7.5	9.03	7.09	57.5	17.7	2.52	14.1	5.07	1.25	1.42
80	80	45	6	8	11.0	8.64	106	26.5	3.10	19.4	6.36	1.33	1.45
<b>100</b>	100	50	6	8.5	13.5	10.6	206	41.2	3.91	29.3	8.49	1.47	1.55
120	120	55	7	9	17.0	13.4	364	60.7	4.62	43.2	11.1	1.59	1.60
140	140	60	7	10	20.4	16.0	605	86.4	5.45	62.7	14.8	1.75	1.75
160	160	65	7.5	10.5	24.0	18.8	925	116	6.21	85.3	18.3	1.89	1.84
180	180	70	8	11	28.0	22.0	1350	150	6.95	114	22.4	2.02	1.92
<b>200</b>	200	75	8.5	11.5	32.2	25.3	1910	191	7.70	148	27.0	2.14	2.01
220	220	80	9	12.5	37.4	29.4	2690	245	8.48	197	33.6	2.30	2.14
240	240	85	9.5	13	42.3	33.2	3600	300	9.22	248	39.6	2.42	2.23
260	260	90	10	14	48.3	37.9	4820	371	9.99	317	47.7	2.56	2.36
280	280	95	10	15	53.3	41.8	6280	448	10.9	399	57.2	2.74	2.53
<b>300</b>	300	100	10	16	58.8	46.2	8030	535	11.7	495	67.8	2.90	2.70
320	320	100	14	17.5	75.8	59.5	10870	679	12.1	597	80.6	2.81	2.60
350	350	100	14	16	77.3	60.6	12840	734	12.9	570	75.0	2.72	2.40
380	380	102	13.5	16	80.4	63.1	15760	829	14.0	615	78.7	2.77	2.38
<b>400</b>	400	110	14	18	91.5	71.8	20350	1020	14.9	846	102	3.04	2.65

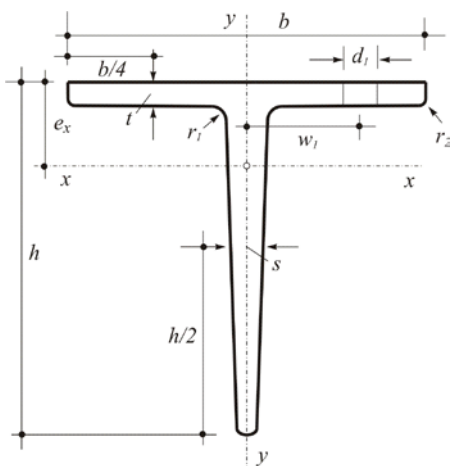


Δοκοί **Z** με στρογγυλεμένες ακμές  
κατά DIN 1027, Οκτ. 1963

**F** Εμβαδόν διατομής  
**G** Βάρος  
**J** Ροπή αδράνειας  
**W** Ροπή αντίστασης

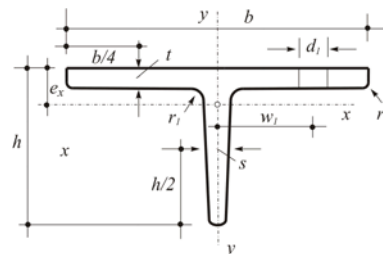
**i** Ακτίνα αδράνειας  
**J<sub>xy</sub>** Φυγόκεντρη ροπή αδράνειας  
Οπές πελμάτων κατά DIN 997  
Υλικό κατασκευής: Χάλυβες κατά DIN 17100

Σύμ- βολο	Διαστάσεις (mm)				F cm <sup>2</sup>	G Kg/m	Θέση άξονα η-η εφφ	x-x			y-y			ξ-ξ			η-η			J <sub>xy</sub> cm <sup>4</sup>	Οπές πέλμ (mm)	
	h	b	s	t=r <sub>1</sub>				J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	J <sub>ξ</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>ξ</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>ξ</sub> cm	J <sub>η</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>η</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>η</sub> cm		d <sub>1</sub>	w
30	30	38	4	4.5	4.32	3.99	1.655	5.96	3.97	1.17	13.7	3.80	1.78	18.1	4.69	2.04	1.54	1.11	0.60	7.35	11	20
40	40	40	4.5	5	5.34	4.26	1.181	13.5	6.95	1.58	17.6	4.66	1.80	28.0	6.72	2.27	3.05	1.83	0.75	12.2	11	22
50	50	43	5	5.5	6.77	5.31	0.939	26.3	10.5	1.97	23.8	5.88	1.88	44.9	9.76	2.57	5.23	2.76	0.88	19.6	11	25
60	60	45	5	6	7.91	5.21	0.779	44.7	14.9	2.38	30.1	7.09	1.95	67.2	13.5	2.81	7.60	3.73	0.98	28.8	13	25
80	80	50	6	7	11.1	8.71	0.588	109	27.3	3.13	47.4	10.1	2.07	142	24.4	3.58	14.7	6.44	1.15	55.6	13	30
<b>100</b>	100	55	6.5	8	14.4	11.4	0.492	222	44.4	3.91	72.5	14.0	2.24	270	39.8	4.31	24.6	9.26	1.30	97.2	17	30
120	120	60	7	9	18.2	14.3	0.433	402	67.0	4.70	106	18.8	2.42	470	60.6	5.00	37.7	12.5	1.44	158	17	35
140	140	65	8	10	22.9	18.0	0.385	676	96.6	5.43	148	24.3	2.54	768	880	5.79	56.4	16.6	1.57	239	21	35
160	160	70	8.5	11	27.5	21.6	0.357	1060	132	6.20	204	31.0	2.72	1180	121	6.57	79.5	21.4	1.70	349	21	40
180	180	75	9.5	12	33.3	26.1	0.329	1600	178	6.92	270	38.4	2.84	1760	164	7.26	110	27.0	1.82	490	23	40
<b>200</b>	200	80	10	13	38.7	30.4	0.313	2300	230	7.71	357	47.6	3.07	2510	213	8.06	147	33.4	1.95	674	23	45



Ελάσματα **T** με στρογγυλεμένες ακμές,  
κατά 1024, Οκτώβριος 1963

- F** Εμβαδόν διατομής
- B** Βάρος
- J** Ροπή αδράνειας
- W** Ροπή αντίστασης
- i** Ακτίνα αδράνειας



Σύμβολο	Διαστάσεις (mm)				F cm <sup>2</sup>	G Kg/m	e <sub>x</sub> cm	X-X			Y-Y			Οπές πελιμάτων mm DIN 997	
	h	b	s,t,r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>				J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	d <sub>1</sub>	W <sub>1</sub>
<b>T</b>	<b>Υ ψ ί κ ο ρ μ α</b>														
20	20	20	3	1,5	1,12	0,88	0,58	0,38	0,27	0,58	0,20	0,20	0,42	3,2	-
25	25	25	3,5	2	1,64	1,29	0,73	0,87	0,49	0,73	0,43	0,34	0,51	3,2	15
30	30	30	4	2	2,26	1,77	0,85	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62	4,3	17
35	35	35	4,5	2,5	2,97	2,33	0,99	3,10	1,23	1,04	1,57	0,90	0,73	4,3	19
40	40	40	5	2,5	3,77	2,96	1,12	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83	6,4	21
45	45	45	5,5	3	4,67	3,67	1,26	8,13	2,51	1,32	4,01	1,78	0,93	6,4	24
50	50	50	6	3	5,66	4,44	1,39	12,1	3,36	1,46	6,06	2,42	1,03	6,4	30
60	60	60	7	3,5	7,94	6,23	1,66	23,8	5,48	1,73	12,2	4,07	1,24	8,4	34
70	70	70	8	4	10,6	8,32	1,94	44,5	8,79	2,05	22,1	6,32	1,44	11	38
80	80	80	9	4,5	13,6	10,7	2,22	73,7	12,8	2,33	37,0	9,25	1,65	11	45
90	90	90	10	5	17,1	13,4	2,48	119	18,2	2,64	58,5	13,0	1,85	13	50
100	100	100	11	5,5	20,9	16,4	2,74	179	24,6	2,92	88,3	17,7	2,05	13	60
120	120	120	13	6,5	29,6	23,2	3,28	366	42,0	3,51	178	29,7	2,45	17	70
140	140	140	15	7,5	39,9	31,3	3,80	660	64,7	4,07	330	47,2	2,88	21	80
<b>TB</b>	<b>Π λ α τ ύ π ε λ μ α</b>														
30	30	60	5,5	3	4,64	3,64	0,67	2,58	1,11	0,75	8,62	2,87	1,36	8,4	34
35	35	70	6	3	5,94	4,66	0,77	4,49	1,65	0,87	15,1	4,31	1,59	11	37
40	40	80	7	3,5	7,91	6,21	0,88	7,81	2,5	0,99	28,5	7,13	1,9	11	45
50	50	100	8,5	4,5	12	9,42	1,09	18,7	4,78	1,25	67,7	13,5	2,38	13	55
60	60	120	10	5	17	13,4	1,30	38	8,09	1,49	13,7	22,8	2,84	17	65



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Μιχαήλ Κωβαίου**, Αντοχή των Υλικών, Αθήναι, 1964
2. **Βασιλείου Περγαντή**, Μηχανική ΙΙ (Αντοχή των Υλικών), Θεσ/νίκη, 1976
3. **Ιάκωβου Α. Αμίρ – Αλέξιου Κ. Αναστασιάδη**, Μηχανική ΙΙ (Αντοχή των Υλικών), Θεσ/νίκη, 1984
4. **Π. Σ. Θεοχάρη**, Στοιχεία Πειραματικής Αντοχής των Υλικών
5. **Γεωργίου Ρ. Γκρός**, Αντοχή Υλικών, Αθήνα, 1980
6. **Φιλοθέου Γ. Λόκκα**, Εργαστηριακά θέματα Αντοχής Υλικών
7. **Κωνστ. Γεωργικόπουλου**, Τεχνική Μηχανική Γ'. Αντοχή των Υλικών, Αθήναι, 1967
8. **Gere & Timoshenko**, Mechanics of Materials, Stanford University, Monterey, California
9. **William A. Nash**, Theory and Problems of Strength of Materials, Amherst, Massachusetts, 1972
10. **Harmer E. Davis – George Earl Troxel – Clement T. Wiskocil**, The testing and inspection of Engineering Materials, London, 1964
11. **V. Feodosiev**, Resistance des Materiaux, Moscow, 1976
12. **Σοφοκλή Ξυνή**, Πειραματική Αντοχή των Υλικών, Αθήναι, 1970
13. **Μιχαήλ Κωβαίου**, Προβλήματα Αντοχής των Υλικών, Αθήνα, 1969
14. **Π. Θεοχάρη**, Κεφάλαια εκ της πειραματικής αντοχής των υλικών
15. **Φιλοθέου Γ. Λόκκα**, Σημειώσεις υπολογισμών κατασκευών Ι, Λάρισα, 1977
16. **Γ. Μ. Ντσιώτα**, Εισαγωγή εις την Στατικήν, Θεσσαλονίκη, 1965
17. **Π. Α. Βουθούνη**, τεχνική μηχανική ANTOXH TΩN YΛIKΩN, Αθήνα, 2002.